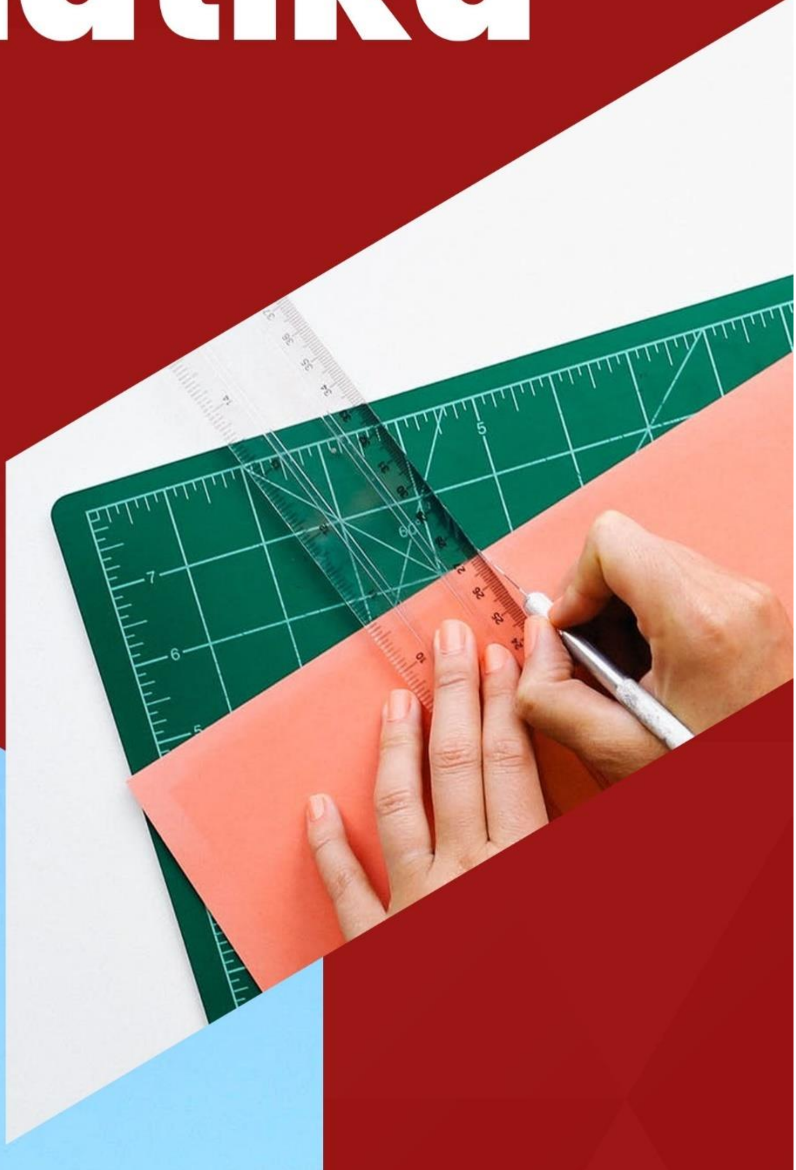
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS XII

JARAK DALAM RUANG BIDANG DATAR

MATEMATIKA UMUM KELAS XII

PENYUSUN
Asmar Achmad

SMA Negeri 17 Makassar

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

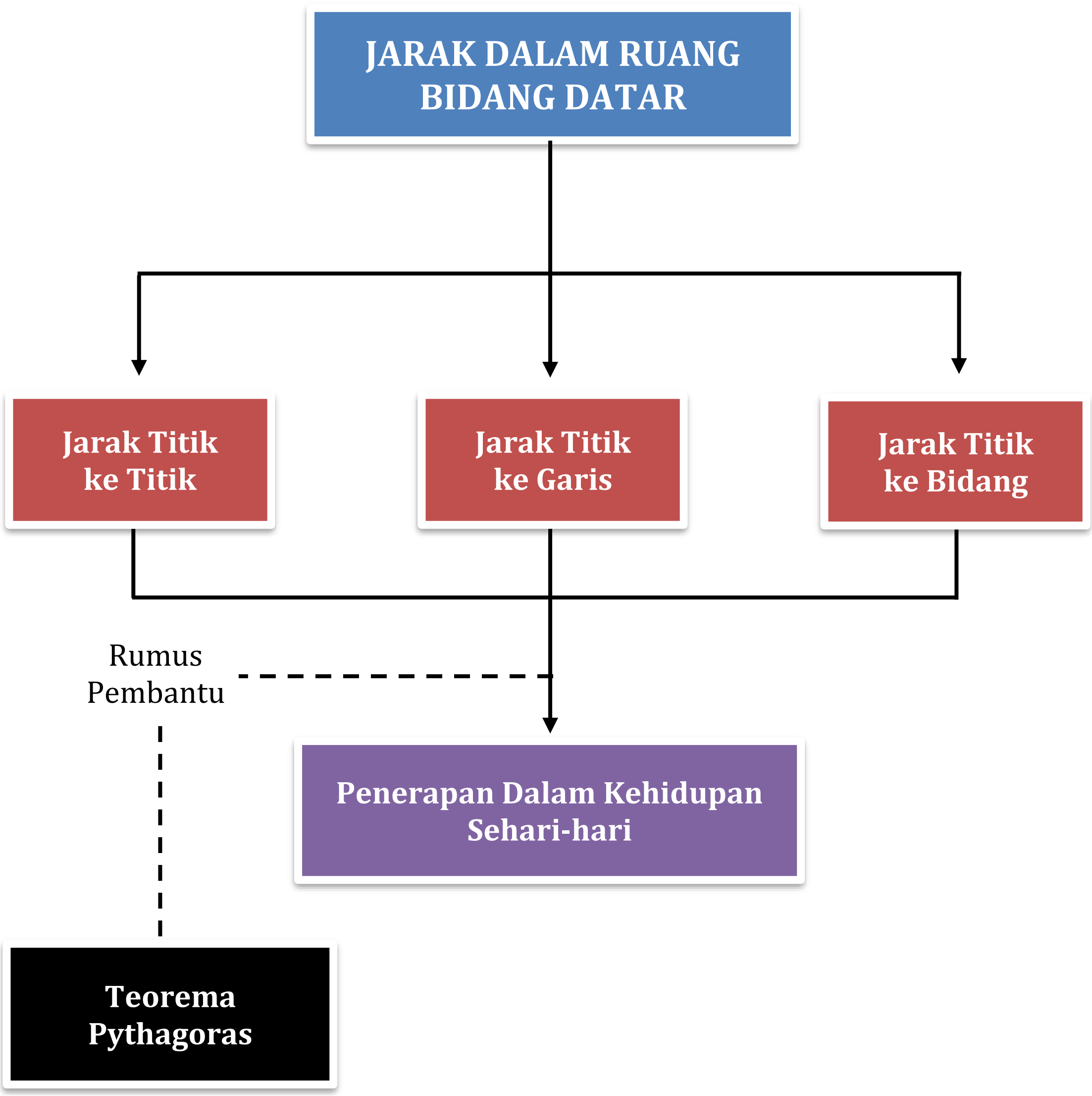
Jarak titik ke titik : Panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan titik-titik tersebut.

Jarak titik ke garis : Misal P adalah titik dan g adalah garis. Jarak titik P ke garis g adalah panjang ruas garis PQ dengan Q terletak di garis g, dan PQ tegak lurus garis g.

Jarak titik ke bidang : Misal P adalah titik dan α adalah bidang. Jarak antara P dengan bidang α adalah panjang ruas garis dari PQ, dengan Q di bidang α dan PQ tegak lurus bidang α.

Titik tengah ruas garis : Titik yang membagi ruas garis menjadi dua ruas garis yang kongruen (panjangnya sama besar).

PETA KONSEP


JARAK DALAM RUANG BIDANG DATAR
Jarak Titik ke Titik
Jarak Titik ke Garis
Jarak Titik ke Bidang
Rumus Pembantu
Penerapan Dalam Kehidupan Sehari-hari
Teorema Pythagoras

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	XII
Alokasi Waktu	:	8 JP (KP 1 = 4 JP, KP 2 = 2 JP, KP 3 = 2 JP)
Judul Modul	:	Jarak Dalam Ruang Bidang Datar

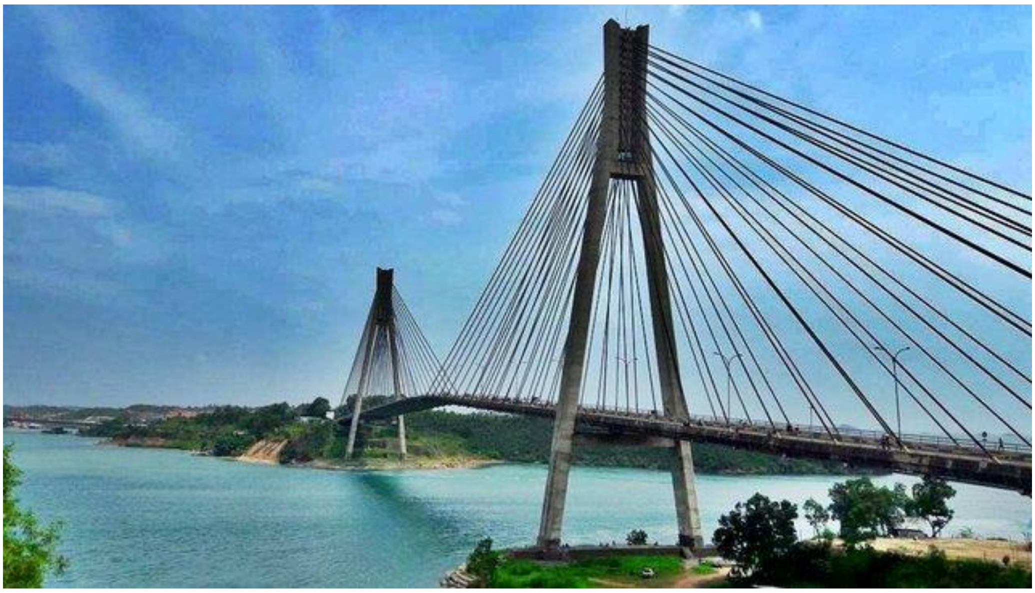
B. Kompetensi Dasar

3.1. Mendeskripsikan jarak dalam ruang (antar titik, titik ke garis, dan titik ke bidang).

4.1. Menentukan jarak dalam ruang (antar titik, titik ke garis, dan titik ke bidang).

C. Deskripsi Singkat Materi

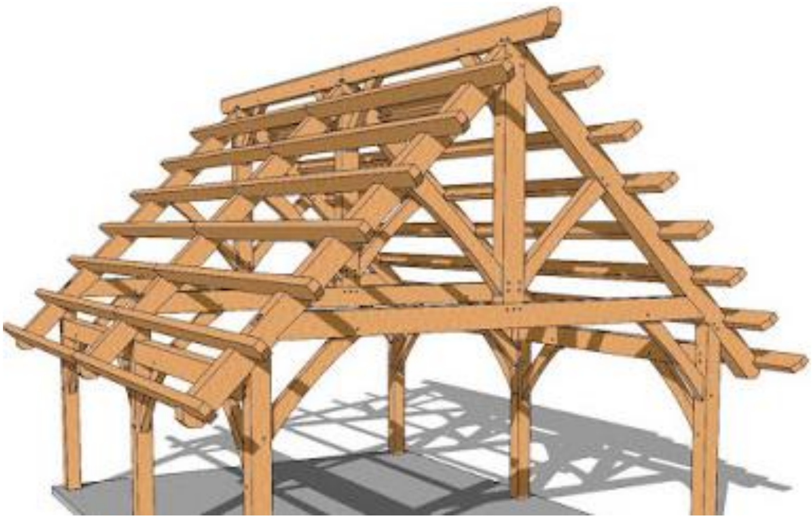
Dalam kehidupan sehari-hari, banyak kita temukan penerapan dari konsep jarak dalam ruang. Coba perhatikan gambar berikut.



Gambar 1. *Cable Stayed Bridge* (Jembatan Kabel Penahan/kabel tetap)
Sumber: https://steemit.com/travel/@naila/jembatan-barelan-batam-indonesia

Gambar di atas adalah gambar Jembatan Barelang yang menghubungkan antara Pulau Batam, Pulau Tonton, Pulau Nipah, Pulau Rempang, Pulau Galang dan Pulau Galang Baru. Dalam perencanaan pembangunannya tentunya diperlukan perhitungan panjang kabel penahan yang pada dasarnya merupakan jarak antar titik dalam ruang berdimensi tiga.

Contoh lain penerapan konsep jarak dalam ruang yang sangat dekat dengan kita adalah pembuatan kuda-kuda suatu rumah seperti gambar berikut.



Gambar 2. Kuda-kuda suatu rumah
Sumber: https://www.birodesainrumah.com/2019/04/memilih-material-untuk-rangka-atap.html

Tentunya kalian sering melihat bentuk kuda-kuda rumah seperti gambar di atas. Untuk menghemat biaya pembuatan rumah, salah satu aspek yang harus diperhatikan adalah biaya pembuatan kuda-kuda rumah. Penentuan Rincian Anggaran (RAB) pembuatan kuda-kuda dapat ditentukan dengan matematika. Untuk mendapatkan rincian biaya tersebut, salah satu konsep yang dapat digunakan adalah dimensi tiga. Konsep yang dimaksud jarak titik dengan titik atau titik dengan garis.

Nah, bagaimana cara menghitung panjang kabel yang diperlukan seperti pada pembuatan Jembatan Barelang atau panjang kayu yang diperlukan untuk membuat kuda-kuda untuk atap rumah? Untuk itu kita akan membahas pada modul ini materi jarak dalam ruang bidang datar yang terdiri atas jarak antara titik, jarak titik ke garis, dan jarak titik ke bidang.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.

8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **3** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Jarak Titik ke Titik

Kedua : Jarak Titik ke Garis

Ketiga : Jarak Titik ke Bidang

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
JARAK TITIK KE TITIK DALAM RUANG BIDANG DATAR

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat mendeskripsikan jarak antar titik dalam ruang, menjelaskan prosedur menentukan jarak titik ke titik, dan menentukan jarak titik ke titik dalam ruang bidang datar.

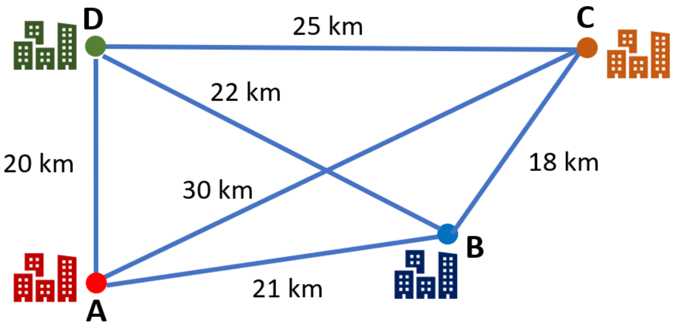
B. Uraian Materi

Konsep Jarak Titik ke Titik

Untuk memahami konsep jarak antara dua titik, mari kita perhatikan dua masalah berikut.

Masalah 1

Bangun berikut merepresentasikan kota-kota yang terhubung dengan jalan. Titik merepresentasikan kota dan ruas garis merepresentasikan jalan yang menghubungkan kota.



Gambar 3. Gambar Kota dan jalan yang menghubungkannya

Faisal berencana menuju kota C berangkat dari kota A. Tulis kemungkinan rute yang ditempuh Faisal dan tentukan panjang rute-rute tersebut. Rute manakah yang terpendek? Menurut pendapat kalian berapa jarak antara kota A dan C? Beri alasan untuk jawaban kalian.

Nah, untuk menjawab masalah di atas, kita akan membuat tabel kemungkinan rute yang bisa dilalui Faisal berikut ini.

No	Kemungkinan rute dari Kota A ke Kota C	Panjang Lintasan
1	$A \rightarrow C$	30
2	$A \rightarrow B \rightarrow C$	21 + 18 = 39
3	$A \rightarrow D \rightarrow C$	20 + 25 = 45
4	$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$	21 + 22 + 25 = 68
5	$A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$	20 + 22 + 18 = 60

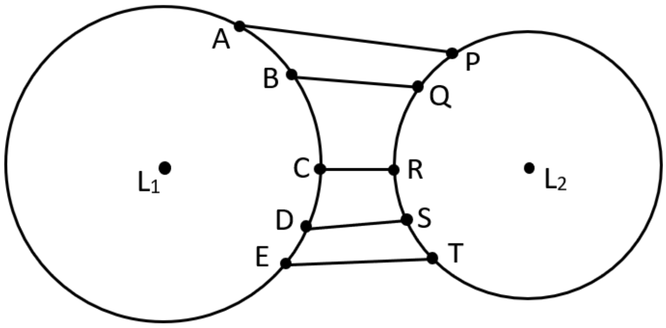
Tabel 1. Kemungkinan rute yang ditempuh Faisal

Dari tabel di atas tampak bahwa rute terpendek dari Kota A ke Kota C adalah rute yang pertama: $A \rightarrow C$ sepanjang 30 km.

Jadi, jarak antara kota A dan kota C adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan antara kota A dan C, yaitu rute A → C sepanjang 30 km.

Masalah 2

Diketahui dua lingkaran seperti pada gambar berikut. Titik A, B, C, D, dan E terletak pada lingkaran L_1 dan titik P, Q, R, S, dan T terletak pada lingkaran L_2. Ruas garis manakah yang mewakili jarak antara kedua lingkaran tersebut?



Gambar 4. Jarak dua titik pada lingkaran

Nah, untuk menjawab pertanyaan di atas perlu kalian ketahui bahwa dalam geometri, jarak dua bangun didefinisikan sebagai panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan dua titik pada bangun-bangun tersebut. Coba kalian perhatikan ruas garis-ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran L_1 dan L_2, manakah ruas garis terpendek? Jika CR adalah ruas garis terpendek di antara semua ruas garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran tersebut, maka ruas garis CR disebut jarak antara lingkaran L_1 dan lingkaran L_2.

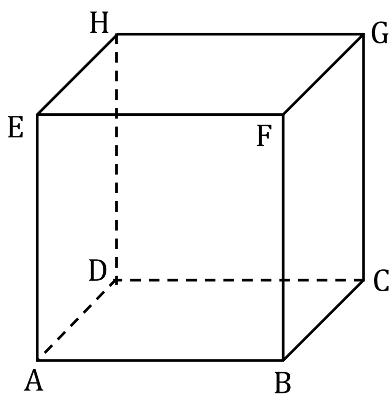
Nah, dari dua masalah di atas kita dapat menyimpulkan **jarak antara dua titik** seperti berikut ini.

"Jarak titik ke titik adalah panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan titik-titik tersebut."

Contoh 1.

Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 20 cm. Hitunglah jarak antara titik-titik berikut.

a. B ke F
b. A ke D
c. G ke H
d. A ke C
e. H ke B
f. G ke titik tengah AB



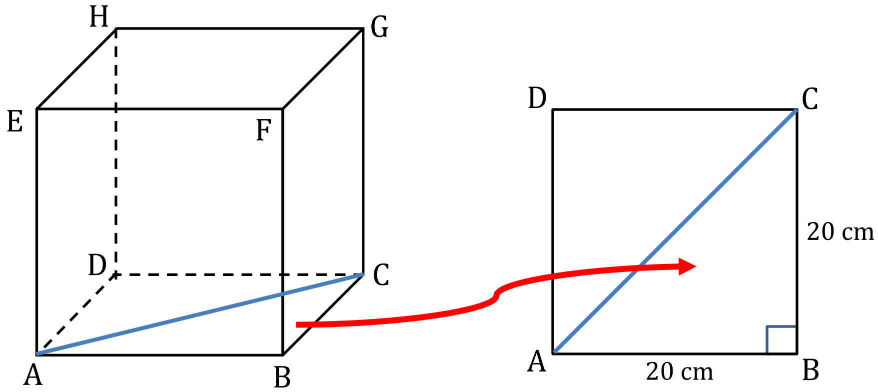
Jawab:

a. Jarak titik B ke F diwakili oleh panjang ruas garis (rusuk) BF. Jadi, jarak titik B ke F adalah 20 cm.

b. Jarak titik A ke D diwakili oleh panjang ruas garis (rusuk) AD. Jadi, jarak titik A ke D adalah 20 cm.

c. Jarak titik G ke H diwakili oleh panjang ruas garis (rusuk) GH. Jadi, jarak titik G ke H adalah 20 cm.

d. Jarak titik A ke C diwakili oleh panjang ruas garis AC. Ruas garis AC merupakan diagonal bidang alas ABCD.

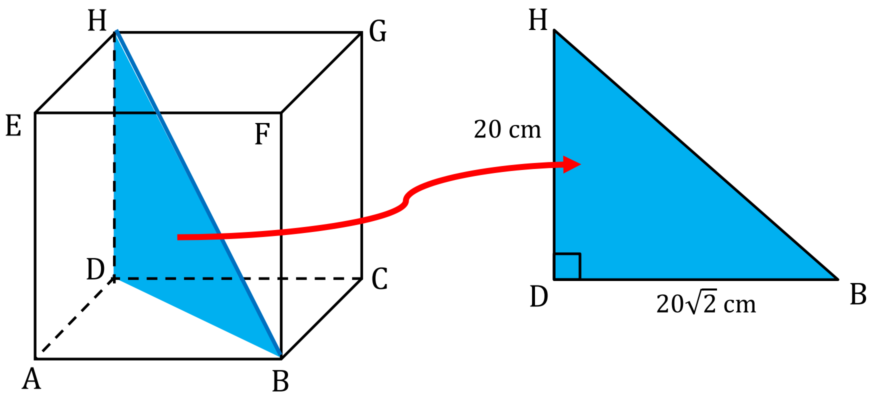


Dari gambar di atas, kita perhatikan bahwa segitiga ABC adalah segitiga siku-siku di B. Berdasarkan Teorema Pythagoras diperoleh hubungan:

$$
\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2 + BC^2 && \text{(Teorema Pythagoras)} \\
&= 20^2 + 20^2 && \text{(panjang AB = BC = 20 cm)} \\
&= 400 + 400 \\
&= 400 \times 2 \\
AC &= \sqrt{400 \ \times 2} = 20\sqrt{2} && (\sqrt{400 \ \times 2} = \sqrt{400} \times \sqrt{2} = 20\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

Jadi, jarak titik A ke C adalah $20\sqrt{2}$ cm.

e. Jarak titik H ke B diwakili oleh panjang ruas garis HB. Ruas garis HB merupakan diagonal ruang kubus ABCD.EFGH.



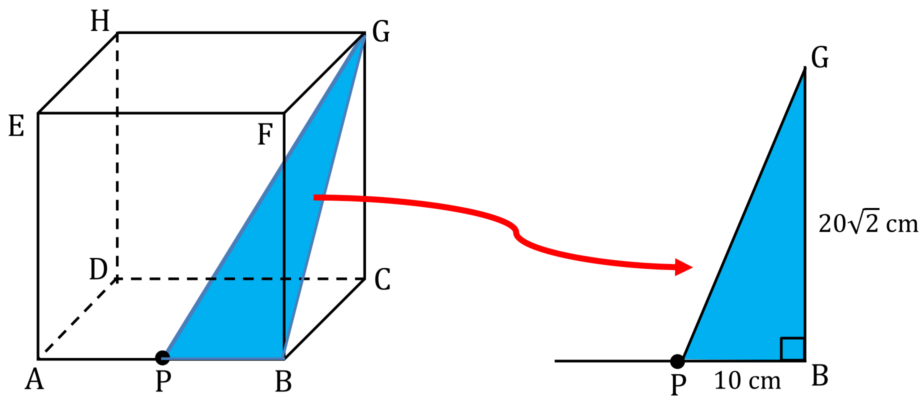
Dari gambar di atas, kita perhatikan bahwa segitiga BDH adalah segitiga siku-siku di D. Ruas garis BD adalah diagonal bidang alas ABCD, sehingga BD = AC = $20\sqrt{2}$ cm (hasil perhitungan pada bagian d).

Perhatikan segitiga BDH, berdasarkan Teorema Pythagoras diperoleh hubungan:

$HB^2 = BD^2 + DH^2$ (Teorema Pythagoras)
$= (20\sqrt{2})^2 + 20^2$ (panjang BD = $20\sqrt{2}$ cm dan rusuk DH = 20 cm)
$= 800 + 400$
$= 1200 = 400 \times 3$
$HB = \sqrt{400 \times 3} = 20\sqrt{3}$

Jadi, jarak titik H ke B adalah $20\sqrt{3}$ cm.

f. Misalkan P adalah titik tengah AB. Jarak titik G ke titik tengah AB diwakili oleh panjang ruas garis GP seperti ditunjukkan pada gambar berikut.



Dari gambar di atas, kita perhatikan bahwa segitiga BGP adalah segitiga siku-siku di B. Ruas garis BG adalah diagonal bidang alas BCGF, sehingga BG = $20\sqrt{2}$ cm (panjang BG = AC = BD, semuanya adalah diagonal bidang kubus ABCD.EFGH).

Perhatikan segitiga BGP, berdasarkan Teorema Pythagoras diperoleh hubungan:

$GP^2 = BG^2 + BP^2$ (Teorema Pythagoras)
$= (20\sqrt{2})^2 + 10^2$ (panjang BD = $20\sqrt{2}$ cm dan rusuk DH = 20 cm)
$= 800 + 100$
$= 900$
$GP = \sqrt{900} = 30$

Jadi, jarak titik G ke P titik tengah AB adalah 30 cm.

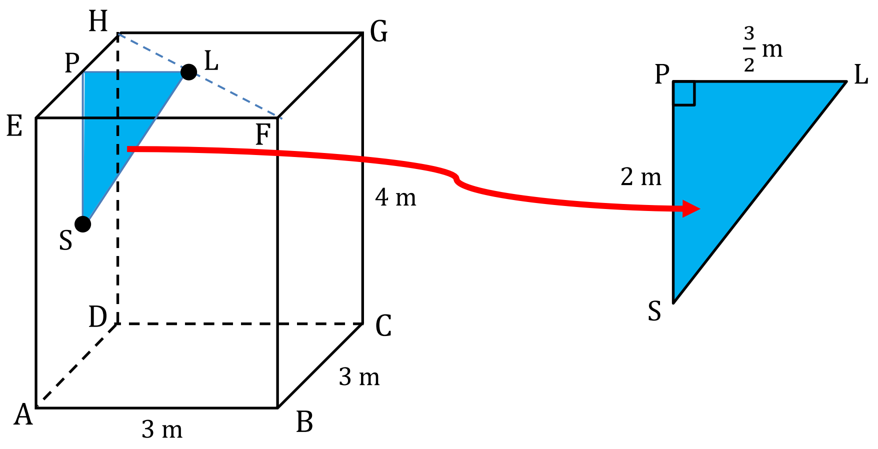
Contoh 2.

Andi mempunyai kamar tidur yang berukuran 3m × 3m × 4m. Tepat di tengah plafon kamar Andi dipasang lampu. Jika saklar lampu diletakkan tepat di tengah salah satu dinding kamar, berapakah jarak dari lampu ke saklar?

Jawab:

Kamar Andi berukuran 3m × 3m × 4m, berarti panjang kamar 3 m, lebar 3 m, dan tinggi 4 m.

Jarak antara lampu dan saklar dapat diilustrasikan seperti gambar berikut.



Misalkan lampu (L), saklar (S) berada di dinding ADHE, dan P adalah titik tengah EH. Jarak antara lampu dan saklar adalah LS.

Panjang ruas garis PS = $\frac{1}{2}$ AE = $\frac{1}{2}$ (4 m) = 2 m.

Panjang ruas garis PL = $\frac{1}{2}$ EF = $\frac{1}{2}$ (3 m) = $\frac{3}{2}$ m

Perhatikan segitiga LPS siku-siku di P, berdasarkan Teorema Pythagoras diperoleh hubungan:

$LS^2 = LP^2 + PS^2$ (Teorema Pythagoras)

$= (\frac{3}{2})^2 + 2^2$ (panjang LP = $\frac{3}{2}$ cm dan rusuk PS = 2 cm)

$= \frac{9}{4} + 4 = \frac{9}{4} + \frac{16}{4}$

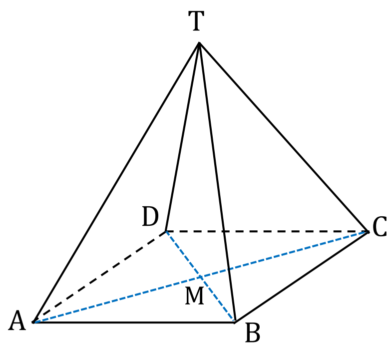
$= \frac{25}{4}$

$LS = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Jadi, Panjang kabel terpendek yang diperlukan Andi untuk menghubungkan lampu dan saklar adalah 2,5 meter.

Contoh 3

Diketahui limas T.ABCD seperti pada gambar di samping. ABCD merupakan persegi dengan panjang rusuk 6 cm. TA = TB = TC = TD = 5 cm dan M adalah titik tengah AC. Hitung jarak antara titik T dan titik M.



Jawab:

Perhatikan segitiga ABC, siku-siku di B, berarti:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (Teorema Pythagoras)

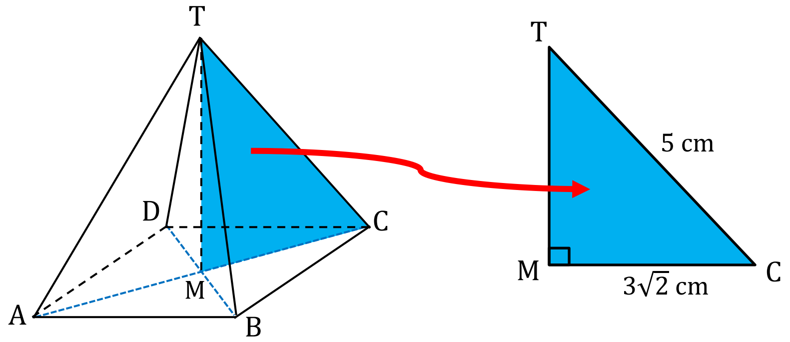
$= 6^2 + 6^2$ (panjang AB = BC = 6 cm)

$= 36 + 36$

$= 36 \times 2$

$AC = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$

Titik M adalah titik tengah AC, sehingga AM = CM = $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}\left(6\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}$ cm.



Perhatikan segitiga CMT, siku-siku di M, berarti:

$$
\begin{aligned}
TC^2 &= CM^2 + TM^2 && \text{(Teorema Pythagoras)}\\
TM^2 &= TC^2 - CM^2 \\
&= 5^2 - (3\sqrt{2})^2 && \text{(panjang TC = 5 cm dan CM = } 3\sqrt{2}\text{ cm)}\\
&= 25 - 18 \\
&= 7 \\
TM &= \sqrt{7}
\end{aligned}
$$

Jadi, jarak antara titik T dan titik M adalah $\sqrt{7}$ cm yang merupakan tinggi dari limas T.ABCD.

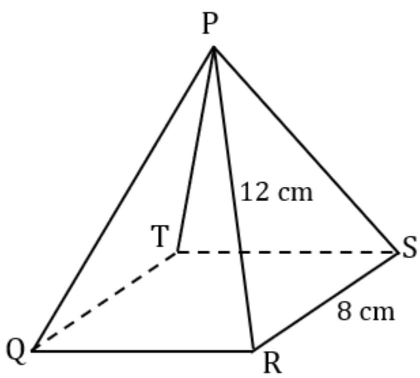
C. Rangkuman

- Jarak titik ke titik adalah panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan titik-titik tersebut.
- Dalam geometri, jarak dua bangun didefinisikan sebagai panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan dua titik pada bangun-bangun tersebut.

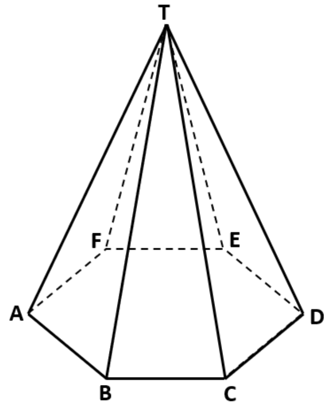
D. Latihan Soal

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 8 cm. Hitunglah jarak antar titik-titik berikut.
   a. titik A dan G
   b. titik D dan F
   c. titik B dan titik tengah garis EG
   d. titik E dan titik tengah garis BG

2. Diketahui limas beraturan P.QRST dengan panjang RS = 8 cm dan PR = 12 cm, seperti pada gambar. Dengan menggunakan Teorema Pythagoras, hitung jarak antar titik berikut.
   a. titik P dan titik tengah RS
   b. titik P dan titik perpotongan QS dan RT

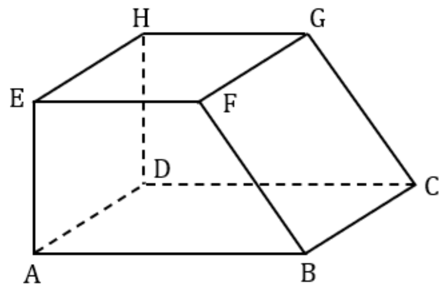


3. Diketahui limas beraturan T.ABC dengan bidang alas berbentuk segitiga sama sisi. TA tegak lurus dengan bidang alas. Jika panjang AB = $4\sqrt{2}$ cm dan TA = 4 cm, tentukan jarak antara titik T dan C.
4. Perhatikan limas segi enam beraturan berikut. Diketahui panjang AB = 10 cm dan TA = 13 cm. Titik O merupakan titik tengah garis BE. Tentukan jarak antara titik T dan titik O.



5. Perhatikan bangun berikut ini.

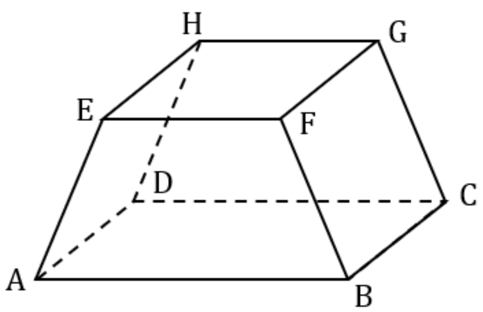
   Jika diketahui panjang AB = 5 cm, AE = BC = EF = 4 cm, maka tentukan:
   a. Jarak antara titik A dan C
   b. Jarak antara titik E dan C
   c. Jarak antara titik A dan G



6. Diketahui balok ABCD.EFGH dengan panjang rusuk AB = 8 cm, BC = 6 cm, dan AE = 9 cm. Titik M merupakan titik potong antara diagonal AC dan BD. Rusuk CG diperpanjang 3 cm, kemudian dari titik M ditarik garis miring sehingga memotong perpanjangan rusuk CG di titik N. Hitung panjang ruas garis MN yang terjadi dan buat sketsa permasalahan tersebut.

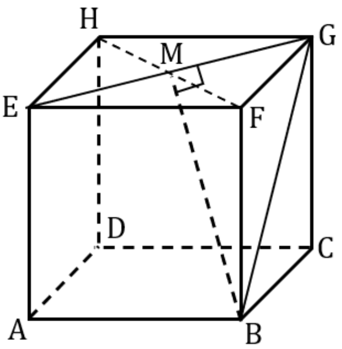
7. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm. Titik P, Q, dan R berturut-turut terletak pada pertengahan garis AB, BC, dan bidang ADHE. Tentukan jarak antar titik berikut.
   a. titik P ke titik R
   b. titik Q ke titik R

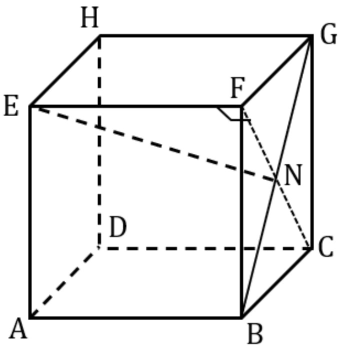
8. Pada gambar di bawah menunjukkan piramida terpotong ABCD.EFGH tegak beraturan dengan ABCD dan EFGH merupakan persegi yang saling sejajar dengan AB = 12 cm, EF = 8 cm, dan AE = BF = CG = DH = 10 cm. Hitung jarak antar titik.
   a. E dan G
   b. A dan C
   c. titik potong diagonal HF dan EG dengan titik potong AC dan BD.



PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 8 cm. Hitunglah jarak antar titik-titik berikut.





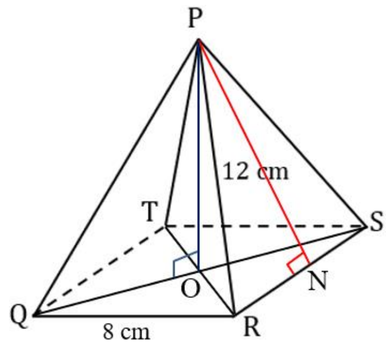
   a. Jarak titik A ke G adalah panjang diagonal ruang AG = $8\sqrt{3}$ cm.

   b. Jarak titik D ke F adalah panjang diagonal ruang DF = $8\sqrt{3}$ cm.

   c. Misalkan M adalah titik tengah EG. Jarak titik B dan titik tengah garis EG adalah panjang ruas garis BM.
   BG adalah diagonal bidang, sehingga BG = $8\sqrt{2}$ cm
   EG adalah diagonal bidang, sehingga EG = $8\sqrt{2}$ cm dan GM = ½ EG = $4\sqrt{2}$ cm
   Perhatikan Δ BMG siku-siku di M, sehingga diperoleh:
   $BM^2 = BG^2 - GM^2$
   $$BM = \sqrt{BG^2 - GM^2} = \sqrt{\left(8\sqrt{2}\right)^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2}$$
   $$= \sqrt{128 - 32} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$
   Jadi, jarak titik B dan titik tengah garis EG adalah BM = $4\sqrt{6}$ cm.

   d. Misalkan N adalah titik tengah EG. Jarak titik E dan titik tengah garis BG adalah panjang ruas garis EN.
   BG adalah diagonal bidang, sehingga BG = $8\sqrt{2}$ cm
   CF adalah diagonal bidang, sehingga CF = $8\sqrt{2}$ cm dan FN = ½ CF = $4\sqrt{2}$ cm
   Perhatikan Δ EFN siku-siku di F, sehingga diperoleh:
   $EN^2 = EF^2 - FN^2$
   $$EN = \sqrt{EF^2 - FN^2} = \sqrt{8^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2}$$
   $$= \sqrt{64 - 32} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$
   Jadi, jarak titik E dan titik tengah garis BG adalah EN = $4\sqrt{2}$ cm.

2. Diketahui limas beraturan P.QRST dengan panjang RS = 8 cm dan PR = 12 cm.



   a. Jarak titik P ke titik tengah RS adalah panjang ruas garis PN.
   Perhatikan ΔPNR siku-siku di N
   NR = ½ RS = ½ (8) = 4 cm
   PR = 12 cm
   Dengan Teorema Pythagoras diperoleh:

   $PN^2 = PR^2 - NR^2$
   $PN = \sqrt{PR^2 - NR^2} = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$
   Jarak titik P ke titik tengah RS adalah $8\sqrt{2}$ cm.

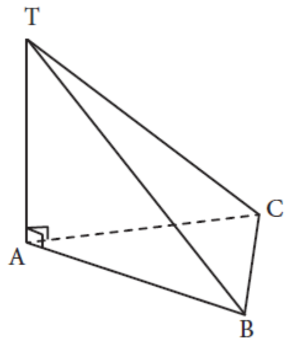
b. titik P ke titik perpotongan QS dan RT
Jarak titik P ke titik perpotongan QS dan RT adalah panjang ruas garis PO.
Perhatikan ΔPOQ siku-siku di O
QS adalah diagonal bidang alas persegi dengan rusuk 8 cm, sehingga QS = $8\sqrt{2}$ cm.
QO = ½ QS = ½($8\sqrt{2}$) = $4\sqrt{2}$ cm.
PQ = 12 cm
Dengan Teorema Pythagoras diperoleh:

$PO^2 = PQ^2 - QO^2$

$PO = \sqrt{PQ^2 - QO^2} = \sqrt{12^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{144 - 32} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$

Jarak titik P ke titik perpotongan QS dan RT adalah $4\sqrt{7}$ cm.

3. Diketahui limas beraturan T.ABC dengan bidang alas berbentuk segitiga sama sisi. TA tegak lurus dengan bidang alas. Jika panjang AB = $4\sqrt{2}$ cm dan TA = 4 cm, tentukan jarak antara titik T dan C.



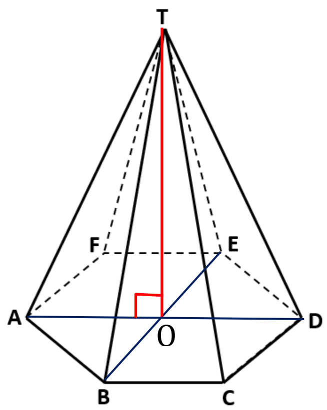
Alternatif Penyelesaian:

$TA \perp AC$, sehingga
$TC^2 = AC^2 + TA^2$

$TC = \sqrt{AC^2 + TA^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + 4^2}$
$= \sqrt{32 + 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

Jadi, titik T ke titik C adalah $4\sqrt{3}$ cm.

4. Perhatikan limas segi enam beraturan berikut.
Diketahui panjang AB = 10 cm dan TA = 13 cm. Titik O merupakan titik tengah garis BE. Tentukan jarak antara titik T dan titik O.



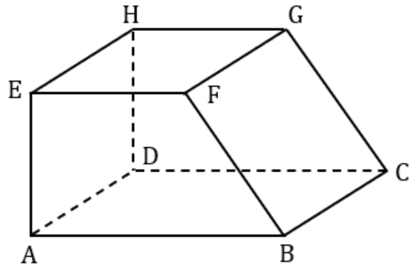
Alternatif Penyelesaian:

Bidang alas merupakan segi enam beraturan dengan, berarti segitiga AOB adalah segitiga sama sisi, sehingga:
OA = AB = 10 cm
Perhatikan ΔTOA siku-siku di O, dengan Teorema Pythagoras diperoleh

$TO^2 = TA^2 - OA^2$
$TO = \sqrt{TA^2 - OA^2} = \sqrt{13^2 - 10^2}$
$= \sqrt{169 - 100} = \sqrt{69}$

Jadi, titik T ke titik O adalah $\sqrt{69}$ cm.

5. Perhatikan bangun berikut ini.



Jika diketahui panjang AB = 5 cm, AE = BC = EF = 4 cm, maka tentukan:
a. Jarak antara titik A dan C
b. Jarak antara titik E dan C
c. Jarak antara titik A dan G

Alternatif Penyelesaian:

a. $AC = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$ cm.

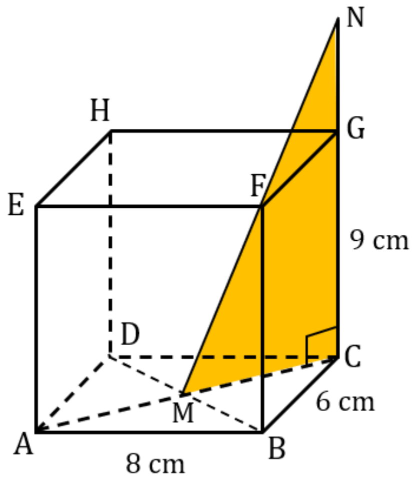
b. $EC = \sqrt{\mathrm{AE}^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{41})^2} = \sqrt{16 + 41} = \sqrt{57}$ cm.

c. $AG = \sqrt{\mathrm{AH}^2 + HG^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{32 + 16} = \sqrt{48}$ cm.

6. Diketahui balok ABCD.EFGH dengan panjang rusuk AB = 8 cm, BC = 6 cm, dan AE = 9 cm. Titik M merupakan titik potong antara diagonal AC dan BD. Rusuk CG diperpanjang 3 cm, kemudian dari titik M ditarik garis miring sehingga memotong perpanjangan rusuk CG di titik N. Hitung panjang ruas garis MN yang terjadi dan buat sketsa permasalahan tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

Perhatikan sketsa permasalahan pada gambar.



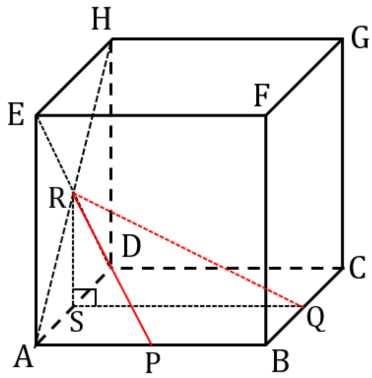
Perhatikan Δ ABC siku-siku di B, diperoleh:
$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$
$= 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$
$AC = \sqrt{100} = 10$
dan MC = AM = ½ AC = 5 cm

$CN = CG + GN \Rightarrow CN = 9 + 3 = 12$ cm

Perhatikan Δ MCB siku-siku di C, berarti
$(MN)^2 = (MC)^2 + (CN)^2$
$= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$
$MN = \sqrt{169} = 13$
Jadi, panjang ruas garis MN adalah 13 cm.

7. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm. Titik P, Q, dan R berturut-turut terletak pada pertengahan garis AB, BC, dan bidang ADHE. Tentukan jarak antar titik berikut.
a. titik P ke titik R
b. titik Q ke titik R

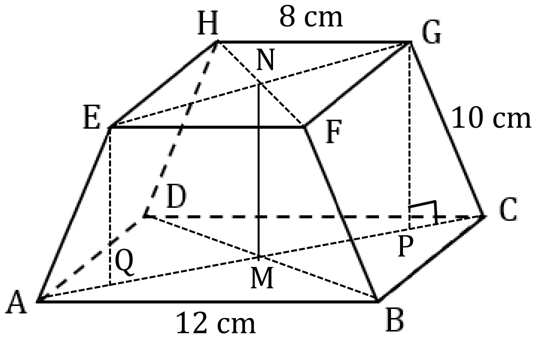
Alternatif Penyelesaian:



a. Δ PAR siku-siku di A dan AP = ½ AB = 3 cm
dan $AR = \frac{1}{2}\mathrm{AH} = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{AD}^2 + \mathrm{DH}^2}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 6^2} = \frac{1}{2}\sqrt{72} = 3\sqrt{2}$ cm.
Sehingga:
$\mathrm{PR} = \sqrt{\mathrm{AP}^2 + \mathrm{AR}^2} = \sqrt{3^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2}$
$= \sqrt{9 + 18} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
Jadi, titik P ke titik R adalah $3\sqrt{3}$ cm.

b. Δ QRS siku-siku di S dengan QS = AB = 6 cm,
dan RS = ½ AE = ½(6) = 3 cm, sehingga diperoleh
QR = $\sqrt{QS^2 + RS^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
Jadi, jarak titik Q ke titik R adalah $3\sqrt{5}$ cm.

8. Pada gambar di bawah menunjukkan piramida terpotong ABCD.EFGH tegak beraturan dengan ABCD dan EFGH merupakan persegi yang saling sejajar dengan AB = 12 cm, EF = 8 cm, dan AE = BF = CG = DH = 10 cm. Hitung jarak antar titik.
   a. E dan G
   b. A dan C
   c. titik potong diagonal HF dan EG dengan titik potong AC dan BD.



Alternatif Penyelesaian:

a. Jarak titik E ke G adalah panjang diagonal bidang atas EFGH, sehingga panjang EG = $8\sqrt{2}$ cm.
b. Jarak titik A ke C adalah panjang diagonal bidang alas ABCD, sehingga panjang AC = $12\sqrt{2}$ cm.
c. Jarak titik potong diagonal HF dan EG dengan titik potong AC dan BD adalah jarak titik M ke titik N.
   Jarak M ke N atau MN = PG
   Perhatikan gambar, CP = AQ dan CP + AQ = AC – EG $= 12\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm.
   Sehingga CP = $\frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$ cm.
   Perhatikan Δ CPG siku-siku di P, sehingga dengan Teorema Pythagoras diperoleh

$$PG^2 = CG^2 - CP^2$$

$$PG = \sqrt{CG^2 - CP^2} = \sqrt{10^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{100 - 8} = \sqrt{92} = 2\sqrt{23}$$

   Jadi, Jarak titik potong diagonal HF dan EG dengan titik potong AC dan BD adalah MN = PG = $2\sqrt{23}$ cm

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu yang dimaksud ruang bidang datar?	◯	◯
2	Apakah Anda tahu Teorema Pythagoras dan penggunaannya?	◯	◯
3	Apakah Anda dapat menggambar bangun ruang bidang datar seperti kubus, balok, limas, dan prisma?	◯	◯
4	Apakah Anda dapat membedakan rusuk, diagonal bidang, dan diagonal ruang?	◯	◯
5	Apakah Anda tahu prosedur menentukan jarak antar dua titik?	◯	◯
6	Apakah Anda dapat menentukan jarak antar dua titik pada ruang bidang datar?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
JARAK TITIK KE GARIS DALAM RUANG BIDANG DATAR

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan kalian dapat mendeskripsikan jarak titik ke garis dalam ruang, menjelaskan prosedur menentukan jarak titik ke garis, dan menentukan jarak titik ke garis dalam ruang bidang datar.

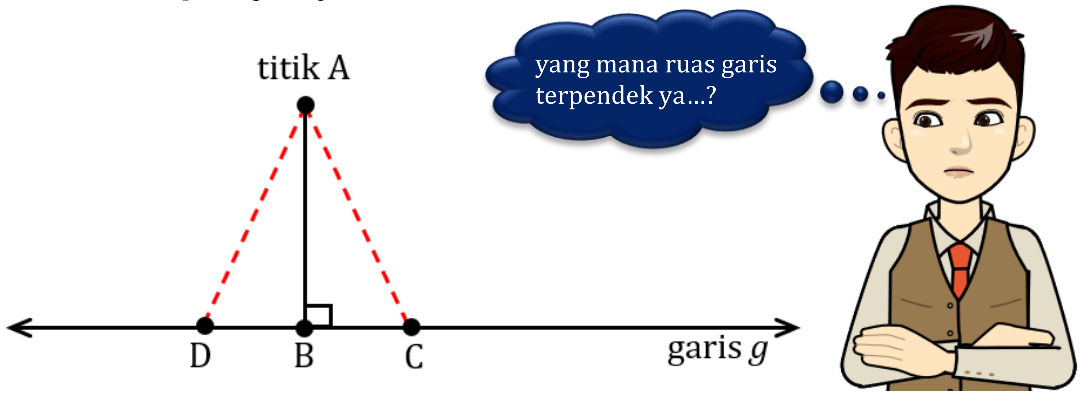
B. Uraian Materi

Konsep Jarak Titik ke Garis

Mari Mengamati

Pada gambar di bawah, titik A terletak di luar garis g. Bagaimana menentukan jarak antara titik A dan garis g?
Coba kalian ingat kembali materi jarak titik ke titik pada Kegiatan Pembelajaran 1, yaitu **jarak titik ke titik** adalah panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan titik-titik tersebut.

Nah, jika kita ingin mencari jarak antara titik A ke garis g, maka kita perlu membuat sebuah titik yang terletak di garis g, lalu menarik sebuah **ruas garis terpendek** dari titik A ke titik pada garis g tersebut.



Manakah ruas garis terpendek? Tentunya ruas garis terpendek adalah ruas garis AB yang tegak lurus (membentuk sudut siku-siku) dengan garis g. Mengapa demikian?

Coba kalian perhatikan ruas garis AB dan AC. Terlihat bahwa ABC membentuk segitiga siku-siku di B dengan AC merupakan sisi miring. Nah, tentunya kalian masih ingat bahwa sisi miring merupakan sisi terpanjang pada sebuah segitiga siku-siku. Ini berarti bahwa ruas garis AB lebih pendek dari AC.

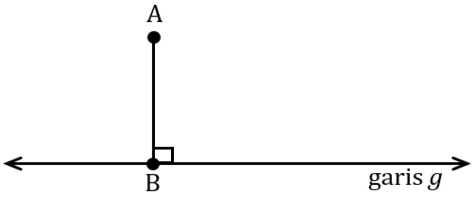
Demikian halnya jika kita membuat ruas garis lainnya dari A ke garis g, misalnya AD. Tentunya akan terbentuk segitiga ABD siku-siku di B dengan AD merupakan sisi miring. Berarti AD pun lebih panjang dari AB, dan demikian seterusnya.

Jadi, ruas garis terpendek adalah ruas garis AB. Dengan demikian dapat kita simpulkan bahwa **jarak titik A ke garis g adalah panjang ruas garis AB, yaitu ruas garis tegak lurus antar titik A ke garis g**.

Dalam hal ini, titik B biasa disebut sebagai proyeksi titik A terhadap garis g.

Pengertian Jarak Titik ke Garis

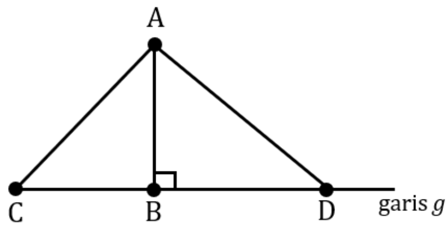
"Misal A adalah titik dan g adalah garis. Jarak titik A ke garis g adalah panjang ruas garis AB dengan B terletak di garis g, dan AB tegak lurus garis g".



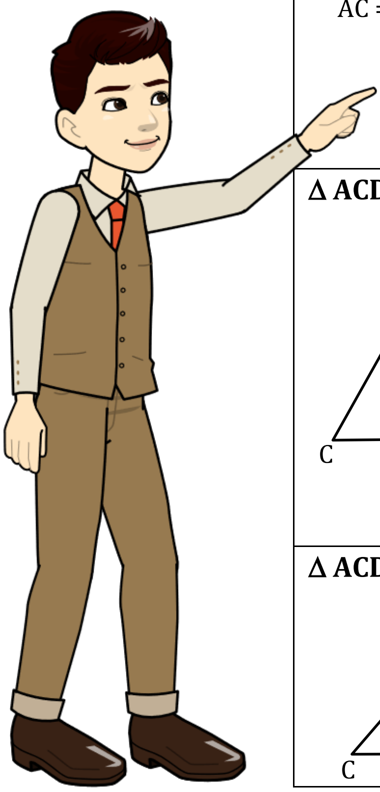
Prosedur Menghitung Jarak Titik ke Garis

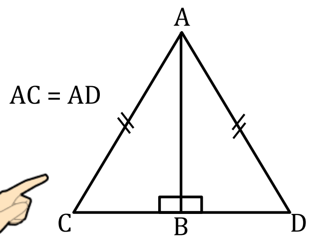
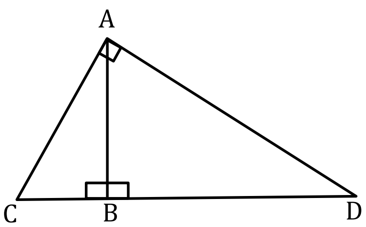
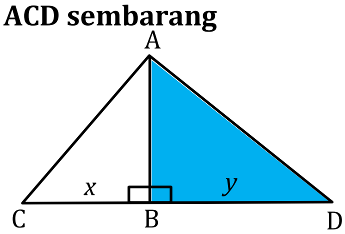
Langkah-langkah untuk menghitung jarak titik A ke garis g sebagai berikut.

a. Hubungkan titik A ke titik C dan titik D sehingga terbentuk segitiga ACD.
b. Hitung jarak antar dua titik, yaitu AC, AD, dan CD untuk menetapkan jenis segitiga.
c. Hitung tinggi segitiga ACD, yaitu AB yang merupakan jarak titik A ke garis g.



Dari langkah-langkah di atas, ada 3 jenis segitiga ACD yang mungkin terbentuk. Berikut ini cara menghitung panjang ruas garis AB atau jarak titik A ke garis g.



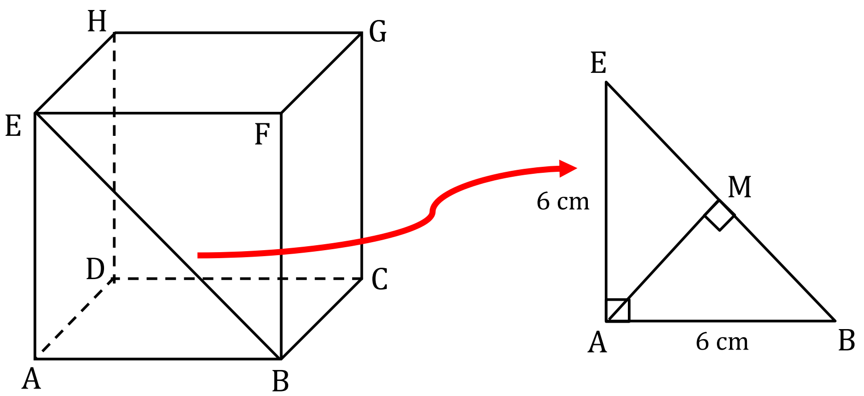
Δ ACD sama kaki 	Δ ACD sama kaki, sehingga $BC = BD = \frac{1}{2}CD$ Dengan Teorema Pythagoras diperoleh: $AB^2 = AD^2 - \left(\frac{1}{2}CD\right)^2$ atau $AB^2 = AD^2 - BD^2$ atau $AB^2 = AD^2 - BC^2$
Δ ACD siku-siku di A 	Gunakan rumus luas Δ ACD Luas Δ ACD = $\frac{1}{2} \times CD \times AB$ atau Luas Δ ACD = $\frac{1}{2} \times AC \times AD$ Sehingga diperoleh: $\frac{1}{2} \times CD \times AB = \frac{1}{2} \times AC \times AD$ $CD \times AB = AC \times AD$ $AB = \dfrac{AC \times AD}{CD}$
Δ ACD sembarang 	$x + y = AB \rightarrow y = AB - x$ Rumus yang dipakai: $AB^2 = AD^2 - y^2$ atau $AB^2 = AC^2 - x^2$

Contoh 1.

Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm. Berapakah jarak titik A ke diagonal bidang BE?

Jawab:

Perhatikan gambar.
Jika titik B dan E dihubungkan dengan ruas garis, maka diperoleh,



Jarak titik A ke bidang diagonal BE adalah panjang ruas garis AM dengan BM = $\frac{1}{2}$BE, karena segitiga ABE merupakan segitiga sama kaki (AB = AE).
Dengan menggunakan Teorema Pythagoras diperoleh,

$$AM^2 = AB^2 - BM^2$$

Terlebih dulu ditentukan panjang BE. Dengan menggunakan Teorema Pythagoras diperoleh,

$$\begin{aligned} BE^2 &= AB^2 + AE^2 \\ &= 6^2 + 6^2 \\ &= 6^2 \times 2 \\ BE &= \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

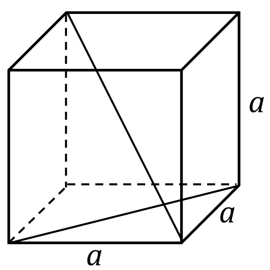
Sehingga panjang BM = $\frac{1}{2}$BE $= \frac{1}{2}\left(6\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}$.

Dengan demikian diperoleh,

$$\begin{aligned} AM^2 &= AB^2 - BM^2 \\ &= 6^2 - (3\sqrt{2})^2 \\ &= 36 + 18 \\ &= 54 \\ AM &= \sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

Jadi, jarak titik A ke diagonal bidang BE adalah $3\sqrt{6}$ cm.

Catatan:



Pada kubus dengan panjang rusuk a, maka:

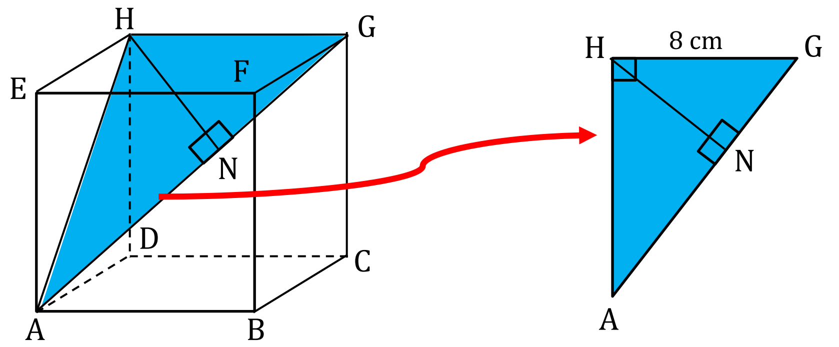
- Panjang diagonal bidang adalah $a\sqrt{2}$.
- Panjang diagonal ruang adalah $a\sqrt{3}$.

Contoh 2.

Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 8 cm. Hitunglah jarak titik H ke garis AG.

Jawab:

Perhatikan gambar. Titik N terletak pada garis AG, dan ruas garis HN tegak lurus garis AG.



Pada gambar di atas terlihat Δ AHG siku-siku di H dan garis tinggi HN.
Berdasarkan Teorema Pythagoras, AH merupakan diagonal bidang kubus berarti AH = $8\sqrt{2}$ cm dan AG merupakan diagonal ruang kubus, berarti AG = $8\sqrt{3}$ cm.

Kita akan menghitung luas Δ AHG dalam dua sudut pandang, yaitu

$$\text{Luas } \Delta \text{ AHG} = \frac{1}{2} \times \text{AH} \times \text{GH} \quad \text{atau} \quad \text{Luas } \Delta \text{ AHG} = \frac{1}{2} \times \text{AG} \times \text{HN}$$

Sehingga diperoleh,

$$\cancel{\frac{1}{2}} \times \text{AH} \times \text{GH} = \cancel{\frac{1}{2}} \times \text{AG} \times \text{HN}$$

$$8\sqrt{2} \times 8 = 8\sqrt{3} \times \text{HN}$$

$$\text{HN} = \frac{8\sqrt{2} \times 8}{8\sqrt{3}}$$

$$\text{HN} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Rasionalkan penyebut

$$\text{HN} = \frac{8}{3}\sqrt{6}$$

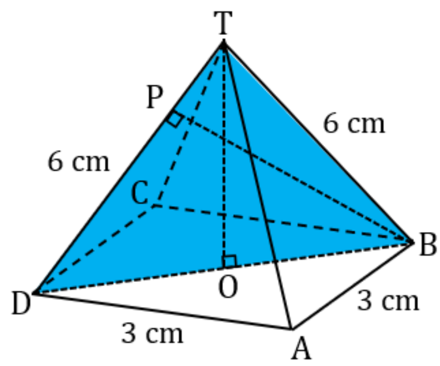
Jadi, jarak titik H ke garis AG adalah $\frac{8}{3}\sqrt{6}$ cm.

Contoh 3.

Diketahui limas beraturan T.ABCD, panjang rusuk AB = 3 cm dan TA = 6 cm. Tentukan jarak titik B ke rusuk TD.

Jawab:

Misal P proyeksi titik B ke ruas garis TD.
Jarak titik B ke rusuk TD adalah BP.



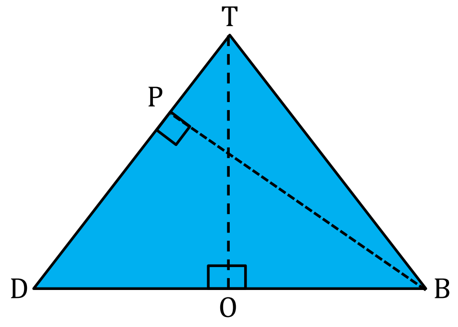
Perhatikan bidang alas ABCD dengan panjang rusuk 3 cm. Dengan Teorema Pythagoras diperoleh

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 \\ &= 3^2 + 3^2 \\ &= 3^2 \times 2 \\ BD &= \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Panjang OB = OD = $\frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ cm.

Dengan Teorema Pythagoras, tinggi limas TO adalah

$$\begin{aligned} TO^2 &= TB^2 - OB^2 \\ &= 6^2 - \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 36 - \frac{9}{2} = \frac{63}{2} \\ TO &= \sqrt{\frac{63}{2}} = \sqrt{\frac{9 \times 7}{2} \times \frac{2}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{14} \end{aligned}$$



Perhatikan segitiga TBD.
Kita akan menghitung luas Δ TBD dalam dua sudut pandang, yaitu

$$\text{Luas } \Delta\, TBD = \frac{1}{2} \times BD \times TO \;\; \text{atau} \;\; \text{Luas } \Delta\, TBD = \frac{1}{2} \times TD \times BP$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \cancel{\tfrac{1}{2}} \times BD \times TO &= \cancel{\tfrac{1}{2}} \times TD \times BP \\ BP &= \frac{BD \times TO}{TD} \\ BP &= \frac{3\sqrt{2} \times \frac{3}{2}\sqrt{14}}{6} \\ BP &= \frac{\frac{9}{2}\sqrt{28}}{6} = \frac{\frac{9}{2}\sqrt{4 \times 7}}{6} = \frac{9\sqrt{7}}{6} = \frac{3}{2}\sqrt{7} \end{aligned}$$

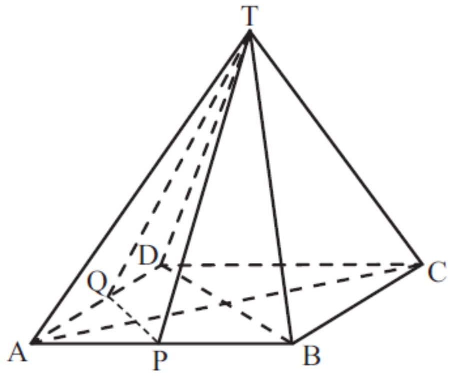
Jadi, jarak titik B ke rusuk TD adalah $\frac{3}{2}\sqrt{7}$ cm.

C. Rangkuman

- Misal A adalah titik dan g adalah garis. Jarak titik A ke garis g adalah panjang ruas garis AB dengan B terletak di garis g, dan AB tegak lurus garis g. Titik B disebut pula proyeksi titik A terhadap garis g.
- Jarak titik A ke garis g merupakan panjang garis tinggi yang melalui titik A pada segitiga ABC dimana titik B dan C terletak pada garis g.
- Teorema Pythagoras dan rumus luas segitiga sangat penting untuk menghitung jarak suatu titik ke garis dalam ruang bidang datar.

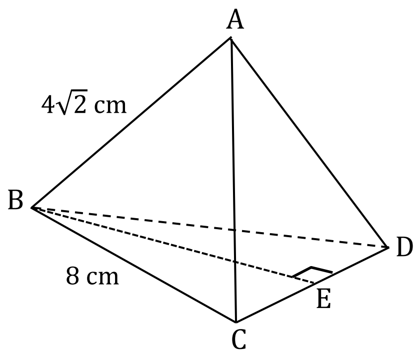
D. Latihan Soal

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 12 cm. Titik T merupakan titik tengah CG. Hitung jarak titik T ke garis HB.
2. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 10 cm. Hitung jarak titik H ke garis AC.
3. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm. Titik T adalah titik tengah CG. Hitung jarak titik E ke garis BT.
4. Diketahui limas segiempat beraturan T.ABCD dengan AB = BC = $5\sqrt{2}$ cm dan TA = 13 cm. Hitung jarak titik A ke garis TC.
5. Diketahui limas segi enam beraturan T.ABCDEF dengan panjang rusuk AB = 10 cm dan AT =13 cm. Tentukan jarak antara titik B dan rusuk TE.
6. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 8 cm. Titik M adalah titik tengah BC. Tentukan jarak M ke EG
7. Perhatikan limas segi empat beraturan berikut.



Titik P dan Q berturut-turut adalah titik tengah rusuk AB dan AD. Jika panjang AB = TA = 12 cm, tentukan jarak antara titik T dan garis PQ.

8. Perhatikan gambar limas segitiga beraturan berikut.



Titik E merupakan titik tengah rusuk CD. Panjang BC = 8 cm dan AB = $4\sqrt{2}$ cm. Hitung jarak titik A ke garis BE.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 12 cm. Titik T merupakan titik tengah CG. Hitung jarak titik T ke garis HB.

Alternatif Penyelesaian:

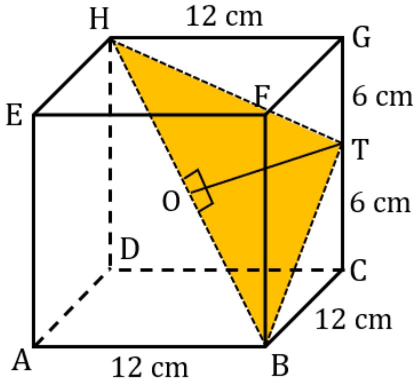
Perhatikan gambar, BT = TH, sehingga Δ BTH adalah segitiga sama kaki.

$TB^2 = BC^2 + TC^2 = 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180$

$TB = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ cm

HB adalah diagonal ruang, sehingga HB $= 12\sqrt{3}$ cm.

Karena Δ BTH, maka $OB = OH = \frac{1}{2}HB = \frac{1}{2}(12\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$ cm.



Perhatikan Δ BTH, jarak titik T ke garis HB adalah panjang ruas garis OT.

Dengan Teorema Pythagoras diperoleh:

$(OT)^2 = (TB)^2 - (OB)^2$

$$OT = \sqrt{TB^2 - OB^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{5}\right)^2 - \left(6\sqrt{3}\right)^2}$$

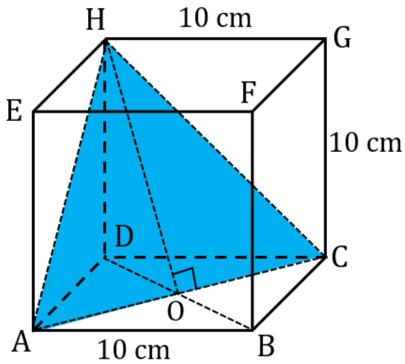
$$= \sqrt{180 - 108} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Jadi, titik T ke garis HB adalah $6\sqrt{2}$ cm.

2. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 10 cm. Hitung jarak titik H ke garis AC.

Alternatif Penyelesaian:

Perhatikan Δ ACH, AC, AH, dan CH merupakan diagonal bidang kubus, berarti Δ ACH adalah segitiga sama sisi.
$AC = AH = CH = 10\sqrt{2}$ cm.



Dengan demikian, jarak titik H ke garis AC merupakan garis tinggi dari Δ ACH, yaitu OH.

$OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(10\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}$ cm.

Δ AOH siku-siku di O, dengan Teorema Pythagoras diperoleh:

$(OH)^2 = (AH)^2 - (OA)^2$

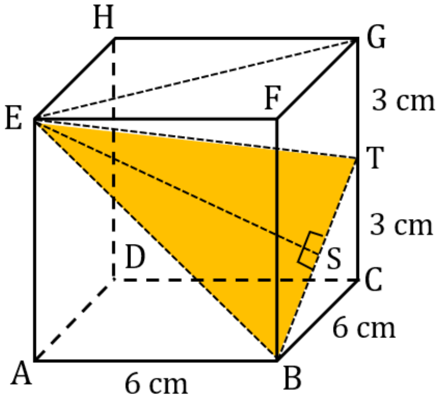
$$OH = \sqrt{AH^2 - OA^2} = \sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{200 - 50} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$$

Jadi, jarak titik H ke garis AC adalah $5\sqrt{6}$ cm.

3. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm. Titik T adalah titik tengah CG. Hitung jarak titik E ke garis BT.

Alternatif Penyelesaian:



Perhatikan ∆ BCT siku-siku di C, sehingga:
$(BT)^2 = (BC)^2 + (CT)^2$

$$BT = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Perhatikan ∆ EGT siku-siku di G, sehingga:
$(ET)^2 = (EG)^2 + (GT)^2$

$$ET = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{72+9} = \sqrt{81} = 9$$

Panjang BE = $6\sqrt{2}$, karena BE adalah diagonal bidang kubus.

Perhatikan ∆ EBT di samping. ∆ EBT merupakan segitiga sembarang.

Berdasarkan Teorema Pythagoras pada ∆ ESB diperoleh:

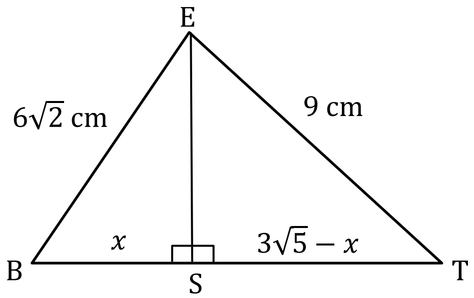
$(ES)^2 = (EB)^2 - (BS)^2$

$(ES)^2 = (6\sqrt{2})^2 - x^2$

Berdasarkan Teorema Pythagoras pada ∆ EST diperoleh:

$(ES)^2 = (ET)^2 - (TS)^2$

$(ES)^2 = 9^2 - (3\sqrt{5} - x)^2$



Sehingga diperoleh:

$$\left(6\sqrt{2}\right)^2 - x^2 = 9^2 - \left(3\sqrt{5} - x\right)^2$$
$$72 - x^2 = 81 - (45 - 6x\sqrt{5} + x^2)$$
$$72 = 81 - 45 + 6x\sqrt{5}$$
$$72 = 36 + 6x\sqrt{5}$$
$$x = \frac{36}{6\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$$

Substitusikan nilai x ke ekspresi $(ES)^2 = (6\sqrt{2})^2 - x^2$, diperoleh:

$(ES)^2 = (6\sqrt{2})^2 - (\frac{6}{5}\sqrt{5})^2$

$(ES)^2 = 72 - \frac{36}{5} = \frac{324}{5}$

$$ES = \sqrt{\frac{324}{5}} = \frac{18}{\sqrt{5}} = \frac{18}{5}\sqrt{5}$$

Jadi, jarak titik E ke BT adalah $\frac{18}{5}\sqrt{5}$ cm.

4. Diketahui limas segiempat beraturan T.ABCD dengan AB = BC = $5\sqrt{2}$ cm dan TA = 13 cm. Hitung jarak titik A ke garis TC.

Alternatif Penyelesaian:

Misal P proyeksi titik A ke ruas garis TC.
Jarak titik A ke rusuk TC adalah AP.
AC diagonal bidang alas, AC = $5\sqrt{2}.\left(\sqrt{2}\right) = 10$

$$OA = OC = \frac{1}{2}.AC = \frac{1}{2}.(10) = 5$$

$$TO = \sqrt{TC^2 - OC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2}$$

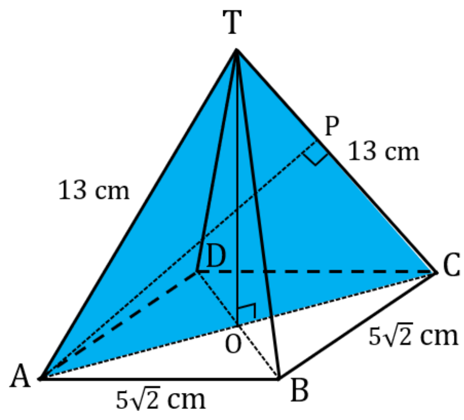
$= \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

Luas Δ TBC dapat dihitung dengan dua sudut pandang, yaitu:

$\frac{1}{2} \times AC \times TO = \frac{1}{2} \times TC \times AP$

$AP = \frac{AC \times TO}{TC} = \frac{10 \times 12}{13} = \frac{120}{13}$

Jadi, jarak titik A ke garis TC adalah $\frac{120}{13}$ cm.



5. Diketahui limas segi enam beraturan T.ABCDEF dengan panjang rusuk AB = 10 cm dan AT =13 cm. Tentukan jarak antara titik B dan rusuk TE.

Alternatif Penyelesaian:

Alas limas berbentuk segi enam beraturan, berarti OE = OB = AB = 10 cm

Misal jarak titik B ke rusuk TE adalah panjang ruas garis BP.

$TO = \sqrt{TE^2 - OE^2} = \sqrt{13^2 - 10^2}$

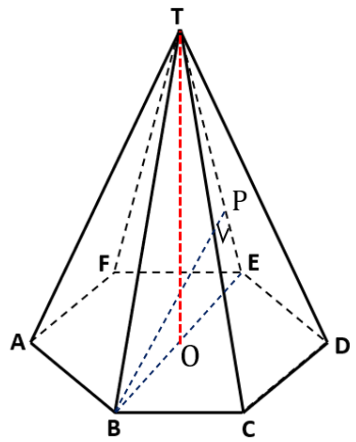
$= \sqrt{169 - 100} = \sqrt{69}$

Luas Δ TEB = Luas Δ TBE

$\frac{1}{2} \times BE \times TO = \frac{1}{2} \times TE \times BP$

$BP = \frac{BE \times TO}{TE} = \frac{20 \times \sqrt{69}}{13} = \frac{20\sqrt{69}}{13}$

Jadi, jarak titik B ke rusuk TE adalah $\frac{20\sqrt{69}}{13}$ cm.



6. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 8 cm. Titik M adalah titik tengah BC. Tentukan jarak M ke EG

Alternatif Penyelesaian:

Misal jarak M ke ruas garis EG adalah PM

Perhatikan segitiga BOC dan MNC, segitiga tersebut sebangun, sehingga

$\frac{MN}{MC} = \frac{BO}{BC} \rightarrow MN = \frac{BO}{BC} . MC = \frac{4\sqrt{2}}{8} . 4 = 2\sqrt{2}$

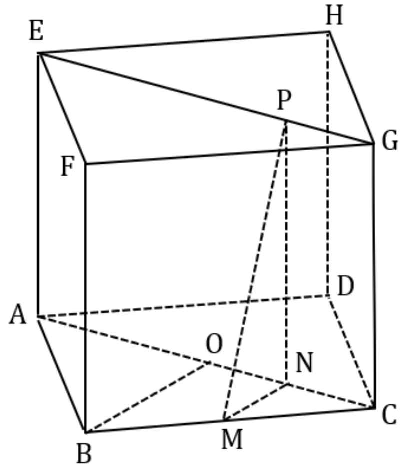
$PM = \sqrt{PN^2 + MN^2}$

$= \sqrt{8^2 + (2\sqrt{2})^2}$

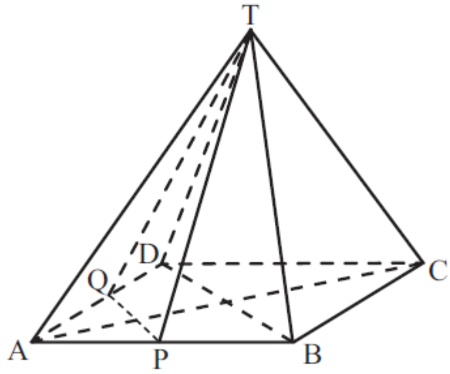
$= \sqrt{64 + 8}$

$= \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

Jadi, jarak M ke EG adalah $6\sqrt{2}$ cm.



7. Perhatikan limas segi empat beraturan berikut.



Titik P dan Q berturut-turut adalah titik tengah rusuk AB dan AD. Jika panjang AB = TA = 12 cm, tentukan jarak antara titik T dan garis PQ.

Alternatif Penyelesaian:

$\mathrm{TP} = \sqrt{\mathrm{TB}^2 - \mathrm{PB}^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ cm.

Misal S adalah titik tengah QP. Jarak titik T dan garis PQ adalah TS.

BD diagonal bidang, BD = $12\sqrt{2}$ cm

Δ APQ dan Δ ABD sebangun , sehingga diperoleh:

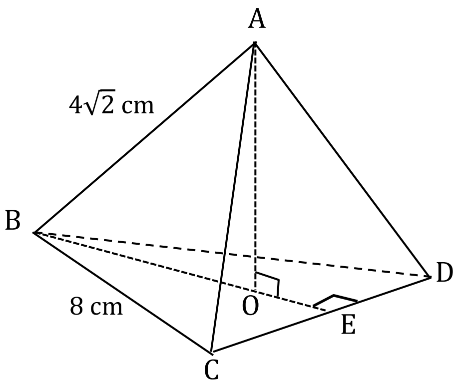
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BD}} \rightarrow \mathrm{PQ} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}} \times \mathrm{BD} = \frac{6}{12} \times 12\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\mathrm{PS} = \frac{1}{2}\mathrm{PQ} = \frac{1}{2}\left(6\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

$$\mathrm{TS} = \sqrt{\mathrm{TP}^2 - \mathrm{PS}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{108}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{108 - 18} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

Jadi, jarak antara titik T dan garis PQ adalah $3\sqrt{10}$ cm.

8. Perhatikan gambar limas segitiga beraturan berikut.



Titik E merupakan titik tengah rusuk CD. Panjang BC = 8 cm dan AB = $4\sqrt{2}$ cm. Hitung jarak titik A ke garis BE.

Alternatif Penyelesaian:

O adalah titik berat Δ BCD. Proyeksi titik A pada bidang BCD adalah titik O.
Perhatikan Δ BCE.

$$BE = \sqrt{(BC)^2 - (CE)^2} = \sqrt{12^2 - 6^2}$$
$$= \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

$$BO = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}(6\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

Perhatikan Δ ABO

$$AO = \sqrt{(AB)^2 - (BO)^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{3})^2}$$
$$= \sqrt{72 - 48} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Jadi, titik A ke garis BE adalah AO = $2\sqrt{6}$ cm.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda dapat membedakan jenis segitiga?	◯	◯
2	Apakah Anda tahu cara menghitung luas segitiga?	◯	◯
3	Apakah Anda dapat menggambar bangun ruang bidang datar seperti kubus, balok, limas, dan prisma?	◯	◯
4	Apakah Anda dapat membedakan rusuk, diagonal bidang, dan diagonal ruang?	◯	◯
5	Apakah Anda tahu prosedur menentukan jarak titik ke garis?	◯	◯
6	Apakah Anda dapat menentukan jarak titik ke garis pada ruang bidang datar?	◯	◯
	JUMLAH		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
JARAK TITIK KE BIDANG PADA RUANG BIDANG DATAR

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan kalian dapat mendeskripsikan jarak titik ke bidang dalam ruang, menjelaskan prosedur menentukan jarak titik ke bidang, dan menentukan jarak titik ke bidang dalam ruang bidang datar.

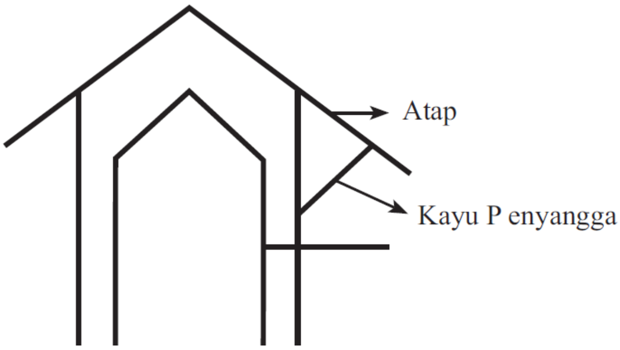
B. Uraian Materi

Konsep Jarak Titik ke Bidang

Mari Mengamati

Tiang penyangga dibuat untuk menyangga atap suatu gedung. Tiang penyangga ini menghubungkan suatu titik pada salah satu sisi gedung dan suatu titik pada bidang atap seperti ditunjukkan pada Gambar 1.

Gambar 1. Tiang Penyangga Atap bangunan
Sumber: https://idea.grid.id/read/09691558/batu-alam-mencerahkan-tampilan-fasad



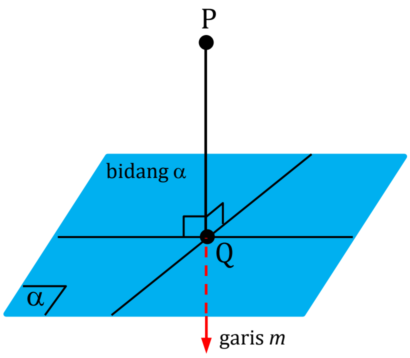
Gambar 2. Tampak Samping Tiang Penyangga Atap Bangunan

Apabila dibuat gambar tampak samping diperoleh seperti pada Gambar 2.
Dari Gambar 2, cermati gambar kayu penyangga dan atap. Dapatkah Anda menentukan kondisi atau syarat agar panjang kayu penyangga seminimal mungkin?

Ayo Mengamati

Perhatikan gambar di samping.
Titik P terletak di luar bidang α.
Jarak titik P ke bidang α merupakan panjang ruas garis tegak lurus yang menghubungkan titik P ke titik tembus pada bidang α.

Panjang ruas garis PQ = jarak titik P ke bidang α.

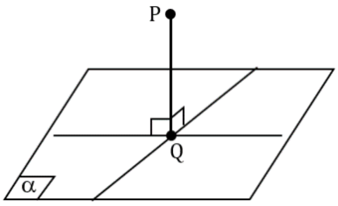


Langkah-langkah menentukan jarak titik P ke bidang α sebagai berikut:

1. Dari titik P, tarik garis m yang tegak lurus terhadap bidang α . Ingat garis m tegak lurus bidang α apabila garis m sedikitnya tegak lurus terhadap dua garis yang berpotongan pada bidang α.
2. Tentukan titik tembus garis m terhadap bidang α . Misalkan titik tembus ini adalah titik Q, jarak titik P ke bidang α adalah panjang ruas garis PQ.

Pengertian Jarak Titik ke Bidang

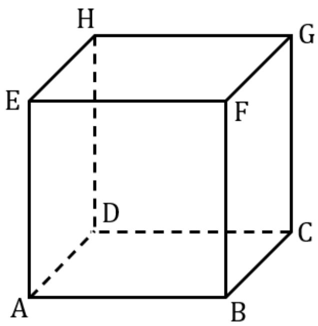
"Misal P adalah titik dan α adalah bidang. Jarak antara P dengan bidang α adalah panjang ruas garis dari PQ, dengan Q di bidang α dan PQ tegak lurus bidang α".



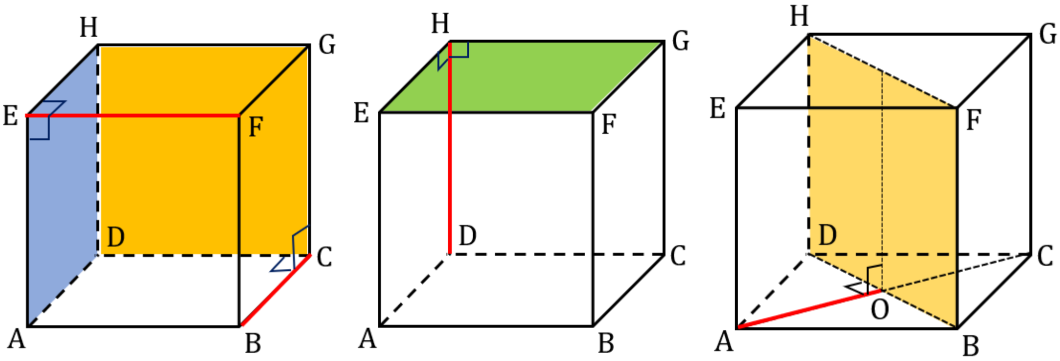
Contoh 1.

Diketahui kubus ABCD.EFGH. Manakah yang merupakan jarak antara titik dan bidang berikut.

a. titik B ke bidang DCGH?
b. titik F ke bidang ADHE?
c. titik D ke bidang EFGH?
d. titik A ke bidang BDHF?



Jawab:



(a) dan (b) (c) (d)

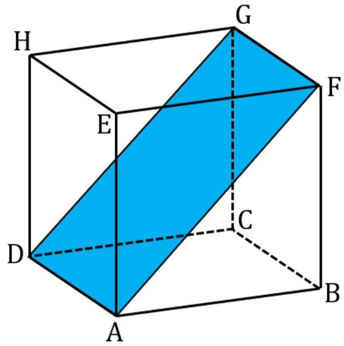
a. Jarak titik B ke bidang DCGH adalah panjang ruas garis BC, karena ruas garis BC tegak lurus bidang DCGH.

b. Jarak titik F ke bidang ADHE adalah panjang ruas garis FE, karena ruas garis FE tegak lurus bidang ADHE.

c. Jarak titik D dengan bidang EFGH adalah panjang ruas garis DH, karena ruas garus DH tegak lurus bidang CDHG.

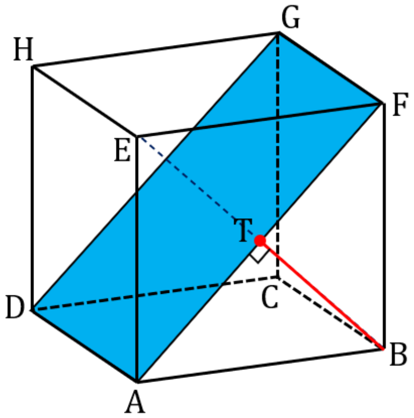
d. Jarak titik A dengan bidang BDHF adalah panjang ruas garis AO, karena ruas garis AO tegak lurus bidang BDHF.

Contoh 2.



Diberikan kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm. Titik A, F, G, dan D dihubungkan sehingga terbentuk bidang AFGD seperti gambar di samping. Berapakah jarak titik B ke bidang AFGD?

Jawab:



Untuk menentukan jarak titik B ke bidang AFGD dapat ditentukan dengan mencari panjang ruas garis yang tegak lurus dengan bidang AFGD dan melalui titik B.

Ruas garis BT tegak lurus dengan bidang AFGD, sehingga jarak titik B ke bidang AFGD adalah panjang ruas garis BT.

Titik T adalah titik tengah diagonal AF, karena diagonal AF dan BE pada kubus berpotongan tegak lurus, dan perpotongannya di titik T.

Panjang diagonal AF = $6\sqrt{2}$, sehingga panjang AT = $\frac{1}{2}$AF = $\frac{1}{2}\left(6\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}$.

Karena BT tegak lurus bidang AFGD, maka segitiga ATB adalah segitiga siku-siku di T. Dengan Teorema Pythagoras diperoleh

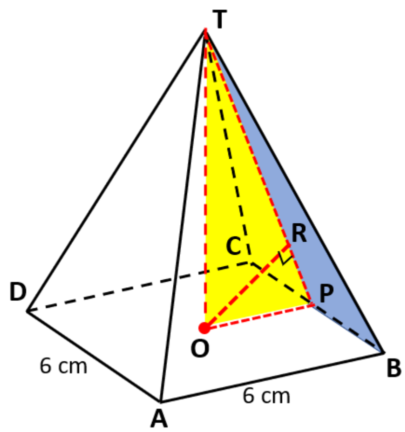
$$\begin{aligned} TB^2 &= AB^2 - AT^2 \\ &= 6^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 36 - 18 = 18 \\ TB &= \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Jadi, jarak titik B ke bidang AFGD adalah $3\sqrt{2}$ cm.

Contoh 3.

Diberikan limas T.ABCD dengan alas persegi. Titik O adalah perpotongan diagonal AC dan BD. Jika AB = BC = CD = AD = 6 cm, TA = TB = TC = TD = $3\sqrt{6}$ cm dan tinggi limas TO = 6 cm, berapakah jarak antara titik O dengan bidang TBC?

Jawab:



Untuk menentukan jarak titik O ke bidang TBC, dibuat ruas garis OP dengan OP sejajar AB.

OP = $\frac{1}{2}$AB = $\frac{1}{2}$(6) = 3 cm dan TO = 6 cm.

Misal titik R terletak pada bidang TBC, titik R terletak pada TP dan TP terletak pada bidang TBC dan OR tegak lurus TP.

Perhatikan segitiga TOP siku-siku di O, sehingga dengan Teorema Pythagoras diperoleh

$TP^2 = TO^2 + OP^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$
$TP \;= \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$

Jarak titik O ke bidang TBC adalah panjang ruas garis OR. Panjang ruas garis OR dapat dihitung dengan menggunakan Luas Δ POT dari dua sudut pandang, yaitu

$$\text{Luas } \Delta \text{ POT} = \frac{1}{2} \times \text{OP} \times \text{TO} = \frac{1}{2} \times \text{OR} \times \text{TP}$$

Sehingga diperoleh

$$\text{OP} \times \text{TO} = \text{OR} \times \text{TP}$$

$$\text{OR} = \frac{\text{OP} \times \text{TO}}{\text{TP}}$$

$$\text{OR} = \frac{3 \times 6}{3\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$$

Jadi, jarak titik O ke bidang TBC adalah $\frac{6}{5}\sqrt{5}$ cm.

Contoh 4.

Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 9 cm. Buat ilustrasi kubus dan langkah menentukan jarak titik F ke bidang BEG. Kemudian hitunglah jarak titik F ke bidang BEG.

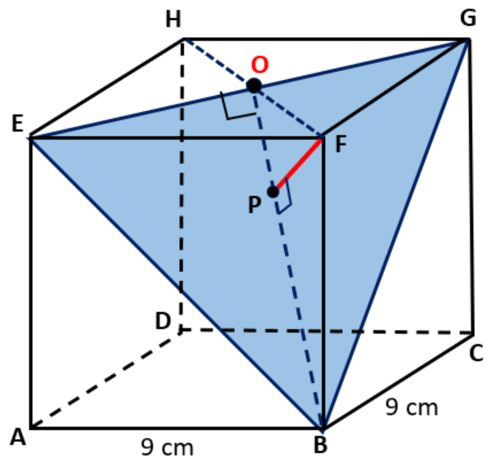
Jawab:

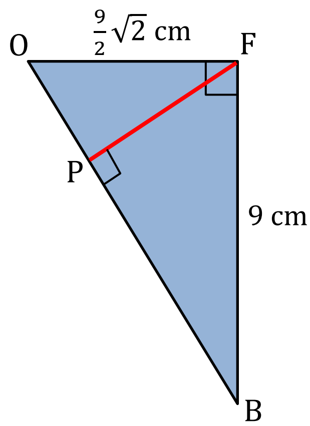
Langkah menentukan jarak titik F ke bidang BEG.

a. Hubungkan titik F dengan titik H, diperoleh perpotongan ruas garis HF dengan BEG. Misal perpotongan tersebut titik O.

b. Hubungkan titik O dengan titik B. Karena titik O dan titik B terletak pada bidang BEG, ruas garis OB terletak pada bidang BEG.

c. Misal P adalah proyeksi titik F pada bidang BEG. Jarak titik F ke bidang BEG adalah panjang ruas garis FP.





FH adalah diagonal bidang, sehingga panjang FH = $9\sqrt{2}$ cm.

Panjang $\text{OF} = \frac{1}{2}\text{FH} = \frac{9}{2}\sqrt{2}$ cm.

Segitiga BOF siku-siku di F, sehingga dengan Teorema Pythagoras diperoleh

$$\text{BO}^2 = \text{BF}^2 + \text{OF}^2$$

$$= 9^2 + \left(\frac{9}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 81 + \frac{81}{2} = \frac{243}{2}$$

$$\text{BO} = \sqrt{\frac{243}{2}} = \sqrt{\frac{81 \times 3}{2}} = 9\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{6}$$

Panjang ruas garis FP dapat dihitung dengan menggunakan Luas Δ BOF dari dua sudut pandang, yaitu

$$\text{Luas } \Delta \text{ BOF} = \frac{1}{2} \times \text{OF} \times \text{BF} = \frac{1}{2} \times \text{OB} \times \text{FP}$$

Sehingga diperoleh

$$\text{OF} \times \text{BF} = \text{OB} \times \text{FP}$$

$$\text{FP} = \frac{\text{OF} \times \text{BF}}{\text{OB}}$$

$$\text{FP} = \frac{\frac{9}{2}\sqrt{2} \times 9}{\frac{9}{2}\sqrt{6}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{FP} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

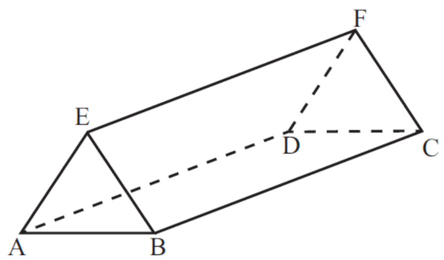
Jadi, jarak titik F ke bidang BEG adalah $3\sqrt{3}$ cm.

C. Rangkuman

- Misal P adalah titik dan α adalah bidang. Jarak antara P dengan bidang α adalah panjang ruas garis dari PQ, dengan Q di bidang α dan PQ tegak lurus bidang α.
- Suatu garis g dikatakan tegak lurus bidang α apabila garis g sedikitnya tegak lurus terhadap dua garis yang berpotongan pada bidang α.
- Teorema Pythagoras dan rumus luas segitiga sangat penting untuk menghitung jarak suatu titik ke bidang dalam ruang bidang datar.

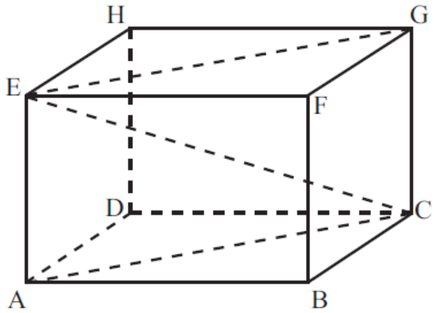
D. Latihan Soal

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH yang panjang rusuknya 8 cm. Titik Q adalah titik tengah rusuk BF. Tentukan jarak titik H ke bidang ACQ.
2. Suatu kepanitiaan membuat papan nama dari kertas yang membentuk bangun seperti berikut.



Ternyata ABE membentuk segitiga sama sisi, panjang BF = 13 cm dan BC = 12 cm. Tentukan jarak antara titik A dan bidang BCFE!

3. Dari gambar di bawah, jika diketahui panjang AB = 8 cm, BC = 6 cm, dan EC = $5\sqrt{5}$ cm, tentukan jarak antara titik B dan bidang ACE.

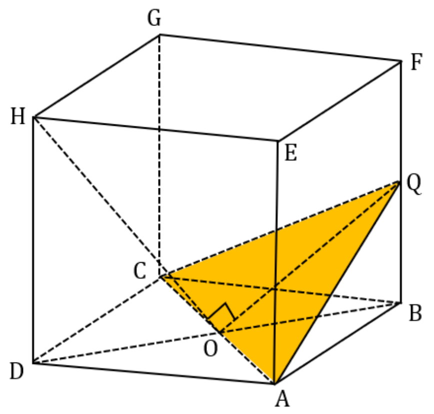


4. Diketahui limas segitiga beraturan T.ABC. Panjang AB = 6 cm dan TA = 8 cm. Tentukan jarak antara titik T dengan bidang ABC.
5. Diketahui luas permukaan kubus ABCD.EFGH adalah 294 cm^2. Tentukan:
   a. Jarak antara titik F ke bidang ADHE.
   b. Jarak antara titik B ke bidang ACH.
6. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk *a* cm. P dan Q masing-masing merupakan titik tengah AB dan CD, sedangkan R merupakan titik potong EG dan FH. Tentukan jarak titik R ke bidang EPQH.
7. Diketahui limas beraturan T.ABCD dengan AB = 8 cm dan TA = 12 cm. Hitung jarak titik T ke bidang ABCD.
8. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 12 cm. Hitung jarak titik G ke bidang BDE.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH yang panjang rusuknya 8 cm. Titik Q adalah titik tengah rusuk BF. Tentukan jarak titik H ke bidang ACQ.

   Alternatif Penyelesaian:

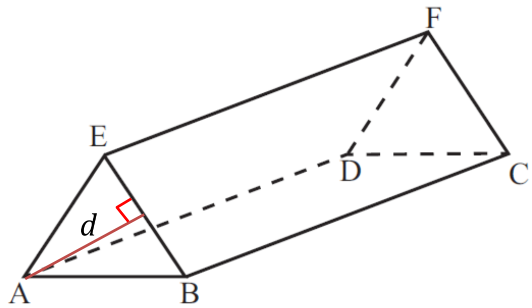
   

   HO $\perp$ AC sehingga jarak titik H ke bidang ACQ adalah HO.

   $$HO = \sqrt{(DO)^2 + (DH)^2}$$
   $$= \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (8)^2} = \sqrt{32 + 64}$$
   $$= \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

   Jadi, jarak titik H ke bidang ACQ adalah $4\sqrt{6}$ cm.

2. Suatu kepanitiaan membuat papan nama dari kertas yang membentuk bangun seperti berikut.

   Ternyata ABE membentuk segitiga sama sisi, panjang BF = 13 cm dan BC = 12 cm. Tentukan jarak antara titik A dan bidang BCFE!

   Alternatif Penyelesaian:

   Misal jarak titik A dengan bidang BCFE adalah *d*

   $$EB = \sqrt{(BF)^2 - (EF)^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

   $$d = \sqrt{(AB)^2 - (\frac{1}{2}EB)^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

   $$= \sqrt{25 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

   Jadi, jarak titik A dengan bidang BCFE adalah $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm.

3. Diketahui panjang AB = 8 cm, BC = 6 cm, dan EC = $5\sqrt{5}$ cm, tentukan jarak antara titik B dan bidang ACE.

   Alternatif Penyelesaian:

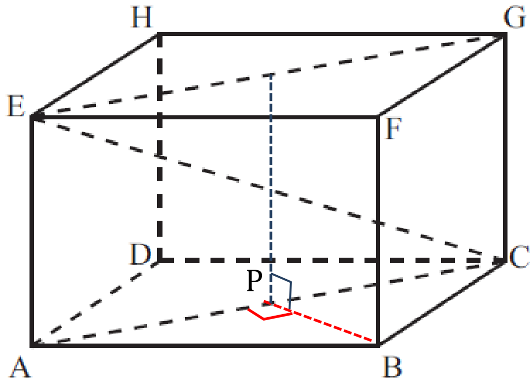
   $$AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

   Jarak antara titik B dan bidang ACE adalah BP.

   Δ ABC siku-siku di C, sehingga diperoleh:

$$BP = \frac{AB \times BC}{AC} = \frac{8 \times 6}{10} = \frac{48}{10} = 4{,}8$$

Jadi, jarak antara titik B dan bidang ACE adalah 4,8 cm.



4. Diketahui limas segitiga beraturan T.ABC. Panjang AB = 6 cm dan TA = 8 cm. Tentukan jarak antara titik T dengan bidang ABC.

Alternatif Penyelesaian:

Dari gambar di samping, jarak antara titik T dengan bidang ABC adalah ruas garis TO. TO $\perp$ PB, sehingga

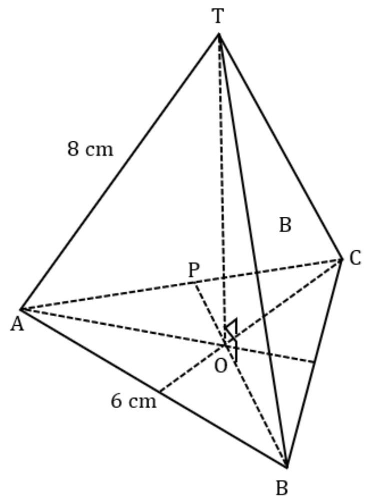
$$TO = \sqrt{(TB)^2 - (BO)^2}$$

Segitiga ABC adalah segitiga sama sisi sehingga AB = BC = CA = 6 cm, sedangkan PA = 3 cm.

Panjang $PB = \sqrt{(AB)^2 - (PA)^2} = \sqrt{6^2 - 3^2}$

$= \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$$OB = \frac{2}{3}PB = \frac{2}{3}(3\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$



$$TO = \sqrt{(TB)^2 - (BO)^2} = \sqrt{8^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64 - 12} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

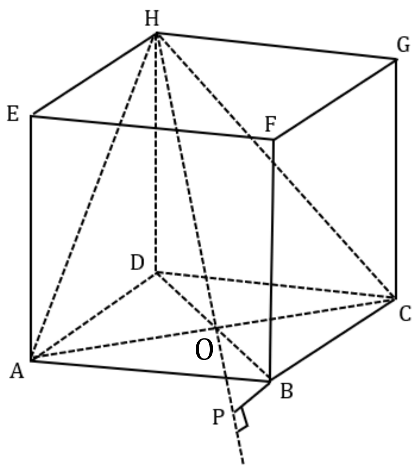
Jadi, jarak titik T ke bidang ABC adalah $2\sqrt{13}$ cm.

5. Diketahui luas permukaan kubus ABCD.EFGH adalah 294 cm^2. Tentukan:
   a. Jarak antara titik F ke bidang ADHE.
   b. Jarak antara titik B ke bidang ACH.

Alternatif Penyelesaian:

Diketahui luas permukaan kubus ABCD.EFGH adalah 294 cm^2.

Maka panjang rusuk kubus = $\sqrt{\frac{294}{6}} = \sqrt{49} = 7$



a. Jarak antara titik F ke bidang ADHE adalah ruas garis FE = 7 cm.

b. Perhatikan gambar di atas. BP $\perp$ HO, sehingga BP merupakan jarak antara titik B dengan bidang ACH.

AC = BD = AH = $7\sqrt{2}$ (diagonal bidang)

AO = BO = $\frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\left(7\sqrt{2}\right) = \frac{7}{2}\sqrt{2}$

$$\mathrm{HO} = \sqrt{(\mathrm{AH})^2 - (\mathrm{AO})^2} = \sqrt{\left(7\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{98 - \frac{49}{2}} = \sqrt{\frac{343}{4}} = \frac{7}{2}\sqrt{6}$$

Perhatikan Δ HDO dan Δ BPO sebangun,
sehingga diperoleh

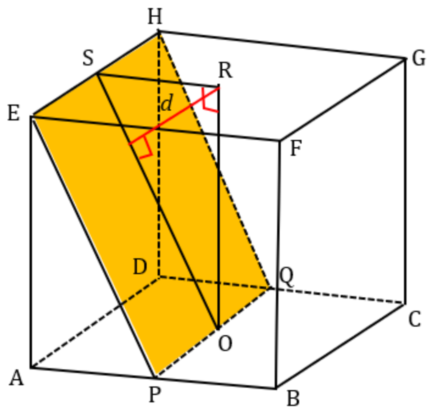
$$\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{BP}} = \frac{\mathrm{HO}}{\mathrm{BO}} \Leftrightarrow \frac{7}{\mathrm{BP}} = \frac{\frac{7}{2}\sqrt{6}}{\frac{7}{2}\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{7}{\mathrm{BP}} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{BP} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$$

Jadi, jarak titik B ke bidang ACH adalah $\frac{7}{3}\sqrt{3}$ cm.

6. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk a cm. P dan Q masing-masing merupakan titik tengah AB dan CD, sedangkan R merupakan titik potong EG dan FH. Tentukan jarak titik R ke bidang EPQH.

Alternatif Penyelesaian:



Misal jarak titik R ke bidang EPQH adalah d

SR = $\frac{1}{2}a$ dan OR = a

$$\mathrm{SO} = \sqrt{(\mathrm{SR})^2 + (\mathrm{OR})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$d = \frac{\mathrm{SR} \times \mathrm{OR}}{\mathrm{SO}} = \frac{\frac{1}{2}a \times a}{\frac{a}{2}\sqrt{5}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{a}{2}\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a}{5}\sqrt{5}$$

Jadi, jarak titik R ke bidang EPQH adalah $\frac{a}{5}\sqrt{5}$ cm.

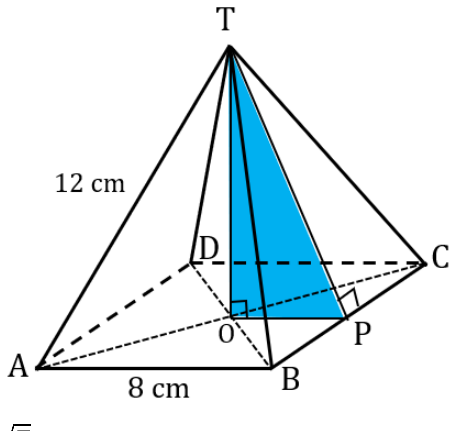
7. Diketahui limas beraturan T.ABCD dengan AB = 8 cm dan TA = 12 cm. Hitung jarak titik T ke bidang ABCD.

Alternatif Penyelesaian:

Jarak titik T ke bidang ABCD merupakan tinggi dari limas, yaitu TO.

Dengan Teorema Pythagoras diperoleh $(\mathrm{TO})^2 = (\mathrm{TP})^2 - (\mathrm{OP})^2$

Perhatikan Δ TPC siku-siku di P, sehingga:



$$\mathrm{TP} = \sqrt{(\mathrm{TC})^2 - (\mathrm{CP})^2} = \sqrt{12^2 - 4^2}$$
$$= \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \text{ cm.}$$

$\mathrm{OP} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = \frac{1}{2}(8) = 4$ cm.

Perhatikan Δ TOP siku-siku di O, sehingga:

$$\mathrm{TO} = \sqrt{(\mathrm{TP})^2 - (\mathrm{OP})^2} = \sqrt{(\sqrt{128})^2 - 4^2}$$
$$= \sqrt{128 - 16} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$$

Jadi, jarak titik T ke bidang ABCD adalah TO = $4\sqrt{7}$ cm.

8. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 12 cm. Hitung jarak titik G ke bidang BDE.

Alternatif Penyelesaian:

AC = BE = BD = DE = $12\sqrt{2}$ (diagonal bidang)

AG = $12\sqrt{3}$ (diagonal ruang)

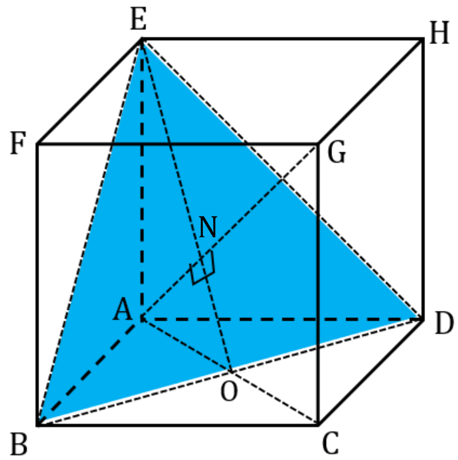
OB = OA = $\frac{1}{2}$AC $= \frac{1}{2}\left(12\sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2}$

Perhatikan Δ BDE merupakan segitiga sama sisi (BD = BE = DE), sehingga diperoleh

OE = $\sqrt{(\mathrm{BE})^2 - (\mathrm{OB})^2}$

$= \sqrt{\left(12\sqrt{2}\right)^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2}$

$= \sqrt{288 - 72} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}$



Perhatikan Δ OAE siku-siku di A, sehingga diperoleh

$\mathrm{AN} = \frac{\mathrm{OA} \times \mathrm{AE}}{\mathrm{OE}} = \frac{6\sqrt{2} \times 12}{6\sqrt{6}}$

$= \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

GN = AG – AN $= 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

Jadi, jarak titik G ke bidang BDE adalah GN = $8\sqrt{3}$ cm.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda dapat menggunakan Teorema Pythagoras untuk menentukan panjang sisi segitiga?	◯	◯
2	Apakah Anda tahu cara menghitung luas segitiga?	◯	◯
3	Apakah Anda dapat menggambar bangun ruang bidang datar seperti kubus, balok, limas, dan prisma?	◯	◯
4	Apakah Anda dapat membedakan rusuk, diagonal bidang, dan diagonal ruang?	◯	◯
5	Apakah Anda tahu prosedur menentukan jarak titik ke bidang dalam ruang bidang datar?	◯	◯
6	Apakah Anda dapat menentukan jarak titik ke bidang pada ruang bidang datar?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 4 cm. Jarak titik H ke titik potong diagonal alas kubus adalah ….
   A. 6
   B. $2\sqrt{6}$
   C. 4
   D. $2\sqrt{3}$
   E. $2\sqrt{2}$

2. Diketahui limas beraturan T.ABCD dengan panjang BC = 6 cm dan TC = 5 cm. Titik S adalah titik potong diagonal AC dan BD. Jarak titik T ke titik S adalah ….
   A. $\sqrt{7}$ cm
   B. 3 cm
   C. $\sqrt{13}$ cm
   D. 4 cm
   E. $3\sqrt{2}$ cm

3. Diketahui limas segiempat empat beraturan T.PQRS dengan panjang PQ = 4 cm dan TP = 8 cm. Jarak titik A ke garis rusuk TR adalah ….
   A. $\sqrt{14}$ cm
   B. $\sqrt{28}$ cm
   C. $2\sqrt{14}$ cm
   D. $3\sqrt{14}$ cm
   E. $2\sqrt{28}$ cm

4. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 6 cm. Jarak titik E ke garis AG adalah ….
   A. $2\sqrt{3}$ cm
   B. $3\sqrt{2}$ cm
   C. $2\sqrt{6}$ cm
   D. $3\sqrt{6}$ cm
   E. $6\sqrt{2}$ cm

5. Diketahui kubus ABCD.EFGH memiliki panjang rusuk 6 cm. Jarak titik G ke diagonal BE = ….
   A. $3\sqrt{6}$ cm
   B. $6\sqrt{6}$ cm
   C. $9\sqrt{6}$ cm
   D. $3\sqrt{10}$ cm
   E. $9\sqrt{10}$ cm

6. Diketahui limas T.ABCD dengan ABCD adalah persegi yang memiliki panjang AB = 4 cm dan TA = 6 cm. Jarak titik C ke garis AT = ….
   A. $\frac{1}{4}\sqrt{14}$ cm
   B. $\frac{2}{3}\sqrt{14}$ cm

C. $\frac{3}{4}\sqrt{14}$ cm
D. $\frac{4}{3}\sqrt{14}$ cm
E. $\frac{3}{2}\sqrt{14}$ cm

7. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 9 cm. Titik T terletak pada pertengahan garis HF. Jarak titik A ke garis CT adalah ….
A. $5\sqrt{3}$ cm
B. $6\sqrt{2}$ cm
C. $6\sqrt{3}$ cm
D. $6\sqrt{6}$ cm
E. $7\sqrt{3}$ cm

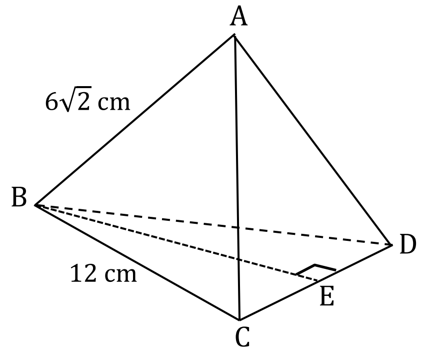
8. Diketahui balok KLMN.PQRS dengan KL = 3 cm, LM = 4 cm, dan KP = 12 cm. Jarak titik R ke garis PM adalah ….
A. $\frac{35}{13}$ cm
B. $\frac{40}{13}$ cm
C. $\frac{45}{13}$ cm
D. $\frac{50}{13}$ cm
E. $\frac{60}{13}$ cm

9. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 8 cm. Jarak titik H ke garis AC adalah ….
A. $8\sqrt{3}$ cm
B. $8\sqrt{2}$ cm
C. $4\sqrt{6}$ cm
D. $4\sqrt{3}$ cm
E. $4\sqrt{2}$ cm

10. Panjang rusuk kubus ABCD.EFGH adalah 12 cm. Jika P titik tengah CG, maka jarak titik P dengan garis HB adalah ….
A. $8\sqrt{5}$ cm
B. $6\sqrt{5}$ cm
C. $6\sqrt{3}$ cm
D. $6\sqrt{2}$ cm
E. 6 cm

11. Pada kubus ABCD.EFGH, panjang rusuk 8 cm. Jarak titik E dengan bidang BDG adalah….
A. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ cm
B. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ cm
C. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ cm
D. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ cm
E. $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ cm

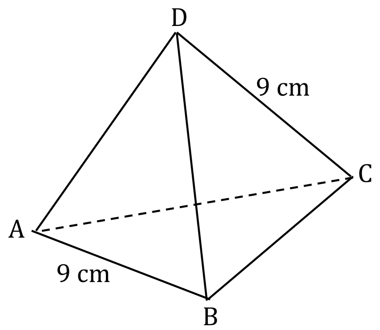
12. Limas ABCD pada gambar di samping merupakan limas segitiga beraturan. Jarak titik A ke garis BE adalah ….
    A. $3\sqrt{2}$ cm
    B. $2\sqrt{6}$ cm
    C. 6 cm
    D. $4\sqrt{3}$ cm
    E. 8 cm



13. Pada kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm, jarak titik B ke diagonal ruang AG adalah ….
    A. $\sqrt{5}$ cm
    B. $2\sqrt{5}$ cm
    C. $3\sqrt{5}$ cm
    D. $2\sqrt{6}$ cm
    E. $3\sqrt{6}$ cm

14. Jarak titik H ke bidang ACF dalam kubus ABCD.EFGH yang panjang rusuknya p adalah….
    A. $\frac{1}{3}p$
    B. $\frac{1}{4}p\sqrt{3}$
    C. $\frac{1}{2}p\sqrt{2}$
    D. $\frac{1}{2}p\sqrt{3}$
    E. $\frac{2}{3}p\sqrt{3}$

15. Gambar di bawah ini adalah bidang empat beraturan. Jarak antara titik puncak dan bidang alas adalah ….
    A. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm
    B. $2\sqrt{3}$ cm
    C. $2\sqrt{6}$ cm
    D. $3\sqrt{6}$ cm
    E. $9\sqrt{6}$ cm



16. Kamar Akbar berbentuk balok dengan ukuran panjang : lebar : tinggi = 5 : 5 : 4. Di langit-langit kamar terdapat lampu yang letaknya tepat pada pusat bidang langit-langit. Pada salah dinding kamar dipasang saklar yang letaknya tepat di tengah-tengah dinding. Jarak saklar ke lampu adalah ….
    A. $\frac{3}{2}$ m
    B. $\frac{5}{2}$ m
    C. $\frac{1}{2}\sqrt{34}$ m

D. $\frac{1}{2}\sqrt{41}$ m
E. $\sqrt{14}$ m

17. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 8 cm. M adalah titik tengah EH. Jarak titik M ke AG adalah ….
A. $4\sqrt{6}$ cm
B. $4\sqrt{5}$ cm
C. $4\sqrt{3}$ cm
D. $4\sqrt{2}$ cm
E. 4 cm

18. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk a cm. Jarak titik E ke bidang diagonal BDHF adalah ….
A. $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ cm
B. $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ cm
C. $\frac{1}{4}a\sqrt{2}$ cm
D. $\frac{1}{2}a$ cm
E. $\frac{1}{4}a$ cm

19. Diketahui S adalah titik yang terletak di perpanjangan HD pada kubus ABCD.EFGH dengan DS : HD = 1 : 2. Jika panjang rusuk kubus adalah 6 cm, jarak titik F ke titik S adalah ….
A. $5\sqrt{17}$ cm
B. $4\sqrt{17}$ cm
C. $3\sqrt{17}$ cm
D. $2\sqrt{17}$ cm
E. $\sqrt{17}$ cm

20. Diketahui limas segiempat T.ABCD dengan panjang rusuk AB = BC = 8 cm dan TA = 6 cm. Jika P titik tengah BC, maka jarak titik P ke bidang TAD adalah ….
A. $2\sqrt{6}$ cm
B. $\frac{8}{5}\sqrt{5}$ cm
C. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ cm
D. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ cm
E. $\frac{5}{8}\sqrt{3}$ cm

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. B
2. A
3. B
4. C
5. A
6. D
7. C
8. E
9. C
10. D
11. E
12. B
13. D
14. E
15. D
16. D
17. D
18. B
19. C
20. B

DAFTAR PUSTAKA

Abdur Rahman As’ari, dkk. 2018. *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII*. Jakarta: Kemendikbud.

Sukino. 2019. *Matematika SMA/MA Kelas XII IA* (*IPA*). Sidoarjo: PT. Masmedia Buasa Pustaka.

Untung Trisna Suwaji, Himmawati. 2018. *Geometri dan Irisan Kerucut*. Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

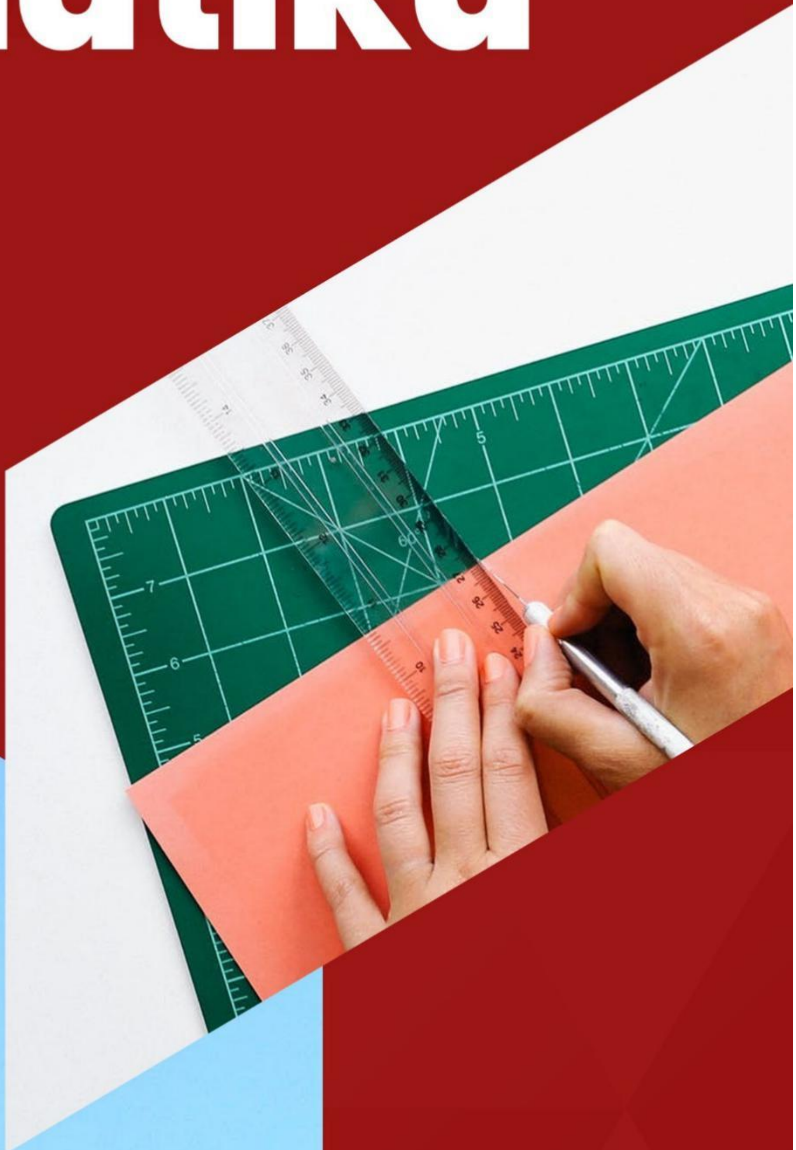
BERANI JUJUR HEBAT!

JUJUR ADALAH LANGKAH AWAL BERANTAS KORUPSI

ZI-WBK

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS XII

STATISTIKA

MATEMATIKA UMUM KELAS XII

PENYUSUN
Asmar Achmad

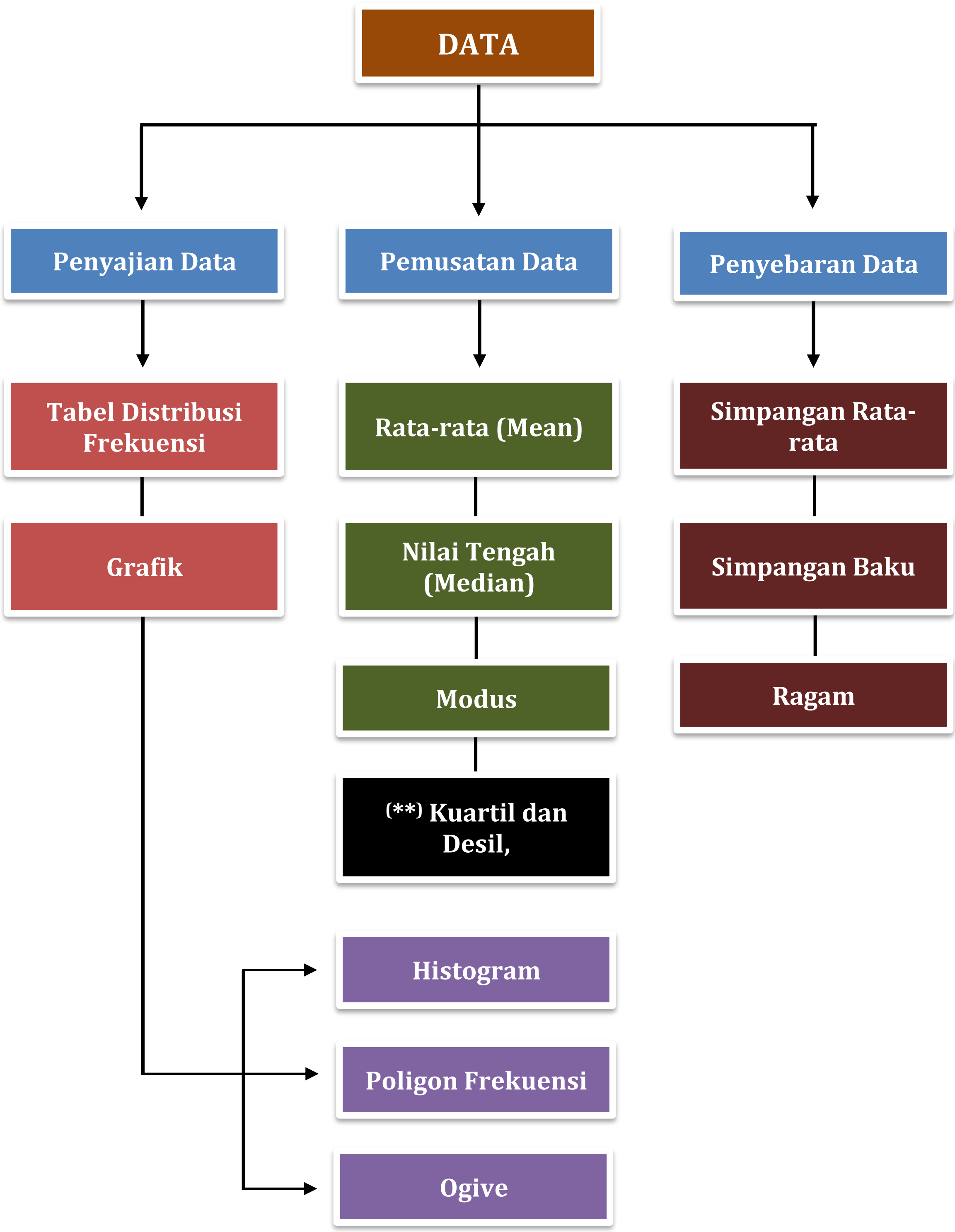
SMA Negeri 17 Makassar

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Histogram	:	Diagram batang tegak, dimana di antara dua batang yang berdampingan tidak terdapat jarak
Poligon frekuensi		grafik garis yang menghubungkan setiap titik tengah sisi atas persegi panjang yang berdampingan pada histogram.
Ogive	:	grafik distribusi frekuensi kumulatif
Mean	:	Rerata (Rataan, Rata-rata) hitung
Modus	:	Nilai yang paling sering muncul
Median	:	Nilai tengah dari sekumpulan data terurut
Kuartil	:	Ukuran letak yang membagi data terurut menjadi empat bagian sama banyak
Desil	:	Ukuran letak yang membagi data terurut menjadi sepuluh bagian sama banyak

PETA KONSEP


DATA
Penyajian Data
Pemusatan Data
Penyebaran Data
Tabel Distribusi Frekuensi
Rata-rata (Mean)
Simpangan Rata-rata
Grafik
Nilai Tengah (Median)
Simpangan Baku
Modus
Ragam
(**) Kuartil dan Desil,
Histogram
Poligon Frekuensi
Ogive

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	XII
Alokasi Waktu	:	12 JP (3 Kegiatan Pembelajaran, 4 JP per KP)
Judul Modul	:	Statistika

B. Kompetensi Dasar

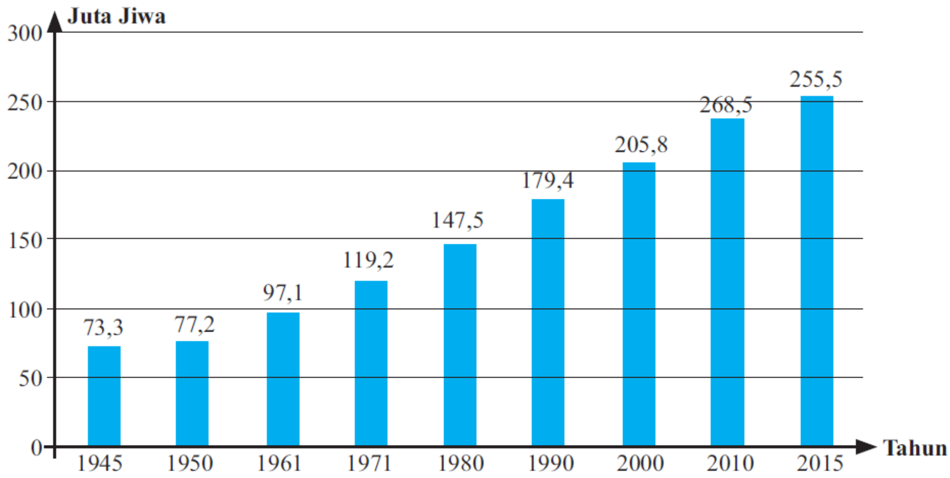
3.2. Menentukan dan menganalisis ukuran pemusatan dan penyebaran data yang disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram.

4.2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penyajian data hasil pengukuran dan pencacahan dalam tabel distribusi frekuensi dan histogram

C. Deskripsi Singkat Materi

Statistika adalah ilmu yang mempelajari bagaimana merencanakan, mengumpulkan, menganalisis, menginterpretasi, dan mempresentasikan data. Statistika banyak diterapkan dalam berbagai disiplin ilmu, baik ilmu-ilmu alam (fisika, astronomi dan biologi), ilmu-ilmu sosial (sosiologi dan psikologi), maupun di bidang bisnis (ekonomi dan industri).

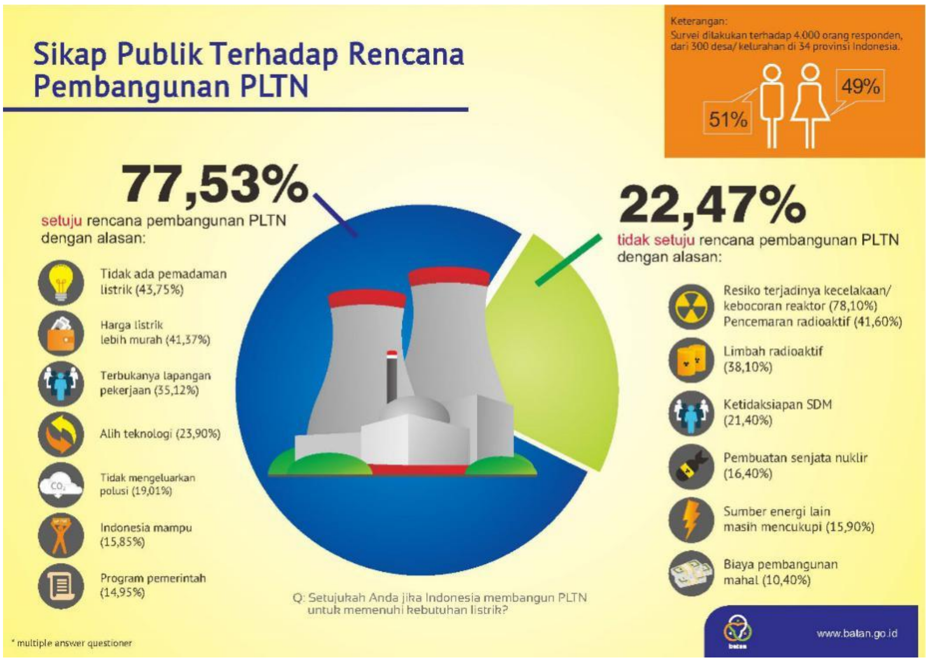
Statistika juga digunakan dalam pemerintahan untuk berbagai macam tujuan, misalnya sensus penduduk merupakan salah satu prosedur yang paling dikenal, seperti ditunjukkan pada diagram batang berikut.



Gambar 1. Jumlah peduduk Indonesia 1945 – 2015
Sumber: BPS

Aplikasi statistika lainnya yang sekarang popular adalah prosedur jajak pendapat atau polling (misalnya dilakukan sebelum pemilihan umum), serta hitung cepat (perhitungan cepat hasil pemilu) atau *quick count.*

Infografis berikut merupakan salah satu contoh aplikasi statistika dari hasil jajak pendapat terhadap rencana pembangunan PLTN 2016.



Gambar 2. Hasil jajak pendapat pembangunan PLTN 2016
Sumber: www.batan.go.id

Pada modul ini, kita akan membahas materi materi statistika yang terdiri atas : (1) Penyajian data dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan grafik, (2) Ukuran pemusatan data, dan (3) Ukuran penyebaran data.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **3** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Penyajian Data

Kedua : Ukuran Pemusatan Data

Ketiga : Ukuran Penyebaran Data

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
PENYAJIAN DATA

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat menyajikan data dengan menggunakan berbagai diagram, tabel distribusi frekuensi, dan histogram serta dapat menggunakannya untuk menyelesaikan masalah terkait statistika.

B. Uraian Materi

Ketika seseorang peneliti ingin mengetahui kondisi suatu hal tidak jarang peneliti harus mengumpulkan data terlebih dahulu. Sebagai contoh, seorang peneliti ingin mengetahui kondisi jumlah penduduk Indonesia selama 20 tahun sebelumnya. Dengan demikian peneliti dapat mengumpulkan data jumlah penduduk Indonesia setiap tahunnya kemudian dapat mendiskripsikan, mendapatkan informasi yang berguna mengenai jumlah penduduk, dan bahkan dapat memprediksi keadaan jumlah penduduk Indonesia di tahun-tahun mendatang.

Penyajian data yang baik dan benar tentunya sangat bermanfaat untuk memberi gambaran yang sistematis tentang peristiwa-peristiwa yang merupakan hasil penelitian atau observasi, data lebih cepat dimengerti, memudahkan dalam membuat analisis data, dan pengambilan keputusan atau kesimpulan lebih tepat, cepat, dan akurat.

Mari Mengingat Kembali

Di SMP, tentunya kalian telah mempelajari beberapa bentuk penyajian data dalam bentuk diagram, seperti diagram garis, diagram batang, diagram lingkaran, dan lainnya.

1. Diagram Garis

Diagram garis digunakan untuk menyajikan perkembangan data statistik yang kontinu (berkesinambungan), misalnya jumlah penduduk tiap tahun di suatu wilayah, keadaan suhu badan pasien RS tiap jam, omset penjualan barang di suatu toko.

Pada diagram garis, sumbu X (horizontal) biasanya menyatakan satuan waktu, sedangkan sumbu Y (vertikal) biasanya menyatakan frekuensi.

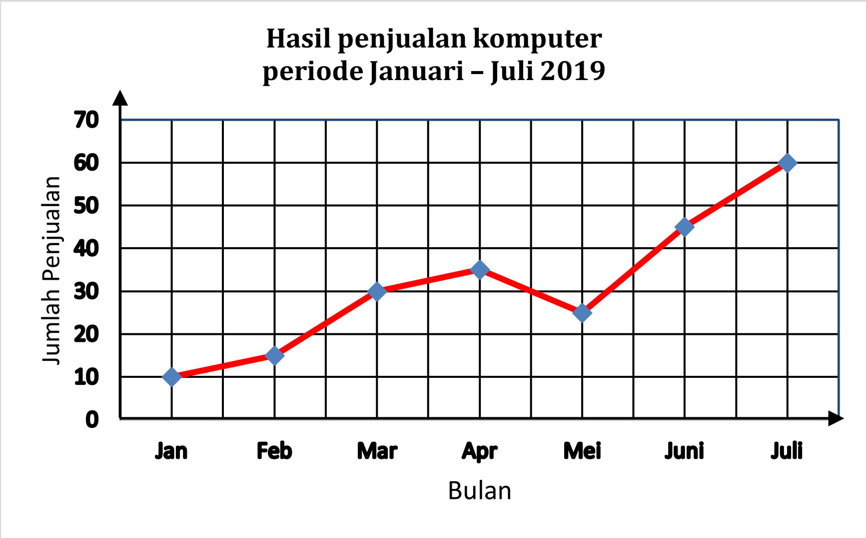
Contoh 1.

Hasil penjualan komputer di toko Planet Computer pada periode Januari – Juli 2019 ditunjukkan pada tabel di bawah ini.

Tabel 1. Hasil penjualan komputer periode Januari – Juli 2019

Bulan	Jan	Feb	Mar	Apr	Mei	Juni	Juli
Jumlah (Unit)	10	15	30	35	25	45	60

Data tersebut dapat ditunjukkan dalam diagram garis (tunggal) seperti pada gambar di bawah ini.



Grafik Garis Berganda (Multiple Line Chart)

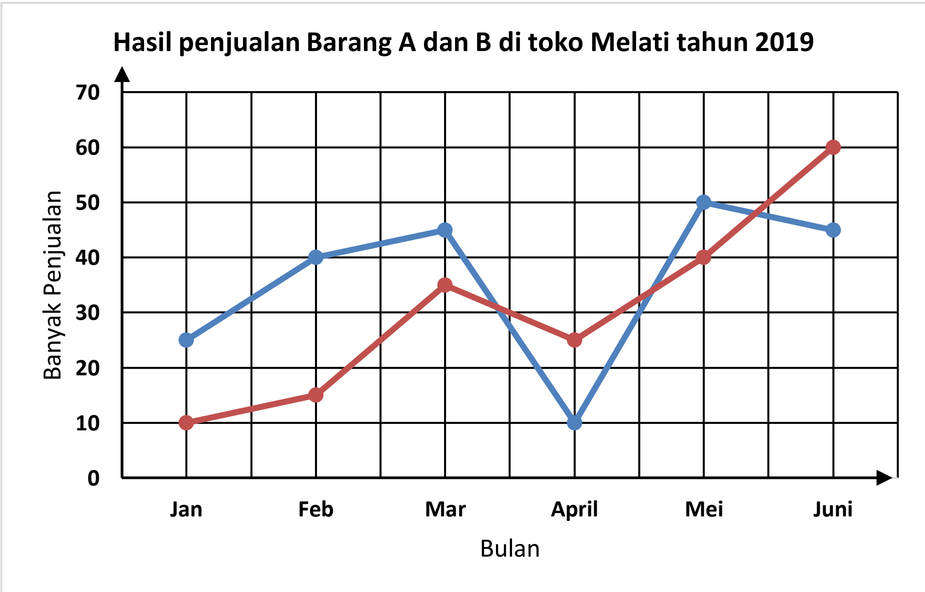
Grafik yang terdiri dari beberapa garis untuk menggambarkan perkembangan beberapa hal atau kejadian sekaligus.

Contoh 2.

Hasil penjualan Barang A dan B di toko "Melati" periode Januari sampai Juni 2019 ditunjukkan pada Tabel di bawah ini.

Tahun	Jan	Feb	Mar	Apr	Mei	Juni
Jenis Barang A	25	40	45	10	50	45
Jenis Barang B	10	15	35	25	40	60

Data tersebut dapat ditunjukkan dalam diagram garis berganda seperti pada gambar di bawah ini.



2. Diagram Lingkaran

Diagram lingkaran adalah bentuk penyajian data dengan menggunakan sektor-sektor (juring-juring) dalam suatu lingkaran. Diagram ini sangat baik untuk menunjukkan perbandingan antara objek yang satu dengan objek lainnya terhadap keseluruhan dalam suatu penyelidikan.

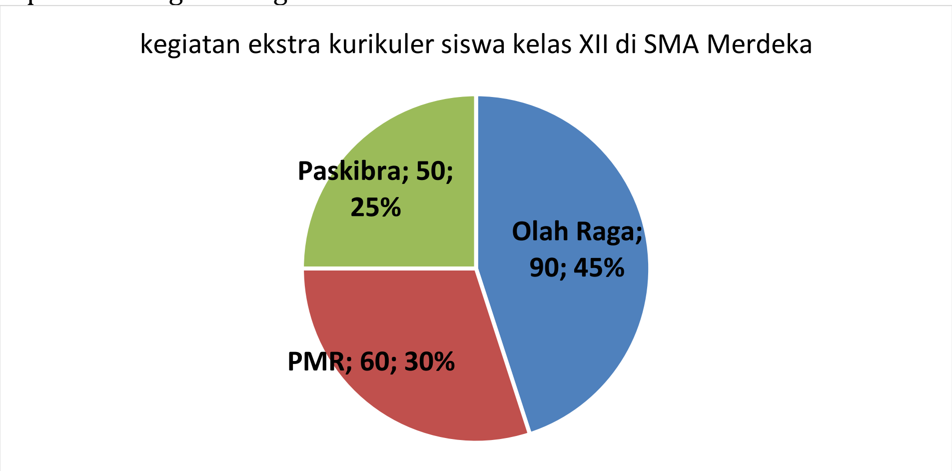
Contoh 3.

Data berikut ini menunjukkan banyaknya peminat kegiatan ekstra kurikuler siswa kelas XII di SMA Merdeka. Kegiatan Olah raga ada 90 orang, PMR ada 60 orang, dan Paskibra ada 50 orang.

Sebelum membuat diagram lingkaran, terlebih dahulu ditentukan besar persentase tiap objek terhadap keseluruhan data dan besar sudut pusat sektor lingkaran yang sesuai sebagaimana ditunjukkan pada tabel di bawah ini.

Jenis Kegiatan	Jumlah	Persentase	Besar Sudut Pusat
Olah Raga	90	$\frac{90}{200} \times 100\% = 45\%$	$\frac{90}{200} \times 360^o = 162^o$
PMR	60	$\frac{60}{200} \times 100\% = 30\%$	$\frac{60}{200} \times 360^o = 108^o$
Paskibra	50	$\frac{50}{200} \times 100\% = 25\%$	$\frac{50}{200} \times 360^o = 90^o$
	200		

Diperoleh diagram lingkaran



3. Diagram Batang

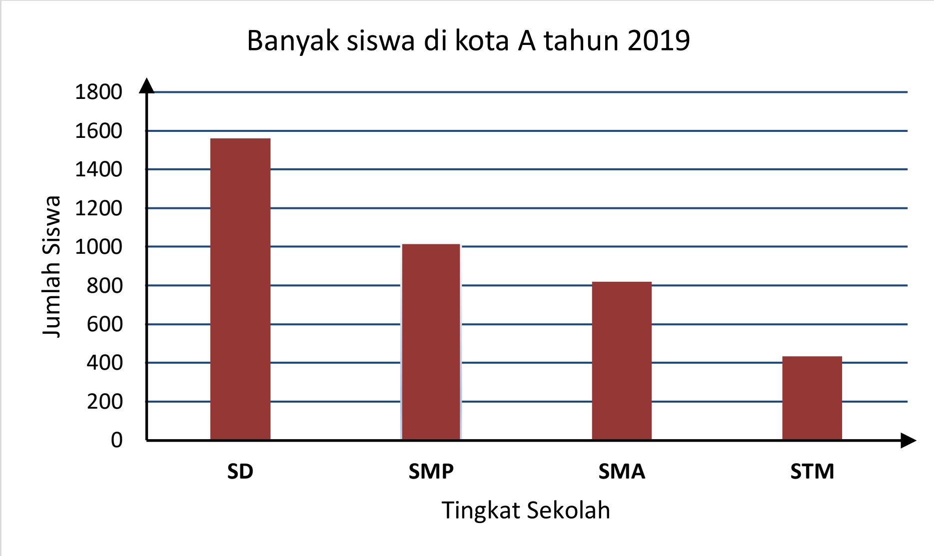
Diagram batang adalah penyajian data dengan menggunakan persegi panjang-persegi panjang dengan arah vertikal atau horizontal. Tinggi setiap persegi panjang (batang) sesuai dengan jumlah data masing-masing objek.

Contoh 4.

Tabel berikut menunjukkan banyaknya siswa di Kota A menurut tingkat sekolah pada tahun 2019

Tingkat Sekolah	Jumlah Siswa
SD	1.562
SMP	1.019
SMA	818
STM	432

Data tersebut ditunjukkan dengan diagram batang seperti pada gambar berikut.



Tiga jenis diagram di atas paling sering kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari. Selain penyajian data dengan diagram di atas, juga ada diagram lainnya seperti diagram batang daun (*Steam and Leaf Plot*), diagram kotak garis, diagram pencar, dan piktogram.

Diagram-diagram di atas umumnya digunakan untuk menyajikan data yang variasi jenis datanya sedikit atau jumlah datanya sedikit. Bagaimana kalau variasi jenis datanya sudah banyak atau data yang diolah dalam jumlah besar? Nah, untuk keperluan penyajian data yang jumlahnya besar, maka pada bagian ini kalian akan mempelajari cara menyajikan dalam tabel distribusi frekuensi dan memvisualisasikan ke dalam bentuk grafik histogram, poligon frekuensi, dan ogive.

4. Tabel Distribusi Frekuensi

Jika ukuran data cukup besar (n > 30), maka sebaiknya data disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi. Tabel distribusi frekuensi dibedakan menjadi dua, yaitu tabel distribusi frekuensi tunggal dan tabel distribusi frekuensi berkelompok.

Contoh 5.

Berikut ini data berat badan 40 siswa SD Merdeka (dalam kg)

32	35	37	33	34	33	32	36	37	35
37	36	35	32	32	34	34	36	35	33
34	34	33	36	37	36	37	35	36	36
32	33	37	36	36	33	34	37	32	34

Tabel distribusi frekuensi tunggal dari data tersebut sebagai berikut.

Berat Badan (kg)	Turus (Tally)	Banyak Anak (frekuensi)
32	~~IIII~~ I	6
33	~~IIII~~ I	6
34	~~IIII~~ II	7
35	~~IIII~~	5
36	~~IIII~~ IIII	9
37	~~IIII~~ II	7
Jumlah		40

Untuk data yang sangat besar, sebaiknya menggunakan tabel distribusi frekuensi berkelompok. Langkah-langkah membuat tabel distribusi frekuensi berkelompok adalah :

a. Tentukan jangkaun data (J), yaitu datum terbesar dikurangi datum terkecil.

$J = X_{maks} - X_{min}$

b. Tentukan banyak kelas interval (k) dengan aturan H.A. Sturges, dengan rumus :

$k = 1 + 3{,}3 \log n$

k = bilangan bulat, dan n = banyaknya data.

c. Tentukan panjang kelas interval (p) dengan rumus : $p = \frac{jangkauan\ (J)}{banyaknya\ kelas\ (k)}$

d. Tentukan batas kelas interval (batas bawah dan batas atas). Batas bawah kelas pertama dapat diambil sama dengan nilai datum terkecil atau nilai yang lebih kecil dari datum terkecil.

e. Tentukan frekuensi dari setiap kelas interval dengan terlebih dahulu menentukan turusnya.

Contoh 6.

Hasil nilai tes matematika 30 siswa kelas XI IPA SMA sebagai berikut :

60	61	**30**	62	43	55	67	68	69	39
41	63	67	50	76	57	65	49	54	**88**
40	71	70	51	56	54	78	54	72	69

Sajikan dalam tabel distribusi frekuensi.

Jawab:

- Dari kumpulan data di atas, datum terbesar adalah 88, dan yang terkecil adalah 30, sehingga diperoleh jangkauan data (J) = 88 – 30 = 58.
- Banyak kelas interval (k) = 1 + 3,3 log 30 = 1 + 3,3 (1,477)
  = 1 + 4,874 = 5,874 ≈ 6
- Panjang kelas interval (p) = $\frac{J}{k} = \frac{58}{6}$ = 9,67 ≈ 10
- Batas bawah kelas yang pertama, disini batas bawah kelas pertama adalah datum terkecil (tetapi tidak harus, dapat juga digunakan bilangan lain).
  Misalnya batas bawah kelas interval pertama digunakan datum terkecil = 30, sehingga batas atas kelas interval pertama = (30 + p) – 1 = (30 + 10) – 1 = 39 (10 adalah panjang kelas).

Diperoleh tabel distribusi frekuensi berikut.

Nilai Tes Matematika	Turus	Frekuensi
30 – 39	II	2
40 – 49	IIII	4
50 – 59	𝍸 III	8
60 – 69	𝍸 𝍸	10
70 – 79	𝍸	5
80 – 89	I	1
	Jumlah	30

Berikut ini beberapa istilah sehubungan dengan tabel distribusi frekuensi untuk data berkelompok.

- **Batas bawah kelas dan batas atas kelas**
  Untuk kelas 30 – 39, batas bawah adalah 30 dan batas atas adalah 39.
- **Tepi bawah kelas dan tepi atas kelas**
  Untuk kelas 30 – 39, tepi bawah kelasnya adalah (30 – 0,5) = 29,5 dan tepi atas kelasnya (39 + 0,5) = 39,5.
  Tepi bawah diperoleh dari batas bawah kelas dikurangi setengah satuan pengukuran terkecil yang digunakan, sedangkan tepi atas kelas diperoleh dari batas atas kelas ditambah setengah satuan pengukuran terkecil.
- **Panjang interval kelas**
  Untuk kelas 30 – 39, panjang interval kelas adalah (tepi atas – tepi bawah) = 39,5 – 29,5 = 10.
- **Titik tengah kelas**
  titik tengah kelas interval (*mid point*) yaitu rataan antara batas bawah dan batas atas kelas interval. Untuk kelas 30 – 39, titik tengah kelas adalah $\frac{30+39}{2} = 34{,}5$.

5. Histogram dan Poligon Frekuensi

Setelah mengelompokkan data ke dalam beberapa kelas menjadi tabel distribusi frekuensi, kita dapat menyajikan data berkelompok tersebut dalam bentuk grafik. Penyajian data dalam bentuk grafik ini bertujuan untuk menyampaikan data kepada pembaca dalam bentuk gambar. Bagi kebanyakan orang, melihat informasi yang disajikan dari gambar lebih mudah daripada melihat dari dari kumpulan bilangan-bilangan pada tabel atau distribusi frekuensi.

Ada tiga macam grafik yang biasanya digunakan untuk menyajikan atau mempresentasikan data berkelompok, yaitu:

a. Histogram
b. Poligon frekuensi
c. Ogive/ grafik frekuensi kumulatif.

Histogram adalah penyajian distribusi frekuensi menggunakan diagram batang tegak. Pada histogram, antara dua batang yang berdampingan tidak terdapat jarak, berbeda dengan penyajian diagram batang terdahulu. Sumbu datar pada histogram menyatakan kelas-kelas interval, sedangkan sumbu tegak menyatakan frekuensi. Dalam hal ini, batas kelas interval merupakan tepi bawah dan tepi atas.

Tepi bawah = batas bawah – 0,5
Tepi atas = batas atas + 0,5 (± 0,5 jika nilai datanya teliti hingga satuan)

Jika setiap titik tengah sisi atas persegi panjang yang berdampingan dihubungkan dengan suatu garis, maka terbentuk grafik yang disebut ***poligon frekuensi***.

Contoh 7.

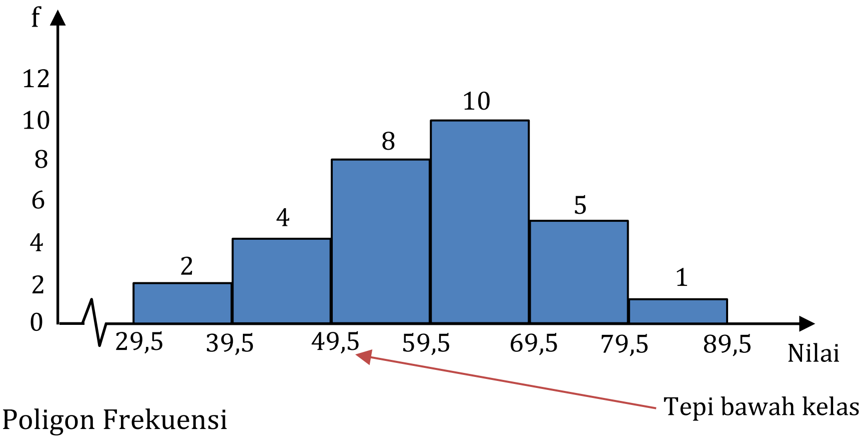
Gambar histogram dan poligon frekuensi dari tabel distribusi frekuensi dari contoh 6 di atas.

Nilai Tes Matematika	Frekuensi
30 – 39	2
40 – 49	4
50 – 59	8
60 – 69	10
70 – 79	5
80 – 89	1

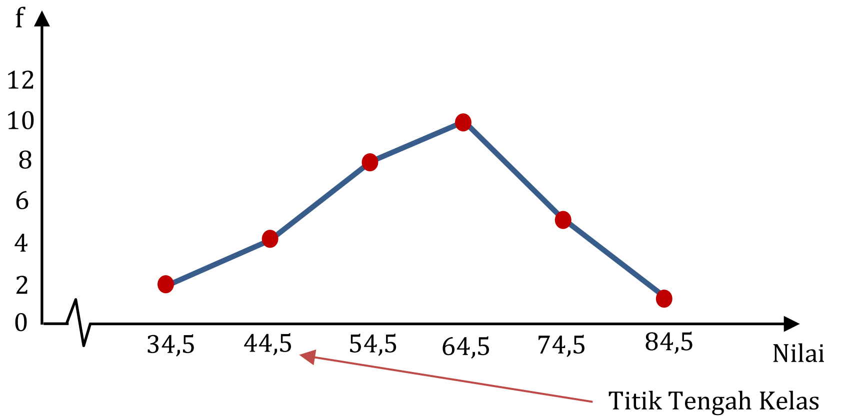
Jawab:

Nilai Tes Matematika	Tepi Kelas	Titik Tengah	Frekuensi
30 – 39	29,5 – 39,5	34,5	2
40 – 49	39,5 – 49,5	44,5	4
50 – 59	49,5 – 59,5	54,5	8
60 – 69	59,5 – 69,5	64,5	10
70 – 79	69,5 – 79,5	74,5	5
80 – 89	79,5 – 89,5	84,5	1

Histogram



Poligon Frekuensi



6. Tabel Distribusi Frekuensi Kumulatif dan Ogive

Tabel distribusi frekuensi kumulatif diperoleh dari tabel distribusi frekuensi biasa, dengan cara menjumlahkan frekuensi demi frekuensi.

Tabel distribusi frekuensi kumulatif ada 2 macam, yaitu distribusi frekuensi kumulatif ***kurang dari*** dan distribusi frekuensi kumulatif ***lebih dari***.

Untuk membuat tabel distribusi frekuensi kumulatif *kurang dari*, digunakan *tepi atas kelas*. Sedangkan untuk distribusi frekuensi kumulatif *lebih dari*, digunakan *tepi bawah kelas*.

Contoh 8.

Buatlah tabel distribusi frekuensi kumulatif untuk data pada contoh 6 di atas.

Nilai Tes Matematika	Frekuensi
30 – 39	2
40 – 49	4
50 – 59	8
60 – 69	10
70 – 79	5
80 – 89	1
	30

Jawab:

Tabel distribusi frekuensi kumulatif *kurang dari*

Nilai	Frekuensi kumulatif
$\leq$ 39,5	2
$\leq$ 49,5	2 + 4 = 6
$\leq$ 59,5	6 + 8 = 14
$\leq$ 69,5	14 + 10 = 24
$\leq$ 79,5	24 + 5 = 29
$\leq$ 89,5	29 + 1 = 30

Tabel distribusi frekuensi kumulatif *lebih dari*

Nilai	Frekuensi kumulatif
$\geq$ 29,5	28 + 2 = 30
$\geq$ 39,5	24 + 4 = 28
$\geq$ 49,5	16 + 8 = 24
$\geq$ 59,5	6 + 10 = 16
$\geq$ 69,5	1 + 5 = 6
$\geq$ 79,5	1

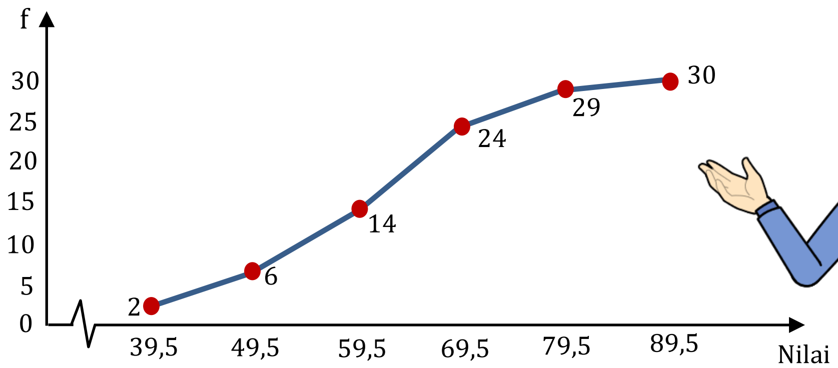
Dari tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari dan lebih dari, kita dapat menggambarkan *ogive kurang dari* atau *ogive positif* dan *ogive lebih dari* atau *ogive negatif*.
(***Ogive*** adalah grafik distribusi frekuensi kumulatif, berupa kurva yang menghubungkan titik-titik yang membentuk poligon frekuensi kumulatif kurang dari atau lebih dari)

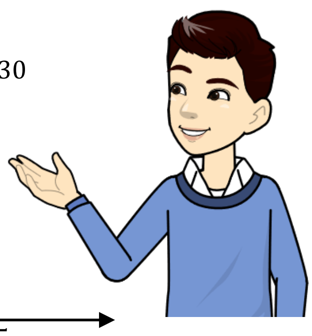
Contoh 9.

Gambarkan ogive positif dan ogive negatif dari tabel distribusi frekuensi kumulatif pada contoh 8 di atas.

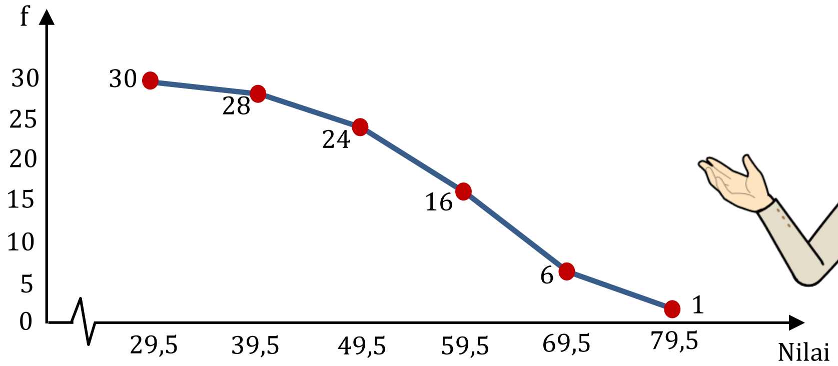
Jawab:

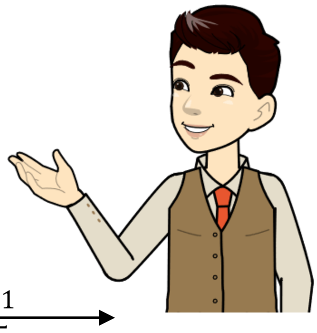
Ogive positif, diperoleh dari tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari.





Ogive negatif, diperoleh dari tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari.





Coba kalian perhatikan perbedaannya! Ogive positif kurvanya selalu naik, sedangkan ogive negatif kurvanya selalu turun.

C. Rangkuman

- Penyajian data yang baik dan benar bermanfaat untuk memberi gambaran yang sistematis tentang peristiwa-peristiwa yang merupakan hasil penelitian atau observasi, data lebih cepat dimengerti, memudahkan dalam membuat analisis data, dan pengambilan keputusan atau kesimpulan lebih tepat, cepat, dan akurat.
- Tabel distribusi frekuensi adalah bentuk penyajian data dengan cara membagi data menjadi beberapa kelompok dan disajikan dalam suatu tabel yang terdiri dari kelas interval dan frekuensi.
- Histogram adalah penyajian distribusi frekuensi menggunakan diagram batang tegak, dimana di antara dua batang yang berdampingan tidak terdapat jarak. Sumbu datar pada histogram menyatakan kelas-kelas interval, sedangkan sumbu tegak menyatakan frekuensi.
- Poligon frekuensi adalah grafik yang diperoleh dengan cara menghubungkan setiap titik tengah sisi atas persegi panjang yang berdampingan pada histogram dengan suatu garis.
- Tabel distribusi frekuensi kumulatif diperoleh dari tabel distribusi frekuensi biasa dengan cara menjumlahkan frekuensi demi frekuensi. Tabel distribusi frekuensi kumulatif ada 2 macam, yaitu distribusi frekuensi kumulatif kurang dari dan distribusi frekuensi kumulatif lebih dari.
- Ogive adalah grafik distribusi frekuensi kumulatif, berupa kurva yang menghubungkan titik-titik yang membentuk poligon frekuensi kumulatif kurang dari (ogive positif) atau lebih dari (ogive negatif).

D. Latihan Soal

1. Berikut ini diberikan empat distribusi frekuensi. Setiap distribusi frekuensi yang diberikan terdapat kesalahan dalam penyusunannya. Sebutkan kesalahan masing distribusi frekuensi dan alasannya.

a.

Kelas	Frekuensi
27 – 32	1
33 – 38	0
39 – 44	6
45 – 49	4
50 – 55	2

c.

Kelas	Frekuensi
123 – 127	3
128 – 132	7
138 – 142	2
143 – 147	19

b.

Kelas	Frekuensi
5 – 9	1
9 – 13	2
13 – 17	5
17 – 20	6
20 – 24	3

d.

Kelas	Frekuensi
9 – 13	1
14 – 19	6
20 – 25	2
26 – 28	5
29 – 32	9

2. Distribusi frekuensi yang diberikan berikut mempresentasikan jumlah kendaraan roda empat terpilih dalam suatu kota yang menghabiskan bahan bakar bensin dalam jumlah tertentu (liter) setiap minggunya. Kolom kelas menyatakan jumlah bahan bakar bensin yang dihabiskan dalam 1 minggu sedangkan kolom frekuensi adalah banyaknya kendaraan roda empat.

Kelas Interval	Tepi Kelas	Frekuensi
5 – 8	4,5 – 8,5	5
9 – 12	8,5 – 12,5	8
13 – 16	12,5 – 16,5	7
17 – 20	16,5 – 20,5	15
21 – 24	20,5 – 24,5	21
25 – 28	24,5 – 28,5	16

Jawablah pertanyaan berikut ini.

a. Berapa banyak kendaraan roda 4 yang menghabiskan bensin kurang dari 4,5 liter?

b. Berapa banyak kendaraan roda 4 yang menghabiskan bensin kurang dari 8,5 liter?

c. Lanjutkan untuk mencari banyak kendaraan yang kurang dari batas bawah kelas kemudian tuliskan pada tabel di bawah ini.

	Frekuensi Kumulatif
Kurang dari 4,5	
Kurang dari 8,5	
Kurang dari 12,5	
Kurang dari 16,5	
Kurang dari 20,5	
Kurang dari 24,5	
Kurang dari 28,5	

3. Data berikut adalah data jumlah pengunjung perpustakaan SMA Merdeka dalam 40 hari kerja berturut-turut.

50	65	60	71	55	82	76	70	80	64
78	95	88	90	81	75	78	78	70	68
85	67	74	86	59	63	84	66	75	87
94	96	72	78	65	81	85	95	88	96

Berdasarkan data tersebut, buatlah

a. Tabel distribusi frekuensi dengan 7 kelas

b. Histogram, poligon frekuensi, dan ogive kurang dari (ogive positif).

4. Daftar penjualan harian (dalam persen) selama 50 hari suatu produk makanan adalah sebagai berikut.

60	47	82	95	88	97	70	64	70	70
72	67	66	68	98	58	78	89	44	55
90	77	86	58	64	85	82	83	72	77
95	74	72	88	74	72	86	50	94	92
77	39	90	63	68	80	91	75	76	78

Berdasarkan data di atas, buatlah

a. Tabel distribusi frekuensi.

b. Histogram, poligon frekuensi, dan ogive lebih dari (ogive negatif).

5. Misalkan Anda adalah seorang pengusaha real estate di kota Masamba. Anda memperoleh daftar harga rumah yang sudah Anda jual dalam 6 bulan terakhir. Anda ingin mengorganisasi data yang Anda terima agar Anda dapat memberikan informasi yang akurat kepada calon pembeli. Gunakan data berikut ini untuk disajikan dalam histogram, poligon frekuensi, dan ogive. Data berikut dalam puluhan ribu rupiah.

142.000	127.000	99.600	89.000	93.000	99.500	162.000
73.800	135.000	119.000	67.900	156.300	104.500	108.650
123.000	91.000	205.000	110.000	156.300	104.000	133.900
179.000	112.000	147.000	321.550	87.900	88.400	180.000
159.400	205.300	144.400	163.000	96.000	81.000	131.000
114.000	119.600	93.000	123.000	187.000	96.000	80.000
231.0	189.500	177.600	83.400	77.000	132.300	166.000

a. Pertanyaan-pertanyaan apa yang yang dapat dijawab dengan mudah dengan melihat histogram dibandingkan dengan daftar harga yang diberikan di atas?

b. Pertanyaan berbeda apa yang dapat dijawab dengan lebih mudah dengan melihat poligon frekuensi dibandingkan dengan daftar harga tersebut?

a. Pertanyaan berbeda apa yang dapat dijawab dengan lebih mudah dengan melihat ogive dibandingkan dengan daftar harga tersebut?

b. Apakah ada data yang sangat besar atau sangat kecil dibandingkan dengan nilai lainnya?

c. Grafik mana yang menampilkan nilai ekstrim tersebut dengan lebih baik?

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

1. Alternatif Jawaban
   a. Panjang kelas distribusi frekuensi (a) adalah 6, sedangkan yang keempat 45 – 49 panjangnya adalah 5. Panjang setiap kelas dalam suatu distribusi frekuensi harus sama.

   b. Kelas-kelas pada distribusi frekuensi (b) mempunyai batas yang saling beririsan. Hal ini dihindari agar tidak ada data yang sama masuk ke dalam dua kelas yang berbeda.

   c. Terdapat kelas yang hilang pada distribusi frekuensi (c) yaitu kelas 133 – 137. Jika memang tidak ada data yang terletak pada selang ini maka sebaiknya kelas ini tetap dituliskan dengan frekuensi 0 (nol).

   d. Kelas pada distribusi frekuensi (d) mempunyai panjang kelas yang berbeda-beda. Kelas yang pertama mempunyai panjang kelas 5 sedangkan kelas kedua mempunyai panjang kelas 6.

2. Alternatif Jawaban

   a. Tidak ada kendaraan roda empat yang menghabiskan bensin kurang dari 4,5 liter dalam seminggu.

   b. Terdapat 5 kendaraan roda empat yang menghabiskan bensin kurang dari 8,5 liter dalam seminggu.

   c. Lengkapi tabel

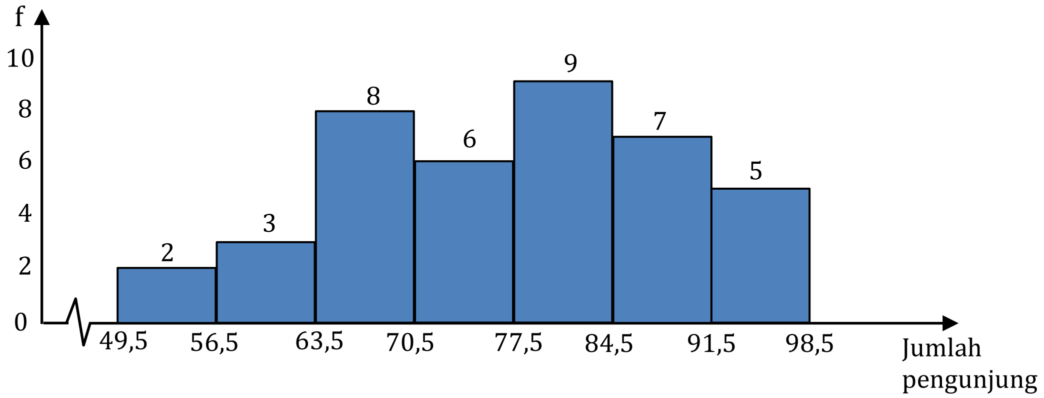
	Frekuensi Kumulatif
Kurang dari 4,5	0
Kurang dari 8,5	5
Kurang dari 12,5	13
Kurang dari 16,5	20
Kurang dari 20,5	35
Kurang dari 24,5	56
Kurang dari 28,5	72

3. Alternatif Jawaban

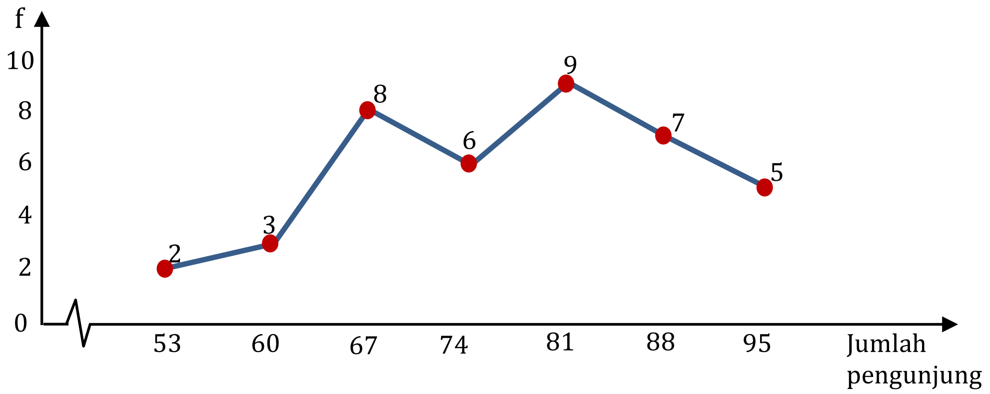
   a. Distribusi frekuensi dengan 7 kelas

Kelas	Frekuensi
50 – 56	2
57 – 63	3
64 – 70	8
71 – 77	6
78 – 84	9
85 – 91	7
92 – 98	5

b. Histogram

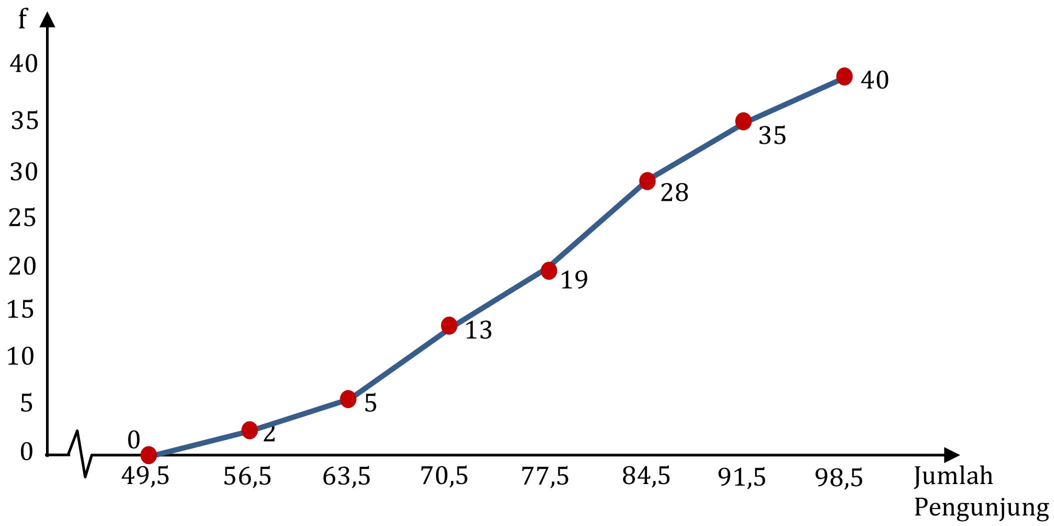


Poligon



Ogive positif
Distribusi frekuensi kurang dari

Jumlah pengunjung	Frekuensi kumulatif (fk ≤)
≤ 56,5	2
≤ 63,5	5
≤ 70,5	13
≤ 77,5	19
≤ 84,5	28
≤ 91,5	35
≤ 98,5	40

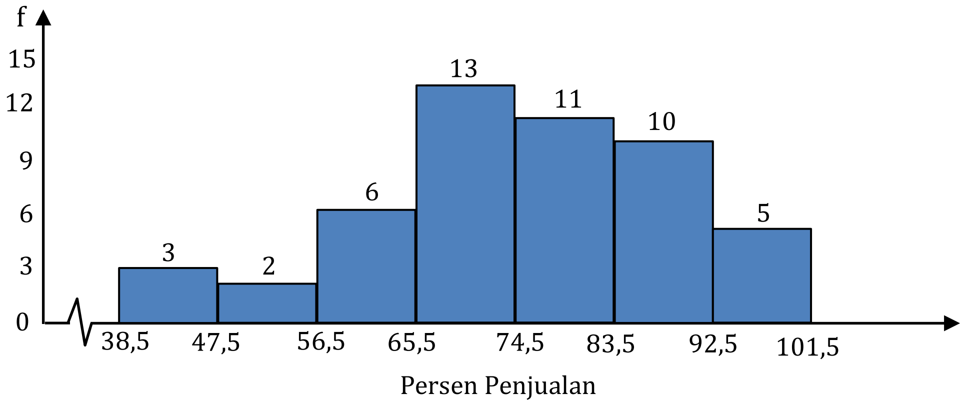


4. Alternatif Jawaban

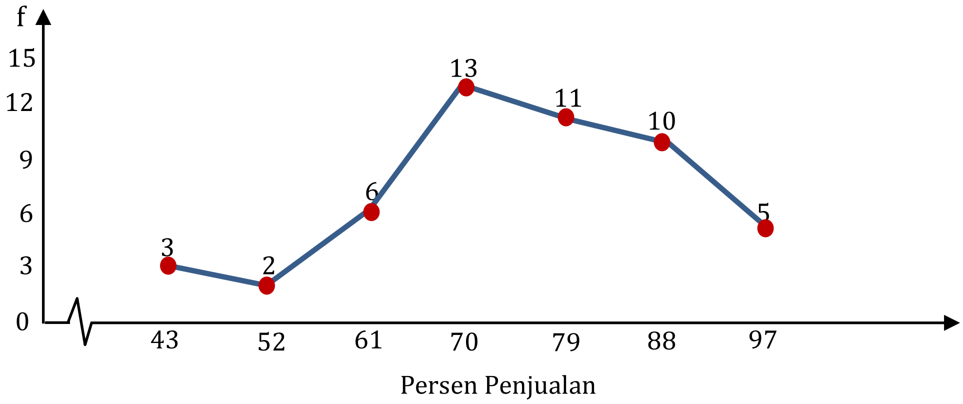
   a. Tabel distribusi frekuensi

Kelas	Frekuensi
39 – 47	3
48 – 56	2
57 – 65	6
66 – 74	13
75 – 83	11
84 – 92	10
93 – 101	5

   b. Histogram



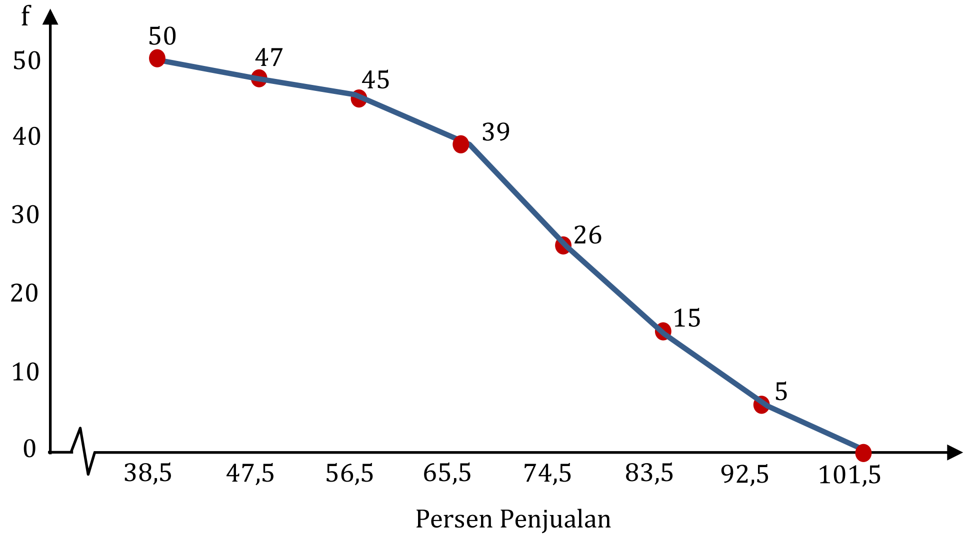
Poligon Frekuensi



Ogive Negatif

Distribusi kumulatif lebih dari

Persen Penjualan	Frekuensi kumulatif (fk ≥)
≥ 38,5	50
≥ 47,5	47
≥ 56,5	45
≥ 65,5	39
≥ 74,5	26
≥ 83,5	15
≥ 92,5	5



5. Alternatif Jawaban

   a. Salah satu pertanyaan yang bisa diajukan adalah “Ada berapa rumah yang dijual dalam kisaran Rp1.000.000.000,00 – Rp2.000.000.000,00?”

   b. Dengan melihat poligon frekuensi, pertanyaan “Berapa kisaran harga rumah yang paling banyak diminati oleh para pembeli?”

   c. Dengan melihat ogive, pertanyaan yang bisa diajukan adalah “Berapa banyak rumah yang dengan harga di bawah Rp1.500.000.000,00?”

   d. Terdapat data dengan nilai paling kecil dibandingkan dengan data lainnya yaitu Rp679.000.000,00 dan data yang nilainya paling besar adalah Rp3.215.500,00.

   e. Dengan melihat ketiga grafik, grafik poligon frekuensi menampilkan fitur nilai ekstrim (minimum dan maksimum) lebih baik dari kedua grafik lainnya.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu kegunaan penyajian data dalam bentuk tabel atau diagram?	◯	◯
2	Apakah Anda tahu cara menyajikan data dalam tabel distribusi data berkelompok?	◯	◯
3	Apakah Anda tahu cara menyajikan data dalam grafik histogram?	◯	◯
4	Apakah Anda tahu perbedaan histogram dan diagram batang?	◯	◯
5	Apakah Anda tahu cara menyajikan data dalam grafik poligon frekuensi?	◯	◯
6	Apakah Anda tahu cara membuat tabel distribusi frekuensi kumulatif?	◯	◯
7	Apakah Anda tahu cara menyajikan data dalam grafik ogive positif atau negatif?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
UKURAN PEMUSATAN DATA

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan kalian dapat menentukan ukuran pemusatan data berupa mean, modus dan median, menganalisis ukuran pemusatan data yang disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram serta menggunakannnya untuk menyelesaikan masalah.

B. Uraian Materi

Dalam pembicaraan sehari-hari kita sering mendengar teman kita atau orang lain mengatakan kalimat-kalimat pernyataan seperti:

- “Rata-rata orang yang bekerja di perusahaan itu datang jam 7 pagi”
- “Eh, Jangan salah, rata-rata orang yang datang di pestaku waktu itu orang kaya lho!”.
- ”rata-rata orang menonton sinetron pada jam 8 sesudah makan malam”.

Pertanyaan kemudian adalah apakah memang benar yang dimaksud “rata-rata” pada kalimat-kalimat itu menunjukkan arti “rata-rata” yang dimaksud dalam ilmu statistika?. Bukankah “rata-rata” dalam kalimat itu bisa diganti dengan kata “kebanyakan”?. Kata “kebanyakan” yang dalam ketiga pernyataan tersebut dikatakan “rata-rata” diartikan sebagai “modus” yang dalam statistika merupakan data yang paling sering muncul.

Pernyataan-pernyataan di atas walaupun tidak menggunakan istilah yang benar dalam statistika, namun sudah sangat familiar dituturkan oleh masyarakat. Hal ini menunjukkan bahwa ukuran pemusatan data sangat banyak aplikasinya dalam kehidupan nyata kita sehari-hari.

Pernahkah kalian menyaksikan secara langsung proses penghitungan suara dalam suatu pesta demokrasi, misalnya pemilihan kepala desa, pemilihan Bupati dan Wakil Bupati, pemilihan Gubernur dan Wakil Gubernur, pemilihan anggota DPR/DPD, atau pemilhan Presiden? Panitia membuka surat suara, mengamati, dan mencatat pilihan rakyat yang tertera pada surat suara.

Gambar 1. Petugas KPPS melakukan penghitungan suara Pemilu 2019
Sumber: https://www.jawapos.com/jpg-today/11/03/2019

Setiap surat suara menghasilkan satu data perhitungan. Nama calon yang paling sering muncul menjadi pemenang kontestasi. Suara yang paling sering muncul dalam hal ini adalah salah aplikasi modus dalam kehidupan nyata.

Ukuran pemusatan dari sekumpulan data merupakan suatu nilai yang diperoleh dari sekumpulan data yang dapat dipergunakan untuk mewakili kumpulan data tersebut. Suatu kumpulan data biasanya mempunyai kecenderungan untuk terkonsentrasi pada suatu nilai pemusatan.

Pada kegiatan pembelajaran 2 ini, kalian akan mempelajari ukuran pemusatan data yaitu rata-rata hitung (mean), modus, dan median dari data berkelompok yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi dan histogram.

1. Rata-rata (Mean) Data Berkelompok

Rata-rata (mean) data berkelompok dapat ditentukan dengan 3 cara, yaitu:

a. Cara rumus umum rata-rata hitung :

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i} = \frac{f_1.x_1 + f_2.x_2 + f_3.x_3 + \cdots + f_n.x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}$$

Keterangan :
x_i = nilai tengah kelas ke – i
f_i = frekuensi kelas ke – i

b. Cara Simpangan Rataan (Rataan Sementara):

$$\bar{x} = \overline{x_s} + \frac{\sum f_i . d_i}{\sum f_i}$$

Keterangan :
$\overline{x_s}$ = rataan sementara (nilai tengah kelas dengan *frekuensi terbesar*)
f_i = frekuensi kelas ke – i
d_i = selisih setiap nilai tengah dengan rataan sementara ($d_i = x_i - \overline{x_s}$)

c. Cara Pengkodean (Cara coding):

$$\bar{x} = \overline{x_s} + p.\frac{\sum f_i . u_i}{\sum f_i}$$

Keterangan :
$\overline{x_s}$ = rataan sementara (nilai tengah kelas dengan *frekuensi terbesar*)
f_i = frekuensi kelas ke – i
p = panjang kelas
U_i = kode, dengan ketentuan : $U_i = 0$ untuk kelas $\overline{x_s}$, kode bulat negatif berurutan (–1, –2, –3, ...) untuk kelas-kelas sebelum $\overline{x_s}$, dan kode bulat positif berurutan (+1, +2, +3, ...) untuk kelas-kelas sesudah $\overline{x_s}$.

Contoh 1.

Tabel berikut memperlihatkan berat badan 50 orang siswa SMA Merdeka.
Tentukan rata-rata hitungnya dengan menggunakan:
a. rumus umum mean
b. rataan sementara
c. metode pengkodean

Berat Badan (kg)	f
31 – 35	4
36 – 40	6
41 – 45	9
46 – 50	14
51 – 55	10
56 – 60	5
61 – 65	2

***Jawab*:**

a. Rataan dengan rumus umum mean

Berat Badan	f_i	x_i	$f_i \,.\, x_i$
31 – 35	4	33	132
36 – 40	6	38	228
41 – 45	9	43	387
46 – 50	14	48	672
51 – 55	10	53	530
56 – 60	5	58	290
61 – 65	2	63	126
Jumlah	50	-	2.365

Nilai x_i diperoleh dari nilai tengah setiap interval kelas. Misalnya pada baris pertama, nilai x_1 = ½(31 + 35) = ½(66) = 33. Demikian pula nilai x_i yang lain.

Nilai rata-rata hitung (mean) adalah:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \,.\, x_i}{\sum f_i} = \frac{2.365}{50} = \mathbf{47,3}$$

Jadi, rata-rata (mean) berat badan siswa SMA Merdeka adalah 47,3 kg.

b. Rataan dengan menggunakan rataan sementara

Berat Badan	f_i	x_i	$d_i = x_i - \overline{x_s}$	$f_i \,.\, d_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
31 – 35	4	33	33 – 48 = –15	–60
36 – 40	6	38	38 – 48 = –10	–60
41 – 45	9	43	43 – 48 = –5	–45
46 – 50	14	**48**	48 – 48 = 0	0
51 – 55	10	53	53 – 48 = 5	50
56 – 60	5	58	58 – 48 = 10	50
61 – 65	2	63	63 – 48 = 15	30
Jumlah	50	-	-	–35

Keterangan:
- Kolom (3), pilih rataan sementara $\overline{x_s}$, yaitu nilai x_i dengan frekuensi terbesar, sehingga diperoleh $\overline{x_s} = \mathbf{48}$.
- Kolom (4), isikan dengan selisih dari kolom(3) dengan 48 atau x_i – 48.
- Kolom (5), isikan dengan hasil kali kolom (2) dengan kolom (4).

Nilai rata-rata hitung (mean) adalah:

$$\bar{x} = \overline{x_s} + \frac{\sum f_i . d_i}{\sum f_i}$$
$$= 48 + \frac{-35}{50} = 48 - 0,7 = \mathbf{47,3}$$

Jadi, rata-rata (mean) berat badan siswa SMA Merdeka adalah 47,3 kg.

c. Rataan dengan menggunakan cara pengkodean

Keterangan:
- Kolom (3), pilih rataan sementara $\overline{x_s} = \mathbf{48}$ (kelas dengan frekuensi terbesar).

- Kolom (4), isi kode 0 pada kelas $\overline{x_s}$, bilangan negatif berurutan (−1, −2, −3) pada baris sebelumnya dan bilangan positif berurutan (1, 2, 3) pada baris setelahnya.
- Panjang kelas, p = 5.

Berat Badan	f_i	x_i	U_i	$f_i \,.\, U_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
31 – 35	4	33	−3	−12
36 – 40	6	38	−2	−12
41 – 45	9	43	−1	−9
46 – 50	14	**48**	0	0
51 – 55	10	53	1	10
56 – 60	5	58	2	10
61 – 65	2	63	3	6
Jumlah	50	-	-	−7

Nilai rata-rata hitung (mean) adalah:

$$\overline{x} = \overline{x_s} + p.\frac{\sum f_i.u_i}{\sum f_i}$$

$$= 48 + 5.\left(\frac{-7}{50}\right) = 48 + (-0{,}7) = \mathbf{47{,}3}$$

Jadi, rata-rata (mean) berat badan siswa SMA Merdeka adalah 47,3 kg.

2. Modus Data Berkelompok

Modus adalah ukuran pemusatan data yang digunakan untuk menyatakan kejadian yang paling banyak terjadi atau paling banyak muncul. Modus data berkelompok ditentukan dengan rumus:

$$Mo = L + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

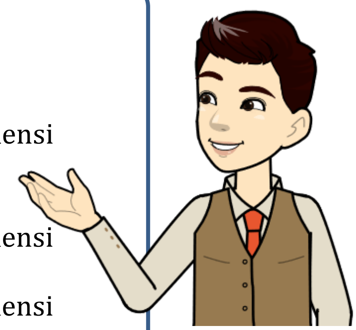
Keterangan :

L = Tepi bawah kelas modus (kelas dengan frekuensi terbesar)

p = panjang kelas interval

d_1 = selisih antara frekuensi kelas modus dan frekuensi tepat satu kelas sebelum kelas modus

d_2 = selisih antara frekuensi kelas modus dan frekuensi tepat satu kelas sesudah kelas modus



Contoh 2.

Tentukan modus data berat badan 50 orang siswa SMA Merdeka pada tabel berikut

Berat Badan	f_i
31 – 35	4
36 – 40	6
41 – 45	9
46 – 50	14
51 – 55	10
56 – 60	5
61 – 65	2

***Jawab*:**

Letak Modus pada kelas interval: 46 – 50

Tepi bawah kelas modus L = 46 – 0,5 = 45,5

Panjang kelas interval P = 5

d_1 = 14 – 9 = 5

d_2 = 14 – 10 = 4

sehingga diperoleh modus adalah

$$Mo = L + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) = 45{,}5 + 5.\left(\frac{5}{5+4}\right)$$

$$= 45{,}5 + \frac{25}{9} = 45{,}5 + 2{,}78 = \mathbf{48{,}28}$$

Jadi, modus berat badan siswa SMA Merdeka adalah 48,28 kg.

3. Median Data Berkelompok

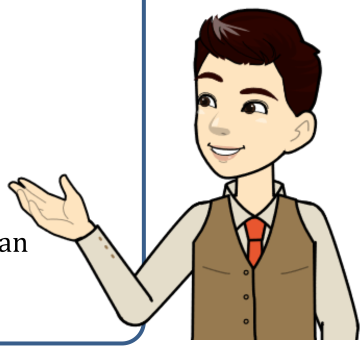
Median adalah ukuran yang terletak di tengah setelah data diurutkan. Median data berkelompok ditentukan dengan rumus:

$$Me = L + p\left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right)$$

dimana median terletak pada datum ke $\frac{n}{2}$

Keterangan:

L = Tepi bawah kelas median
p = panjang kelas interval
F = frekuensi kumulatif tepat sebelum kelas median
f_m = frekuensi kelas median
n = banyak datum



Contoh 3.

Tentukan median data berat badan 50 orang siswa SMA Merdeka pada tabel berikut.

Berat Badan	f_i	F
31 – 35	4	4
36 – 40	6	10
41 – 45	9	19
46 – 50	14	33
51 – 55	10	43
56 – 60	5	48
61 – 65	2	50
Jumlah	50	-

***Jawab*:**

Letak Median pada datum ke $\frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$
jadi, letak median pada interval kelas 46 – 50 (dilihat dari frekuensi kumulatif = 33, berarti terletak data ke-20 sampai ke-33)

L = 46 – 0,5 = 45,5 (tepi bawah kelas median)
p = 5 (panjang kelas)
F = 19 (frekuensi kumulatif sebelum kelas median)
f_m = 14 (frekuensi kelas median)

Sehingga diperoleh median adalah

$$M_e = L + p\left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right) = 45{,}5 + 5.\left(\frac{25-19}{14}\right)$$

$$= 45{,}5 + 5.\left(\frac{6}{14}\right) = 45{,}5 + \frac{30}{14}$$

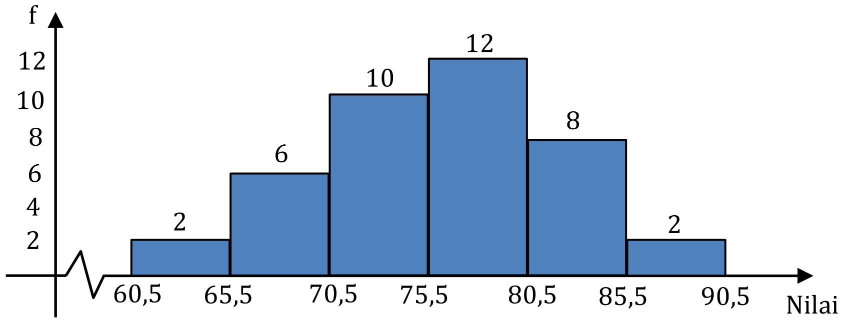
$$= 45{,}5 + 2{,}14 = \mathbf{47{,}64}$$

Jadi, median berat badan siswa SMA Merdeka adalah 47,63 kg.

Contoh 4.

Data hasil ulangan matematika 40 siswa kelas XII SMA Merdeka disajikan pada histogram berikut. Hitunglah:

a. Mean
b. Modus
c. Median



Jawab:

a. Mean

Untuk menentukan nilai mean, kita perlu membuat tabel distribusi frekuensi dari histogram di atas, kemudian kita akan menggunakan metode pengkodean untuk menghitung nilai mean sebagai berikut.

Tepi Kelas	f_i	x_i	U_i	$f_i \,.\, U_i$
60,5 – 65,5	2	½(60,5 + 65,5) = 63	−3	−6
65,5 – 70,5	6	½(65,5 + 70,5) = 68	−2	−12
70,5 – 75,5	10	½(70,5 + 75,5) = 73	−1	−10
75,5 – 80,5	12	½(75,5 + 80,5) = 78	0	0
80,5 – 85,5	8	½(80,5 + 85,5) = 83	1	8
85,5 – 90,5	2	½(85,5 + 90,5) = 87	2	4
Jumlah	40	-	-	−16

Nilai tengah x_i dapat ditentukan dari titik tengah setiap tepi kelas. Rataan sementara $\overline{x_s} = \mathbf{78}$ diambil dari kelas dengan frekuensi terbesar.
Panjang kelas p diperoleh dari selisih dua tepi kelas, misalnya diambil kelas yang pertama, maka p = 65,5 – 60,5 = 5

Sehingga, diperoleh rata-rata hitung (mean) adalah:

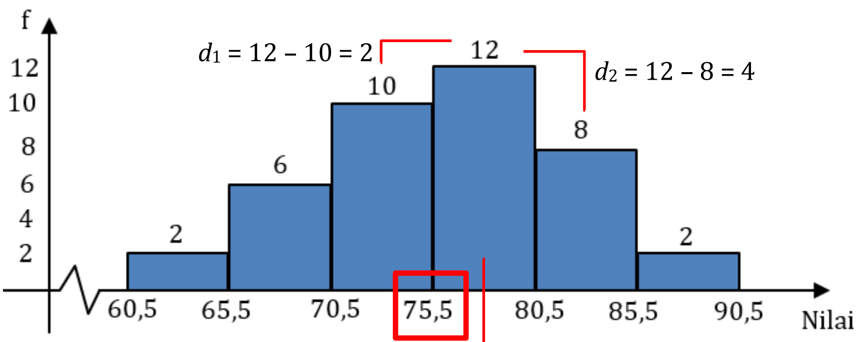
$$\overline{x} = \overline{x}_s + p.\frac{\sum f_i.u_i}{\sum f_i}$$

$$= 78 + 5.\left(\frac{-16}{40}\right) = 78 + 5(-0{,}4) = 78 - 2 = \mathbf{76}$$

Jadi, rata-rata nilai ulangan matematika 40 siswa tersebut adalah 76.

b. Modus

Di atas kita telah membuat tabel distribusi frekuensi, namun untuk contoh ini kita akan menentukan modus dari data pada histogram agar kalian mengetahui cara menentukan modus langsung dari histogram.



- Kelas dengan frekuensi terbesar

diperoleh tepi bawah kelas modus L = 75,5

- d_1 = 12 – 10 = 2 dan d_2 = 12 – 8 = 4
- Panjang kelas interval adalah selisih dari dua tepi kelas, p = 65,5 – 60,5 = 5.

sehingga diperoleh modus adalah

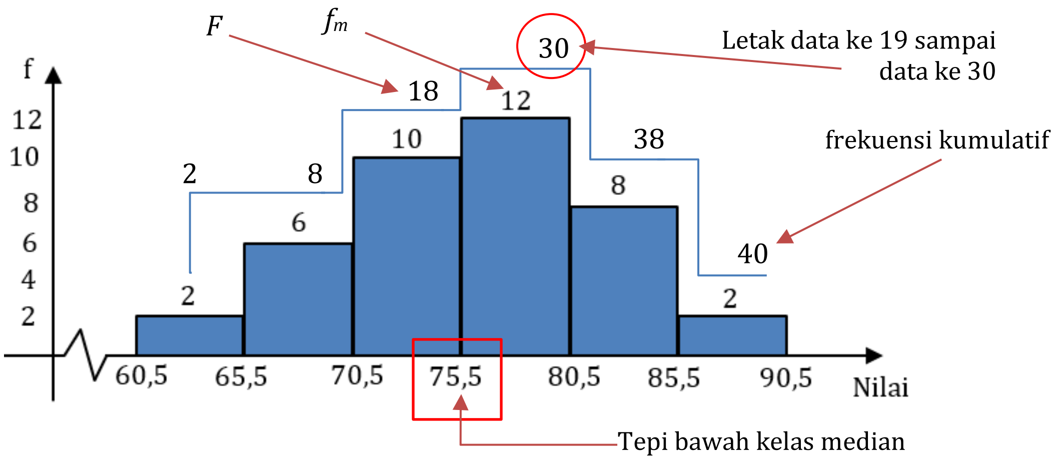
$$Mo = L + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) = 75{,}5 + 5\left(\frac{2}{2+4}\right)$$

$$= 75{,}5 + \frac{10}{6} = 75{,}5 + 1{,}67 = \mathbf{77{,}17}$$

Jadi, modus nilai ulangan matematika 40 siswa tersebut adalah 77,17.

c. Median

Median juga dapat secara langsung dihitung dari data histogram seperti berikut ini.



Pertama, kita harus menentukan frekuensi kumulatif untuk setiap kelas interval, yaitu dengan menjumlahkan frekuensi kelas dengan frekuensi kelas-kelas sebelumnya, seperti ditunjukkan di bagian atas frekuensi setiap kelas pada histogram.

Letak Median pada datum ke $\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$

jadi, letak median pada interval kelas dengan tepi 75,5 – 80,5 (dilihat dari frekuensi kumulatif = 30, berarti terletak data ke-19 sampai ke-30)

L = 75,5 (tepi bawah kelas median)
p = 5
F = 18 (frekuensi kumulatif sebelum kelas median)
f_m = 12 (frekuensi kelas median)

Sehingga diperoleh median adalah

$$M_e = L + p\left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right) = 75{,}5 + 5\left(\frac{20-18}{12}\right)$$

$$= 75{,}5 + 5\left(\frac{2}{12}\right) = 75{,}5 + \frac{10}{12}$$

$$= 75{,}5 + 0{,}83 = \mathbf{76{,}33}$$

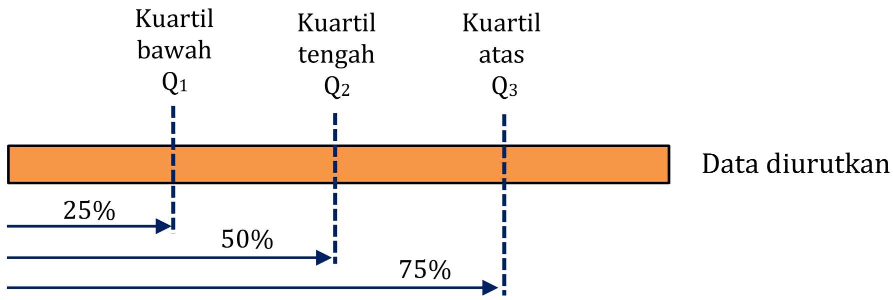
Jadi, median nilai ulangan matematika 40 siswa tersebut adalah 76,33.

4. Kuartil dan Desil untuk Data Berkelompok (**)

Selain ukuran pemusatan data, juga ada ukuran letak data yang didasarkan pada letak ukuran tersebut dalam suatu distribusi data. Ukuran letak data membagi sekumpulan data yang berurutan menjadi beberapa bagian yang sama, diantaranya kuartil, desil, dan persentil. Pada bagian ini kita hanya menambahkan pembahasan tentang kuartil dan desil.

Kuartil

Jika kumpulan data terurut dibagi menjadi 4 bagian yang sama, maka didapat 3 pembagian dan tiap pembagian itu dinamakan kuartil. Gambarannya sebagai berikut.



Kuartil tengah (Q_2) sama saja dengan Median yang telah dibahas di atas.

Kuartil data berkelompok ditentukan dengan rumus:

$$Q_i = L_i + p\left(\frac{\frac{i}{4}n - F_i}{f_i}\right)$$

dimana Q_i adalah pada datum ke $\frac{i.n}{4}$, untuk i = 1, 2, 3.

Keterangan :

L_i = Tepi bawah kelas kuartil ke - i

p = panjang kelas interval

F_i = frekuensi kumulatif tepat sebelum kelas kuartil ke - i

f_i = frekuensi kelas kuartil ke - i

n = banyak datum

Contoh 5.

Tentukan Q_1 dan Q_3 data berat badan 50 orang siswa SMA Merdeka pada tabel berikut.

Berat Badan	f_i	F
31 – 35	4	4
36 – 40	6	10
41 – 45	9	19
46 – 50	14	33
51 – 55	10	43
56 – 60	5	48
61 – 65	2	50
Jumlah	50	-

***Jawab*:**

Langkah awal kita tambahkan kolom Frekuensi Kumulatif (F).

Letak Q_1 pada datum ke $\frac{1}{4}n = \frac{1}{4}(50) = 12{,}5$

Jadi, letak Q_1 pada interval kelas : 41 – 45 (Frekuensi kumulatif 19, berarti letak data ke-11 sampai ke-19)

L_1 = 41 – 0,5 = 40,5

p = 5,

F = 10 dan f = 9

Sehingga diperoleh Kuartil bawah (Q_1) adalah

$$Q_1 = L_1 + p\left(\frac{\frac{1}{4}n-F}{f}\right) = 40{,}5 + 5\left(\frac{\frac{1}{4}(50)-10}{9}\right)$$

$$= 40{,}5 + 5\left(\frac{12{,}5-10}{9}\right) = 40{,}5 + 5\left(\frac{2{,}5}{9}\right) = 40{,}5 + \frac{12{,}5}{9}$$

$$= 40{,}5 + 1{,}39 = \mathbf{41{,}89}$$

Jadi, nilai kuartil bawah (Q_1) berat badan siswa SMA Merdeka adalah 41,89 kg.

Letak Q_3 pada datum ke $\frac{3}{4}n = \frac{3}{4}(50) = 37{,}5$

Jadi, letak Q_3 pada interval kelas : 51 – 55 (Frekuensi kumulatif 43, berarti letak data ke- 34 sampai ke-43)

$L_3 = 51 - 0{,}5 = 50{,}5$

$p = 5$, $F = 33$, dan $f = 10$

sehingga diperoleh kuartil atas (Q_3) adalah

$$Q_3 = L_3 + p\left(\frac{\frac{3}{4}n-F}{f}\right) = 50{,}5 + 5\left(\frac{\frac{3}{4}(50)-33}{10}\right) = 50{,}5 + 5\left(\frac{37{,}5-33}{10}\right)$$

$$= 50{,}5 + 5\left(\frac{4{,}5}{10}\right) = 50{,}5 + \frac{22{,}5}{10}$$

$$= 50{,}5 + 2{,}25 = \mathbf{52{,}75}$$

Jadi, nilai kuartil atas (Q_3) berat badan siswa SMA Merdeka adalah 52,75 kg.

Desil

Jika kumpulan data dibagi menjadi 10 bagian yang sama, maka didapat 9 pembagian dan tiap pembagian itu dinamakan desil. Desil data berkelompok ditentukan dengan rumus :

$$D_i = L_i + p\left(\frac{\frac{i}{10}n - F_i}{f_i}\right)$$

dimana D_i adalah pada datum ke $\frac{i\,.n}{10}$

Keterangan :

L_i = Tepi bawah kelas Desil ke - i

p = panjang kelas interval

F_i = frekuensi kumulatif tepat sebelum kelas Desil ke - i

f_i = frekuensi kelas Desil ke - i

n = banyak datum

i = 1, 2, 3, …, 9.

Contoh 6.

Tentukan D_3 dan D_8 data berat badan 50 orang siswa SMA Merdeka pada tabel berikut.

Berat Badan	f_i	F
31 – 35	4	4
36 – 40	6	10
41 – 45	9	19
46 – 50	14	33
51 – 55	10	43
56 – 60	5	48
61 – 65	2	50
Jumlah	50	-

***Jawab*:**

Langkah awal sama halnya pada kuartil, kita tambahkan kolom Frekuensi Kumulatif (F).

Letak D_3 pada datum ke $\frac{i}{10}n = \frac{3}{10}(50) = 15$

Jadi, letak D_3 pada interval kelas : 41 – 45 (Frekuensi kumulatif 19, berarti letak data ke-11 sampai ke-19)

$L_3 = 41 – 0{,}5 = 40{,}5$

$p = 5$, $F = 10$, dan $f = 9$

sehingga diperoleh Desil ke-3 (D_3) adalah

$$D_3 = L_3 + p\left(\frac{\frac{3}{10}n - F}{f}\right) = 40{,}5 + 5\left(\frac{\frac{3}{10}(50) - 10}{9}\right) = 40{,}5 + 5\left(\frac{15-10}{9}\right)$$

$$= 40{,}5 + \frac{25}{9} = 40{,}5 + 2{,}78 \;\; \mathbf{43{,}28}$$

Jadi, desil ketiga (D_3) berat badan siswa SMA Merdeka adalah 43,28 kg.

Letak D_8 pada datum ke $\frac{i}{10}n = \frac{8}{10}(50) = 40$

Jadi, letak D_8 pada interval kelas : 51 – 55 (Frekuensi kumulatif 43, berarti letak data ke-34 sampai ke-43)

$L_8 = 51 – 0{,}5 = 50{,}5$,

$p = 5$, $F = 33$, dan $f = 10$

sehingga diperoleh Desil ke-8 (D_8) adalah

$$D_8 = L_8 + p\left(\frac{\frac{8}{10}n - F}{f}\right) = 50{,}5 + 5\left(\frac{\frac{8}{10}(50) - 33}{10}\right)$$

$$= 50{,}5 + 5\left(\frac{40-33}{10}\right) = 50{,}5 + \frac{35}{10} = 50{,}5 + 3{,}5 = \mathbf{54}$$

Jadi, desil kedelapan (D_8) berat badan siswa SMA Merdeka adalah 54 kg.

C. Rangkuman

- Ukuran pemusatan dari sekumpulan data merupakan suatu nilai yang diperoleh dari sekumpulan data yang dapat dipergunakan untuk mewakili kumpulan data tersebut, meliputi mean, modus, dan median.
- Mean atau rata-rata hitung adalah jumlah semua data dibagi banyaknya data. Mean data berkelompok dapat dihitung dengan 3 cara, yaitu:

  Rumus umum mean:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i} = \frac{f_1.x_1 + f_2.x_2 + f_3.x_3 + \cdots + f_n.x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}$$

Cara Simpangan Rataan (Rataan Sementara):

$$\overline{x} = \overline{x}_s + \frac{\sum f_i . d_i}{\sum f_i}$$

Cara Pengkodean:

$$\overline{x} = \overline{x}_s + p . \frac{\sum f_i . u_i}{\sum f_i}$$

- Modus adalah ukuran pemusatan data yang digunakan untuk menyatakan kejadian yang paling banyak terjadi atau paling banyak muncul. Modus data berkelompok ditentukan dengan rumus:

$$Mo = L + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

- Median adalah ukuran yang terletak di tengah setelah data diurutkan. Median data berkelompok ditentukan dengan rumus:

$$Me = L + p\left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right)$$

- Kuartil adalah ukuran yang membagi sekumpulan data terurut dibagi menjadi 4 bagian yang sama. Kuartil data berkelompok ditentukan dengan rumus:

$$Q_i = L_i + p\left(\frac{\frac{i}{4}n - F_i}{f_i}\right)$$

- Desil adalah ukuran yang membagi sekumpulan data terurut dibagi menjadi 10 bagian yang sama. Desil data berkelompok ditentukan dengan rumus:

$$D_i = L_i + p\left(\frac{\frac{i}{10}n - F_i}{f_i}\right)$$

D. Latihan Soal

1. Berikut merupakan data jumlah protein yang terkandung dalam beberapa macam makanan cepat saji yang terpilih.

23	30	20	27	44	26	35	20	29	29
25	15	18	27	19	22	12	26	34	15
27	35	26	43	35	14	24	12	23	31
40	35	38	57	22	42	24	21	27	33

   a. Hitunglah rata-rata, median, dan modus dari data tersebut.
   b. Buatlah distribusi frekuensi data tersebut dengan 5 kelas.
   b. Hitung rata-rata, median, dan modus dari data yang sudah dikelompokkan pada poin (b)
   c. Bandingkan ukuran pemusatan pada poin (a) dan (c). Apa yang dapat kalian simpulkan mengenai hasil tersebut?

2. Berikut merupakan distribusi frekuensi persentase penduduk usia di bawah 25 tahun yang menyelesaikan studi sarjananya selama 4 tahun atau lebih di beberapa kota besar di Indonesia. Tentukan ukuran pemusatan data berkelompok tersebut.

Persentase	Frekuensi
15,2 – 19,6	3
19,7 – 24,1	15
24,2 – 28,6	19
28,7 – 33,1	6
33,2 – 37,6	7
37,7 – 42,1	0
42,2 – 46,6	1

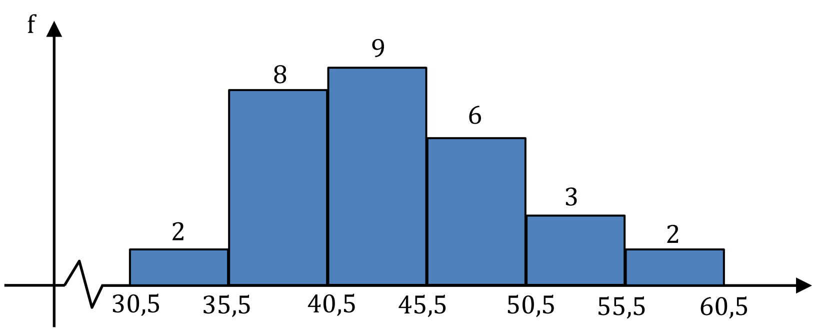
3. Jelaskan ukuran pemusatan apa yang digunakan (rata-rata, median, modus) untuk situasi di bawah ini.
   a. Setengah dari jumlah pekerja di suatu pabrik dapat memperoleh lebih dari Rp20.000,00 per jam dan setengahnya yang lain memperoleh kurang dari Rp20.000,00 per jam.
   b. Rata-rata jumlah anak dalam suatu keluarga di suatu kompleks perumahan adalah 1,8.
   c. Sebagian besar orang lebih memilih mobil warna hitam dibandingkan dengan warna-warna lainnya.
   d. Ketakutan yang paling umum terjadi saat ini adalah ketakutan berbicara di depan umum.
   e. Rata-rata usia dosen perguruan tinggi adalah 42,3 tahun

4. Diberikan distribusi frekuensi untuk jumlah komisi (dalam puluhan ribu) yang diterima 100 salesman yang dipekerjakan di beberapa cabang perusahaan besar. Tentukan rata-rata, median, dan modus untuk distribusi frekuensi ini.

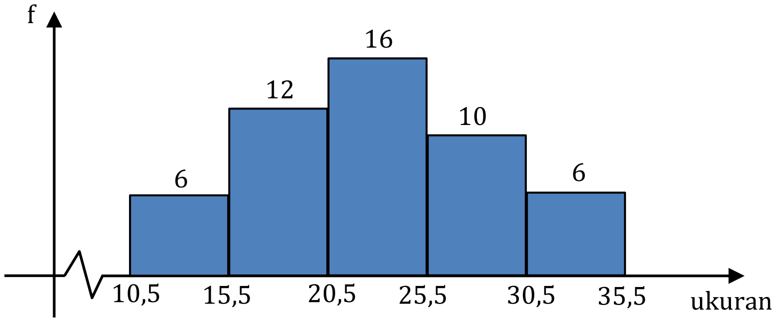
Persentase	Frekuensi
150 – 158	5
159 – 167	16
168 – 176	20
177 – 185	21
186 – 194	20
195 – 203	15
204 – 212	3

5. Pengelola restoran cepat saji di suatu kota besar menyatakan bahwa ratarata gaji karyawannya adalah Rp18.000,00 per jam. Seorang karyawannya menyatakan bahwa kebanyakan karyawan di restoran tersebut menerima gaji minimal. Jika kedua orang tersebut jujur atas pernyataannya, jelaskan bagaimana ini bisa terjadi.

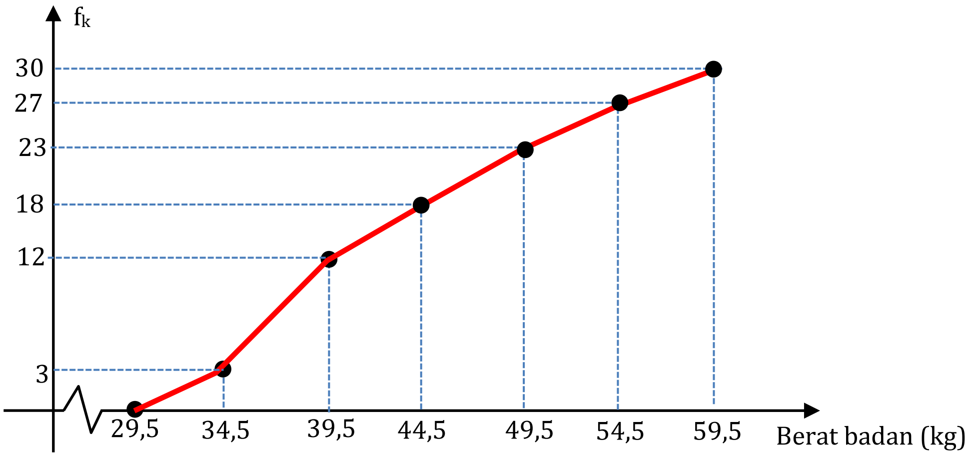
6. Berikut ini histogram dari data berat badan (kg) beberapa orang siswa. Tentukan nilai modus data tersebut.



7. Tentukan nilai median dari data yang disajikan dalam histogram berikut.



8. Data berat badan 30 siswa disajikan dalam ogive berikut. Hitung modus data tersebut.



PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

1. Alternatif Jawaban

   a. Rata-rata data tunggal

   $\bar{x} = \frac{jumlah\ data}{n} = \frac{1.105}{40} = 27{,}625$

   Median data tunggal = 26,5 dan modusnya adalah 27

   b. Distribusi frekuensi dengan 5 kelas

Kelas	Frekuensi
10 – 19	7
20 – 29	19
30 – 39	9
40 – 49	4
50 – 59	1

   c. Menggunakan distribusi frekuensi di atas dapat ditentukan:

   Rata-rata (mean)

   $\bar{x} = \frac{\sum f_i.x_i}{\sum f_i} = \frac{1.110}{40} = 27{,}75$

   Median

   $$Me = L + p\left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right) = 19{,}5 + 10\left(\frac{20 - 7}{19}\right) = 19{,}5 + 10(0{,}684) = 26{,}34$$

   Modus

   $$Mo = L + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) = 19{,}5 + 10\left(\frac{12}{12 + 10}\right) = 19{,}5 + 10(0{,}545) = 24{,}95$$

   d. Ukuran pemusatan yang dihitung dari distribusi frekuensi hasilnya berbeda dengan ukuran pemusatan yang dihitung dari dari mentah atau data yang belum dikelompokkan. Walaupun hasilnya berbeda, tetapi ukuran pemusatan data kelompok mendekati ukuran pemusatan data tunggal.

2. Alternatif Jawaban

   Rata-rata

   $$\bar{x} = \frac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i} = \frac{1.359{,}9}{51} = 26{,}66$$

   Rata-rata persentase mahasiswa yang menyelesaikan studi selama 4 tahun atau lebih di beberapa kota besar di Indonesia adalah sebesar 26,66%.

   Median

   $$Me = L + p\left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right) = 24{,}15 + 4{,}5\left(\frac{25{,}5 - 18}{19}\right) = 24{,}15 + 4{,}5(0{,}3947) = 25{,}93$$

   Nilai tengah persentase mahasiswa yang menyelesaikan studi selama 4 tahun atau lebih di beberapa kota besar di Indonesia adalah sebesar 25,93%.

Modus

$$Mo = L + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) = 24{,}15 + 4{,}5\left(\frac{4}{4 + 13}\right) = 24{,}15 + \frac{18}{17} = 25{,}21$$

Kebanyakan persentase mahasiswa yang menyelesaikan studi selama 4 tahun atau lebih di beberapa kota besar di Indonesia adalah sebesar 25,21%.

3. Alternatif Jawaban

   a. Median (nilai tengah)
   b. Rata-rata
   c. Modus
   d. Modus
   e. Rata-rata

4. Alternatif Jawaban

   Rata-rata

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i} = \frac{18.028}{100} = 180{,}28$$

Rata-rata salesman mendapatkan komisi sebesar Rp 1.802.800,00.

Median

$$Me = L + p\left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right) = 176{,}5 + 9\left(\frac{50 - 41}{21}\right) = 176{,}5 + \frac{81}{21} = 180{,}357$$

Komisi tingkat menengah yang diterima salesmen adalah Rp1.803.570,00.
Modus

$$Mo = L + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) = 176{,}5 + 9\left(\frac{1}{1 + 1}\right) = 176{,}5 + \frac{9}{2} = 181$$

Sebagian besar salesmen mendapatkan komisi sebesar Rp1.810.000,00

5. Alternatif Jawaban

   Ukuran pemusatan data seperti rata-rata, median, dan modus mempunyai nilai yang hampir sama. Sehingga jika rata-rata karyawan mempunyai gaji Rp18.000,00 per jam sekaligus kebanyakan (modus) karyawan mempunyai gaji yang minimal, maka dapat disimpulkan bahwa gaji Rp18.000,00 per jam merupakan gaji yang minimal. Dengan kata lain, kebanyakan karyawan mendapatkan gaji minimal dengan besaran sekitar Rp18.000.00

6. Alternatif Jawaban

   Tepi kelas dengan frekuensi terbesar adalah 40,5 – 45,5
   diperoleh tepi bawah kelas modus L = 40,5
   d_1 = 9 – 8 = 1 dan d_2 = 9 – 6 = 3
   Panjang kelas interval adalah selisih dari dua tepi kelas, p = 45,5 – 40,5 = 5.

   sehingga diperoleh modus adalah

$$Mo = L + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) = 40{,}5 + 5\left(\frac{1}{1 + 3}\right)$$

$$= 40{,}5 + \frac{5}{4} = 40{,}5 + 1{,}25 = \mathbf{41{,}75}$$

Jadi, modus berat badan 30 siswa tersebut adalah 41,75.

7. Alternatif Jawaban

Letak Median pada datum ke $\frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$

jadi, letak median pada interval kelas dengan tepi 20,5 – 25,5 (dilihat dari frekuensi kumulatif = 34, berarti terletak data ke-19 sampai ke-34)

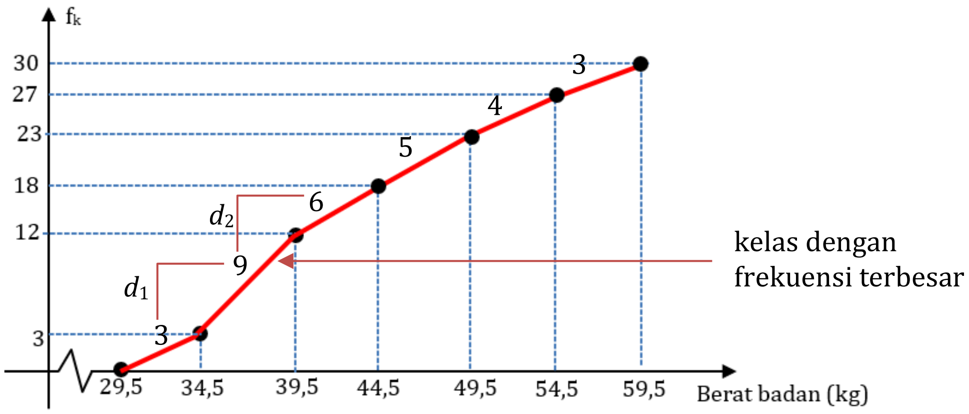
L = 20,5 (tepi bawah kelas median)
p = 5
F = 18 (frekuensi kumulatif sebelum kelas median)
f_m = 16 (frekuensi kelas median)

Sehingga diperoleh median adalah

$$M_e = L + p\left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right) = 20{,}5 + 5\left(\frac{25 - 18}{16}\right)$$
$$= 20{,}5 + 5\left(\frac{7}{16}\right) = 20{,}5 + \frac{35}{12}$$
$$= 20{,}5 + 2{,}19 = \mathbf{22{,}69}$$

Jadi, median dari data tersebut adalah 22,69.

8. Alternatif Jawaban



Tepi kelas dengan frekuensi terbesar adalah 34,5 – 39,5
diperoleh tepi bawah kelas modus L = 34,5
d_1 = 9 – 3 = 6 dan d_2 = 9 – 6 = 3
Panjang kelas interval adalah selisih dari dua tepi kelas, p = 34,5 – 29,5 = 5.

sehingga diperoleh modus adalah

$$Mo = L + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) = 34{,}5 + 5\left(\frac{6}{6+3}\right)$$
$$= 34{,}5 + \frac{10}{3} = 34{,}5 + 3{,}33 = \mathbf{37{,}85}$$

Jadi, modus berat badan 30 siswa tersebut adalah 37,85.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu yang dimaksud ukuran pemusatan data?	◯	◯
2	Apakah Anda dapat menentukan mean data dalam tabel distribusi frekuensi?	◯	◯
3	Apakah Anda dapat menentukan mean data dalam grafik histogram?	◯	◯
4	Apakah Anda dapat menentukan modus data dalam tabel distribusi frekuensi?	◯	◯
5	Apakah Anda dapat menentukan modus data dalam grafik histogram?	◯	◯
6	Apakah Anda dapat menentukan median data dalam tabel distribusi frekuensi?	◯	◯
7	Apakah Anda dapat menentukan median data dalam grarik histogram?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
UKURAN PENYEBARAN DATA

A. Tujuan Pembelajaran

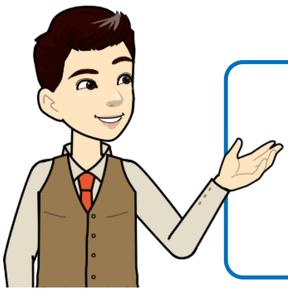
Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan kalian dapat menentukan ukuran penyebaran data yang disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram, menganalisis ukuran penyebaran data yang disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram serta menggunakannnya untuk menyelesaikan masalah.

B. Uraian Materi

Mengetahui hanya rata-rata dari suatu data tidak cukup untuk mendeskripsikan data sepenuhnya. Kita juga perlu mengetahui bagaimana penyebaran data. Sebagai contoh, seorang penjual sepatu olah raga di suatu daerah telah mengetahui bahwa rata-rata ukuran sepatu olah raga yang laris adalah ukuran 40.

Penjual sepatu tersebut tidak akan bertahan lama dalam penjualan sepatu olah raga ini jika dia hanya menjual sepatu ukuran 40. Walaupun dia mengetahui rata-rata ukuran sepatu pembeli di daerah tersebut, dia juga perlu mengetahui bagaiamana data menyebar, yaitu apakah datanya mendekati rata-rata ataukah menyebar merata. Ukuran yang menentukan penyebaran data disebut dengan ukuran penyebaran data (dispersi).

Gambar 1. Toko sepatu olah raga
Sumber: images.google.com



Ukuran penyebaran data adalah suatu ukuran yang menyatakan seberapa besar nilai-nilai data berbeda atau bervariasi dengan nilai ukuran pusatnya atau seberapa besar penyimpangan nilai-nilai data dengan nilai pusatnya.

Pada kegiatan pembelajaran ini, kalian akan mempelajari ukuran penyebaran data berkelompok yang meliputi simpangan rata-rata, simpangan baku (standar deviasi), dan ragam (varians).

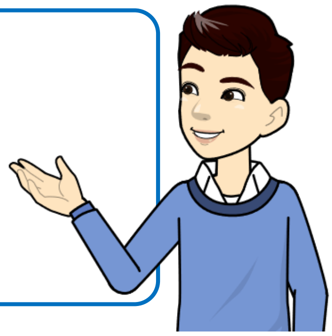
1. Simpangan Rata – Rata

Simpangan rata-rata sekumpulan data adalah rata-rata dari selisih mutlak nilai semua data terhadap rata-ratanya.

Simpangan rata-rata (*mean deviation*) dari data $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dirumuskan dengan:

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Keterangan :
SR = simpangan rata-rata
n = banyak datum
x_i = datum ke – i
$\bar{x}$ = rata-rata hitung (mean)



Contoh 1.

Hitung simpangan rata-rata dari kumpulan data 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9.

Jawab:

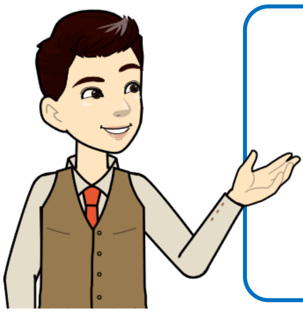
Pertama, kita akan menghitung rata-rata (mean) dari data tersebut.

$$\bar{x} = \frac{4+5+5+6+6+7+7+8+9+9}{10} = \frac{66}{10} = 6{,}6$$

Berikutnya kita akan menghitung simpangan rata-rata dengan rumus di atas.

$$\begin{aligned} SR &= \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} \\ &= \frac{|4-6{,}6| + 2|5-6{,}6| + 2|6-6{,}6| + 2|7-6{,}6| + |8-6{,}6| + 2|9-6{,}6|}{10} \\ &= \frac{2{,}6 + 2(1{,}6) + 2(0{,}6) + 2(0{,}4) + (1{,}4) + 2(2{,}4)}{10} \\ &= \frac{2{,}6 + 3{,}2 + 1{,}2 + 0{,}8 + 1{,}4 + 2{,}8}{10} = \frac{14}{10} = \mathbf{1{,}4} \end{aligned}$$

Untuk data berkelompok yang disusun dalam tabel distribusi frekuensi, simpangan rata-rata ditentukan dengan rumus :



$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i . |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Keterangan :
SR = simpangan rata-rata
f_i = frekuensi kelas ke-i
x_i = nilai tengah kelas ke – i
$\bar{x}$ = rata-rata hitung (mean)

Contoh 2.
Tentukan simpangan rata-rata data pada tabel distribusi frekuensi di bawah ini.

kelas interval	f_i
40 – 44	2
45 – 49	10
50 – 54	12
55 – 59	10
60 – 64	6

Jawab:

Untuk memudahkan menyelesaikan soal ini, kita perlu menambahkan 4 kolom pada tabel distribusi frekuensi tersebut, kemudian melengkapi isian pada setiap kolom tersebut seperti pada tabel berikut.

kelas interval	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
40 – 44	2	42	84	|42 – 52,5| = 10,5	21
45 – 49	10	47	460	|47 – 52,5| =5,5	55
50 – 54	12	52	624	|52 – 52,5| =0,5	6
55 – 59	10	57	560	|57 – 52,5| =4,5	45
60 – 64	6	62	372	|62 – 52,5| =9,5	57
Jumlah	40	-	2.100	-	184

Keterangan pengisian kolom pada tabel:

- Kolom (3) atau kolom x_i diisi dengan nilai tengah dari kelas interval kolom (1), misalnya pada baris 1, $x_i = ½(40 + 44) = ½(84) = 42$.
- Kolom (4) diisi dengan hasil perkalian dari nilai pada kolom (2) dan (3).
- Kolom (5) diisi dengan nilai mutlak selisih nilai pada kolom (3) dengan rata-rata.
- Kolom (6) diisi dengan hasil perkalian kolom (2) dan (5)

Rata-rata (mean) dari data pada tabel di atas adalah

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i} = \frac{2.100}{40} = \mathbf{52,5}$$

Simpangan rata-rata data pada tabel di atas adalah

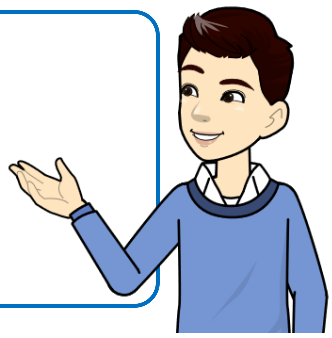
$$SR = \frac{\sum f_i . |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{184}{40} = \mathbf{4,6}$$

3. Ragam dan Simpangan Baku

Ragam (*varians*) adalah ukuran seberapa jauh sebuah kumpulan bilangan/data tersebar. Ragam dari kumpulan data $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ didefinisikan sebagai rata-rata dari kuadrat simpangan terhadap rata-rata (mean), dinotasikan dengan S^2.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Keterangan :
S^2 = ragam (varians)
n = banyak datum
x_i = datum ke – i
$\bar{x}$ = rata-rata hitung (mean)



Akar kuadrat dari ragam disebut **Simpangan Baku** (*Standard Deviation*), yang dirumuskan :

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Contoh 3.

Hitung ragam dan simpangan baku dari kumpulan data 6, 8, 7, 9, 10.

Jawab:

Pertama, kita akan menghitung rata-rata (mean) dari data tersebut.

$$\bar{x} = \frac{6+8+7+9+10}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

Berikutnya kita akan menghitung ragam dengan rumus di atas.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

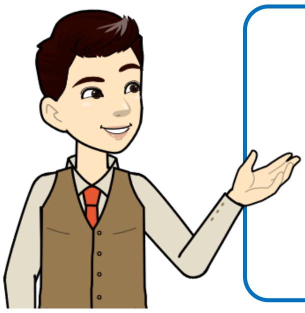
$$= \frac{(6-8)^2 + (8-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2 + (10-8)^2}{5}$$

$$= \frac{4+0+1+1+4}{5} = \frac{10}{5} = \mathbf{2}$$

simpangan bakunya adalah

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{2}$$

Untuk data berkelompok yang disusun dalam tabel distribusi frekuensi, ragam ditentukan dengan rumus :



$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i.(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Keterangan :

S^2 = ragam

f_i = frekuensi kelas ke-i

x_i = nilai tengah kelas ke – i

$\bar{x}$ = rata-rata hitung (mean)

dan Simpangan Bakunya ditentukan dengan rumus:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i.(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

Ada beberapa cara lain (rumus) yang dapat digunakan untuk menghitung nilai ragam dan simpangan baku data berkelompok, yaitu:

- ***Rumus praktis***

  $s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ dan $s = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$

  dengan $\bar{x} = \frac{\sum f_i.x_i}{\sum f_i}$ dan $\overline{x^2} = \frac{\sum f_i.x_i^2}{\sum f_i}$

- ***Rumus praktis dengan rataan sementara***

  Tentukan dahulu rataan sementara ($\bar{x}_s$), yaitu nilai tengah (x_i) kelas yang memiliki frekuensi terbesar, kemudian tentukan ragam dan simpangan baku dengan rumus:

$s^2 = \overline{d^2} - (\bar{d})^2$ dan $s = \sqrt{\overline{d^2} - (\bar{d})^2}$, dengan $d_i = x_i - \bar{x}_s$ dan $d_i{}^2 = (x_i - \bar{x}_s)^2$

$\bar{d} = \frac{\sum f_i . d_i}{n}$ dan $\overline{d^2} = \frac{\sum f_i . d_i{}^2}{n}$

- ***Rumus praktis dengan pengkodean***

  Tentukan dahulu rataan sementara ($\bar{x}_s$), kemudian beri kode kelas $x_i = \bar{x}_s$ dengan $U_i = 0$. Untuk kelas-kelas sebelum kelas $\bar{x}_s$ diberi kode secara berurutan $U_i = -1, -2, -3, \ldots$, dan untuk kelas-kelas setelah kelas $\bar{x}_s$ diberi kode secara berurutan $U_i = +1, +2, +3, \ldots$.
  Kemudian hitung simpangan baku dengan rumus pengkodean:

  $s = p . \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2}$, dengan p = panjang kelas,

  dimana $\bar{u} = \frac{\sum f_i . U_i}{n}$ dan $\overline{u^2} = \frac{\sum f_i . U_i{}^2}{n}$

Contoh 4.

Tentukan ragam dan simpangan baku data dalam tabel distribusi frekuensi di bawah ini.

Kelas Interval	f_i
40 – 44	2
45 – 49	10
50 – 54	12
55 – 59	10
60 – 64	6

Jawab:

Kelas Interval	f_i	x_i	$f_i . x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i . (x_i - \bar{x})^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
40 – 44	2	42	84	$(42 - 53)^2 = 121$	242
45 – 49	10	47	460	$(47 - 53)^2 = 36$	360
50 – 54	12	52	624	$(52 - 53)^2 = 1$	12
55 – 59	10	57	570	$(57 - 53)^2 = 16$	160
60 – 64	6	62	372	$(62 - 53)^2 = 81$	486
Jumlah	40	-	2.120	-	1.260

Keterangan pengisian kolom pada tabel:

- Kolom (3) atau kolom x_i diisi dengan nilai tengah dari kelas interval kolom (1), misalnya pada baris 1, $x_i = ½(40 + 44) = ½(84) = 42$.
- Kolom (4) diisi dengan hasil perkalian dari nilai pada kolom (2) dan (3).
- Kolom (5) diisi dengan kuadrat selisih nilai pada kolom (3) dengan rata-rata.
- Kolom (6) diisi dengan hasil perkalian kolom (2) dan (5)

Rata-rata (mean) dari data pada tabel di atas adalah

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i} = \frac{2.120}{40} = \mathbf{53}$$

Ragam data pada tabel di atas adalah

$$S^2 = \frac{\sum f_i . (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{1.260}{40} = \mathbf{31,5}$$

Simpangan baku adalah

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{31,5} = \mathbf{5,61}$$

Contoh 5.

Hitunglah simpangan baku data pada contoh 4 dengan menggunakan metode pengkodean.

Jawab:

Kelas Interval	f_i	x_i	*Kode* U_i	$f_i . U_i$	$f_i . U_i{}^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
40 – 44	2	42	–2	–4	2 (–2)² = 8
45 – 49	10	47	–1	–10	10 (–1)² = 10
50 – 54	12	52	0	0	12 (0)² = 0
55 – 59	10	57	1	10	10 (1)² = 10
60 – 64	6	62	2	12	6 (2)² = 24
Jumlah	40	-		8	52

Keterangan pengisian kolom pada tabel:

- Kolom (3) atau kolom x_i diisi dengan nilai tengah dari kelas interval kolom (1), kemudian pilih rataan sementara $\bar{x}_s = 52$, karena mempunyai frekuensi terbesar.
- Kolom (4) kode U_i, pengisian dimulai dari baris $\bar{x}_s = 52$ yang diberi kode 0, dan baris-baris sebelumnya diberi kode –1, –2, kemudian baris-baris setelahnya diberi kode +1, +2.
- Kolom (5) diisi dengan hasil kali nilai di kolom (2) dan (4).
- Kolom (6) diisi dengan hasil kali nilai di kolom (2) dan kuadrat nilai di kolom (4).

Panjang kelas $p = 5$

Hitung nilai $\bar{u}$ dan $\overline{u^2}$ sebagai berikut.

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i . U_i}{n} = \frac{8}{40} = 0,2$$

$$\overline{u^2} = \frac{\sum f_i . U_i{}^2}{n} = \frac{52}{40} = 1,3$$

Jadi, simpangan baku data di atas adalah

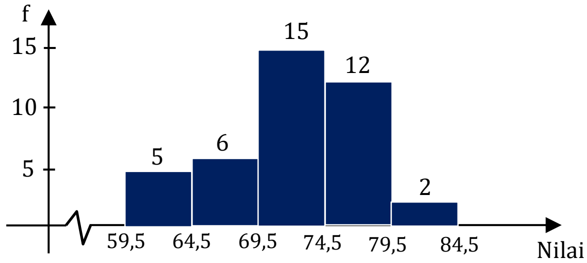
$$S = p.\sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = 5.\sqrt{1,3 - (0,2)^2} = 5.\sqrt{1,3 - 0,04}$$

$$= 5.\sqrt{1,26} = 5\ (1,12) = \mathbf{5,6}$$

Contoh 6.

Nilai ulangan matematika di suatu kelas disajikan pada histogram berikut.
Tentukan nilai dari:

a. simpangan rata-rata
b. ragam
c. simpangan baku



Jawab:

Untuk memudahkan perhitungan, data dari histogram kita sajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi berikut.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
62	5	310	10	50	100	500
67	6	402	5	30	25	150
72	15	1080	0	0	0	0
77	12	924	5	60	25	300
82	2	164	10	20	100	200
Jumlah	40	2.880	-	160	-	1.150

Keterangan pengisian kolom pada tabel:

- Kolom (1) atau kolom x_i diisi dengan nilai tengah dari tepi kelas interval pada histogram. Misalnya untuk baris pertama x_1 = ½(59,5 + 64,5) = 62, dan seterusnya.
- Kolom (2) diisi denggan frekuensi setiap kelas, yaitu nilai yang terdapat pada bagian atas setiap persegi panjang di histogram.
- Kolom (3) diisi dengan hasil kali kolom (1) dan (2)
- Kolom (4) diisi dengan nilai mutlak dari selisih nilai pada kolom (1) dengan rata-rata.
- Kolom (5) diisi dengan hasil kali kolom (2) dan (4)
- Kolom (6) diisi dengan kuadrat selisih nilai kolom (1) dengan rata-rata, atau bisa dengan mengambil kuadrat dari kolom (4).
- Kolom (7) diisi dengan hasil kali kolom (2) dengan kolom (6).

Rata-rata (mean) dari data pada tabel di atas adalah

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i} = \frac{2.880}{40} = \mathbf{72}$$

a. Simpangan rata-rata data pada tabel di atas adalah

$$SR = \frac{\sum f_i . |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{160}{40} = \mathbf{4}$$

b. Ragam data pada tabel di atas adalah

$$S^2 = \frac{\sum f_i . (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{1.150}{40} = \mathbf{28,75}$$

c. Simpangan baku adalah $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{28{,}75} = \mathbf{5,36}$

C. Rangkuman

- Ukuran penyebaran data adalah suatu ukuran yang menyatakan seberapa besar nilai-nilai data berbeda atau bervariasi dengan nilai ukuran pusatnya atau seberapa besar penyimpangan nilai-nilai data dengan nilai pusatnya.
- Simpangan rata-rata adalah adalah rata-rata dari selisih mutlak nilai semua data terhadap rata-ratanya. Simpangan rata-rata untuk data berkelompok dirumuskan dengan:

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i . |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

- Ragam (varians) adalah ukuran seberapa jauh sebuah kumpulan bilangan tersebar. Ragam didefinisikan sebagai rata-rata dari kuadrat simpangan terhadap rata-rata (mean). Ragam data berkelompok dirumuskan dengan:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i . (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

- Simpangan baku adalah akar kuadrat dari ragam (varians). Simpangan baku dirumuskan dengan:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i . (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

D. Latihan Soal

1. Diberikan angka-angka : $x - 4, x - 2, x + 1, x + 2, x + 4, x + 5$. Tentukan.

   a. nilai simpangan baku
   b. nilai x jika nilai mean dari angka-angka di atas adalah 6.

2. Diketahui angka-angka 4, 1, 13, 7, 8, 4, p, q, yang memiliki mean 6 dan ragam 12,5. Tentukan nilai p dan q.

3. Tentukan simpangan rata-rata data pada tabel distribusi frekuensi di bawah ini.

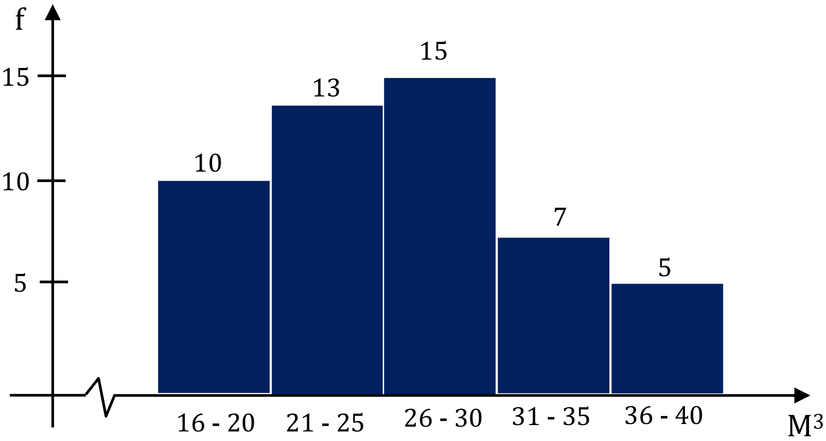
Kelas Interval	f_i
21 – 25	2
26 – 30	8
31 – 35	9
36 – 40	6
41 – 45	3
46 – 50	2
Jumlah	30

4. Tentukan ragam dan simpangan baku data pada tabel distribusi frekuensi soal nomor 3.

5. Data berikut merupakan data berat badan 50 orang siswa. Tentukan ragam dan simpangan baku dengan cara pengkodean.

Berat Badan (kg)	f_i
35 – 39	1
40 – 44	4
45 – 49	12
50 – 54	23
55 – 59	7
60 – 64	3
Jumlah	50

6. Data pada histogram di bawah ini menunjukkan banyaknya penggunaan air bersih (m^3) dalam sebulan dari 50 rumah tangga di RT.I Kelurahan Merdeka. Tentukan simpangan rata-rata, ragam, dan simpangan baku pemakaian air bersih di RT.I tersebut.



PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

1. Diberikan angka-angka : $x - 4, x - 2, x + 1, x + 2, x + 4, x + 5$. Tentukan.

   a. nilai simpangan baku

   $$\bar{x} = \frac{(x-4)+(x-2)+(x+1)+(x+2)+(x+4)+(x+5)}{6}$$
   $$= \frac{6x+6}{6} = x+1$$

   Simpangan baku

   $$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$
   $$= \sqrt{\frac{(-5)^2+(-3)^2+(0)^2+(1)^2+(3)^2+(4)^2}{6}}$$
   $$= \sqrt{\frac{25+9+0+1+9+16}{6}} = \sqrt{\frac{60}{6}} = \sqrt{10} = 3{,}16$$

   b. nilai x jika nilai mean dari angka-angka di atas adalah 6.

   $\bar{x} = x + 1 = 6 \Rightarrow x = 6 - 1 = 5$

2. Diketahui angka-angka 4, 1, 13, 7, 8, 4, p, q, yang memiliki mean 6 dan ragam 12,5. Tentukan nilai p dan q.

   Alternatif Penyelesaian:

   Rata-rata (mean) = 6, berarti

   $$\bar{x} = \frac{4+1+13+7+\ 8+4+p+q}{8} = 6$$

   $37 + p + q = 48 \quad \Leftrightarrow\ p + q = 48 - 37 = 11$

   $\Leftrightarrow p + q\ = 1$ atau $q = 11 - p$ ……….(1)

   Ragam = 12,5, sehingga:

   $$S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$$
   $$12{,}5 = \frac{(-2)^2+(-5)^2+(7)^2+(1)^2+(2)^2+(-2)^2+(p-6)^2+(q-6)^2}{8}$$
   $$12{,}5 = \frac{4+25+49+1+4+4+(p-6)^2+(q-6)^2}{8}$$

   $100 = 87 + (p - 6)^2 + (q - 6)^2$
   $13 = (p - 6)^2 + (11 - p - 6)^2 \ \Leftrightarrow\ 13 = (p - 6)^2 + (5 - p)^2$
   $\Leftrightarrow 13 = p^2 - 12p + 36 + 25 - 10p + p^2$
   $\Leftrightarrow 2p^2 - 22p + 48 = 0 \ \Leftrightarrow p^2 - 11p + 24 = 0$
   $\Leftrightarrow (p - 3)(p - 8) = 0$
   $\Leftrightarrow\ p = 3$ atau $p = 8$.
   Untuk $p = 3$, maka $q = 11 - p = 11 - 3 = 8$.
   Untuk $p = 8$, maka $q = 11 - p = 11 - 8 = 3$.
   Jadi, nilai $p = 3$ dan $q = 8$ atau sebaliknya.

3. Simpangan rata-rata data pada tabel distribusi frekuensi di bawah ini.

Alternatif Penyelesaian

kelas interval	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x}\rvert$
21 – 25	2	23	46	11	22
26 – 30	8	28	224	6	48
31 – 35	9	33	297	1	9
36 – 40	6	38	228	4	24
41 – 45	3	43	129	9	27
46 – 50	2	48	96	14	28
Jumlah	30	-	1020	-	158

Rata-rata (mean) dari data pada tabel di atas adalah

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i} = \frac{1020}{30} = \mathbf{34}$$

Simpangan rata-rata data pada tabel di atas adalah

$$SR = \frac{\sum f_i . |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{158}{30} \approx \mathbf{5,27}$$

4. Tentukan ragam dan simpangan baku data pada tabel distribusi frekuensi soal nomor 3.

Alternatif Penyelesaian

kelas interval	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
21 – 25	2	23	46	121	242
26 – 30	8	28	224	36	288
31 – 35	9	33	297	1	9
36 – 40	6	38	228	16	96
41 – 45	3	43	129	81	243
46 – 50	2	48	96	196	392
Jumlah	30	-	1020	-	1270

Rata-rata (mean) dari data pada tabel di atas adalah

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i} = \frac{1020}{30} = \mathbf{34}$$

Ragam data pada tabel di atas adalah

$$S^2 = \frac{\sum f_i . (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{1.270}{30} = \mathbf{42,33}$$

Simpangan baku adalah

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{42{,}33} \approx \mathbf{6,51}$$

5. Data berikut merupakan data berat badan 50 orang siswa. Tentukan ragam dan simpangan baku dengan cara pengkodean.

Kelas Interval	f_i	x_i	*Kode* U_i	$f_i \cdot U_i$	$f_i \cdot U_i{}^2$
35 – 39	1	37	−3	−3	$1(-3)^2 = 9$
40 – 44	4	42	−2	−8	$4(-2)^2 = 16$
45 – 49	12	47	−1	−12	$12(-1)^2 = 12$
50 – 54	23	52	0	0	$23(0)^2 = 0$
55 – 59	7	57	1	7	$7(1)^2 = 7$
60 – 64	3	62	2	6	$3(2)^2 = 12$
Jumlah	50	-	-	−10	56

Panjang kelas $p = 5$

Hitung nilai $\bar{u}$ dan $\overline{u^2}$ sebagai berikut.

$$\bar{u} = \frac{\sum f_i \cdot U_i}{n} = \frac{-10}{50} = -0{,}2$$

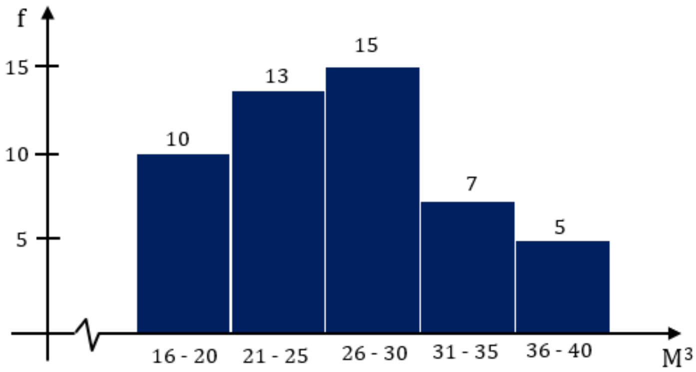
$$\overline{u^2} = \frac{\sum f_i \cdot U_i{}^2}{n} = \frac{56}{50} = 1{,}12$$

Jadi, simpangan baku data di atas adalah

$$S = p.\sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = 5.\sqrt{1{,}12 - (-0{,}2)^2} = 5.\sqrt{1{,}12 - 0{,}04}$$

$$= 5.\sqrt{1{,}08} \approx 5\,(1{,}04) = \mathbf{5{,}2}$$

6. Histogram



Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan perhitungan, data dari histogram kita sajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi berikut.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
			$\bar{x} = 26{,}4$			
18	10	180	8,4	84	70,56	705,6
23	13	299	3,4	44,2	11,56	150,28
28	15	420	1,6	24	2,56	38,4
33	7	231	6,6	46,2	43,56	304,92
38	5	190	11,6	58	134,56	672,8
Jumlah	50	1.320	-	256,4	-	1.872

Rata-rata (mean) dari data pada tabel di atas adalah

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i} = \frac{1.320}{50} = \mathbf{26,4}$$

Simpangan rata-rata data pada tabel di atas adalah

$$SR = \frac{\sum f_i . |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{256,4}{50} = \mathbf{5,128}$$

Ragam data pada tabel di atas adalah

$$S^2 = \frac{\sum f_i . (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{1.872}{50} = \mathbf{37,44}$$

Simpangan baku adalah $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{37,44} \approx \mathbf{6,12}$

E. Penilaian Diri

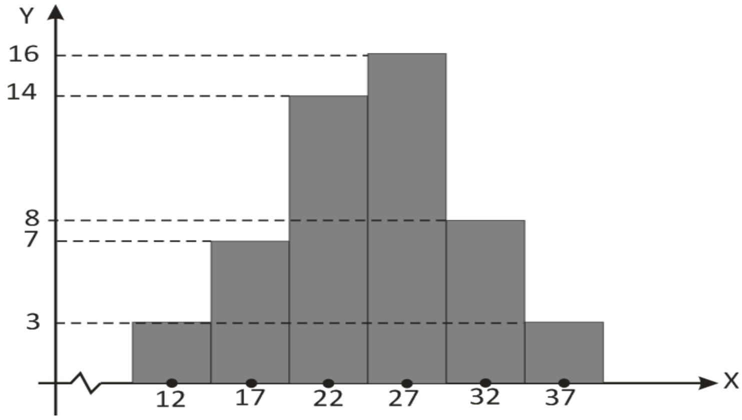
Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu yang dimaksud ukuran penyebaran data?	◯	◯
2	Apakah Anda dapat menentukan simpangan rata-rata data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi?	◯	◯
3	Apakah Anda dapat menentukan ragam data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi?	◯	◯
4	Apakah Anda dapat menentukan simpangan baku data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi?	◯	◯
5	Apakah Anda dapat menentukan simpangan rata-rata data yang disajikan dalam histogram?	◯	◯
6	Apakah Anda dapat menentukan ragam data yang disajikan dalam histogram?	◯	◯
7	Apakah Anda dapat menentukan simpangan baku data yang disajikan dalam histogram?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

1. Perhatikan diagram berikut!



Modus dari data pada diagram adalah ….
A. 25,5
B. 26,0
C. 26,5
D. 27,0
E. 27,5

2. Diketahui data: 7, 6, 2, p, 3, 4. Jika rata-rata dari data tersebut sama dengan mediannya, maka banyaknya nilai p yang mungking untuk p bilangan asli adalah ….
A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

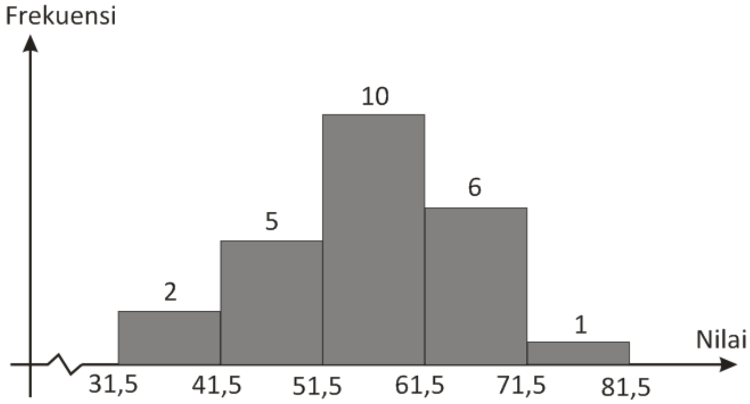
3. Ragam (varians) dari data pada tabel berikut adalah ….
A. $1\frac{3}{8}$
B. $1\frac{1}{8}$
C. 1
D. $\frac{7}{8}$
E. $\frac{5}{8}$

Data	Frekuensi
5	1
6	4
7	6
8	4
9	1

4. Tinggi badan siswa di kelas XII SMA Merdeka tampak pada tabel berikut. Rata-rata tinggi badan siswa tersebut adalah ….
A. 158 – 1,25
B. 158 – 1,125
C. 158
D. 158 + 1,125
E. 158 + 1,20

Data	Frekuensi
141 – 145	1
146 – 150	4
151 – 155	5
156 – 160	15
161 – 165	7
166 – 170	6
171 – 175	2

5. Data ulangan Matematika suatu kelas disajikan dalam histogram berikut.

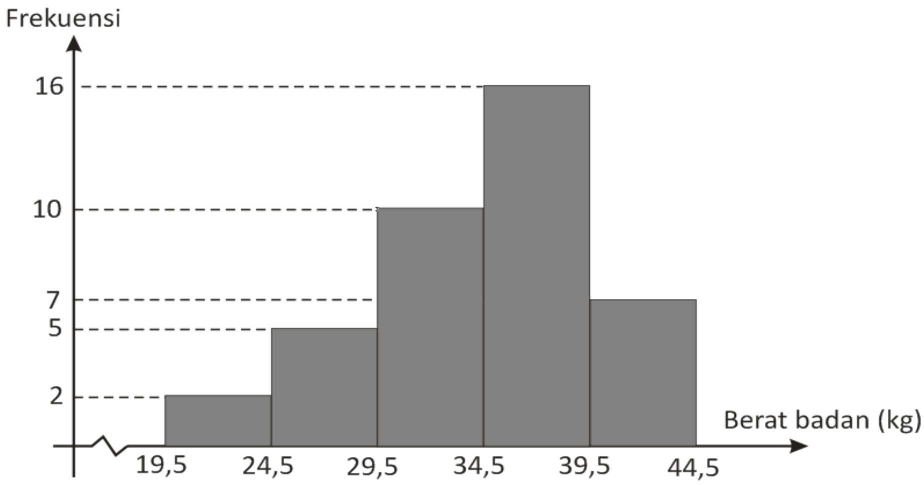


Median dari data tersebut adalah ….
A. 54,5
B. 55,0
C. 55,5
D. 56,0
E. 56,5

6. Data berat badan 30 siswa disajikan pada tabel berikut. Simpangan baku data tersebut adalah ….
A. $\sqrt{21}$ kg
B. $\sqrt{29}$ kg
C. 21 kg
D. 23 kg
E. 29 kg

Berat badan (kg)	Frekuensi
43 – 47	5
48 – 52	12
53 – 57	9
58 – 62	4

7. Data berat badan dari 40 siswa TK “Kasih Ibu” disajikan dalam bentuk histogram di samping. Modus pada histogram tersebut adalah ….

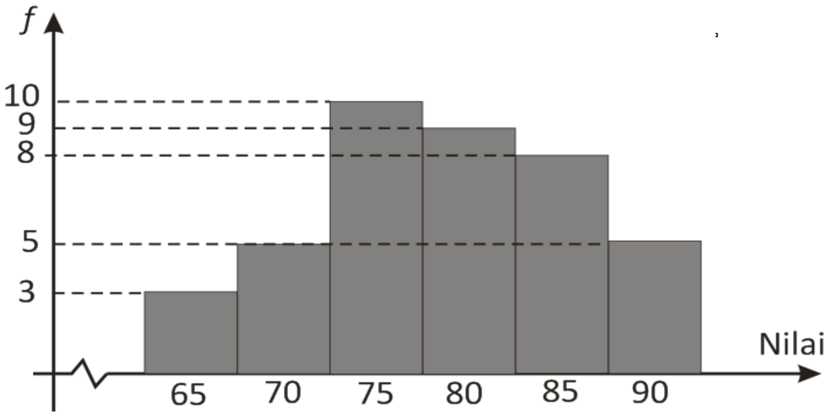


A. 35,0 kg
B. 36,0 kg
C. 36,5 kg
D. 37,0 kg
E. 37,5 kg

8. Kuartil bawah dari tabel distribusi frekuensi berikut adalah ....
   A. 55,25
   B. 55,50
   C. 55,75
   D. 56,25
   E. 56,50

Skor	Frekuensi
30 – 39	1
40 – 49	4
50 – 59	8
60 – 69	14
70 – 79	10
80 – 89	3

9. Median dari data yang disajikan pada histogram berikut adalah ....



   A. 77,53
   B. 78,00
   C. 78,61
   D. 79,00
   E. 79,61

10. Kuartil atas dari data pada tabel adalah....
   A. 71,5
   B. 72,0
   C. 72,5
   D. 73,0
   E. 73,5

Nilai	Frekuensi
56 – 60	5
61 – 65	8
66 – 70	14
71 – 75	10
76 – 80	3

11. Varians (ragam) dari data 8, 8, 6, 6, 8, 12 adalah ....
   A. 8
   B. 6
   C. $2\sqrt{6}$
   D. 4
   E. 2

12. Simpangan rata-rata dari data 4, 7, 5, 6, 8, 6 adalah ....
   A. 0,2
   B. 0,8
   C. 1,0
   D. 1,2
   E. 1,4

13. Data hasil penimbangan berat badan (dalam kg) dari 60 orang ibu pada suatu desa disajikan dalam tabel distribusi di bawah ini.
Rata-rata berat badan 60 orang ibu tersebut adalah ….
A. 69,25
B. 70,16
C. 70,17
D. 70,33
E. 72,25

Berat badan (kg)	Frekuensi
56 – 60	8
61 – 65	3
66 – 70	18
71 – 75	21
76 – 80	6
81 – 85	4

14. Tabel berikut menyajikan data berat badan (kg) sejumlah siswa.
Desil ke-8 dari data tersebut adalah ….
A. 62,325
B. 62,750
C. 63,500
D. 63,625
E. 64,125

Berat badan (kg)	Frekuensi
41 – 45	8
46 – 50	5
51 – 55	10
56 – 60	12
61 – 65	8
66 - 70	7

15. Perhatikan tabel berikut.
Simpangan rata-rata data tersebut adalah ….
A. 4,53
B. 5,27
C. 5,53
D. 6,27
E. 6,53

Berat badan (kg)	Frekuensi
21 – 25	2
26 – 30	8
31 – 35	9
36 – 40	6
41 – 45	3
46 – 50	2

16. Daftar distribusi frekuensi berikut menyatakan hasil dari suatu ujian.
Siswa yang lulus adalah siswa yang mendapat nilai lebih dari 64,5. Banyak siswa yang lulus adalah ⋯ orang.
A. 23
B. 25
C. 27
D. 28
E. 29

Skor	Frekuensi
40 – 49	2
50 – 59	8
60 – 69	14
70 – 79	12
80 – 89	4

17. Perhatikan tabel berikut.
    Siswa yang dinyatakan lulus jika nilai ujiannya lebih besar dari 60. Jika banyaknya peserta ujian ada 30 orang dan yang lulus 16 orang, maka nilai dari $x.y$ = ….
    A. 18
    B. 20
    C. 24
    D. 25
    E. 30

Skor	Frekuensi
21 – 30	1
31 – 40	1
41 – 50	x
51 – 60	9
61 – 70	y
71 – 80	6
81 – 90	2

18. Perhatikan data pada tabel berikut.
    Modus dari data tersebut adalah ….
    A. 51,12
    B. 55,17
    C. 55,72
    D. 56,17
    E. 56,67

Skor	Frekuensi
40 – 44	3
45 – 49	4
50 – 54	11
55 – 59	15
60 – 64	7

19. Daftar distribusi frekuensi pada tabel berikut merupakan hasil dari suatu tes.
    Jika 60% siswa dinyatakan lulus, maka nilai terendah yang dinyatakan lulus adalah ….
    A. 45,0
    B. 48,5
    C. 50,5
    D. 51,0
    E. 55,5

Nilai Ujian	Frekuensi
11 – 20	3
21 – 30	7
31 – 40	10
41 – 50	16
51 – 60	20
61 – 70	14
71 – 80	10
81 – 90	6
91 - 100	4

20. Nilai rata-rata dari data pada tabel adalah ….
    A. 61
    B. 62
    C. 63
    D. 64
    E. 65

Nilai	Frekuensi
40 – 44	1
45 – 49	2
50 – 54	3
55 – 59	6
60 – 64	7
65 – 69	5
70 – 74	7
75 - 79	9

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. A
2. A
3. C
4. D
5. E
6. A
7. C
8. C
9. C
10. B
11. D
12. C
13. C
14. D
15. B
16. A
17. C
18. D
19. D
20. E

DAFTAR PUSTAKA

Abdur Rahman As'ari, dkk. 2018. *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII*. Jakarta: Kemendikbud.

Pradnyo Wijayanti, Sapon Suryopurnomo. 2018. *Kombinatorika, Peluang, dan Statistika*. Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Sukino. 2019. *Matematika SMA/MA Kelas XII IA* (*IPA*). Sidoarjo: PT. Masmedia Buasa Pustaka.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI, PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum

KELAS XII

KAIDAH PENCACAHAN

MATEMATIKA UMUM KELAS XII

PENYUSUN
Asmar Achmad

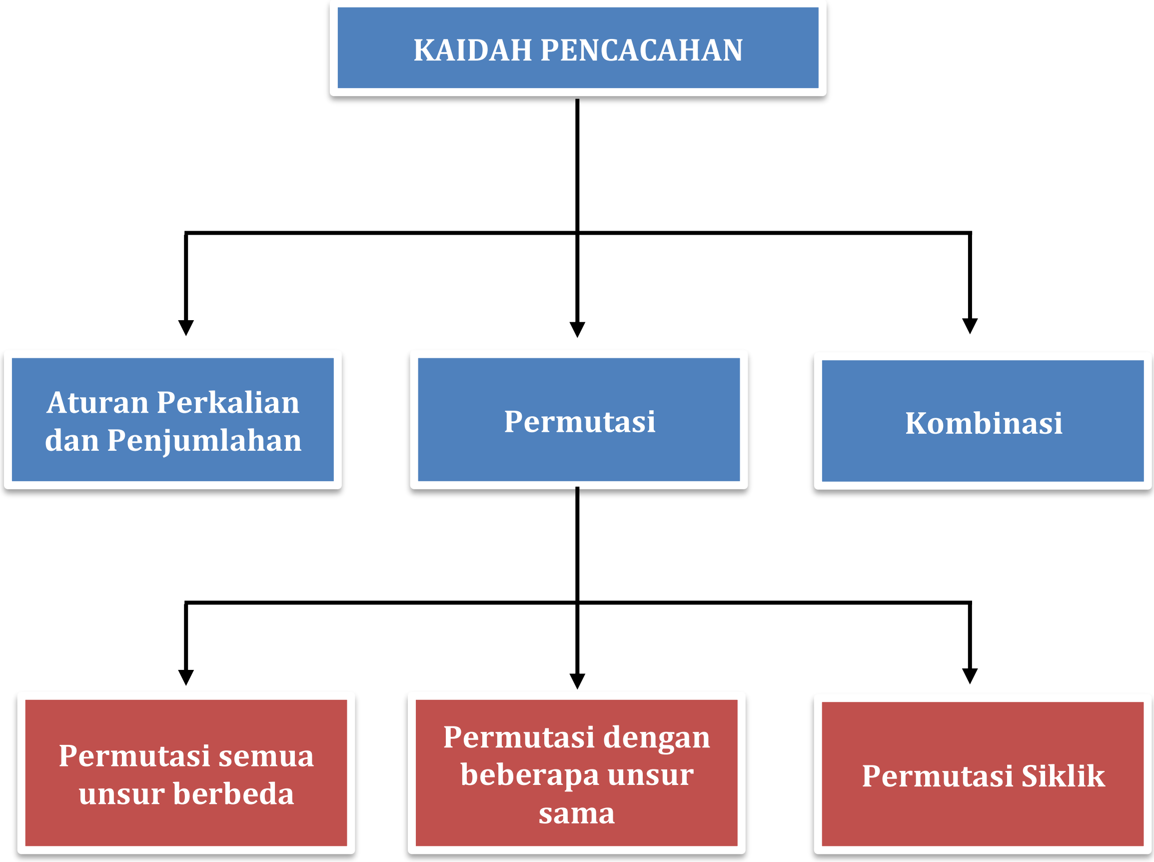
SMA Negeri 17 Makassar

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Faktorial	:	Faktorial dari bilangan asli n adalah hasil perkalian antara bilangan asli yang kurang dari atau sama dengan n.
Kaidah pencacahan		kaidah yang digunakan untuk menentukan atau menghitung berapa banyak cara yang terjadi pada suatu peristiwa.
Kombinasi	:	Susunan objek tanpa memperhatikan urutan.
Permutasi	:	Susunan objek dengan memperhatikan urutan.
Permutasi Siklis	:	Susunan objek melingkar dengan memperhatikan urutan.

PETA KONSEP


KAIDAH PENCACAHAN
Aturan Perkalian dan Penjumlahan
Permutasi
Kombinasi
Permutasi semua unsur berbeda
Permutasi dengan beberapa unsur sama
Permutasi Siklik

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	XII
Alokasi Waktu	:	12 JP (3 Kegiatan Pembelajaran)
Judul Modul	:	Kaidah Pencacahan

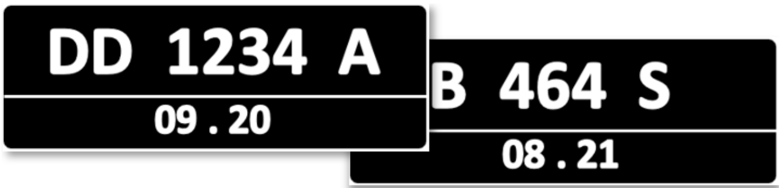
B. Kompetensi Dasar

3.3. Menganalisis aturan pencacahan (aturan penjumlahan, aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi) melalui masalah kontekstual.

4.3. Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan kaidah pencacahan (aturan penjumlahan, aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi).

C. Deskripsi Singkat Materi

Banyak masalah nyata dalam kehidupan sehari-hari yang terkait dengan kaidah pencacahan. Coba perhatikan gambar berikut, tentunya kalian tidak asing dengan gambar ini, bahkan setiap hari mungkin kalian melihatnya.



Gambar 1. Nomor Plat Kendaraan Bermotor
Sumber: Koleksi Pribadi

Nah, pernahkah kalian menemukan kode kendaraan bermotor yang sama di daerah kalian?. Tahukah kalian berapa banyak kode kendaraan bermotor di daerah kalian?. Tahukah kalian cara menghitung banyaknya kode kendaraan yang dapat dibuat di daerah kalian? di daerah lain di provisinsi kalian, atau bahkan di Indonesia? Nah, kalian akan bisa menjawab pertanyaan-pertanyaan ini dengan mempelajari materi kaidah pencacahan pada modul ini.

Kaidah pencacahan adalah bagian dari kombinatorika yang merupakan salah satu cabang dari matematika. Kaidah pencacahan merupakan aturan untuk menghitung banyaknya susunan obyek-obyek tanpa harus merinci semua kemungkinan susunannya. Saat ini, teori kombinatorika mempunyai penerapan pada bidang ilmu fisika, ilmu biologi, ilmu komputer, dan lain sebagainya yang saat ini terus berkembang dengan pesat.

Pada modul ini, kita akan membahas materi kaidah pencacahan yang terdiri atas: aturan penjumlahan dan perkalian, faktorial, permutasi, dan kombinasi.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **3** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Aturan Perkalian dan Penjumlahan

Kedua : Permutasi

Ketiga : Kombinasi

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
ATURAN PERKALIAN DAN PENJUMLAHAN

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan Kalian dapat menjelaskan aturan perkalian dan penjumlahan, menganalisis aturan perkalian dan penjumlahan melalui masalah kontekstual, serta mampu menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan aturan perkalian dan penjumlahan.

B. Uraian Materi

1. Aturan Perkalian

Sebelum kita membahas prinsip dasar aturan perkalian, perhatikan dua masalah berikut!

Masalah 1.1. Melambungkan Sekeping Uang Logam dan Sebuah Dadu

Di SMP, kalian telah mempelajari tentang ruang sampel. Banyak anggota ruang sampel dari sekeping mata uang logam ada 2, yaitu Angka dan Gambar atau bisa ditulis dengan S_1 = {A, G}. Banyak anggota ruang sampel dari sebuah dadu ada 6, yaitu mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 atau bisa ditulis dengan S_2 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

a. Ambillah sekeping mata uang logam dan sebuah dadu, kemudian lambungkan keduanya bersama-sama.
b. Catatlah hasil-hasil yang mungkin berupa pasangan berurutan. Misalnya, jika setelah melambungkan uang logam dan dadu tersebut diperoleh sisi gambar pada uang dan angka 1 pada dadu, maka ditulis dalam pasangan berurutan (A, 1).

Gambar 2. Uang Logam dan Dadu
Sumber: https://edtans.wordpress.com dan www.pngegg.com

c. Dapatkah kalian menentukan semua hasil yang mungkin berupa pasangan berurutan dari percobaan di atas?

Nah, untuk menjawab pertanyaan ini, kita membuat tabel untuk mencatat semua hasil yang mungkin dari percobaan seperti berikut ini.

dadu / uang logam	1	2	3	4	5	6
A	(A, 1)	(A, 2)	(A, 3)	(A, 4)	(A, 5)	(A, 6)
G	(G, 1)	(G, 2)	(G, 3)	(G, 4)	(G, 5)	(G, 6)

Kalau kita mendaftarnya, kita bisa menuliskan semua hasil yang mungkin sebagai anggota himpunan ruang sampel S berikut ini.

S = {(A, 1), (A, 2), (A, 3), (A, 4), (A, 5), (A, 6), (G, 1), (G, 2), (G, 3), (G, 4), (G, 5), (G, 6)}

Banyak anggota dari ruang sampel S atau ditulis $n(S) = 12$. Berarti banyak hasil yang mungkin dari pelambungan sekeping mata uang logam dan sebuah dadu adalah 12.

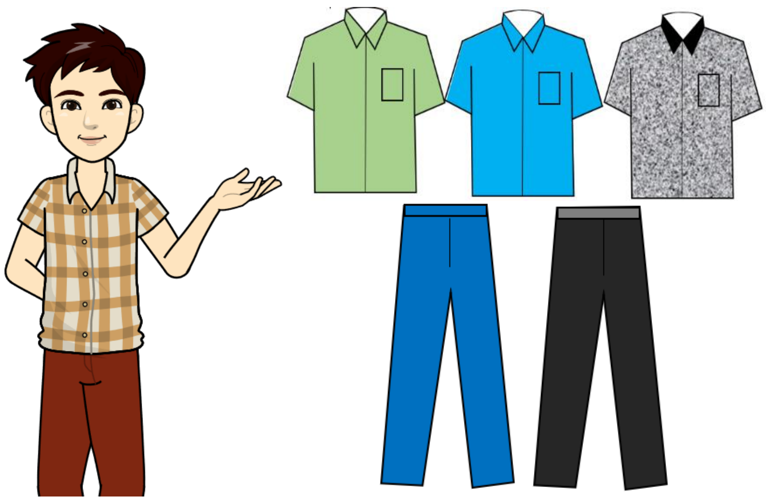
Coba kita mencari hubungan antara $n(S) = 12$ dengan banyaknya hasil yang mungkin untuk objek mata uang logam yakni $n(S_1) = 2$ dan banyaknya hasil yang mungkin untuk objek dadu yakni $n(S_2) = 6$.

Kalau kita amati secara seksama ternyata $n(S) = 12 = 2 \times 6 = n(S_1) \times n(S_2)$.

Atau $n(S)$ merupakan hasil perkalian antara banyak cara munculnya hasil yang mungkin pada sekeping mata uang logam dengan banyak cara munculnya hasil yang mungkin pada sebuah dadu.

Masalah 1.2

Faisal memiliki 4 baju yang berbeda warna, yaitu coklat motif kotak, hijau, biru, dan abu-abu. Dia juga mempunyai 3 celana panjang yang warnanya berbeda, yaitu coklat, biru dan hitam seperti pada gambar di bawah ini.



Gambar 3. Koleksi Baju dan Celana Panjang Faisal
Sumber: Koleksi Pribadi

Dapatkah kalian menolong Faisal untuk menentukan banyaknya stelan baju dan celana berbeda yang dapat digunakan Faisal?

Nah, untuk menjawab pertanyaan ini, kalian bisa memulai dengan mendaftar anggota ruang sampel dari himpunan baju dan celana Faisal seperti berikut ini.

- Ruang sampel baju Faisal adalah B = {coklat kotak, hijau, biru, abu-abu} atau ditulis lebih sederhana B = {ck, hj, b, a}.
- Ruang sampel celana Faisal adalah C = {coklat, biru, hitam} atau C = {ck, h}

Selanjutnya, kalian dapat membuat tabel untuk mencatat semua stelan baju dan celana berbeda seperti berikut ini.

Baju / Celana	coklat kotak	hijau	biru	Abu-abu
coklat	(ck, ck)	(ck, hj)	(ck, b)	(ck, a)
biru	(b, ck)	(b, hj)	(b, b)	(b, a)
hitam	(h, ck)	(h, hj)	(h, b)	(h, a)

Dari tabel di atas diperoleh banyaknya stelan baju dan celana berbeda yang dapat digunakan Faisal ada 12.

Jika dihubungkan dengan banyak baju dan celana berbeda yang dimiliki Faisal, maka kita bisa menuliskan $12 = 4 \times 3 = n(B) \times n(C)$.

Atau banyak stelan baju dan celana berbeda yang dapat digunakan Faisal merupakan hasil perkalian antara banyak baju berbeda dengan banyak celana berbeda yang dimiliki Faisal.

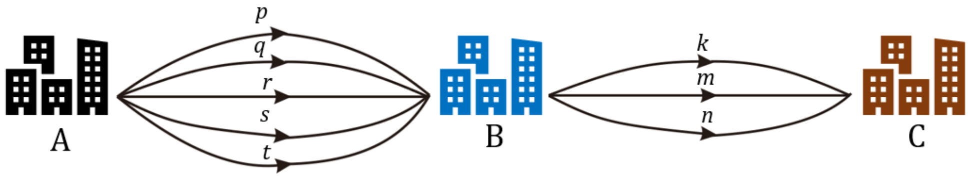
Dua masalah di atas memberikan gambaran mengenai cara mencacah yang disebut **aturan perkalian**.

Secara khusus aturan perkalian berbunyi sebagai berikut.

"Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam m cara dan setiap kejadian pertama diikuti oleh kejadian kedua yang terjadi dalam n cara, maka kejadian pertama dan kejadian kedua tersebut secara bersama-sama terjadi dalam $(m \times n)$ cara."

Contoh 1.

Diagram di bawah ini menunjukkan alur atau pilihan jalan untuk bepergian dari kota A ke kota C melalui kota B.



Gambar 4. Alur dari Kota A ke Kota C
Sumber: Koleksi Pribadi

Amir berada di kota A dan berencana bepergian ke kota C melalui kota B. Berapa banyak jalan berbeda yang dapat dilalui oleh Amir.

Jawab:

Dari kota A ke B ada 5 jalan berbeda, yaitu jalan p, q, r, s, dan t.
Dari kota B ke C ada 3 jalan berbeda, yaitu jalan k, m, dan n.
Berdasarkan aturan perkalian, dari kota A ke C melalui kota B ada $5 \times 3 = 15$ jalan berbeda.
Jadi, banyak jalan yang dapat dilalui Amir dari kota A menuju kota C melalui kota B adalah 15 jalan berbeda.

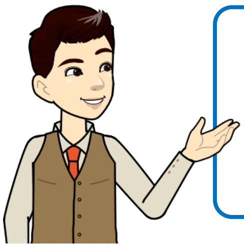
Contoh 2.

Pada suatu kelas akan dibentuk sebuah kepengurusan yang terdiri dari satu ketua kelas dan satu sekretaris. Ada berapa kepengurusan yang mungkin terbentuk jika ada 5 calon ketua kelas dan 6 calon sekretaris?

Jawab:

Perhitungan banyak kepengurusan kelas sebagai berikut:
Pemilihan ketua kelas = 5 kemungkinan
Pemilihan sekretaris = 6 kemungkinan
Sehingga kepengurusan yang mungkin terbentuk sebanyak 5 × 6 = 30 kemungkinan.

Untuk beberapa kejadian, aturan perkalian dapat diperluas sebagai berikut.



"Jika ada k kejadian (pilihan) dengan setiap kejadian (pilihan) memiliki hasil n_1, n_2, n_3, ..., n_k yang berbeda, maka banyak hasil berbeda yang mungkin dari k kejadian (pilihan) tersebut secara berurutan diberikan oleh hasil kali : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$".

Contoh 3

Dalam ruang tunggu suatu apotik terdapat 4 kursi. Ahmad, Umar, Ali dan Said sedang berada di ruang tunggu apotik tersebut. Berapa banyak cara yang berbeda keempat anak itu menduduki kursi tersebut ?

Jawab:

Misalkan, 4 kotak berikut menampilkan 4 kursi dalam ruang tunggu.

- Kotak (kursi) *pertama* dapat diisi dengan 4 pilihan (cara), yaitu oleh siapa saja dari keempat anak.
- Kotak *kedua* dapat diisi dengan 3 pilihan (cara), yaitu oleh siapa saja dari ketiga anak yang tersisa.
- Kotak *ketiga* dapat diisi dengan 2 pilihan (cara), yaitu oleh siapa saja dari kedua anak yang tersisa.
- Kotak *keempat* dapat diisi dengan 1 pilihan (cara), yaitu oleh anak terakhir yang tersisa.

Dengan demikian banyaknya pilihan (cara) menyusun posisi duduk sebagai berikut.

4 pilihan	3 pilihan	2 pilihan	1 pilihan

Dengan menggunakan aturan perkalian, maka banyaknya cara yang berbeda keempat anak menduduki kursi tersebut adalah : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ cara.

2. Aturan Penjumlahan

Sebelum kita membahas prinsip dasar aturan penjumlahan, perhatikan dua masalah berikut!

Masalah 2.1
Di dalam kotak pensil terdapat 5 pulpen dan 3 pensil, berapakah banyaknya cara memilih satu pulpen atau satu pensil?

Nah, masalah ini berbeda dengan masalah yang dibahas pada aturan perkalian, mengapa demikian? Bisakah kalian melihat perbedaannya?.
Pada masalah di aturan perkalian, misalnya pada pelambungan uang logam dan dadu, dua kejadian tersebut terjadi secara bersamaan, yaitu tampilnya satu sisi pada uang logam dan mata dadu.

Pada masalah 2.1 di atas, kejadiannya adalah pilihan antara mengambil satu pulpen atau satu pensil, bukan sekaligus mengambil satu pulpen dan satu pensil. Dengan demikian hal ini berbeda dengan masalah pada aturan perkalian.

Untuk masalah 2.1 dapat kita selesaikan sebagai berikut:
- Kejadian pertama (memilih satu pulpen) dapat terjadi dengan 5 cara.
- Kejadian kedua (memilih satu pensil) dapat terjadi dengan 3 cara.

Jadi, banyaknya cara memilih satu pulpen atau satu pensil adalah 5 + 3 = 8 cara.

Masalah di atas memberikan gambaran mengenai cara mencacah yang disebut **aturan penjumlahan**.

Secara khusus aturan penjumlahan berbunyi sebagai berikut.

"Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam m cara dan kejadian kedua secara terpisah dapat terjadi dalam n cara, maka kejadian pertama atau kejadian kedua dapat terjadi dalam $(m + n)$ cara."

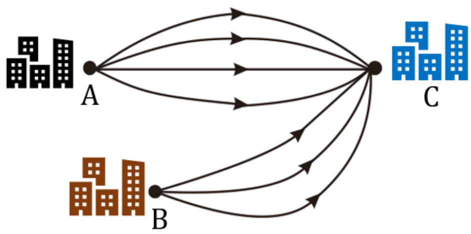
Contoh 4.

Ardi dan Nugroho di kota yang berbeda ingin menuju ke kota yang sama. Ardi berangkat dari kota A ke kota C dalam 4 cara, sedangkan Nugroho berangkat dari kota B ke kota C dalam 3 cara. Dalam berapa cara mereka bertemu di kota C?

Jawab:

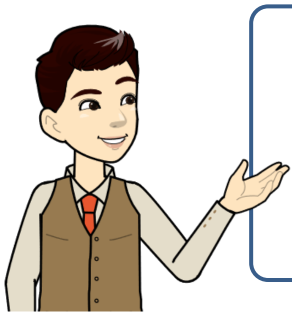
Permasalahan di atas dapat diselesaikan sebagai berikut.

- Ardi berangkat dari kota A ke kota C dapat memilih 4 jalan berbeda atau 4 cara.
- Nugroho berangkat dari kota B ke kota C dapat memilih 3 jalan berbeda atau 3 cara.



Jadi, banyak cara Ardi dan Nugroho dapat bertemu di kota C adalah 4 + 3 = 7 cara.

Aturan penjumlahan dapat diperluas sebagai berikut.



"Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam n_1 cara, kejadian kedua secara terpisah dapat terjadi dalam n_2 cara, kejadian ketiga secara terpisah dapat terjadi dalam n_3 cara, dan seterusnya, dan kejadian ke-p secara terpisah dapat terjadi dalam n_p cara, maka kejadian pertama, atau kedua, atau ketiga, ... , atau kejadian ke-p dapat terjadi dalam $(n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_p)$ cara."

Contoh 5.

Di dalam kantong terdapat 10 kelereng berwarna merah, 7 kelereng berwarna hijau, 5 kelereng berwarna kuning, dan 3 kelereng berwarna biru. Berapakah banyaknya kemungkinan untuk mengambil satu kelereng berwarna merah atau hijau atau kuning atau biru?

Jawab:

Kejadian pertama (mengambil satu kelereng merah) dapat terjadi dengan 10 cara.
Kejadian kedua (mengambil satu kelereng hijau) dapat terjadi dengan 7 cara.
Kejadian kedua (mengambil satu kelereng kuning) dapat terjadi dengan 5 cara.
Kejadian kedua (mengambil satu kelereng biru) dapat terjadi dengan 3 cara.

Jadi banyaknya cara mengambil satu kelereng warna merah atau hijau atau kuning atau biru adalah 10 + 7 + 5 + 3 = 25 cara.

3. Definisi dan Notasi Faktorial

Definisi

Untuk suatu n bilangan asli, $n!$ (dibaca n faktorial) didefinisikan sebagai:

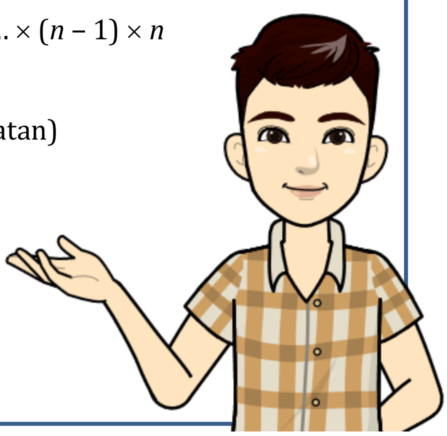
$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n$$

Hal yang perlu diketahui:

$0! = 1$ (dari percobaan dan kesepakatan)
$1! = 1$ (dari kesepakatan)
$2! = 1 \times 2 = 2 \times 1! = 2$
$3! = 1 \times 2 \times 3 = 3 \times 2! = 6$
$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4 \times 3! = 24$

Secara umum dapat ditulis:

$n! = n \times (n-1)!$



Contoh 5.

Hitunglah:

a. $6!$

b. $\frac{5!}{2!}$

c. $4! \times 3!$

d. $\frac{8!}{7! + 6!}$

Jawab:

a. $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

b. $\frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{120}{2} = 60$

c. $4! \times 3! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1) = 24 \times 6 = 144$

d. $\frac{8!}{7! + 6!} = \frac{8\times7\times6!}{7\times6! + 1\times6!}$ (ubah 8! Dan 7! ke dalam bentuk 6!)

$= \frac{8\times7\times6!}{(7+1)6!} = \frac{8\times7}{8} = 7$ (faktorkan penyebut $7\times6! + 1\times6! = (7+1)6!$)

Contoh 6.

Nyatakan bentuk berikut dalam notasi faktorial

a. $4!\,(5\times 6)$
b. $8 \times 7 \times 6 \times 5$
c. $k(k-1)(k-2)$

Jawab:

a. $4!\,(5\times 6) = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (5 \times 6) = 6!$

b. $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times \frac{4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = \frac{8!}{4!}$

c. $k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k-2) \times \frac{(k-3)!}{(k-3)!} = \frac{k!}{(k-3)!}$

Contoh 7.

Sederhanakanlah penjumlahan pecahan $\frac{2}{7!} + \frac{5}{8!}$.

Jawab:

$\frac{2}{7!} + \frac{5}{8!} = \frac{2}{7!} \times \frac{8}{8} + \frac{5}{8!}$ (samakan penyebutnya, caranya $\frac{2}{7!} \times \frac{8}{8}$)

$= \frac{16}{8!} + \frac{5}{8!} = \frac{21}{8!}$ (jumlahkan pembilangnya)

C. Rangkuman

- Kaidah pencacahan merupakan aturan untuk menghitung banyaknya susunan obyek-obyek tanpa harus merinci semua kemungkinan susunannya.
- Aturan perkalian: Jika ada k kejadian (pilihan) dengan setiap kejadian (pilihan) memiliki hasil $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ yang berbeda, maka banyak hasil berbeda yang mungkin dari k kejadian (pilihan) tersebut secara berurutan diberikan oleh hasil kali : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$.
- Aturan penjumlahan: Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam n_1 cara, kejadian kedua secara terpisah dapat terjadi dalam n_2 cara, kejadian ketiga secara terpisah dapat terjadi dalam n_3 cara, dan seterusnya, dan kejadian ke-p secara terpisah dapat terjadi dalam n_p cara, maka kejadian pertama, atau kedua, atau ketiga, ... , atau kejadian ke-p dapat terjadi dalam $(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_p)$ cara.
- Untuk suatu n bilangan asli, $n!$ (dibaca n faktorial) didefinisikan sebagai $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$ dan $0! = 1$.

D. Latihan Soal

1. Akan disusun nomor telepon rumah yang terdiri atas 6 angka, dengan ketentuan angka pertama tidak boleh angka 0. Tentukan banyaknya nomor telepon yang dapat dibuat dari angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jika :
   a. angka-angka boleh berulang
   b. tidak boleh ada angka yang diulang
   c. hanya angka pertama yang tidak boleh diulang.
2. Dalam suatu kelas akan diadakan pemilihan pengurus kelas yang terdiri dari ketua kelas, sekretaris dan bendahara. Apabila calon ketua kelas ada 6 orang, calon sekretaris ada 4 orang, dan calon bendahara ada 3 orang, ada berapa susunan pengurus kelas yang mungkin terbentuk ?
3. Pada suatu konferensi yang dihadiri oleh 9 negara di Asia, bendera masing-masing negara dipasang berjajar pada halaman gedung. Berapa banyak urutan bendera berbeda yang dapat dipasang dari 9 bendera tersebut ?
4. Guru Matematika memberikan ulangan harian yang terdiri atas 10 pertanyaan pilihan ganda dengan 5 pilihan (mengandung 1 jawaban benar). Budi menjawab semua soal dengan cara menebak karena ia tidak belajar. Berapa banyak carakah Budi dapat menjawab soal ulangan harian tersebut ?
5. Sebuah plat nomor mobil di suatu daerah terdiri dari sebuah huruf, diikuti empat angka, dan diakhiri sebuah huruf, di mana angka 0 tidak boleh menempati posisi pertama.
   a. Ada berapakah plat nomor mobil yang dapat dibentuk?
   b. Jika disyaratkan tidak boleh ada huruf yang sama dan tidak ada angka yang sama, maka ada berapa plat nomor yang bisa dibuat?
6. Dari 100 siswa yang mengikuti lomba kecerdasan Bahasa Indonesia dan Matematika, 60 siswa lolos seleksi Bahasa Indonesia, 50 siswa lolos seleksi Matematika, dan 30 siswa lolos seleksi kedua bidang studi tersebut. Hitung banyak siswa yang:
   a. Hanya lolos matematika
   b. Tidak lolos keduanya
7. Dua dadu bermata enam yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hitung:
   a. Banyaknya pasangan mata dadu yang berjumlah 10.
   b. Banyaknya pasangan mata dadu yang jumlahnya paling sedikit 9.
8. Hitunglah :
   a. $\frac{15!}{10!\times 6!}$ b. $\frac{1}{7!}-\frac{2}{8!}+\frac{3}{9!}$
9. Tentukan nilai n jika $n! = 56(n-2)!$
10. Buktikan bahwa : $\frac{k!(k-2)!}{(k-1)!(k-3)!} = k^2 - 2k$

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

1. Banyaknya nomor telepon yang terdiri atas 6 angka dengan angka 0 tidak boleh menjadi angkat pertama dapat dibuat dari angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jika:
   a. angka-angka boleh berulang
      - Angka pertama ada 9 pilihan
      - Angka kedua ada 10 pilihan
      - Angka ketiga ada 10 pilihan
      - Angka keempat ada 10 pilihan
      - Angka kelima ada 10 pilihan
      - Angka keenam ada 10 pilihan

      Jadi, banyak nomor telepon yang dapat dibuat adalah $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 900.000$ nomor telepon.

   b. tidak boleh ada angka yang diulang
      - Angka pertama ada 9 pilihan
      - Angka kedua ada 9 pilihan
      - Angka ketiga ada 8 pilihan
      - Angka keempat ada 7 pilihan
      - Angka kelima ada 6 pilihan
      - Angka keenam ada 5 pilihan

      Jadi, banyak nomor telepon yang dapat dibuat adalah $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136.080$ nomor telepon.

   c. hanya angka pertama yang tidak boleh diulang.
      - Angka pertama ada 9 pilihan
      - Angka kedua ada 9 pilihan
      - Angka ketiga ada 9 pilihan
      - Angka keempat ada 9 pilihan
      - Angka kelima ada 9 pilihan
      - Angka keenam ada 9 pilihan

      Jadi, banyak nomor telepon yang dapat dibuat adalah $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 531.441$ nomor telepon.

2. Ketua kelas ada 6 pilihan
   Sekretaris ada 4 pilihan
   Bendahara ada 3 pilihan
   Jadi, banyak susunan pengurus kelas yang mungkin terbentuk adalah $6 \times 4 \times 3 = 72$ susunan.

3. Disiapkan ada 9 tiang bendera.
   - Tiang pertama ada 9 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang kedua ada 8 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang ketiga ada 7 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang keempat ada 6 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang kelima ada 5 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang keenam ada 4 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang ketujuh ada 3 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang kedelapan ada 2 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.
   - Tiang kesembilan ada 1 pilihan bendera negara yang bisa dipasang.

   Jadi, banyak urutan bendera berbeda yang dapat dipasang dari 9 bendera adalah $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362.880$.

4. Terdapat 10 pertanyaan pilihan ganda dengan 5 pilihan jawaban.

- Soal no.1 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.2 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.3 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.4 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.5 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.6 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.7 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.8 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.9 ada 5 cara Budi memilih jawaban
- Soal no.10 ada 5 cara Budi memilih jawaban

Jadi, banyak cara Budi dapat menjawab soal ulangan harian tersebut adalah $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^{10} = 9.765.625$ cara.

5. Diketahui plat nomor mobil terdiri dari sebuah huruf, diikuti empat angka, dan diakhiri sebuah huruf. Banyak huruf ada 26 buah dari A sampai Z, dan banyak angka ada 10 buah yaitu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Misalkan kotak berikut mewakili plat nomor mobil.

Huruf pertama	Angka pertama	Angka kedua	Angka ketiga	Angka keempat	Huruf terakhir

   a. Banyak plat nomor mobil yang dapat dibentuk.
      - Posisi huruf pertama bisa diisi dengan 26 pilihan
      - Posisi angka pertama bisa diisi dengan 9 pilihan
      - Posisi angka kedua bisa diisi dengan 10 pilihan
      - Posisi angka ketiga bisa diisi dengan 10 pilihan
      - Posisi angka keempat bisa diisi dengan 10 pilihan
      - Posisi huruf pertama bisa diisi dengan 26 pilihan

      Jadi, banyak plat nomor mobil yang dapat dibentuk adalah
      $26 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 = 6.084.000$ plat.

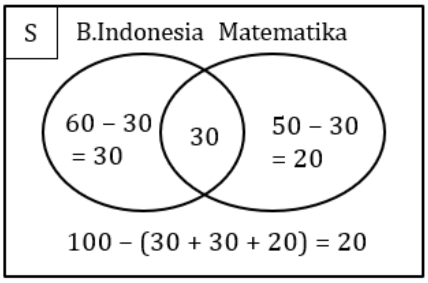
   b. Disyaratkan tidak boleh ada huruf yang sama dan tidak ada angka yang sama.
      - Posisi huruf pertama bisa diisi dengan 26 pilihan
      - Posisi angka pertama bisa diisi dengan 9 pilihan
      - Posisi angka kedua bisa diisi dengan 9 pilihan
      - Posisi angka ketiga bisa diisi dengan 8 pilihan
      - Posisi angka keempat bisa diisi dengan 7 pilihan
      - Posisi huruf pertama bisa diisi dengan 25 pilihan

      Jadi, banyak plat nomor mobil yang dapat dibentuk adalah
      $26 \times 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 25 = 2.948.400$ plat.

6. Diketahui 100 siswa yang mengikuti lomba kecerdasan Bahasa Indonesia dan Matematika, 60 siswa lolos seleksi Bahasa Indonesia, 50 siswa lolos seleksi Matematika, dan 30 siswa lolos seleksi kedua bidang studi tersebut.

Dengan diagram Venn dapat diperoleh:
Berdasarkan diagram Venn di samping, diperoleh:

a. Siswa yang lolos matematika sebanyak 50 – 30 = 20 siswa.
b. Siswa yang tidak lolos keduanya sebanyak 100 – (30 + 30 + 20) = 100 – 80 = 20 siswa



7. Diketahui dua dadu bermata enam yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6.
   a. Banyaknya pasangan mata dadu yang berjumlah 10.
      Pasangan mata dadu berjumlah 10 adalah {(4, 6), (5, 5), (6, 4)}
      Jadi, banyaknya pasangan mata dadu yang berjumlah 10 ada 3 pasangan.
   b. Banyaknya pasangan mata dadu yang jumlahnya paling sedikit 9, berarti pasangan mata dadu berjumlah 9 atau berjumlah 10 atau berjumlah 11 atau berjumlah 12.
      - Pasangan mata dadu berjumlah 9 adalah {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)} ada 4 pasangan
      - Pasangan mata dadu berjumlah 10 adalah {(4, 6), (5, 5), (6, 4)} ada 3 pasangan
      - Pasangan mata dadu berjumlah 11 adalah {(5, 6), (6, 5)} ada 2 pasangan
      - Pasangan mata dadu berjumlah 12 adalah {(6, 6)} ada 1 pasangan

      Jadi, banyaknya pasangan mata dadu yang jumlahnya paling sedikit 9 adalah

      4 + 3 + 2 + 1 = 10 pasangan.

8. a. $\frac{15!}{10!\times 6!} = \frac{15\times 14\times 13\times 12\times 11\times 10!}{10!\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1} = \frac{15\times 14\times 13\times 12\times 11}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1} = \frac{7\times 13\times 11}{2} = 500{,}5$

   b. $\frac{1}{7!} - \frac{2}{8!} + \frac{3}{9!} = \frac{72}{9!} - \frac{18}{9!} + \frac{3}{9!} = \frac{72 - 18 + 3}{9!} = \frac{57}{9!} = \frac{57}{362880} = \frac{19}{120960}$

9. $n! = 56(n-2)!$

   $n(n-1)(n-2)! = 56(n-2)!$

   $n(n-1) = 56 = 8 \times 7$

   Berarti nilai $n = 8$

10. $\frac{k!(k-2)!}{(k-1)!(k-3)!} = \frac{k(k-1)!(k-2)(k-3)!}{(k-1)!(k-3)!}$

    $= k.(k-2)$

    $= k^2 - 2k$

    Jadi, terbukti bahwa $\frac{k!(k-2)!}{(k-1)!(k-3)!} = k^2 - 2k$

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Kalian tahu yang dimaksud aturan perkalian?	◯	◯
2	Apakah Kalian tahu yang dimaksud aturan penjumlahan?	◯	◯
3	Apakah Kalian tahu yang dimaksud dengan faktorial?	◯	◯
4	Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan aturan perkalian?	◯	◯
5	Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan aturan penjumlahan?	◯	◯
6	Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan konsep faktorial?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PERMUTASI

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan Kalian dapat menjelaskan konsep permutasi, menganalisis permutasi melalui masalah kontekstual, serta mampu menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan permutasi.

B. Uraian Materi

Misalkan pada suatu lomba cerdas cermat yang diikuti oleh 3 regu (regu A, regu B, dan regu C) hanya menyediakan 2 macam hadiah saja yakni hadiah I dan hadiah II. Ada berapa kemungkinan pasangan pemenang hadiah-hadiah itu?

Berdasarkan jawaban di atas ternyata diperoleh bahwa terdapat 6 pasangan yang mungkin menjadi pemenang tebak tepat, yaitu (A, B), (A,C), (B, A), (B,C), (C, A), dan (C, B). Perhatikan bahwa (A, B)≠(B, A), (B, C)≠(C, B), dan seterusnya. (Mengapa?) Apa arti (A, B) dan (B, A)?

Untuk menjawab pertanyaan di atas ternyata urutan diperhatikan. Oleh karena itu, susunan yang demikian ini dinamakan dengan permutasi. Sekarang coba cari hubungan yang dapat diperoleh dari informasi pada masalah di atas bagaimana dapat menghasilkan 6 pasangan yang mungkin jadi pemenang.

Pengertian

"Diberikan sebanyak n unsur berbeda. Sebuah permutasi k unsur dari n unsur berbeda adalah sebuah jajaran dari k unsur yang urutannya diperhatikan."

Perhatikan huruf-huruf A, B, C, dan D.

- BDCA, DCBA, dan ACDB merupakan contoh permutasi-permutasi dari 4 huruf.
- BAD, ADB, dan BCA merupakan contoh permutasi-permutasi 3 huruf dari 4 huruf yang diketahui.
- AD, CB, DA, dan BD merupakan contoh permutasi-permutasi 2 huruf dari 4 huruf yang diketahui.

Coba tentukan permutasi 4 huruf, 3 huruf, dan 2 huruf lainnya dari huruf A, B, C, D.

1. Permutasi dengan Semua Unsur Berbeda

Banyaknya permutasi r unsur dari n yang berbeda diberi notasi P(n, r).

Teorema 1

Jika n dan r adalah dua bilangan bulat positif dan $r \leq n$, maka banyaknya permutasi r unsur dari n unsur berbeda tanpa pengulangan, diberi notasi P(n, r) adalah:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Banyaknya permutasi n unsur dari n unsur berbeda adalah P(n, n) = n!

Contoh 1.

Tentukan banyaknya susunan 4 huruf berbeda yang dapat diperoleh dari kata MENTARI.

Jawab:

Kata MENTARI terdiri atas 7 huruf yang berbeda.
Banyaknya susunan 4 huruf berbeda yang dapat diperoleh dari 7 huruf berbeda tersebut merupakan permutasi r = 4 dari n = 7 huruf atau P(7, 4).
Jadi banyaknya susunan huruf yang dapat dibuat adalah

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}}$$

$$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

Ingat kembali definisi faktorial di KP 1,
7! = 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1
atau 7! = 7 × 6 × 5 × 4 × 3!

Jadi, banyak susunan 4 huruf berbeda dari kata MENTARI adalah 840.

Contoh 2.

Dalam berapa cara, 6 buku pelajaran berbeda dapat disusun pada sebuah rak buku?

Jawab:

Banyaknya cara menyusun keenam buku pelajaran yang berbeda merupakan permutasi 6 unsur dari 6 unsur atau P(6, 6).
Dengan rumus P(n, n) = n! ,
diperoleh P(6, 6) = 6!
= 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1
= 720
Jadi, banyaknya cara menyusun 6 buku pelajaran yang berbeda pada rak buku adalah 720 cara.

Permutasi dengan Pembatasan (Semua Unsur Berbeda)

Kadang-kadang kita menemukan pembatasan dalam pemilihan penyusunan unsur-unsur tertentu. Untuk masalah seperti ini, terlebih dahulu kita selesaikan pembatasannya, kemudian baru kita gunakan kaidah pencacahan.

Contoh 3.

Diketahui 5 mobil berbeda dan 4 motor berbeda yang sedang diparkir berbaris. Berapa banyak carakah barisan kendaraan ini dapat dibentuk dengan urutan kendaraan yang berbeda?

Tentukan juga banyak cara barisan berbeda dapat dibentuk jika :

a. dua motor harus ada di depan
b. satu mobil di depan dan satu motor di belakang.
c. mobil harus berkelompok
d. tidak boleh dua mobil berdekatan

Penyelesaian :

Jika mobil dan motor tidak dibedakan, maka terdapat 9 unsur berbeda (dari 5 mobil dan 4 motor). Jadi, Banyak cara membentuk barisan kendaraan dengan urutan yang berbeda adalah permutasi 9 unsur dari 9 unsur atau P(9, 9).

P(9, 9) = 9!

$= 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

= 362.880 cara.

Berikutnya kita akan menentukan permutasi dari susunan mobil dan motor dengan beberapa pembatasan. Misalkan MT = motor dan MB = mobil.

a. Dua motor harus ada di depan

MT	MT							

- Dua kotak (tempat) pertama diisi dengan 2 motor yang dipilih dari 4 motor yang tersedia.

  Banyak cara memilih 2 motor dari 4 motor tersebut adalah P(4, 2)

$$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$= \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$= 4 \times 3 = 12$

- Sisa 7 kotak (tempat) lainnya, dapat diisi dengan 7 kendaraan yang tersisa. Ini adalah $P(7, 7) = 7!$

Dengan aturan perkalian, maka banyak cara dua motor harus ada di depan adalah

$12 \times 7! = 12 \times 5.040 = 60.480$

Jadi, banyak cara barisan berbeda dapat dibentuk jika dua motor harus ada di depan adalah 60.480 cara.

b. Satu mobil di depan dan satu motor di belakang

MB								MT

- Kotak pertama harus diisi mobil, dapat diisi dengan mobil mana saja dari 5 mobil yang ada, jadi kotak pertama dapat diisi dengan 5 cara.
- Kotak terakhir harus diisi motor, dapat diisi dengan motor mana saja dari 4 motor yang ada, berarti kotak terakhir dapat diisi dengan 4 cara.
- Sisa 7 kotak yang dapat diisi dengan 7 kendaraan yang tersisa, berarti $P(7, 7) = 7!$.

Dengan aturan perkalian, maka banyaknya cara menyusun agar satu mobil di depan dan satu motor di belakang adalah $5 \times 7! \times 4 = 20 \times 5.040 = 100.800$

Jadi, banyak cara barisan berbeda dapat dibentuk jika satu mobil di depan dan satu motor di belakang adalah 60.480 cara.

c. Mobil harus berkelompok

- Agar mobil (5 mobil) berkelompok, maka kita memblok dan menganggapnya sebagai satu unsur. Dalam blok ini, kelima mobil dapat dipertukarkan dalam $P(5, 5) = 5!$ cara.
- Kemudian blok mobil ini beserta 4 motor membentuk 5 unsur yang juga dapat dipertukarkan dalam $P(5, 5) = 5!$ cara.

Dengan menggunakan aturan perkalian, banyaknya cara menyusun agar mobil berkelompok adalah $5! \times 5! = 120 \times 120 = 14.400$.

Jadi, banyak cara barisan berbeda dapat dibentuk mobil harus berkempok adalah 14.400 cara.

d. Tidak boleh dua mobil berdekatan

Supaya mobil tidak berdekatan, maka posisi mobil dan motor haruslah berselang-seling seperti ilustrasi berikut.

MB	MT	MB	MT	MB	MT	MB	MT	MB

- Kelima posisi mobil dapat dipertukarkan dalam $P(5, 5) = 5!$ cara.
- Keempat posisi motor dapat dipertukarkan dalam $P(4, 4) = 4!$ cara.

Dengan menggunakan aturan perkalian, banyaknya cara menyusun agar tidak boleh dua mobil berdekatan adalah $5! \times 4! = 120 \times 24 = 2.880$

2. Permutasi dengan Beberapa Unsur yang Sama

Teorema 2

Banyaknya permutasi dari n unsur yang terdiri dari m_1 unsur jenis pertama sama, m_2 unsur jenis kedua sama, m_3 unsur jenis ketiga sama, ..., dan m_k unsur jenis ke–k sama ditentukan dengan

$$P = \frac{n!}{m_1!\ x\ m_2!\ x\ m_3!\ x\ \ldots\ x\ m_k!}$$

dimana $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k = n$.

Contoh 4.

Berapa banyak permutasi dari huruf-huruf pada kata MATEMATIKA ?

Jawab:

Banyak huruf pada kata MATEMATIKA ada 10 buah. Terdapat unsur yang sama, yaitu:

- huruf M ada 2 buah,
- huruf A ada 3 buah,
- huruf T ada 2 buah.
- huruf E, I, dan K masing-masing 1 buah.

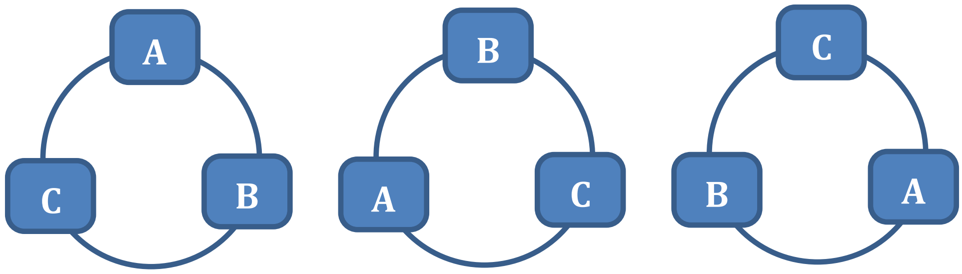
Maka banyaknya permutasi dari huruf-huruf tersebut adalah

$$P = \frac{10!}{2!\ x\ 3!\ x\ 2!\ x\ 1!\ x\ 1!\ x\ 1!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2\ x\ 3!\ x\ 2\ x\ 1\ x\ 1\ x\ 1} = 151.200.$$

3. Permutasi Siklik

Perhatikan bahwa permutasi yang kita bicarakan di atas adalah permutasi yang objek-objeknya dijajar atau disusun pada satu garis. Permutasi demikian ini dinamakan permutasi linear. Namun, jika objek-objek tersebut dijajar/disusun melingkar (pada suatu lingkaran) dan arah melingkarnya diperhatikan, misalnya searah putaran jarum jam, maka permutasi yang demikian dinamakan permutasi siklik.

Coba kalian perhatikan gambar berikut.



Tiga objek A, B, dan C di atas disusun secara melingkar. Walaupun nampak berbeda, namun jika dilihat dari urutan (searah jarum jam misalnya) maka ketiga susunan ini adalah sama.

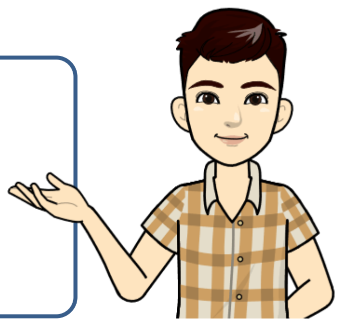
Jadi, dari tiga buah permutasi linear ABC, BCA, dan CAB diperoleh hanya satu permutasi siklik (ABC). Demikian juga untuk tiga permutasi linear ACB, CBA, dan BAC diperoleh hanya satu permutasi siklik (ACB). Dengan demikian terdapat dua permutasi-3 siklik dari tiga objek A, B, dan C, yaitu (ABC) dan (ACB).

Selanjutnya secara umum, jika pengulangan tidak diperkenankan, hubungan antara banyaknya permutasi siklik dan banyaknya permutasi linear dinyatakan dalam teorema berikut.

Definisi Permutasi Siklik

Banyaknya permutasi untuk n unsur berbeda yang diatur dalam sebuah lingkaran disebut permutasi siklik. Permutasi siklik dari n unsur ($n > 1$) ditentukan oleh rumus:

$$P_s(n) = (n - 1)!$$



Contoh 5.

6 orang manager perusahaan duduk mengelilingi sebuah meja berbentuk melingkar untuk mengadakan rapat. Berapa banyak cara mereka dapat duduk mengelilingi meja rapat tersebut dengan urutan yang berbeda?

Jawab:

Banyaknya cara agar 6 orang manager dapat duduk mengelilingi meja rapat sama dengan permutasi melingkar dari 6 unsur, yaitu

$Ps\,(6) = (6 - 1)! = 5!$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Jadi, banyak cara 6 orang manager perusahaan dapat duduk mengelilingi meja rapat tersebut dengan urutan yang berbeda adalah 120 cara.

Contoh 6.

Satu keluarga terdiri dari ayah, ibu, dan 4 orang anaknya. Mereka duduk di meja makan yang bentuknya melingkar. Ada berapa cara anggota keluarga tersebut duduk mengelilingi meja jika ayah dan ibu selalu duduk berdampingan?

Jawab:

- Syarat khusus, ayah dan ibu selalu duduk berdampingan. Posisinya dapat dipertukarkan sebanyak 2! = 2 cara.
- Ayah dan ibu selalu duduk berdampingan, sehingga posisi ini diblok dan dianggap 1 unsur. Blok (ayah dan ibu) dan 4 orang anaknya menjadi 5 unsur yang duduk melingkar, sehingga dengan permutasi siklik diperoleh:

$P_s\,(5) = (5 - 1)! = 4!$

$= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Dengan Aturan perkalian diperoleh banyak cara anggota keluarga duduk mengelilingi meja jika ayah dan ibu selalu duduk berdampingan adalah $2 \times 24 = 48$ cara.

C. Rangkuman

- Permutasi k unsur dari n unsur berbeda adalah sebuah jajaran dari k unsur yang urutannya diperhatikan.
- Jika n dan r adalah dua bilangan bulat positif dan $r \leq n$, maka banyaknya permutasi r unsur dari n unsur berbeda tanpa pengulangan, diberi notasi P(n, r) adalah:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Banyaknya permutasi n unsur dari n unsur berbeda adalah P(n, n) = n!.
- Banyaknya permutasi dari n unsur yang terdiri dari m_1 unsur jenis pertama sama, m_2 unsur jenis kedua sama, m_3 unsur jenis ketiga sama, …, dan m_k unsur jenis ke–k sama ditentukan dengan

$$P = \frac{n!}{m_1!\ x\ m_2!\ x\, m_3!\ x\ \dots\ x\, m_k!}$$

dimana $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k = n$.

- Banyaknya permutasi untuk n unsur berbeda yang diatur dalam sebuah lingkaran disebut permutasi siklik. Permutasi siklik dari n unsur ($n > 1$) ditentukan oleh rumus $P_s\,(n) = (n - 1)!$

D. Latihan Soal

1. Seorang kandidat presiden hanya dapat mengunjungi enam provinsi dari sepuluh provinsi yang ingin dikunjunginya. Berapa banyak cara dengan urutan berbeda, ia dapat mengunjungi provinsi-provinsi itu?
2. Bilangan terdiri dari 4 angka disusun dari angka-angka 1, 2, 3, 5, 6, dan 7. Hitung banyak susunan bilangan dengan angka-angka yang berlainan (angka-angkanya tidak boleh berulang).
3. Pada suatu pameran karya seni, lukisan-lukisan ditempatkan pada satu baris. Dengan berapa cara penempatan lukisan dapat dilakukan jika ada 10 lukisan yang dipamerkan?
4. Terdapat 4 buku matematika, 3 buku fisika, dan 5 buku kimia yang berbeda akan disusun ke dalam rak yang dapat memuat semua buku. Berapa susunan yang mungkin jika:
   a. buku yang sejenis saling berdampingan
   b. buku-buku fisika saja yang saling berdampingan
5. Berapa banyak permutasi dari huruf-huruf pada kata STATISTIKA?
6. Pada suatu ruas jalan dipasang lampu hias yang terdiri dari 3 bohlam kuning, 6 bohlam merah, dan 4 bohlam hijau. Tentukan banyaknya cara memasang lampu hias tersebut jika bohlam berwarna sama tidak dapat dibedakan?
7. Tujuh orang duduk mengelilingi meja bundar. Berapa banyaknya susunan duduk yang berbeda dari ketujuh orang itu?
8. Dengan berapa cara 5 anak laki-laki dan 3 anak perempuan dapat disusun pada suatu lingkaran jika anak perempuan selalu berdekatan (berkumpul)?

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

1. Mengunjungi 6 provinsi dari 10 provinsi merupakan permutasi P(10, 6).

   $$P(10,6) = \frac{10!}{(10-6)!}$$
   $$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6\ \times 5\ \times 4!}{4!}$$
   $$= 10 \times 9 \times 8 \times 7\ \times 6\ \times 5 = \ 151.200$$

   Jadi, banyak cara dengan urutan berbeda, kandidat presiden mengunjungi 6 provinsi dari 10 provinsi adalah 151.200 cara.

2. Bilangan terdiri dari 4 angka disusun dari angka-angka 1, 2, 3, 5, 6, dan 7. Banyak susunan bilangan dengan angka-angka yang berlainan (angka-angkanya tidak boleh berulang) merupakan permutasi 4 angka dari 6 angka.

   $$P(6,4) = \frac{6!}{(6-4)!}$$
   $$= \frac{6\ \times 5\ \times\ 4\ \times 3 \times 2!}{2!}$$
   $$= 6 \times 5 \times 4 \times 3\ =\ 360$$

   Jadi, banyak susunan bilangan dengan angka-angka yang berlainan (angka-angkanya tidak boleh berulang) adalah 360 susunan.

3. Banyak cara penempatan10 lukisan yang akan dipamerkan dalam satu baris adalah
   P(10, 10) = 10!
   = 10 × 9 × 8 × 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1
   = 3.628.800 cara.

4. Terdapat 4 buku matematika, 3 buku fisika, dan 5 buku kimia yang berbeda akan disusun ke dalam rak yang dapat memuat semua buku.

   a. Banyak susunan jika buku yang sejenis saling berdampingan

      Jika buku yang sejenis berdampingan, maka buku yang sejenis tersebut dikelompokkan dalam satu blok dan dianggap sebagai 1 unsur.
      - 4 buku matematika diblok dan dapat disusun dalam bloknya sebanyak P(4, 4) = 4! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24 cara.
      - 3 buku fisika diblok dan dapat disusun dalam bloknya sebanyak P(3, 3) = 3! = 3 × 2 × 1 = 6 cara.
      - 5 buku kimia diblok dan dapat disusun dalam bloknya sebanyak P(5, 5) = 5! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120 cara.
      - 3 blok buku sejenis tersebut membentuk 3 unsur yang dapat disusun sebanyak P(3, 3) = 3! = 3 × 2 × 1 = 6 cara.

      Jadi, banyak susunan jika buku yang sejenis saling berdampingan adalah
      24 × 6 × 120 × 6 = 103.680 cara

   b. Banyak susunan jika buku fisika saja yang saling berdampingan

      - 3 buku fisika berdampingan, berarti buku fisika dikelompokkan dalam satu blok dan dapat disusun dalam bloknya sebanyak P(3, 3) = 3! = 3 × 2 × 1 = 6 cara.
      - 9 buku yang lainnya (matematika dan kimia) dan 1 blok buku fisika membentuk 10 unsur yang dapat disusun sebanyak P(10, 10) = 10! = 3.628.800 cara.

Jadi, banyak susunan jika buku fisika saja yang berdampingan adalah
$6 \times 3.628.800 = 21.772.800$ cara.

5. Banyak huruf pada kata STATISTIKA ada 10 buah. Terdapat unsur yang sama, yaitu:
   - huruf S ada 2 buah,
   - huruf T ada 3 buah,
   - huruf A ada 2 buah,
   - huruf I ada 2 buah,
   - huruf K ada 1 buah.

   Maka banyaknya permutasi dari huruf-huruf tersebut adalah

   $$P = \frac{10!}{2! \times 3! \times 2! \times 2! \times 1!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3! \times 2 \times 2} = 10 \times 9 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$$

   $= 75.600.$

6. Terdapat 13 bola lampu hias dengan 3 jenis warna.
   - Bohlam kuning ada 3 buah
   - Bohlam merah ada 6 buah
   - Bohlam hijau ada 4 buah

   Banyaknya cara memasang lampu hias tersebut adalah

   $$P = \frac{13!}{3! \times 6! \times 4!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3 \times 2 \times 1 \times 6! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13 \times 12 \times 11 \times 5 \times 7 = 60.060.$$

7. Banyaknya susunan duduk yang berbeda dari 7 orang yang mengelilingi meja bundar merupakan permutasi siklik dari 7 unsur, yaitu

   $P_s(7) = (7 - 1)! = 6!$

   $= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

8. Syarat khusus, 3 anak perempuan selalu berdekatan. Posisinya dapat dipertukarkan sebanyak $P(3, 3) = 3! = 6$ cara.

   3 anak perempuan selalu berdekatan, sehingga posisi ini diblok dan dianggap 1 unsur. Blok (3 anak perempuan) dan 5 anak laki-laki menjadi 6 unsur yang disusun melingkar, sehingga dengan permutasi siklik diperoleh:

   $P_s(6) = (6 - 1)! = 5!$

   $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

   Dengan Aturan perkalian diperoleh banyak cara 5 anak laki-laki dan 3 anak perempuan disusun pada suatu lingkaran dimana anak perempuan selalu berdekatan (berkumpul) adalah $6 \times 120 = 720$ cara.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Kalian tahu yang dimaksud permutasi?	◯	◯
2	Apakah Kalian tahu yang dimaksud permutasi dengan pembatasan?	◯	◯
3	Apakah Kalian tahu yang dimaksud dengan permutasi siklis?	◯	◯
4	Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan konsep permutasi?	◯	◯
5	Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan yang terkait permutasi dengan pembatasan?	◯	◯
6	Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan yang terkait permutasi siklis?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
KOMBINASI

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan Kalian dapat menjelaskan konsep kombinasi, menganalisis kombinasi melalui masalah kontekstual, serta mampu menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan kombinasi.

B. Uraian Materi

1. Kombinasi

Misalkan dari 4 bersaudara Amir (A), Budi (B), Cahya (C), dan Doni (D) diundang 2 orang wakilnya untuk rapat keluarga. Ada berapa cara undangan itu dapat dipenuhi? Bagaimana pula jika yang diundang adalah 3 orang dari 4 bersaudara itu?

Dari permasalahan di atas diperoleh bahwa objek eksperimennya adalah O = {A, B, C, D} sedangkan eksperimennya adalah mengundang hadir dalam rapat keluarga sebanyak 2 orang wakilnya.

Jika rapat keluarga itu yang diundang 2 orang, maka apakah arti dari (A, B) dan (B, A)? Apakah (A, B) = (B, A)?
Demikian juga, jika rapat keluarga itu yang diundang 3 orang, maka apakah arti dari (C, A, D) dan (A, C, D)? Apakah (C, A, D) = (A, C, D)?

Nah, ternyata untuk permasalahan di atas, (A, B) = (B, A), karena jika yang hadir Amir dan Budi, tentunya sama saja jika yang hadir Budi dan Amir. Demikian juga (C, A, D) = (A, C, D).

Untuk menjawab pertanyaan di atas ternyata urutan tidak diperhatikan. Susunan yang demikian ini dinamakan dengan kombinasi. Sekarang coba cari hubungan yang dapat diperoleh dari informasi pada masalah di atas, jika rapat keluarga itu yang diundang 2 orang, maka banyaknya pasangan anggota keluarga yang mungkin ikut rapat ada 6.

Pengertian

"Diberikan sebanyak *n* unsur berbeda. Sebuah kombinasi *k* unsur dari *n* unsur berbeda adalah sebuah jajaran dari *k* unsur yang urutannya tidak diperhatikan."

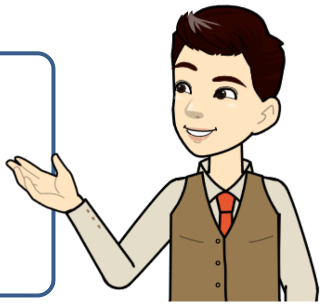
Untuk lebih memahami pengertian ini, perhatikan huruf-huruf A, B, C, dan D.

a. ABC, ABD, ACD, dan BCD merupakan kombinasi 3 huruf dari 4 huruf yang diketahui tanpa pengulangan.
b. AAB, ABB, ACC, dan BDD merupakan kombinasi-3 huruf dari 4 huruf yang diketahui dengan pengulangan. (Coba cari kombinasi lainnya selain 4 kombinasi tersebut!)
c. AD, CB, AB, dan BD merupakan kombinasi-kombinasi-2 huruf dari 4 huruf yang diketahui. (Coba cari kombinasi lainnya selain 4 kombinasi tersebut!)

Teorema

Misalkan n dan k bilangan bulat non negatif dengan $k \leq n$. Banyaknya kombinasi k unsur dari n unsur berbeda *tanpa pengulangan* ditentukan dengan rumus:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Contoh 1.

Dalam suatu ujian, setiap siswa diharuskan menjawab 4 soal dari 7 soal yang disediakan. Jika seorang siswa memilih secara acak soal yang akan dikerjakannya, berapa banyak cara atau pilihan untuk mengerjakan soal ujian tersebut ?

Jawab:

Dalam kasus di atas, urutan nomor-nomor soal diabaikan. Sehingga banyaknya cara untuk menngerjakan 4 soal dari 7 soal ujian adalah kombinasi 4 soal dari 7 soal, sehingga diperoleh:

$$C(7,\ 4) = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{7!}{4!\,.3!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!\,.3 \times 2 \times 1} = 35$$

Jadi, banyak cara untuk mengerjakan soal ujian tersebut adalah 35 cara.

Contoh 2.

Sebuah kontingen Olimpiade Matematika yang terdiri atas 5 siswa akan dipilih dari 6 siswa putra dan 4 siswa putri. Tentukan banyak cara kontingen ini dapat dibentuk jika:

a. tidak ada pembatasan (tidak dibedakan antara putra dan putri)
b. kontingen memiliki tepat 2 siswa putra
c. kontingen memiliki paling sedikit 1 siswa putri

Jawab *:*

Masalah ini termasuk masalah kombinasi, karena urutan pemilihan siswa tidak diperhatikan (tidak dipentingkan).

a. tidak ada pembatasan
Jumlah siswa tanpa membedakan putra dan putri adalah 6 + 4 = 10. dari 10 siswa tersebut akan dipilih 5 siswa, sehingga banyak cara membentuk kontingen adalah

$$C(10,\ 5) = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5!.5!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!\,.5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252 \text{ cara.}$$

b. kontingen memiliki tepat 2 siswa putra

2 siswa putra dapat dipilih dari 6 siswa putra, dengan banyaknya cara memilihnya adalah $C(6, 2)$.
Kontingen terdiri dari 5 siswa, berarti masih tersedia 3 tempat yang harus diisi oleh siswa putri. Banyaknya cara memilih 3 siswa putri dari 4 siswa putri adalah $C(4, 3)$.
Dengan aturan perkalian, banyaknya cara membentuk kontingen yang memiliki tepat 2 siswa putra adalah

$$C(6,2) \times C(4,3) = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} \times \frac{4!}{3!\,(4-3)!}$$

$$= \frac{6!}{2!.4!} \times \frac{4!}{3!.1!}$$

$$= \frac{6\times5\times4!}{2\times1\times4!} \times \frac{4\times3!}{3!\times1} = 15 \times 4 = 60 \text{ cara.}$$

c. kontingen memiliki paling sedikit 1 siswa putri

Banyaknya cara membentuk kontingen yang terdiri atas 5 siswa dengan semuanya putra adalah $C(6, 5)$

$$C(6,\ 5) = \frac{6!}{5!(6-5)!}$$

$$= \frac{6!}{5!\,(6-5)!} = \frac{10!}{5!\,.1!}$$

$$= \frac{6 \times 5!}{5!\,.1} = 6 \text{ cara.}$$

Banyaknya cara membentuk kontingen adalah $C(10, 5)$.

Jadi, banyaknya cara membentuk kontingen yang memiliki paling sedikit 1 siswa putri adalah

$$C(10, 5) - C(6, 5) = 252 - 6 = 246 \text{ cara}$$

2. Ekspansi Binomial

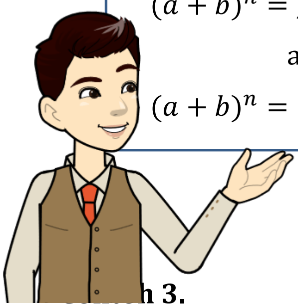
Penjabaran Binomial Newton berbentuk $(a + b)^n$, koefisien variabelnya dapat bersandarkan pada Segitiga Pascal atau konsep kombinasi.

Teorema Binomial

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,\ r)\, a^{n-r}.b^r,$$

atau dijabarkan:

$$(a+b)^n = C(n,0).a^n + C(n,1).a^{n-1}b^1 + C(n,2).a^{n-2}b^2 + \ldots + C(n,n).b^n$$



Contoh 3.

Tentukan ekspansi dari $(2x + y^2)^5$.

Jawab:

$(2x + y^2)^5 = C(5, 0)(2x)^5 + C(5, 1)(2x)^4(y^2)^1 + C(5, 2)(2x)^3(y^2)^2 + C(5, 3)(2x)^2(y^2)^3$

$+ C(5, 4)(2x)^1(y^2)^4 + C(5, 5)(y^2)^5$

$= 1(32x^5) + 5(16x^4)(y^2) + 10(8x^3)(y^4) + 10(4x^2)(y^6) + 5(2x)(y^8) + 1(y^{10})$

$= 32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$

Contoh 4.

Tentukan suku ketujuh dari ekspansi $(4x - y^3)^9$.

Jawab:

Bentuk umum ekspansi binomial $(a + b)^n$ terlebih dahulu diidentikkan dengan ekspansi binomial yang diketahui di soal untuk menentukan nilai-nilai a, b, dan n.

$(a + b)^n \equiv (4x - y^3)^9$, diperoleh $a = 4x$, $b = -y^3$ dan $n = 9$

Ditanyakan suku ketujuh, berarti $r = 7 - 1 = 6$,

Jadi, suku ketujuh : $C(n,\ r)\ a^{n-r}\ b^r = C(9,\ 6)\ (4x)^{9-6}\ (-y^3)^6$

$= \frac{9!}{6!.3!}\ (4x)^3\ (-y^3)^6$

$= 84.\ (64x^3)\ (y^{18}) = 5.376.x^3\ y^{18}$

C. Rangkuman

- Kombinasi k unsur dari n unsur berbeda adalah sebuah jajaran dari k unsur yang urutannya tidak diperhatikan.
- Misalkan n dan k bilangan bulat non negatif dengan $k \le n$. Banyaknya kombinasi k unsur dari n unsur berbeda *tanpa pengulangan* ditentukan dengan rumus:
  $C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Ekspansi Binomial
  $(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,\ r)\ a^{n-r}.\ b^r$,

  atau dijabarkan:

  $(a + b)^n = C(n, 0).\ a^n + C(n, 1).\ a^{n-1}b^1 + C(n, 2).\ a^{n-2}b^2 + \ldots + C(n, n).\ b^n$

D. Latihan Soal

1. Berapa banyak segitiga yang berbeda yang dapat dibentuk dengan menghubungkan diagonal-diagonal segi-10?
2. Seorang siswa diminta mengerjakan 7 soal dari 10 soal yang tersedia, dengan syarat nomor 1 sampai dengan nomor 5 harus dikerjakan. Berapa banyak pilihan yang dapat diambil oleh siswa tersebut?
3. Suatu tim bulu tangkis beranggotakan 5 pemain putra dan 3 pemain putri. Tentukanlah banyaknya tim:
   a. ganda putra yang dapat disusun.
   b. ganda campuran yang dapat disusun.

4. Pengurus inti kelas yang terdiri dari 4 siswa putra dan 3 siswa putri akan dipilih dari 7 siswa putra dan 5 siswa putri. Berapa banyak pilihan berbeda untuk membentuk pengurus inti kelas tersebut?
5. Sebuah kotak berisi 5 bola merah, 4 bola putih, dan 3 bola biru. Tiga bola diambil dari kotak tersebut.
   a. berapa banyak cara terambil 3 bola berwarna sama?
   b. berapa banyak cara terambil 1 bola putih dan 2 bola merah ?
6. Seorang ahli kimia memiliki 9 contoh larutan. Terdapat 4 jenis larutan A dan 5 jenis larutan B. Jika ahli kimia tersebut memilih tiga larutan secara acak, berapa cara ahli kimia tersebut akan mengambil lebih dari satu jenis larutan A?
7. Tentukan ekspansi dari $(2x - y^2)^6$.
8. Tentukan suku kelima dari ekspansi $(x + 2y)^{10}$.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

1. Banyak segitiga yang berbeda yang dapat dibentuk dengan menghubungkan diagonal-diagonal segi-10 merupakan kombinasi 3 unsur dari 10 unsur atau C(10, 3), yaitu:

$$C(10,\ 3) = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,.7!}$$
$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1\ \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2}\ =\ 120$$

Jadi, banyak segitiga yang berbeda yang dapat dibentuk adalah 120 segitiga.

2. 7 soal harus dikerjakan dari 10 soal yang tersedia, dengan syarat nomor 1 sampai dengan nomor 5 harus dikerjakan.

Jika soal nomor 1 sampai 5 harus dikerjakan, berarti masih ada 2 soal lagi yang dapat dipilih dari 5 soal yang tersisa. Ini berarti kombinasi 2 unsur dari 5 unsur atau C(5, 2)

$$C(5,\ 2) = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,.3!}$$
$$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1\ \times 3!} = \frac{20}{2}\ =\ 10$$

Jadi, banyak pilihan yang dapat diambil oleh siswa tersebut adalah 10 pilihan.

3. Suatu tim bulu tangkis beranggotakan 5 pemain putra dan 3 pemain putri.
   a. Banyaknya tim ganda putra yang dapat disusun adalah kombinasi 2 unsur dari 5 unsur atau C(5, 2), yaitu

$$C(5,\ 2) = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,.3!}$$
$$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1\ \times 3!} = \frac{20}{2}\ =\ 10$$

   b. Banyaknya tim ganda campuran yang dapat disusun adalah kombinasi 1 putra dari 5 putra dikali dengan kombinasi 1 putri dari 3 putri atau C(5, 1) × C(3, 1)

$$C(5,\ 1) \times \mathrm{C}(3,1) = \frac{5!}{1!\,(5-1)!} \times \frac{3!}{1!\,(3-1)!}$$
$$= \frac{5!}{4!} \times \frac{3!}{2!} = 5\ \times 3 = 15$$

4. Pengurus inti kelas yang terdiri dari 4 siswa putra dan 3 siswa putri akan dipilih dari 7 siswa putra dan 5 siswa putri.

Banyak pilihan berbeda untuk membentuk pengurus inti kelas tersebut adalah

$$C(7,\ 4) \times \mathrm{C}(5,3) = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} \times \frac{5!}{3!\,(5-3)!}$$
$$= \frac{7!}{4!\,.3!} \times \frac{5!}{3!\,.2!} = \frac{7.6.5.4!}{4!\,.3.2.1} \times \frac{5.4.3!}{3!\,.2.1}$$
$$= \frac{210}{6} \times \frac{20}{2} = 350$$

Jadi, banyak pilihan berbeda untuk membentuk pengurus inti kelas adalah 350 pilihan.

5. Sebuah kotak berisi 5 bola merah, 4 bola putih, dan 3 bola biru. Tiga bola diambil dari kotak tersebut.

a. Banyak cara terambil 3 bola berwarna sama berarti ketiga bola berwarna merah atau ketiga bola berwarna putih atau ketiga bola berwarna biru.

- 3 bola berwarna merah berarti C(5, 3) = $\frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2.1} = \frac{20}{2} = 10$
- 3 bola berwarna putih berarti C(4, 3) = $\frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!.1!} = \frac{4.3!}{3!} = 4$
- 3 bola berwarna biru berarti C(3, 3) = $\frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3!}{3!.0!} = \frac{3!}{3!.1} = 1$

Jadi, banyak cara terambil 3 bola berwarna sama adalah 10 + 4 + 1 = 15 cara.

b. Banyak cara terambil 1 bola putih dan 2 bola merah

$$C(4,\ 1) \times C(5,2) = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} \times \frac{5!}{2!\,(5-2)!}$$
$$= \frac{4!}{1!\,.3!} \times \frac{5!}{2!\,.3!} = \frac{4.3!}{3!} \times \frac{5.4.3!}{2.3!}$$
$$= 4 \times \frac{20}{2} = 40$$

Jadi, banyak cara terambil 1 bola putih dan 2 bola merah adalah 40 cara.

6. Banyak cara ahli kimia tersebut mengambil lebih dari satu jenis larutan A berarti ia mengambil 2 larutan A dan 1 larutan B atau ia mengambil 3 larutan A.

- Banyak cara mengambil 2 larutan A dan 1 larutan B adalah

$$C(4,\ 2) \times C(5,1) = \frac{4!}{2!(4-2)!} \times \frac{5!}{1!(5-1)!}$$
$$= \frac{4!}{2!\,.2!} \times \frac{5!}{1!\,.4!} = \frac{4.3.2!}{2.2!} \times \frac{5.4!}{4!}$$
$$= 6 \times 5 = 30$$

- Banyak cara mengambil 3 larutan A adalah C(4, 3) = $\frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!.1!} = 4$

Jadi, banyak cara ahli kimia tersebut mengambil lebih dari satu jenis larutan A adalah 30 + 4 = 34 cara.

7. Tentukan ekspansi dari $(2x - y^2)^6$.

$(2x - y^2)^6 = C(6, 0)(2x)^6 + C(6, 1)(2x)^5(y^2)^1 + C(6, 2)(2x)^4(y^2)^2 + C(6, 3)(2x)^3(y^2)^3$
$+ C(6, 4)(2x)^2(y^2)^4 + C(6, 5)\ (2x)^1(y^2)^5 + C(6, 6)(y^2)^6$
$= 1(64x^6) + 6(32x^5)(y^2) + 15(16x^4)(y^4) + 20(8x^3)(y^6) + 15(4x^2)(y^8)$
$+ 6(2x)(y^{10}) + 1(y^{12})$
$= 64x^6 + 192x^5y^2 + 180x^4y^4 + 160x^3y^6 + 60x^2y^8 + 12x\,y^{10} + y^{12}$

8. Suku kelima dari ekspansi $(x + 2y)^{10}$.

Bentuk umum ekspansi binomial $(a + b)^n$ terlebih dahulu diidentikkan dengan ekspansi binomial yang diketahui di soal untuk menentukan nilai-nilai a, b, dan n.

$(a + b)^n \equiv (x + 2y)^{10}$, diperoleh $a = x$, $b = 2y$ dan $n = 10$

Ditanyakan suku kelima, berarti $r = 5 - 1 = 4$,

Jadi, suku kelima : $C(n,\ r)\ a^{n-r}\ b^r = C(10,\ 4)\ (x)^{10-4}\ (2y)^4$

$= \frac{10!}{4!.(10-4)!}\ (x)^6\ (16y^4)$

$= 210.(x^6)\ (16y^4)\ =\ 3.360.x^6\ y^4$

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Kalian tahu yang dimaksud kombinasi?	◯	◯
2	Apakah Kalian tahu yang dimaksud ekspansi binomial?	◯	◯
3	Apakah Kalian dapat mengindentifikasi masalah yang terkait dengan kombinasi?	◯	◯
4	Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan yang terkait kombinasi?	◯	◯
5	Apakah Kalian dapat menyelesaikan permasalahan yang terkait ekspansi binomial?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

1. Terdapat enam angka 1, 3, 4, 5, 7, 8 yang akan disusun menjadi bilangan yang terdiri dari 3 angka. Banyak bilangan ganjil yang dapat disusun dari angka-angka tersebut adalah ….
   A. 64
   B. 112
   C. 120
   D. 144
   E. 240

2. Jika setiap dua zat kimia yang berbeda dicampurkan menghasilkan zat kimia baru, dari enam zat kimia yang berbeda dapat membentuk zat baru sebanyak ….
   A. 12
   B. 15
   C. 20
   D. 24
   E. 32

3. Dari angka-angka 2, 3, 5, 6, 7, dan 9 akan dibuat bilangan tiga angka berlainan dan kurang dari 400. Banyak bilangan yang dapat dibuat adalah….
   A. 10
   B. 20
   C. 40
   D. 80
   E. 120

4. Suatu sekolah akan memilih pengurus OSIS yang terdiri atas ketua, wakil ketua, dan sekretaris. Jika tersedia 10 orang calon, banyak cara memilih pengurus OSIS adalah….
   A. 330 cara
   B. 440 cara
   C. 620 cara
   D. 660 cara
   E. 720 cara

5. Dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 akan dibuat bilangan kurang dari 500 yang terdiri dari tiga angka berlainan. Banyak cara menyusun bilangan-bilangan tersebut adalah….
   A. 80
   B. 120
   C. 150
   D. 180
   E. 200

6. Dari 6 orang akan dipilih menjadi satu tim yang terdiri dari seorang ketua, seorang sekretaris, dan satu orang anggota. Banyaknya susunan tim yang mungkin adalah….
   A. 30
   B. 80
   C. 120
   D. 210

E. 720

7. Dalam pemilihan murid teladan di suatu sekolah tersedia calon yang terdiri dari 5 orang putra dan 4 orang putri. Jika akan dipilih sepasang murid teladan yang terdiri dari seorang putra dan seorang putri, maka banyaknya pasangan yang mungkin terpilih adalah….
   A. 9
   B. 16
   C. 18
   D. 20
   E. 36

8. Nomor pegawai suatu pabrik terdiri atas tiga angka dengan angka pertama tidak nol. Banyak nomor pegawai yang ganjil adalah….
   A. 648
   B. 475
   C. 450
   D. 425
   E. 324

9. Zainal mempunyai koleksi 3 pasang sepatu dengan merk yang berbeda, 4 baju berlainan coraknya, dan 3 celana yang berbeda warna. Banyak cara berpakaian Zainal dengan penampilan yang berbeda adalah ….
   A. 36
   B. 24
   C. 21
   D. 12
   E. 10

10. Banyaknya susunan huruf-huruf yang dapat dibentuk dari kata "TUNTUT" adalah….
   A. 40
   B. 60
   C. 120
   D. 480
   E. 720

11. Diketahui ada 3 rute yang menghubungkan kota P dengan kota Q dan 2 rute yang menghubungkan kota Q dengan kota R. Banyak cara seseorang dapat bepergian dari kota P ke kota R adalah….
   A. 1 cara
   B. 3 cara
   C. 4 cara
   D. 6 cara
   E. 7 cara

12. Dari 9 siswa berprestasi akan dibuat tim yang terdiri dari 3 orang untuk mengikuti suatu lomba. Banyak kemungkinan susunan tim yang dapat disusun adalah….
   A. 84 tim
   B. 168 tim
   C. 240 tim

D. 504 tim
E. 1.008 tim

13. Amaliah memiliki 4 rompi, 2 celana panjang, dan 3 pasang sepatu. Amaliah memakai lengkap pasangan 1 rompi, 1 celana panjang, dan sepasang sepatu. Pasangan berbeda yang Amaliah punyai adalah….
    A. 9
    B. 12
    C. 14
    D. 24
    E. 36

14. Empat siswa dan dua siswi akan duduk berdampingan. Apabila siswi selalu duduk paling pinggir, banyak susunan cara mereka duduk adalah….
    A. 24
    B. 48
    C. 56
    D. 64
    E. 72

15. Andi akan menyusun bilangan yang terdiri dari 3 angka berbeda dan dipilih dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Bilangan tersebut habis dibagi 5. Banyak bilangan yang dapat disusun Andi adalah….
    A. 48
    B. 42
    C. 36
    D. 25
    E. 20

16. Dua keluarga yang masing-masing terdiri dari 2 orang dan 3 orang ingin foto bersama. Banyak posisi foto yang berbeda dengan anggota keluarga yang sama selalu berdampingan adalah….
    A. 24
    B. 36
    C. 48
    D. 72
    E. 96

17. Suatu menu makan malam terdiri dari masing-masing satu jenis sayur, lauk, buah, dan minuman. Jika terdapat 5 jenis sayur, 3 jenis lauk, 4 jenis buah, dan 3 jenis minuman, berapakah banyak menu makan malam yang dapat dipilih?
    A. 120 menu
    B. 150 menu
    C. 180 menu
    D. 210 menu
    E. 270 menu

18. Sebuah kotak berisi 6 bola merah dan 4 bola putih. Dari dalam kotak diambil 3 bola sekaligus. Banyak cara pengambilan sedemikian hingga sedikitnya terdapat 2 bola putih adalah ….

A. 30
B. 36
C. 40
D. 48
E. 50

19. Dari angka-angka 0 sampai dengan 9 dan huruf-huruf A, I, U, E, O akan dibuat plat nomor suatu daerah yang terdiri dari 3 angka di depan dan 2 huruf di belakang dengan tidak ada angka dan huruf yang berulang. Banyak plat nomor yang dibuat adalah ….
    A. 50 buah
    B. 300 buah
    C. 10.080 buah
    D. 12.960 buah
    E. 14.450 buah

20. Suatu sekolah membentuk tim delegasi yang terdiri dari 4 anak kelas X, 5 anak kelas XI, dan 6 anak kelas XII. Kemudian akan ditentukan pimpinan delegasi yang terdiri dari ketua, wakil ketua, dan sekretaris. Jika kelas asal ketua kelas harus lebih tinggi dari kelas asal wakil dan sekretaris, maka banyaknya kemungkinan susunan pimpinan delegasi adalah ….
    A. 156
    B. 492
    C. 546
    D. 600
    E. 720

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. D
2. B
3. C
4. E
5. A
6. C
7. D
8. C
9. A
10. B
11. D
12. A
13. D
14. B
15. E
16. A
17. C
18. C
19. D
20. B

DAFTAR PUSTAKA

Abdur Rahman As'ari, dkk. 2018. *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII*. Jakarta: Kemendikbud.

Pradnyo Wijayanti, Sapon Suryopurnomo. 2018. *Kombinatorika, Peluang, dan Statistika*. Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Sukino. 2019. *Matematika SMA/MA Kelas XII IA* (*IPA*). Sidoarjo: PT. Masmedia Buasa Pustaka.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

BERANI JUJUR HEBAT!

JUJUR ADALAH LANGKAH AWAL BERANTAS KORUPSI

ZI-WBK

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum

KELAS XII

TEORI PELUANG

MATEMATIKA KELAS XII

PENYUSUN
Yuyun Sri Yuniarti

SMA Negeri 1 Pedes
Kabupaten Karawang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Percobaan : Proses yang menghasilkan data mentah.

Ruang sampel : Seluruh kemungkinan yang dapat terjadi dari suatu percobaan

Titik Sampel : Tiap hasil dalam ruang sampel.

Irisan dua kejadian A dan B : Suatu kejadian yang unsurnya termasuk dalam kejadian A dan kejadian B.

Gabungan dua kejadian A dan B : Kejadian yang mengandung semua unsur yang termasuk A, B, atau keduanya.

Komplemen suatu kejadian A terhadap S : Kejadian di luar A tetapi masih di dalam S.

Permutasi : Suatu susunan yang dapat dibentuk dari suatu kumpulan benda yang diambil sebagian atau seluruhnya.

Kombinasi dari n unsur yang berbeda dengan sekali pengambilan r ($r \leq n$) : Semua susunan yang mungkin terjadi yang terdiri dari r unsur yang berbeda yang diambil dari n unsur itu, tanpa memperhatikan urutannya.

PETA KONSEP


PELUANG
PERCOBAAN, RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN
PELUANG SUATU KEJADIAN
FREKUENSI HARAPAN
PELUANG KEJADIAN MAJEMUK

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	: Matematika
Kelas	: XII
Alokasi Waktu	: 16 Jam Pelajaran
Judul Modul	: Peluang Kejadian Majemuk

B. Kompetensi Dasar

3. 4 Mendeskripsikan dan menentukan peluang kejadian majemuk (peluang kejadian-kejadian saling bebas, saling lepas, dan kejadian bersyarat) dari suatu percobaan acak.

4.4 MMenyelesaikan masalah yang berkaitan dengan peluang kejadian majemuk (peluang, kejadian-kejadian saling bebas, saling lepas, dan kejadian bersyarat)

C. Deskripsi Singkat Materi

Peluang adalah bidang matematika yang mempelajari kemungkinan munculnya sesuatu dengan cara perhitungan maupun percobaan. Peluang dalam kehidupan sehari-hari juga sering digunakan untuk membantu aktivitas manusia. Berikut merupakan contoh penggunaan peluang dalam kehidupan sehari-hari:

1. Membantu dalam Pengambilan Keputusan yang Tepat.

Pengambilan keputusan yang lebih tepat dimaksudkan bahwa tidak ada keputusan yang sudah pasti karena kehidupan mendatang tidak ada yang bisa memprediksi kepastiannya dari sekarang, karena informasi yang didapat tidaklah sempurna. Oleh karena itu, dengan menggunakan peluang kita dapat mencari keumngkinan-kemungkinan yang mungkin terjadi sehingga kita dapat mengambil keputusan yang dirasa tepat.

2. Untuk Memperkirakan Hal yang Akan Terjadi.

Memang, kita tidak bias sepenuhnya memprediksi apa yang akan terjadi selanjutnya karena itu merupakan rahasia Tuhan. Namun, bila kita memiliki prediksi terhadap masa depan, tentunya kita dapat menghadapi kemungkinan yang telah diprediksikan dengan baik dan tidak panik. Perhatikan contoh berikut :

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering mendengar perkiraan terjadinya hujan dalam bentuk peluang baik secara kualitatif seperti "kemungkinannya kecil akan terjadi hujan esok hari", atau dalam bentuk kuantitatif seperti "kemungkinan hujan esok hari sekitar 30%". Jelas di sini bahwa berbicara mengenai peluang kita dihadapkan dalam suatu kondisi yang tidak pasti, akan tetapi kita hanya diberikan suatu petunjuk atau gambaran seberapa besar keyakinan kita bahwa suatu peristiwa bisa terjadi. Semakin besar nilai peluang yang dihasilkan dari suatu perhitungan maka semakin besar keyakinan kita bahwa peristiwa itu akan terjadi

Contohnya adalah Ketika doni ingin pergi kerumah temannya, dia melihat langit dalam keadaan mendung, awan berubah warna menjadi gelap, angin lebih kencang dari biasanya serta sinar matahari tidak seterang biasanya. Bagaimanakah tindakan Doni sebaiknya?

Ketika Doni melihat keadaan seperti itu, maka sejenak dia berpikir untuk membatalkan niatnya pergi kerumah temannya. Ini dikarenakan dia berhipotesis bahwa sebentar lagi akan turun hujan dan kecil kemungkinan bahwa hari ini akan tidak hujan, mengingat gejala-gejala alam yang mulai nampak.

Probabilitas dalam cerita tadi adalah peluang kemungkinan turunnya hujan dan peluang tidak turunnya hujan.

3. Untuk Meminimalisir Kerugian.

Dengan adanya peluang, kita dapat meminimalisir kerugian. Hal ini dengan cara memprediksi apa yang akan terjadi selanjutnya dan melakukan tindakan pencegahan kerugian atas apa yang telah kita prediksi. Perhatikan contoh berikut :

Sebagai contoh khusus, diambil masalah grosir buah yang menjual buah strawbarry. Buah ini mempunyai masa (waktu) jual yang terbatas, dalam arti jika tidak terjual pada hari pengiriman, maka tidak akan laku dijual pada hari berikutnya. Jika diandaikan harga pengambilan satu keranjang strawberry adalah $20, dan grosir akan menjualnya dengan harga $50 satu keranjang. Berapa keranjangkah persediaan yang perlu diambil setiap hari oleh grosir agar mendapat resiko kerugian minimum, atau agar mendapat keuntungan maximum? Hal ini dapat diselesaikan dengan konsep peluang.

4. Digunakan di Ilmu Ekonomi

Ilmu aktuaria merupakan ilmu gabungan antara ilmu peluang, matematika, statistika, keuangan, dan pemrograman komputer. Aktuaria adalah disiplin formal yang mempelajari tentang asuransi jangka panjang, seperti asuransi hidup dan asuransi kesehatan. Tanpa bermaksud menentang tuhan, aktuaria berusaha menjabarkan dengan baik rumus-rumus kapan seseorang harus melakukan klaim terhadap asuransinya, sehinnga aktuaria mampu mendeskripsikan rumus-rumus untuk menghitung nilai premi dan nilai klaim secara analitis, bukan intuisi. Sehingga perusahaan asuransi mencapai keuntungan tanpa merugikan pelanggan.

Penelitian terbaru menunjukkan bahwa aktuaria tdak hanya dapa diaplikasikan pada asuransi, melainkan pada analisis kriminologi. Model-model aktuaria mampu mendeskripsikan dengan baik peluang pelaku dengan tipe tindakan kriminal, usia, tingkat pendidikan dan etnis si pelaku.

5. Digunakan dalam Ilmu Psikologi

Psikologi memang ilmu sosial tetapi bukan berarti didalam psikologi tidak menggunakan ilmu matematika. Biasanya model matematika yang sering dipergunakan itu adalah statistik. Tetapi bukan berarti model matematika yang lain tidak dipergunakan. Di sini saya mau menjabarkan tentang model matematika yaitu peluang. Di SMP dan di SMA tentu saja kita sudah mempelajari peluang.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, mari berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Sebaiknya Ananda mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, Ananda mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **3** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : materi percobaan, ruang sampel dan kejadian (2 Jam Pelajaran)

Kedua : materi peluang suatu kejadian (6 Jam Pelajaran)

Ketiga : materi peluang kejadian majemuk (8 Jam Pelajaran)

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
PERCOBAAN, RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan Ananda dapat menentukan ruang sampel dari sebarang kejadian sekaligus menentukan anggota kejadian dari percobaan acak.

B. Uraian Materi

Percobaan, Ruang Sampel, dan Kejadian

- ***Percobaan*** (dalam studi peluang) didefinisikan sebagai suatu proses dengan hasil dari suatu kejadian bergantung pada kesempatan.
  Ketika *percobaan* diulangi, hasil-hasil yang diperoleh tidak selalu sama walaupun dilakukan dengan kondisi yang tepat sama dan secara hati-hati. Percobaan seperti ini disebut *Percobaan Acak*.
- ***Ruang Sampel*** adalah himpunan dari semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan. Ruang Sampel dinotasikan dengan ***S***. Banyaknya elemen ruang sampel dinyatakan dengan $n(\text{S})$.
- ***Kejadian*** atau ***Peristiwa*** adalah himpunan bagian dari ruang sampel, biasanya dinotasikan dengan huruf kapital seperti A, B, C, … . Banyaknya elemen kejadian A dinyatakan dengan $n(\text{A})$, banyaknya elemen kejadian B dinyatakan dengan $n(\text{B})$, dan sebagainya.

<u>Contoh</u>

1. Ketika Ananda melakukan percobaan melambungkan sebuah koin, (coba deh ambil koinnya kemudian perhatikan kedua sisi koin tersebut, Ananda akan melihat bagian sisi bertuliskan nominal uangnya berapa, dan sisi lain bagian yang bergambar, bisa gambar melati, atau gambar apapun kan...) nahh jadi hasil-hasil yang mungkin ketika Ananda melemabungkan satu koin tersebut adalah muncul bagian **gambar** (G) atau muncul bagian **angka** (A). Jadi, ruang sampel dari percobaan tersebut adalah $S = \{\text{G, A}\}$ dan jumlah anggotanya ruang sampel ada dua yaitu G dan A.

2. Dari percobaan melambungkan sebuah dadu, tentukanlah :
   a. ruang sampel percobaan tersebut
   b. kejadian A, yaitu munculnya sisi dadu bermata ganjil
   c. kejadian B, yaitu munculnya sisi dadu yang habis dibagi 3

   Penyelesaian :

   a. hasil-hasil yang mungkin dari percobaan melambungkan sebuah dadu adalah munculnya sisi dadu dengan mata dadu 1, 2, 3, 4, 5 dan 6. Jadi ruang sampelnya adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan banyaknya elemen ruang sampel $n(\text{S}) = 6$
   b. kejadian munculnya sisi dadu bermata ganjil adalah A = {1, 3, 5} sehingga $n(\text{A}) = 3$
   c. kejadian munculnya sisi dadu yang habis dibagi 3 adalah B = {3, 6} sehingga $n(\text{B}) = 2$

3. Pada percobaan melambungkan 2 koin yang sama sekaligus, tentukan :
   a. ruang sampel percobaan dengan tabel kemungkinan
   b. ruang sampel percobaan dengan diagram pohon
   c. kejadian E, yaitu munculnya angka dan gambar.

   Penyelesaian :

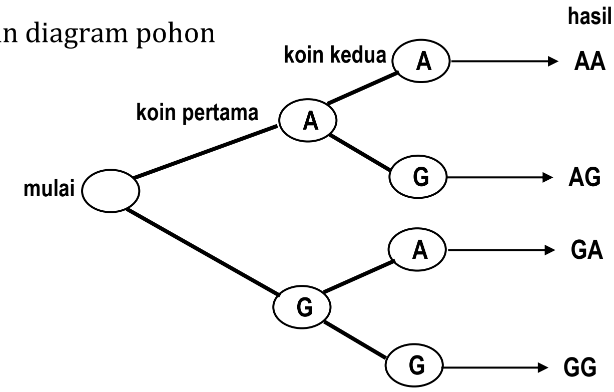
   a. ruang sampel percobaan dengan tabel kemungkinan

koin kedua / koin pertama	A	G
A	AA	AG
G	GA	GG

Ruang sampel dari percobaan melambungkan 2 koin yang sama sekaligus adalah
S = { AA, AG, GA, GG}

   b. ruang sampel percobaan dengan diagram pohon

Ruang sampel yang diperoleh dari diagram pohon adalah
S = {AA, AG, GA, GG}



   c. kejadian E, yaitu munculnya angka dan gambar.
   Dari tabel ataupun diagram pohon diperoleh kejadian munculnya angka dan gambar adalah E = {AG, GA}

C. Rangkuman

- ***Percobaan*** (dalam studi peluang) didefinisikan sebagai suatu proses dengan hasil dari suatu kejadian bergantung pada kesempatan. Ketika *percobaan* diulangi, hasil-hasil yang diperoleh tidak selalu sama walaupun dilakukan dengan kondisi yang tepat sama dan secara hati-hati. Percobaan seperti ini disebut *Percobaan Acak*.

- ***Ruang Sampel*** adalah himpunan dari semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan. Ruang Sampel dinotasikan dengan ***S***. Banyaknya elemen ruang sampel dinyatakan dengan n(S).

- ***Kejadian*** atau ***Peristiwa*** adalah himpunan bagian dari ruang sampel, biasanya dinotasikan dengan huruf kapital seperti A, B, C, … . Banyaknya elemen kejadian A dinyatakan dengan n(A), banyaknya elemen kejadian B dinyatakan dengan n(B), dan sebagainya.

D. Latihan Soal

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Pada percobaan pelemparan tiga koin sekaligus. Tentukan :
   a. ruang sampel dan banyaknya elemen ruang sampel
   b. kejadian A yaitu muncul paling sedikit dua angka.

2. Pada percobaan melambungkan dua buah dadu yang sama sekaligus, tentukan :
   a. ruang sampel dan banyaknya elemen ruang sampel dengan tabel kemungkinan
   b. kejadian A, yaitu muncul angka-angka yang berjumlah 9
   c. kejadian B, yaitu muncul angka-angka yang berjumlah kurang dari 7

Pembahasan

1a. Jika A = menyatakan sisi angka; dan G = menyatakan sisi gambar; maka
Tiga koin dilambungkan bersamaan maka kemungkinan yang muncul adalah
S = $\{AAA, AAG, AGA, AGG, GAA, GGA, GAG, GGG, \}$
n(S) = 8 **skor 10**

1b. A = kejadian muncul paling sedikit dua angka. Kalimat paling sedikit berarti minimal muncul 2 angka, jadi bisa dua atau tiga angka.
A = $\{AAA, AAG, AGA, GAA\}$
n(A) = 4 **skor 10**

2a. Dua dadu dilambungkan bersamaan maka kemungkinan yang muncul:

		Dadu Kedua					
		1	2	3	4	5	6
Dadu Pertama	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Jika dihitung maka kemungkinannya ada 36 jadi
n(S) = 36

Skor 10

2b. Perhatikan jika masing-masing kemungkinan dari pelemparan dua buah dadu itu dijumlahkan

+						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

A= kejadian muncul mata dadu berjumlah 9 yaitu:
A = {(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)}
n(A) = 4

Skor 10

2c. kejadian B, yaitu muncul angka-angka yang berjumlah kurang dari 7
Perhatikan kembali tabel 2b. Jumlah mata dadu kurang dari 7 berarti bisa berjumlah: 6,5,4,3, atau 2. Jadi:

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

B = kejadian muncul jumlah kedua mata dadu kurang dari 7
n(B) = 15

Skor 10

E. Penilaian Diri

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu memahami konsep percobaan acak ?		
2.	Apakah Ananda mampu menentukan ruang sampel dari sebarang kejadian ?		
3.	Apakah Ananda mampu menentukan anggota sebarang kejadian dari percobaan acak?		

Jika Jawaban Ananda Ya untuk ketiga pertanyaan di atas, silahkan Ananda lanjut ke kegiatan pembelajaran berikutnya. Namun jika Ananda menjawab tidak untuk pertanyaan tersebut silahkan Ananda berhenti di sini dan kembali mengulang pembelajaran. Ajak teman untuk berdiskusi atau konsultasikan dengan guru matematika Ananda.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PELUANG SUATU KEJADIAN

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan Ananda dapat mamahami konsep peluang dan dapat menentukan peluang suatu kejadian.

B. Uraian Materi

1) Peluang Suatu Kejadian

Dalam hidup seringkali kita dihadapkan pada berbagai pilihan. Dari berbagai pilihan tersebut muncul beberapa kemungkinan yang akan dipilih. Atau misalnya pada saat Ananda mengikuti ujian matematika, kemungkinannya ada dua kalo tidak lulus ya mengulang (remidila). Atau bisa juga kondisi ketika Ananda melihat seorang ibu hamil, maka kemungkinan bayinya akan berjenis kelamin laki-laki atau perempuan tidak mungkin berjenis kelamin diantara keduanya bukan kecuali bayinya kembar maka bisa saja kemungkinannya laki-laki dan perempuan, keduanya laki-laki atau keduanya perempuan.

Ilustrasi disamping seringkali terjadi ketika Ananda bermain games dengan dadu, dengan kartu bridge atau dengan koin. Kalo saat ini Ananda belum pernah bermain dadu, kartu bridge atau koin, coba deh untuk memainkannya tapi ingat permainan tersebut hanya untuk kebutuhan belajar peluang yaa.. jangan disalahgunakan menjadi permainan yang dilarang agama maupun negara.

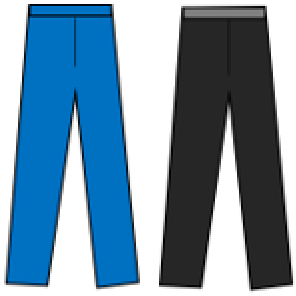
Mari kita lanjutkan... baca dan pelajari dengan seksama dan dalam tempo yang sesingkat-singkatnya ehhh... apaan coba ^_^ ...

Suatu ketika Andi akan memilih sebuah kemeja dari dalam lemari pakaiannya. Andi melihat tiga warna kemeja yang berbeda yaitu warna jihau, biru dan abu-abu seperi gambar berikut:

Jika Andi akan memilih satu warna kemeja diantara tiga warna kemeja tersebut, maka berapa peluang kemeja yang terambil berwarna bitu?

Dari persoalan di atas, Ananda dapat melihat tersedia kemeja dengan tiga warna berbeda yaitu hijau, biru dan abu-abu. Warna biru dipilih dari tiga warna berbeda tersebut. Maka peluang terambil warna biru adalah satu dari tiga warna atau ditulis Peluang kejadian terambil kemeja berwarna biru = $\frac{1}{3}$.

Kemudian jika Andi kembali dihadapkan pada pilihan untuk memakai celana panjang berwarna hitam atau biru, seperti gambar di bawah ini:



Maka peluang terambil atau terpilih celana hitam adalah satu dari dua pilihan atau ditulis Peluang kejadian terambil celana berwarna hitam = $\frac{1}{2}$.

Bagaimana ...? Mudah bukan untuk menentukan peluang suatu kejadian? Nahh berdasarkan uraian ini kita dapat menuliskan definisi peluang suatu kejadian sebagai berikut:

Jika S adalah ruang sampel dengan banyak elemen = $n(S)$ dan A adalah suatu kejadian dengan banyak elemen = $n(A)$, maka peluang kejadian A, diberi notasi $P(A)$ diberikan oleh :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

<u>Kisaran Nilai Peluang</u>

Jika A adalah suatu kejadian dengan banyak elemen = $n(A)$, maka banyak elemen A paling sedikit adalah 0 dan paling banyak sama dengan banyak elemen ruang sampel, yaitu $n(S)$.

Dalam persamaan, dinyatakan dengan $0 \le n(A) \le n(S)$

Jika kedua ruas dibagi dengan $n(S)$, diperoleh : $\frac{0}{n(S)} \le \frac{n(A)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)} \Leftrightarrow 0 \le P(A) \le 1$

persamaan di atas menyatakan kisaran nilai peluang, yaitu suatu angka yang terletak di antara 0 dan 1.

- Nilai $P(A) = 0$ adalah *kejadian mustahil*, karena kejadian ini tidak mungkin terjadi
- Nilai $P(A) = 1$ adalah *kejadian pasti*, karena kejadian ini selalu terjadi.

Bayangkan coba oleh Ananda kejadian yang mustahil terjadi, tidak mungkin terjadi, sangat *imposible* terjadi makanya peluangnya tidak ada sama sekali alias NOL. Kira-kira apa hayoo...? Hmmm... apa yaaa...

Oke.. jawaban pilihan untuk kejadian mustahil.

- Tidak mungkin bagi laki-laki mendapat haid atau hamil dan melahirkan bukan.. karena tidak mempunyai sel telur dan rahim jadi tidak akan terjadi atau tidak akan pernah mempunyai peluang untuk haid atau hamil dan melahirkan. Benar bukan...?
- Coba Ananda cari kejadian yang mustahil lainnya

Selanjutnya coba bayangkan kejadian yang pasti terjadi sehingga kemungkinannya 100% terjadi. Apa yaa..

Oke.. jawaban pilihan untuk kejadian yang pasti terjadi.

- Semua mahluk hidup pasti akan mati. Ini kejadian yang pasti bukan? Tuhan tidak menciptakan mahluknya untuk hidup abadi, meskipun ada yang berusia ratusan tahun atau bahkan pohon berusia ribuan tahun mungkin pada akhirnya mereka semua akan mati jika saatnya tiba.
- Coba Ananda cari kejadian yang pasti terjadi lainnya.

Selanjutnya Ananda perhatikan contoh berikut:

<u>Contoh</u>

1. Pada pelemparan sebuah dadu, tentukan :
   a. peluang muncul mata dadu berangka ganjil
   b. peluang muncul mata dadu berangka kurang dari 3

   Penyelesaian :

   Ruang sampel pelemparan sebuah dadu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sehingga $n(S) = 6$

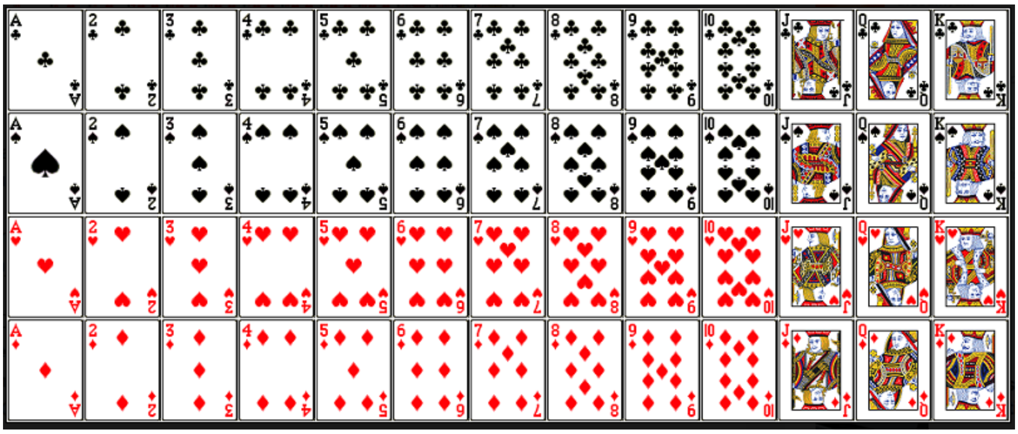
   a. misal A adalah kejadian muncul mata dadu berangka ganjil
      maka A = {1, 3, 5}, sehingga $n(A) = 3$.
      Peluang A adalah $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

   b. Misal B adalah kejadian muncul mata dadu berangka kurang dari 3
      maka B = {1, 2}, sehingga $n(B) = 2$.
      Peluang B adalah $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. Dari satu set kartu bridge (52 kartu) diambil satu kartu secara acak. Berapa peluang mendapatkan kartu :

   a. As — c. bergambar
   b. hitam — d. hati

   Penyelesaian :



   Satu set kartu bridge terdiri dari 52 kartu yang berbeda, sehingga banyaknya hasil yang mungkin dari pengambilan sebuah kartu adalah 52 atau $n(S) = 52$.
   Satu set kartu bridge terdiri atas 4 jenis kartu : kartu sekop (berwarna hitam), kartu hati (berwarna merah), kartu daun (berwarna hitam) dan kartu intan (berwarna merah). Setiap jenis kartu berjumlah 13.

   a. Peluang mendapatkan kartu As.
      Untuk setiap jenis kartu terdapat kartu As, berarti kartu As ada 4. Misalkan A adalah kejadian mendapatkan kartu As, maka $n(A) = n(\text{kartu As}) = 4$.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

b. Peluang mendapatkan kartu hitam
Terdapat dua jenis kartu hitam, yaitu sekop dan daun. Misalkan B adalah kejadian mendapatkan kartu hitam, maka n(B) = n(kartu hitam) = 26

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$$

c. Peluang mendapatkan kartu bergambar
Untuk setiap jenis kartu terdapat 3 kartu bergambar. Misalkan C adalah kejadian mendapatkan kartu bergambar, maka n(C) = n(kartu bergambar) = 12

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$$

d. Peluang mendapatkan kartu hati
Misalkan D adalah kejadian mendapatkan kartu hati, maka n(D) = n(kartu hati) = 13

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

3. Dua buah dadu dilambungkan bersamaan. Tentukan peluang munculnya mata dadu:
a. berjumlah 10
b. sama
c. berjumlah 13

Penyelesaian :

		Dadu Kedua					
		1	2	3	4	5	6
Dadu Pertama	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Banyaknya hasil yang mungkin saat melambungkan 2 dadu sekaligus adalah 36 (berasal dari 6 × 6 = 36), sehingga n(S) = 36

a. Peluang munculnya angka berjumlah 10.
Misalkan A adalah kejadian munculnya angka berjumlah 10, maka A = {(4, 6), (5, 5), (6,4)} dan n(A) = 3

$$\therefore\ P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

b. Peluang munculnya angka sama
Misalkan B adalah kejadian munculnya angka sama, maka B = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)} dan n(B) = 6

$$\therefore\ P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

c. Peluang munculnya angka berjumlah 13
Misalkan C adalah kejadian munculnya angka berjumlah 13. Saat melambungkan 2 dadu bersamaan, jumlah angka terbesar yang mungkin muncul adalah 12, sehingga kejadian C adalah kejadian yang tidak mungkin terjadi. Jadi P(C) = 0.

2) Peluang yang Diselesaikan dengan Kaidah Pencacahan

<u>Contoh 1.</u> *Peluang dengan Permutasi*

Ada sepuluh ekor kuda berlomba dalam sebuah pacuan. Tiap-tiap kuda diberi nomor 1, nomor 2 sampai dengan nomor 10. Tentukan peluang kuda bernomor 3, 4 dan 7 berturut-turut keluar sebagai juara 1, juara 2 dan juara 3.
Penyelesaian :

Langkah pertama kita cari dulu ruang sampelnya.
Banyak cara agar 3 dari 10 ekor kuda memenangkan lomba dengan mementingkan urutan pemenang adalah permutasi 3 unsur dari 10 unsur,

$$P(10,\ 3)=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{7!}=720$$, sehingga n(S) = 720

Selanjutnya misalkan A = kejadian kuda bernomor 3, 4 dan 7 keluar sebagai juara 1, juara 2 dan juara 3. Dalam kasus ini, hanya ada satu kemungkinan kuda bernomor 3, 4 dan 7 berturut-turut keluar sebagai juara 1, juara 2 dan juara 3, sehingga peluangnya adalah,

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{720}$$

<u>Contoh 2.</u> *Peluang dengan Kombinasi*

a. Sebuah kotak berisi 6 bola merah dan 4 bola biru. Dari dalam kotak tersebut diambil dua bola sekaligus. Tentukan peluang yang terambil bola merah dan bola biru.
Penyelesaian :

Pada soal ini, urutan bola yang diambil belum diketahui, artinya bola pertama bisa berwarna merah atau biru.
Banyak cara mengambil 2 bola dari 10 bola yang tersedia tanpa mementingkan urutan adalah adalah C(10, 2).

$$C(10,\ 2)=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10\times9\times8!}{2\times8!}=45$$, sehingga n(S) = 45

Misalkan E = kejadian terambil bola merah dan bola biru
Banyak cara mengambil 1 bola merah dari 6 bola merah ada 6 cara
Banyak cara mengambil 1 bola biru dari 4 bola biru ada 4 cara
Dengan aturan perkalian, banyak cara terambil 1 bola merah dan 1 bola biru adalah 6 × 4 = 24 cara, sehingga n(E) = 24.

$\therefore$ Peluang terambil bola merah dan biru adalah $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$

b. Dalam sebuah kotak terdapat 12 bola. 5 berwarna biru, 4 kuning dan 3 putih. Jika diambil 3 bola sekaligus secara acak, tentukan peluang yang terambil :
   a. ketiganya biru

b. ketiganya beda warna
c. 2 biru dan 1 putih

Penyelesaian :

Banyak elemen ruang sampel adalah banyak cara pengambilan 3 bola sekaligus dari 12 bola yang ada dengan tidak mementingkan urutan warna, yaitu :

$$n(S) = C(12,\ 3) = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12\times 11\times 10\times 9!}{6\times 9!} = 220$$

a. Misalnya A = kejadian terambil ketiga bola berwarna biru. Banyak elemen A adalah banyaknya cara mengambil 3 bola biru dari 5 bola biru yang ada tanpa memperhatikan urutan pengambilan, yaitu,

$$n(A) = C(5,\ 3) = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times 4\times 3!}{3!\times 2} = 10$$

Jadi, peluang terambil ketiga bola berwarna biru adalah $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$

b. Misalnya B = kejadian terambil ketiga bola berbeda warna, berarti terambil bola biru, kuning dan putih.
Banyak cara mengambil 1 bola biru dari 5 bola biru ada 5 cara
Banyak cara mengambil 1 bola kuning dari 4 bola kuning ada 4 cara
Banyak cara mengambil 1 bola putih dari 3 bola putih ada 3 cara
Dengan aturan perkalian, banyak cara terambil 3 bola berbeda warna adalah $5 \times 4 \times 3 = 60$ cara, sehingga $n(B) = 60$.

Jadi, peluang terambil ketiga berbeda warna adalah $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$

c. Misalnya C = kejadian terambil 2 bola biru dan 1 bola putih.
Dari 5 bola biru diambil 2 bola biru tanpa mementingkan urutan pengambilan, berarti C(5, 2). Dari 3 bola putih diambil 1 bola putih ada 3 cara.
Dengan aturan perkalian, banyak cara terambil 2 bola biru dan 1 bola putih adalah,

$$n(C) = C(5,\ 2)\times 3 = \frac{5!}{2!(5-2)!}\times 3 = \frac{5\times 4\times 3!}{2\times 3!}\times 3 = 10\times 3 = 30$$

Jadi, peluang terambil 2 bola biru dan 1 bola putih adalah $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$

3) Frekuensi Harapan

Dalam hidup siapa yang tidak pernah punya harapan? Pasti kan semua orang mempunyai harapan dalam hidupnya, berharap inilah, itulah sesuai dengan doa dan harapan masing-masing. Nahh harapan kita akan nihil hasilnya jika kita hanya berpangku tangan tidak melakukan apapun untuk mewujudkannya bukan? Oleh karena itu, selain berdoa memohon pada Tuhan YME, kita juga perlu berusaha, berikhtiar dan melakukan langkah untuk mewujudkan harapan tersebut. Semakin banyak langkah kita maka harapan kita akan terwujudnya harapan itu semakin besar.

Dalam teori peluang sesi ini Ananda akan mempelajari mengenai teori *Frekuensi Harapan*. Perumpamaan cerita di atas mengenai harapan jelas bukan? Itulah konsep frekuensi harapan. Jadi Frekuensi harapan suatu kejadian ialah harapan *banyaknya kejadian* yang dapat terjadi dari banyak percobaan yang dilakukan.

Jika A adalah suatu kejadian dan P(A) adalah peluang terjadinya A, maka besarnya frekuensi harapan kejadian A dalam *n* kali percobaan dirumuskan

Frekuensi harapan* A = P(A) × *n

Contoh

1. Sekeping koin logam ditos 30 kali. Berapa frekuensi harapan munculnya gambar ?
   Penyelesaian :
   Pada pelemparan sekeping koin logam, peluang munculnya gambar P(G) = $\frac{1}{2}$,
   Maka frekuensi harapan munculnya gambar dalam 30 kali percobaan adalah,
   $$\text{Frekuensi harapan Gambar} = \frac{1}{2} \times 30 = 15 \text{ kali}$$
2. Sebuah dadu dilambungkan sebanyak 60 kali. Berapa frekuensi harapan muncul angka ganjil ?
   Penyelesaian :
   Saat melambungkan sebuah dadu, peluang munculnya angka ganjil P(angka ganjil) $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,
   Maka frekuensi harapan munculnya angka ganjil dalam 60 kali percobaan adalah,
   $$\text{Frekuensi harapan angka ganjil} = \frac{1}{2} \times 60 = 30 \text{ kali}$$

C. Rangkuman

Definisi Peluang

Jika S adalah ruang sampel dengan banyak elemen = n(S) dan A adalah suatu kejadian dengan banyak elemen = n(A), maka peluang kejadian A, diberi notasi P(A) diberikan oleh :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Kisaran Nilai Peluang

Jika A adalah suatu kejadian dengan banyak elemen = n(A), maka banyak elemen A paling sedikit adalah 0 dan paling banyak sama dengan banyak elemen ruang sampel, yaitu n(S).

Dalam persamaan, dinyatakan dengan $0 \le n(A) \le n(S)$

Jika kedua ruas dibagi dengan n(S), diperoleh : $\frac{0}{n(S)} \le \frac{n(A)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)} \Leftrightarrow 0 \le P(A) \le 1$

persamaan di atas menyatakan kisaran nilai peluang, yaitu suatu angka yang terletak di antara 0 dan 1.

- Nilai P(A) = 0 adalah *kejadian mustahil*, karena kejadian ini tidak mungkin terjadi
- Nilai P(A) = 1 adalah *kejadian pasti*, karena kejadian ini selalu terjadi.

Frekuensi Harapan

Jika A adalah suatu kejadian dan P(A) adalah peluang terjadinya A, maka besarnya frekuensi harapan kejadian A dalam n kali percobaan dirumuskan :

$$\textit{Frekuensi harapan } A = P(A) \times n$$

D. Latihan Soal

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat:

1. Dua dadu bersisi enam dilempar undi bersama-sama satu kali. Peluang muncul jumlah kedua mata dadu sama dengan 8 atau berselisih 2 adalah ...
   A. 6/36
   B. 10/36
   C. 11/36
   D. 12/36
   E. 13/36
2. Dari 36 siswa di sebuah kelas, 20 siswa suka olahraga renang, 15 siswa suka olahraga basket, dan 10 siswa tidak suka kedua-duanya. Bila dipilih seorang siswa secara acak, peluang terpilih siswa yang suka kedua jenis olahraga tersebut adalah ...
   A. 1/4
   B. 9/26
   C. 5/18
   D. 1/5
   E. 1/9
3. Perusahaan listrik suatu wilayah membuat jadwal pemadaman listrik pada 30 komplek perumahan yang ada pada wilayah cakupannya sebagai berikut :

Hari	Banyak komplek yang mengalami pemadaman
Senin	4
Selasa	5
Rabu	3
Kamis	5
Jumat	4
Sabtu	5
Minggu	4

   Jika jadwal pemadaman listrik tersebut berlaku secara acak pada semua komplek, peluang terjadi pemadaman listrik di sebuah komplek pada hari Rabu adalah ...
   A. 1/30
   B. 1/10
   C. 1/15
   D. 13/100
   E. 7/30
4. Dua buah dadu dilempar undi secara bersamaan sebanyak satu kali. Peluang kejadian muncul jumlah mata dadu 9....
   A. 1/2
   B. 1/4
   C. 1/6
   D. 1/8
   E. 1/9
5. Dari seperangkat kartu bridge diambil satu kartu sekaligus secara acak. Peluang yang terambil kartu King adalah.....
   A. 1/221
   B. 1/13
   C. 4/221
   D. 11/221
   E. 8/663
6. Pada percobaan lempar undi dua buah dadu, peluang muncul kedua mata dadu berjumlah kurang dari 7 adalah….
   A. 1/9
   B. ½

C. 15/36
D. 2/3
E. 10/12

7. Tiga buah uang logam dilempar bersama-sama sebanyak 16 kali. Harapan muncul tiga-tiganya angka adalah
   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4
   E. 5
8. Pada percobaan lempar undi dua buah dadu sekaligus sebanyak 72 kali, harapan muncul mata dadu berjumlah genap adalah...
   A. 18
   B. 30
   C. 32
   D. 34
   E. 36
9. Seorang ibu hamil untuk ketiga kalinya, peluang dia melahirkan bayi perempuan adalah..
   A. ½
   B. 1/3
   C. 3/2
   D. ¾
   E. 4/5
10. Sebuah keranjang berisi 2 lusin telur ayam yang 4 diantaranya busuk. Inda mengambil satu telur. Peluang telur yang terambil Inda adalah telur yang tidak busuk adalah..
    A. ½
    B. 1/5
    C. 1/6
    D. 5/6
    E. 6/5

JAWABAN

1. C
2. A
3. B
4. E
5. B
6. C
7. B
8. E
9. A
10. D

Pembahasan

1. Perhatikan ruang sampel berikut:

		Dadu Kedua					
		1	2	3	4	5	6
Dadu Pertama	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Dari ruang sampel tersebut, Ananda pilih pasangan dadu yang berjumlah sama dengan 8, misal A = kejadian muncul jumlah mata dadu sama dengan 8.
$A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$
n(A) = 5
maka $P(A) = \frac{5}{36}$

B = kejadian muncul mata dadu berselisih 2
$B = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4)\}$
n(B) = 8
Maka $P(B) = \frac{8}{36}$

Mata dadu berjumlah 8 dan berselisih 2 adalah $n(A \cap B) = \{(3,5), (5,3)\} = 2$
Maka $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$

Sehingga $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{36} + \frac{8}{36} - \frac{2}{36} = \frac{11}{36}$$

2. Misalkan jumlah siswa yang suka kedua jenis olahraga tersebut sebanyak x siswa
Maka
$36 = (20 - x) + (15 - x) + 6 + x$
$36 = 20 + 15 + 6 - x$
$x = 41 - 36 = 5$
Peluang siswa yang terpilih suka kedua jenis olahraga adalah $P(A) = \frac{5}{36}$

3. Banyak seluruh kompleks yang mengalami pemadaman listrik ada 30, jadwal hari rabu ada 3 rumah, misalkan A adalah jadwal hari rabu pemadaman, maka peluangnya adalah $P(A) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

4. Lihat kembali gambar ruang sampel dua dadu. Misalkan A adalah kejadian muncul mata dadu berjumlah 9, maka $A = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\} \leftrightarrow n(A) = 4$. Sehingga peluangnya adalah $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

5. Lihat kembali gambar ruang sampel kartu Bridge. Terdapat 4 buah kartu King, dan misalkan A adalah kejadian terambilnya kartu King, maka peluang terambilnya satu kartu King dari seperangkat kartu Bridge adalah

$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$

6. Misalkan A adalah kejadian muncul mata dadu berjumlah kurang dari 7. Maka $P(A) = \frac{15}{36}$

		Dadu Kedua					
		1	2	3	4	5	6
Dadu Pertama	1	(1,1)	~~(1,2)~~	~~(1,3)~~	~~(1,4)~~	~~(1,5)~~	(1,6)
	2	~~(2,1)~~	~~(2,2)~~	~~(2,3)~~	~~(2,4)~~	(2,5)	(2,6)
	3	~~(3,1)~~	~~(3,2)~~	~~(3,3)~~	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	~~(4,1)~~	~~(4,2)~~	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	~~(5,1)~~	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

7. Misalkan A kejadian muncul tiga angka dari pelemparan 3 buah uang logam. Ruang sampel $S = \{AAA, AAG, AGG, GGA, GAG, AGA, GAA, GGG\}$. n(S) = 8. $A = \{AAA\}$; n(A) = 1 maka $P(A) = \frac{1}{8}$. Karena dilempar sebanyak 16 kali, maka harapan muncul ketiganya angka adalah $F = \frac{1}{8}(16) = 2$.

8. Perhatikan gambar ruang sampel dua dadu. Misalkan A kejadian muncul mata dadu berjumlah genap, maka $n(A) = 18$. Ananda cari yang jumlahnya 2,4,6,8 dst. Frekuensi harapannya adalah $F = \frac{18}{36}(72) = 36$

9. Jawabannya ½ jelas yaa..

10. Telur yang tidak busuk ada 20. Maka peluang terambilnya satu telur yang tidak busuk dari 24 telur adalah $P = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

E. Penilaian Diri

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu memahami konsep peluang ?		
2.	Apakah Ananda mampu menentukan peluang suatu kejadian ?		
3.	Apakah Ananda mampu menentukan peluang suatu kejadian dari masalah permutasi?		
4.	Apakah Ananda mampu menentukan peluang suatu kejadian dari masalah kombinasi?		
5.	Apakah Ananda mampu menentukan frekuensi harapan dari peluang suatu kejadian?		

Jika Jawaban Ananda Ya untuk kelima pertanyaan di atas, silahkan Ananda lanjut ke kegiatan pembelajaran berikutnya. Namun jika Ananda menjawab tidak untuk pertanyaan tersebut silahkan Ananda berhenti di sini dan kembali mengulang pembelajaran. Ajak teman untuk berdiskusi atau konsultasikan dengan guru matematika Ananda.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
PELUANG KEJADIAN MAJEMUK

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan Ananda dapat menentukan dan menyelesaikan serta menganalisis permasalahan yang berkaitan dengan peluang kejadian majemuk.

B. Uraian Materi

Jika dua atau lebih kejadian dioperasikan sehingga membentuk kejadian baru, maka kejadian baru ini disebut ***kejadian majemuk***.

1) Peluang Komplemen dari Suatu Kejadian

> Jika A adalah suatu kejadian dan A' adalah komplemen dari kejadian A, maka berlaku $P(A) + P(A') = 1$ atau $P(A') = 1 - P(A)$

Contoh 1

Dari satu set kartu bridge diambil sebuah kartu secara acak.
Berapa peluang terambil bukan kartu As ?
Penyelesaian :
Satu set kartu bridge berjumlah 52 kartu, berarti $n(S) = 52$
Misalkan B adalah kejadian terambil bukan kartu As, maka komplemen dari B yaitu B' adalah kejadian yang terambil kartu As, sehingga $n(B') = 4$, dan peluang kejadian B' adalah

$$P(B') = \frac{n(B')}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Jadi, peluang kejadian B yaitu yang terambil bukan kartu As adalah

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

Contoh 2

Tiga buah koin ditos bersamaan. Tentukan peluang paling sedikit muncul satu angka.

Penyelesaian :
Tiga koin dilambungkan bersamaan, banyak hasil yang mungkin ada 8, sehingga n(S) = 8. Jika A adalah kejadian paling sedikit muncul 1 angka, maka komplemen dari A yaitu A' adalah kejadian tidak ada angka yang muncul dari ketiga koin tersebut atau ketiganya muncul gambar, sehingga A' = { GGG } dan n(A') = 1

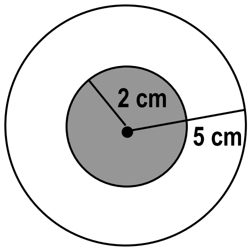
Peluang kejadian A' = muncul tiga gambar adalah $P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{1}{8}$

Jadi, peluang kejadian A = muncul paling sedikit 1 angka adalah,

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Contoh 3

Gambar berikut menunjukkan sebuah sasaran dalam latihan menembak yang terdiri atas dua lingkaran sepusat dengan jari-jari 2 cm dan 5 cm. Jika seorang penembak selalu mengenai sasaran, tentukan peluang bahwa peluru akan mengenai :



a. daerah lingkaran dalam
b. daerah lingkaran luar

Penyelesaian :

Dalam masalah ini, ruang sampelnya adalah daerah di dalam lingkaran besar. Dengan demikian, peluang akan merupakan perbandingan luas.

a. Jari-jari lingkaran besar r_1 = 5 cm, sehingga luasnya $A_1 = \pi.r_1^2 = \pi.\ 5^2 = 25\ \pi\ cm^2$
Jari-jari lingkaran dalam r_2 = 2 cm, sehingga luasnya $A_2 = \pi.r_2^2 = \pi.\ 2^2 = 4\ \pi\ cm^2$

Jadi, peluang mengenai daerah lingkaran dalam = $\frac{A_2}{A_1} = \frac{4\pi}{25\pi} = \frac{4}{25}$

Daerah lingkaran luar merupakan komplemen dari daerah lingkaran dalam, sehingga peluang mengenai daerah lingkaran luar adalah,
P(mengenai daerah lingkaran luar) = 1 – *P*(mengenai daerah lingkaran dalam)

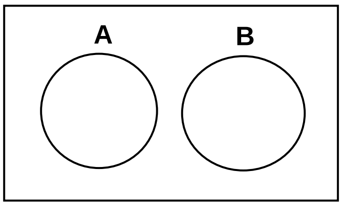
$$= 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

2) Penjumlahan Peluang

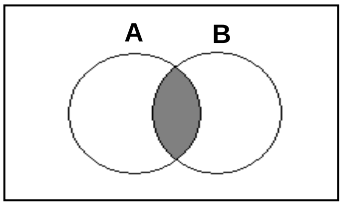
Dalam percobaan pelemparan dua buah dadu bersamaan. Misalkan kejadian A adalah jumlah angka yang dihasilkan 4 dan kejadian B adalah jumlah angka yang dihasilkan 10. Maka A = {(1.3), (2.2), (3.1)} dan B = {(4.6), (5.5), (6.4)}.

Tampak bahwa tidak satu pun elemen A yang sama dengan elemen B. Kejadian A dan B dalam hal ini disebut sebagai ***kejadian saling lepas***.

Jadi, dua kejadian dikatakan saling lepas apabila tidak ada satu pun elemen yang sama dari keduanya. Dalam notasi himpunan, dua kejadian saling lepas jika $A \cap B = \varnothing$ atau $n(A \cap B) = 0$.



Kejadian saling lepas
$A \cap B = \varnothing$ atau $n(A \cap B) = 0$



A dan B tidak saling lepas
$A \cap B \neq \varnothing$ atau $n(A \cap B) \neq 0$

- Untuk A dan B dua kejadian saling lepas, berlaku

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Untuk A dan B dua kejadian tidak saling lepas [$(A \cap B) \neq \varnothing$], berlaku

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Contoh (Kejadian saling lepas)

Dua buah dadu dilambungkan secara bersamaan. Berapa peluang muncul angka berjumlah 4 atau 10 ?

Penyelesaian :

Pada pengetosan dua buah dadu bersamaan, banyak hasil yang mungkin 36, sehingga n(S) = 36.
Kejadian A = muncul angka berjumlah 4, maka A = {(1.3), (2.2), (3.1)} dan n(A) = 3
Kejadian B = muncul angka berjumlah 10, maka B = {(4.6), (5.5), (6.4)} dan n(B) = 3
Kejadian A dan B tidak memiliki satu pun elemen yang sama, berarti A dan B saling lepas. Sehingga peluang gabungan A dan B adalah

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

Contoh (Kejadian tidak saling lepas)

1. Sebuah kartu diambil secara acak dari satu set kartu bridge. Tentukan peluang yang terambil adalah kartu intan atau kartu As.

   Penyelesaian :

   Satu set kartu bridge terdiri 52 kartu yang berbeda, sehingga n(S) = 52
   Jika kejadian A menyatakan terambil kartu intan, banyak kartu intan ada 13, sehingga n(A) = 13.
   Jika kejadian B menyatakan terambil kartu As, banyak kartu As ada 4, sehingga n(B) = 4.
   Kejadian A dan B memiliki satu elemen yang sama, karena salah satu jenis kartu As adalah intan. maka A dan B dua kejadian tidak saling lepas dengan A $\cap$ B = {kartu As intan} dan $n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 1$.
   Peluang gabungan A dan B adalah

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \mathbf{\frac{4}{13}}$$

2. Jika dari kartu bernomor 1 sampai 100 diambil sebuah kartu secara acak, tentukan peluang :
   a. muncul kelipatan 6
   b. muncul kelipatan 8
   c. muncul kelipatan 6 atau 8

   Penyelesaian :

   S = {1, 2, 3, …, 100} $\to n(\mathrm{S}) = 100$
   Misalkan A = kejadian muncul kelipatan 6 dan B = kejadian muncul kelipatan 8, maka
   A = {6×1, 6×2, 6×3, …, 6×16} $\to n(\mathrm{A}) = 16$
   B = {8×1, 8×2, 8×3, …, 8×12} $\to n(\mathrm{B}) = 12$

   a. Peluang A = kejadian muncul kelipatan 6 adalah
   $$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$$
   b. Peluang B = kejadian muncul kelipatan 8 adalah

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

c. Peluang kejadian muncul kelipatan 6 atau 8
KPK 6 dan 8 adalah 24, sehingga kelipatan 6 dan 8 dapat terjadi bersamaan jika muncul kelipatan 24, yaitu :
$A \cap B = \{24\times1, 24\times2, 24\times3, 24\times4\}$ sehingga $n(A \cap B) = 4$

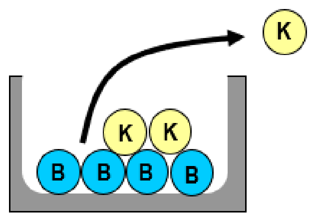
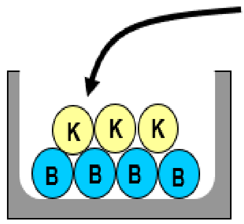
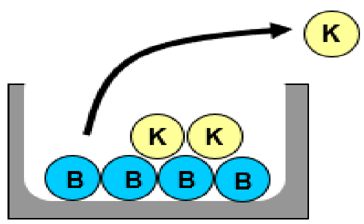
dan $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)} = \dfrac{4}{100} = \dfrac{1}{25}$

oleh karena A dan B tidak saling lepas, maka :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{4}{25} + \frac{3}{25} - \frac{1}{25} = \mathbf{\frac{6}{25}}$$

3) Perkalian Peluang

Dua kejadian dikatakan ***saling bebas*** jika munculnya kejadian pertama tidak mempengaruhi peluang munculnya kejadian kedua.
Sebagai contoh, pada percobaan pengambilan dua bola satu per satu dengan pengembalian. Misalnya, sebuah kotak berisi 4 bola biru dan 3 bola kuning. Pada pengambilan pertama, peluang terambil bola kuning = $\frac{3}{7}$. Jika sebelum pengambilan kedua, bola dikembalikan lagi ke dalam kotak, maka peluang terambil bola kuning kedua tetap $\frac{3}{7}$. Dalam kasus ini kejadiannya *saling bebas*. Karena peluang munculnya kejadian pengambilan bola kuning kedua tidak dipengaruhi oleh pengambilan bola kuning pertama. Perhatikan gambar:

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Pengambilan pertama bola kuning maka peluangnya P(K) = $\frac{3}{7}$</td>
<td>Bola kuning yang diambil dikembalikan lagi</td>
<td>Pengambilan kedua bola kuning maka peluangnya P(K) = $\frac{3}{7}$</td>
</tr>
</table>

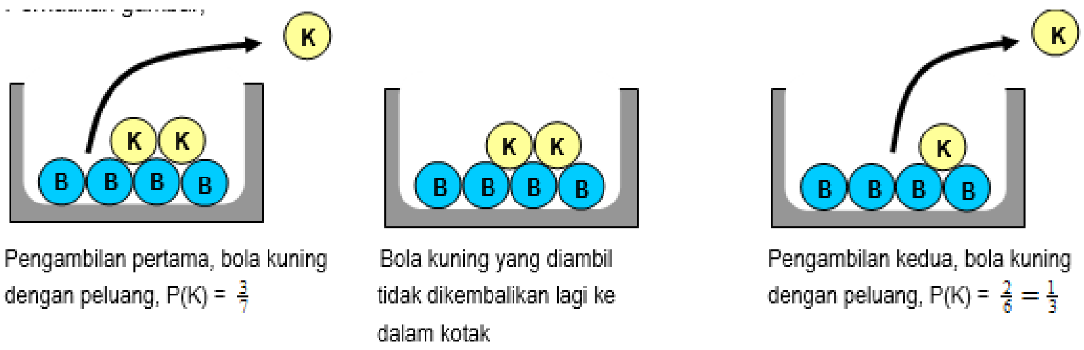
Jika A dan B dua kejadian saling bebas, maka peluang kejadian A dan B ditulis $P(A \cap B)$; diberikan oleh :

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Dalam contoh kasus di atas, bagaimana jika sebelum pengambilan bola kedua, bola pertama tidak dikembalikan ke dalam kotak ? Misalnya, pada pengambilan pertama terambil bola kuning dan peluangnya = $\frac{3}{7}$. Jika bola kuning tersebut tidak dikembalikan ke dalam kotak, maka bola yang tersisa dalam kotak adalah 4 bola biru dan 2 bola kuning. Sehingga peluang terambil bola kuning pada pengambilan yang kedua adalah $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Dengan demikian, untuk pengambilan bola pertama yang tidak dikembalikan, maka peluang pada pengambilan bola kedua bergantung pada hasil pengambilan bola pertama. Kasus seperti ini disebut ***kejadian bersyarat***.

Perhatikan gambar,



Jika A dan B dua kejadian bersyarat, maka peluang kejadian A dan B ditulis $P(A \cap B)$ diberikan oleh : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$

dimana $P(B|A)$ adalah peluang kejadian B jika diketahui kejadian A telah terjadi.

Contoh *Dua kejadian saling bebas*

Sebuah dadu dilempar dua kali. Tentukan peluang munculnya.

a. angka dadu genap pada lemparan pertama dan kedua
b. angka dadu genap pada lemparan pertama dan angka dadu ganjil prima pada lemparan kedua

Penyelesaian :

Banyaknya hasil yang mungkin pada pelemparan sebuah dadu ada 6, sehingga $n(S) = 6$

Misalnya,

A = kejadian muncul angka genap pada lemparan pertama, maka A = {2, 4, 6} dan $n(A) = 3$

B = kejadian muncul angka genap pada lemparan kedua, maka B = {2, 4, 6} dan $n(B) = 3$

C = kejadian muncul angka ganjil prima pada lemparan kedua, maka C = {3, 5} dan $n(C) = 2$

Maka,

Peluang kejadian A, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, Peluang kejadian B, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, dan

Peluang kejadian C, $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

a. peluang muncul angka dadu genap pada lemparan pertama dan kedua adalah,

$P(A \cap B) = P(A) \text{ x } P(B) = \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b. peluang muncul angka dadu genap pada lemparan pertama dan angka dadu ganjil prima pada lemparan kedua adalah,

$P(A \cap C) = P(A) \text{ x } P(C) = \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Contoh *Dua kejadian saling bebas*

Dalam sebuah tas sekolah terdapat 6 buku matematika dan 8 buku kimia. Dua buku diambil secara acak dari dalam tas satu per satu. Jika buku pertama yang diambil dimasukkan kembali ke dalam tas sebelum buku kedua diambil, berapakah peluang yang terambil adalah :

a. buku pertama matematika dan buku kedua kimia
b. buku pertama kimia dan buku kedua kimia

Penyelesaian :

Tas berisi 14 buku (6 buku matematika dan 8 buku kimia), sehingga $n(S) = 14$.

Misalkan A = kejadian terambil buku matematika, maka $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$, dan

B = kejadian terambil buku kimia, maka $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

a. Peluang terambil buku matematika lalu buku kimia adalah,

$P(A \cap B) = P(A)\ \text{x}\ P(B) = \frac{3}{7}\ \text{x}\ \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$

b. Peluang terambil buku kimia lalu buku kimia adalah, $P(B \cap B) = P(B)\ \text{x}\ P(B) = \frac{4}{7}\ \text{x}\ \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

Contoh *Dua kejadian bersyarat*

Sebuah kotak berisi 6 bola merah dan 4 bola biru. Jika diambil 2 bola satu per satu tanpa pengembalian, tentukan peluang bola yang terambil berturut-turut berwarna :

a. biru - merah
b. merah – merah
c. merah - biru

Penyelesaian :

Banyak bola sebelum pengambilan adalah 6 bola merah + 4 bola biru = 10 bola.

a. Pada pengambilan pertama terambil bola biru. Tersedia 4 bola biru dari 10 bola, sehingga peluang terambil bola biru $P(B)$ adalah,

$P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Banyak bola sebelum pengambilan kedua adalah 6 bola merah + 3 bola biru = 9 bola. Peluang terambil bola merah dengan syarat bola biru telah terambil pada pengambilan pertama, ditulis $P(M|B)$ adalah,

$P(M|B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Jadi, peluang terambil berturut-turut bola berwarna biru – merah adalah,

$P(B \cap M) = P(B)\ \text{x}\ P(M|B)$

$= \frac{2}{5}\ \text{x}\ \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

b. Pada pengambilan pertama terambil bola merah. Tersedia 6 bola merah dari 10 bola, sehingga peluang terambil bola merah $P(M)$ adalah,

$P(M) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Banyak bola sebelum pengambilan kedua adalah 5 bola merah + 4 bola biru = 9 bola. Peluang terambil bola merah dengan syarat bola merah telah terambil pada pengambilan pertama, ditulis $P(M|M)$ adalah : $P(M|M) = \frac{5}{9}$

Jadi, peluang terambil berturut-turut bola berwarna merah – merah adalah,

$P(M \cap M) = P(M) \times P(M|M)$

$= \frac{3}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

c. Pada pengambilan pertama terambil bola merah. Tersedia 6 bola merah dari 10 bola, sehingga peluang terambil bola merah $P(M)$ adalah : $P(M) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Banyak bola sebelum pengambilan kedua adalah 5 bola merah + 4 bola biru = 9 bola. Peluang terambil bola biru dengan syarat bola merah telah terambil pada pengambilan pertama, ditulis $P(B|M)$ adalah : $P(B|M) = \frac{4}{9}$

Jadi, peluang terambil berturut-turut bola berwarna merah – biru adalah,

$P(M \cap B) = P(M) \times P(B|M)$

$= \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$

C. Rangkuman

Untuk A dan B dua kejadian saling lepas, berlaku

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Untuk A dan B dua kejadian tidak saling lepas [$(A \cap B) \neq \varnothing$], berlaku

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B\}$$

Jika A dan B dua kejadian saling bebas, maka peluang kejadian A dan B ditulis $P(A \cap B)$ diberikan oleh :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Jika A dan B dua kejadian bersyarat, maka peluang kejadian A dan B ditulis $P(A \cap B)$ diberikan oleh :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

dimana $P(B|A)$ adalah peluang kejadian B jika diketahui kejadian A telah terjadi.

D. Latihan Soal

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Di sebuah toko tersedia 1 lusin lampu, 2 diantaranya rusak. Ada 3 orang akan membeli masing-masing 1 lampu. Peluang pembeli ketiga mendapat lampu rusak adalah ...
   A. 1/6
   B. 1/3
   C. 3/2
   D. 1/66
   E. 2/11
2. Seorang penjaga gawang profesional mampu menahan tendangan penalti dengan peluang 35. Dalam sebuah kesempatan dilakukan 5 kali tendangan. Peluang penjaga gawang mampu menahan 3 kali tendangan penalti tersebut adalah ...
   A. 180/625
   B. 612/625
   C. 216/625
   D. 228/625
   E. 230/625
3. Dua dadu dilempar undi bersama satu kali. Peluang muncul jumlah kedua mata dadu 4 atau 7 adalah ...
   A. 5/36
   B. 6/36
   C. 7/36
   D. 8/36
   E. 9/36
4. Dalam kotak terdapat 3 kelereng merah dan 4 kelereng putih, kemudian diambil 3 kelereng sekaligus secara acak. Peluang terambil paling sedikit 2 kelereng putih adalah ...
   A. 3/35
   B. 4/35
   C. 7/35
   D. 12/35
   E. 22/35
5. Dari dalam kantong yang berisi 8 kelereng merah dan 10 kelereng putih akan diambil 2 kelereng sekaligus secara acak. Peluang yang terambil 2 kelereng putih adalah ...
   A. 20/153
   B. 28/153
   C. 45/153
   D. 56/153
   E. 90/153
6. Kotak A berisi 2 bola merah dan 3 bola putih. Kotak B berisi 5 bola merah dan 3 bola putih. Dari masing-masing kotak diambil satu bola. Peluang bola yang terambil bola merah dari kotak A dan bola putih dari kotak B adalah ...
   A. 1/40
   B. 3/20
   C. 3/8
   D. 2/5
   E. 3/140
7. Dalam sebuah kelas yang jumlah muridnya 40 anak, 22 anak mengikuti IMO, 17 anak mengikuti IBO dan 20 anak mengikuti ICO. Ada juga yang mengikuti sekaligus dua kegiatan, yaitu 12 anak mengikuti IMO dan IBO, 9 anak mengikuti IMO dan ICO, 8 anak mengikuti IBO dan ICO, sedang 5 anak tercatat mengikuti

IMO, IBO maupun ICO. Jika dipilih salah satu anak dari kelas tersebut, peluang terpilihnya seorang anak yang tidak mengikuit IMO, IBO maupun ICO adalah ...

A. 7/40
B. 6/40
C. 5/40
D. 4/40
E. 3/40

8. Dari seperangkat kartu bridge diambil dua kartu sekaligus secara acak. Peluang yang terambil dua kartu king adalah ...

A. 12/21
B . 1/13
C. 4/221
D. 11/221
E. 8/663

9. Dalam kantong I terdapat 5 kelereng merah dan 3 kelereng putih, dalam kantong II terdapat 4 kelereng merah dan 6 kelereng hitam. Dari setiap kantong diambil satu kelereng secara acak. Peluang terambilnya kelereng putih dari kantong I dan kelereng hitam dari kantong II adalah ...

A. 39/40
B. 9/13
C. 1/2
D. 9/20
E. 9/40

10. Dari 10 butir telur terdapat 2 butir yang busuk. Seorang ibu membeli 2 butir telur tanpa memilih. Peluang mendapat 2 butir telur yang baik adalah ...

A. 9/45
B. 11/45
C. 14/45
D. 18/45
E. 28/45

Kunci Jawaban

1. D
2. C
3. E
4. E
5. C
6. B
7. C
8. A
9. E
10. E

Pembahasan

1. 1 lusin lampu = 12 lampu
=> 2 lampu rusak
=> 10 lampu baik

Ada 3 orang pembeli masing - masing membeli 1 lampu, peluang pembeli ketiga mendapat lampu rusak :

Ada 3 kemungkinan :

Pembeli pertama, pembeli kedua dan pembeli ketiga berturut-turut mendapatkan lampu :
1) rusak, baik, rusak
2) baik, rusak, rusak
3) baik, baik, rusak

Peluang mendapatkan lampu :
rusak - baik - rusak
= (2/12) . (10/11) . (1/10)
= (1/6) . (1/11)
= 1/66

Peluang mendapatkan lampu :
baik - rusak - rusak
= (10/12) . (2/11) . (1/10)
= (1/12) . (2/11)
= 2 / (12 . 11)
= 1 / (6 . 11)
= 1/66

Peluang mendapatkan lampu :
baik - baik - rusak
= (10/12) . (9/11) . (2/10)
= (1/12) . (9/11) . 2
= (18) / (12 . 11)
= 9 / (6 . 11)
= 9/66

Jadi peluang pembeli ketiga mendapat lampu rusak adalah
= (1/66) + (1/66) + (9/66)
= 11/66
= 1/6

2. Peluang penjaga gawang mampu menahan tendangan penalti adalah $p = \frac{3}{5}$

Maka Peluang penjaga gawang gagal menahan tendangan penalti adalah

$q = 1 - p = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Terdapat 5 tendangan penalti, maka n = 5 dan penjaga gawang mampu menahan 3 kali tendangan penalti, maka r = 3

Jadi peluang penjaga gawang mampu menahan 3 kali tendangan penalti tersebut adalah

$_nC_r \times p^r \times q^{n-r}$

$_5C_3 \times (\frac{3}{5})^3 \times (\frac{2}{5})^2$

$\frac{5!}{(5-3)!.3!} \times \frac{27}{125} \times \frac{4}{25}$

$\frac{5\times4\times3!}{2!.3!} \times \frac{27}{125} \times \frac{4}{25}$

$\frac{5\times4}{2!} \times \frac{27}{125} \times \frac{4}{25}$

$\frac{20}{2} \times \frac{27}{125} \times \frac{4}{25}$

$10 \times \frac{27}{125} \times \frac{4}{25}$

$2 \times \frac{27}{25} \times \frac{4}{25}$

$\frac{216}{625}$

Maka $P = \frac{216}{625}$

3. Misalkan A = kejadian muncul mata dadu berjumlah 4
 $A = (1,3), (2,2), (3,1)$
 n(A) = 3
 Misalkan B = kejadian muncul mata dadu berjumlah 7
 $B = (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$
 n(B) = 6
 Peluang muncul jumlah kedua mata dadu 4 atau 7 adalah
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3+6}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

4. Diketahui :
 kelereng merah = 3
 kelereng putih = 4
 Jumlah kelereng = 7
 Ditanya : peluang terambilnya paling sedikit 2 kelereng putih ?

 Diambil 3 kelereng sekaligus maka ruang sampelnya :
 $n(S) = C_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!\,3!} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$
 A = susunan yang mungkin terambil paling sedikit 3 kelereng putih adalah
 2 kelereng putih dan 1 kelereng merah :
 $= C_2^4 \,.\, C_1^3 = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} \cdot \frac{3!}{(3-1)!\,1!} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} \cdot \frac{3.2.1}{2.1.1} = 6.3 = 18$

 3 kelereng putih dan 0 kelereng merah
 $= C_3^4 . C_0^4 = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} \cdot \frac{4!}{(4-0)!\,0!} = \frac{4!}{1!\,3!} \cdot \frac{4!}{4!\,0!} = 4.1 = 4$

 N(A)=18+4=22

 Jadi peluang nya adalah $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{22}{35}$

5. Diketahui
 Kelereng merah = 8
 Kelereng putih = 10

Diambil 2 kelereng sekaligus maka $n(S) = C_2^{18} = \frac{18!}{(18-2)!2!} = \frac{18!}{16!2!} = \frac{18.17}{2} = 153$
Selanjutnya misal A kejadian terambil kelereng putih maka
$n(A) = C_2^{10} = \frac{10!}{(10-2)!\,2!} = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{10.9}{2} = 45$
Jadi peluangnya $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{45}{153}$

6. Diketahui kotak A berisi 2 bola merah dan 3 bola putih, jika diambil satu bola, maka peluang terambil bola merah adalah $P(A) = \frac{2}{5}$
Diketahui kotak A berisi 5 bola merah dan 3 bola putih, jika diambil satu bola maka peluang terambil bola putih adalah $P(B) = \frac{3}{8}$
Peluang bola yang terambil bola merah dari kotak A dan bola putih dari kotak B adalah $P(A).P(B) = \frac{2}{5}.\frac{3}{8} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$

7. Dalam sebuah kelas yang jumlah muridnya 40 anak, 22 anak mengikuti IMO, 17 anak mengikuti IBO dan 20 anak mengikuti ICO. Ada juga yang mengikuti sekaligus dua kegiatan, yaitu 12 anak mengikuti IMO dan IBO, 9 anak mengikuti IMO dan ICO, 8 anak mengikuti IBO dan ICO, sedang 5 anak tercatat mengikuti IMO, IBO maupun ICO. Jika dipilih salah satu anak dari kelas tersebut, peluang terpilihnya seorang anak yang tidak mengikut IMO, IBO maupun ICO adalah
Total murid ada 40
Yang ikut IMO = 22
Yang ikut IBO = 17
Yang ikut ICO = 20
Yang ikut IMO dan ICO = 9
Yang ikut IMO dan IBO = 12
Yang ikut IBO dan ICO = 8
Yang ikut ketiganya = 5
Kemungkinan terpilih murid yang tidak ikut ketiganya ??
Kita telaah yuk
Hanya ikut IMO dan ICO = 9 – 5 = 4 hanya IMO = 22 – (4 + 5 + 7) = 6
Hanya ikut IMO dan IBO = 12 – 5 = 7 hanya IBO = 17 – (7 + 5 + 3)= 2
Hanya ikut IBO dan ICO = 8 – 5 = 3 hanya ICO = 20 – (5 + 3 + 4) = 8
Jadi yang gak ikut ketiganya adalah 40 – (8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2)=5
Peluang terpilihnya siswa yang tidak mengikuti ketiganya adalah $\frac{5}{40}$

8. Ruang sampel pengambilan dua kartu sekaligus dari seperangkat kartu bridge adalah $n(S) = C_2^{52} = \frac{52}{(52-2)!2!} = \frac{52!}{50!2!} = \frac{52.51}{2} = 1326$
A kejadian terambil dua kartu King maka $n(A) = C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3}{2} = 6$
Jadi peluang terambilnya dua kartu king adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{1.326} = \frac{1}{221}$$

9. Misalkan A kejadian terambilnya kelereng putih dari kantong I maka $n(A) = \frac{3}{8}$
Misalkan A kejadian terambilnya kelereng hitam dari kantong II maka $n(B) = \frac{6}{10}$
Peluang terambilnya kelereng putih dari kantong I dan kelereng hitam dari kantong II adalah $\frac{3}{8}.\frac{6}{10} = \frac{18}{80} = \frac{9}{40}$

10. Dari 10 butir telur terdapat 2 butir yang busuk. Seorang ibu membeli 2 butir telur tanpa memilih. Peluang mendapat 2 butir telur yang baik adalah
Ruang sampel pengambilan dua telur sekaligus dari 10 butir telur adalah $n(S) = C_2^{10} = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10.9}{2} = 45$
Telur yang kondisinya baik ada 8, misalkan terambil dua telur kondisi baik maka $n(A) = C_2^8 = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8.7}{2} = 28$
Jadi peluangnya adalah $P(A) = \frac{28}{45}$

E. Penilaian Diri

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu memahami konsep peluang majemuk?		
2.	Apakah Ananda mampu menentukan peluang suatu kejadian saling bebas?		
3.	Apakah Ananda mampu menentukan peluang suatu kejadian saling?		
4.	Apakah Ananda mampu menentukan peluang suatu kejadian bersyarat?		

Jika Jawaban Ananda Ya untuk keempat pertanyaan di atas, silahkan Ananda lanjut ke kegiatan pembelajaran berikutnya. Namun jika Ananda menjawab tidak untuk pertanyaan tersebut silahkan Ananda berhenti di sini dan kembali mengulang pembelajaran. Ajak teman untuk berdiskusi atau konsultasikan dengan guru matematika Ananda.

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat

1. Sebuah kotak berisi 5 bola merah , 4 bola biru dan 3 bola kuning. Dari dalam kotak diambil 3 bola sekaligus secara acak. Peluang terambil 2 bola merah dan 1 bola biru adalah ...
   A. 1/10
   B. 5/36
   C. 1/6
   D. 2/11
   E. 4/11
2. Dua buah dadu dilambungkan bersama-sama. Peluang muncul mata dadu pertama 3 dan mata dadu kedua 5 adalah ...
   A. 6/36
   B. 5/36
   C. 4/36
   D. 3/36
   E. 1/36
3. Jika sebuah dadu dan sekeping mata uang dilempar undi satu kali bersama, maka peluang untuk memperoleh gambar pada mata uang dan bilangan ganjil pada dadu adalah ...
   A. 1/12
   B. 1/6
   C. 1/4
   D. 1/3
   E. 1/2
4. Satu buah dadu dan satu keping uang logam dilambungkan bersama-sama satu kali. Peluang muncul gambar pada uang logam dan bilangan prima pada mata dadu adalah…
   A. 6/12
   B. 4/12
   C. 3/12
   D. 2/12
   E. 1/12
5. Dari dalam kantong yang berisi 8 kelereng merah dan 10 kelereng putih akan diambil 2 kelereng sekaligus secara acak. Peluang yang terambil 2 kelereng putih adalah....
   A. 20/153
   B. 28/153
   C. 45/153
   D. 56/153
   E. 90/153
6. Kotak A berisi 2 bola merah dan 3 bola putih. Kotak B berisi 5 bola merah dan 3 bola putih. Dari masing-masing kotak diambil satu bola. Peluang bola yang terambil bola merah dari kotak A dan bola putih dari kotak B adalah....
   A. 1/40
   B. 3/20
   C. 3/8
   D. 2/5
   E. 31/40
7. Sebuah kotak berisi 4 bola kuning dan 6 bola biru. Jika diambil 2 buah bola sekaligus secara acak maka peluang terambil kedua bola berwarna sama adalah.....
   A. 2/15
   B. 3/15

C. 5/15
D. 7/15
E. 8/15

8. Dari seperangkat kartu bridge diambil dua kartu sekaligus secara acak. Peluang yang terambil dua kartu King adalah.....
A. 1/221
B. 1/13
C. 4/221
D. 11/221
E. 8/663

9. Dua buah dadu dilempar undi secara bersamaan sebanyak satu kali. Peluang kejadian muncul jumlah mata dadu 9 atau 11 adalah....
A. 1/2
B. 1/4
C. 1/6
D. 1/8
E. 1/12

10. Dalam kantong I terdapat 5 kelereng merah dan 3 kelereng putih. Dalam kantong II terdapat 4 kelereng merah dan 6 kelereng hitam. Dari setiap kantong diambil satu kelereng secara acak. Peluang terambilnya kelereng putih dari kantong I dan kelereng hitam dari kantong II adalah....
A. 39/40
B. 9/13
C. 1/2
D. 9/20
E. 9/40

11. Sebuah kotak berisi 5 bola merah dan 4 bola kuning. Sebuah bola secara acak diambil berturut-turut sebanyak dua kali tanpa pengembalian. Peluang terambil keduanya bola merah adalah...
A. 2/18
B. 3/18
C. 4/18
D. 5/18
E. 6/18

12. Peluang Lion Air berangkat tepat pada waktunya adalah P(B) = 0.85, peluang Lion Air datang tepat pada waktunya adalah P(D) = 0. 90 dan peluang pesawat tersebut berangkat dan datang tepat pada waktunya adalah $P(B \cap D) = 0.75$. peluang Lion Air datang tepat pada waktunya bila diketahui pesawat komersial itu berangkattepat pada waktunya adalah ...
A. 0,88
B. 0,87
C. 0,86
D. 0,85
E. 0,84

13. Dari seperangkat kartu Bridge diambil satu kartu secara acak. Peluang terambilnya kartu bukan As adalah...
A. 1/52
B. 1/13
C. 5/52
D. 3/13
E. 12/13

14. Dalam sebuah kotak terdapat 4 bola merah dan 6 bola putih. Dari kotak itu diambil 2 bola sekaligus secara acak. Peluang terambil sekurang-kurangnya 1 bola putih adalah..

A. 6/45
B. 15/45
C. 24/45
D. 30/45
E. 39/45

15. Kotak A berisi 8 butir telur dengan 3 butir diantaranya cacat dan kotak B berisi 5 butir telur dengan 2 diantaranya cacat. Dari masing-masing kotak diambil sebutir telur, peluang bahwa kedua butir telur yang terambil itu cacat adalah..
A. 3/20
B. 3/8
C. 3/5
D. 5/8
E. 24/25

Jawaban

1. D
2. E
3. C
4. C
5. C
6. B
7. A
8. A
9. C
10. E
11. D
12. A
13. E
14. D
15. A

DAFTAR PUSTAKA

http://mashaidar.blogspot.com/2017/03/peluang-dalam-kehidupan-sehari-hari.html
https://brainly.co.id/tugas/13752483
http://debrina.lecture.ub.ac.id/files/2015/07/3b-Teori-Probabilitas1.pdf
https://konten.smpn2ppu.sch.id/mtk/peluang-empirik-dan-peluang-teoritik/menu4.html

Syarifudin & Yayan. (2012). *404 soal unggulan SNMPTN.* Tangerang: Scientific Press.
Kanginan. (2009). TOPS Siap UN. Erlangga.
Bank Soal Pribadi.