KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Peminatan

KELAS XII

LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI
MATEMATIKA PEMINATAN
KELAS XII

PENYUSUN
Yuyun Sri Yuniarti
SMA Negeri 1 Pedes

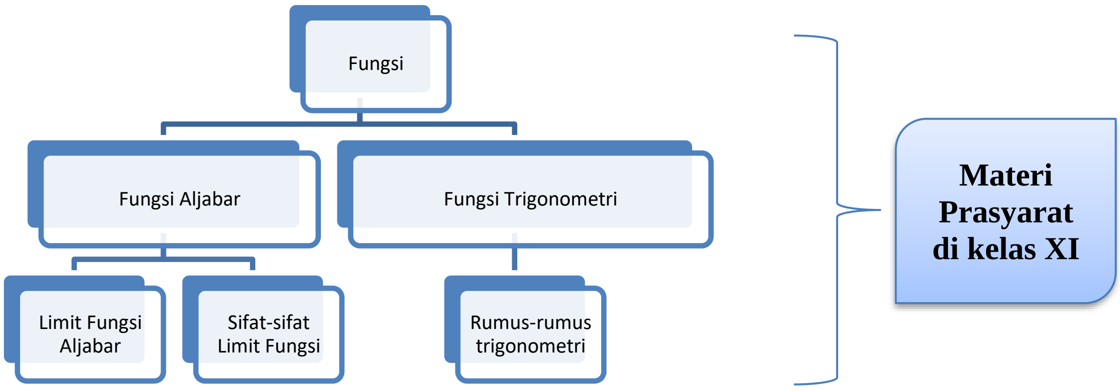
DAFTAR ISI

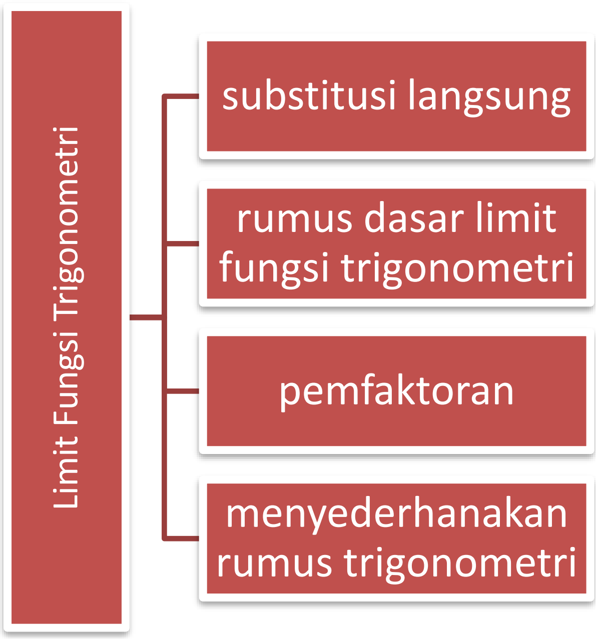
GLOSARIUM

- **Limit**; nilai pendekatan di sekitar titik tertentu baik pendekatan dari kiri suatu titik maupun pendekatan dari kanan titik tersebut.
- **Metode Substitusi**; menentukan nilai limit dengan mensubstitusi langsung batas limit ke dalam limit fungsi untuk limit tidak bentuk tak tentu.
- **Metode pemfaktoran**; menentukan limit bentuk tidak tentu dengan memfaktorkan pembilang dan atau penyebut agar dapat dilakukan metode substitusi.

PETA KONSEP

Ananda tercinta, berikut disajikan peta materi untuk konsep limit fungsi trigonometri. Konsep limit fungsi trigonometri tidak lepas dari materi limit fungsi aljabar dan rumus-rumus trigonometrinya. Oleh karena itu kedua materi tersebut merupakan materi prasyarat untuk Ananda dalam memahami, menentukan dan menyelesaikan masalah limit fungsi trigonometri.





PENDAHULUAN

Haloo... Ananda tercinta, salam jumpa kembali pada pembelajaran matematika. Kalian tentu tahu bahwa matematika merupakan ilmu yang dibutuhkan di semua bidang. Bahkan ada seloroh bahwa ketika kita berhenti bermatematik maka berhenti pulalah kehidupan ini. Nahh dalam kehidupan sehari-hari, berbagai permasalahan yang kita hadapi dapat melahirkan berbagai konsep matematika. Berdasarkan konsep umum matematika yang diperoleh dari permasalahan tersebut, kita mampu menyelesaikan kembali permasalahan yang serupa. Sebagai contoh, misalkan kita melakukan pengamatan terhadap respon tubuh yang sedang alergi terhadap suatu zat dengan tingkat dosis obat antibiotik. Dari data yang kita peroleh, kita dapat memodelkan batas dosis pemakaian antibiotik tersebut. Dengan demikian, masalah alergi yang serupa dapat diatasi bila kembali terjadi. Percobaan yang kita lakukan adalah sebuah konsep pendekatan terhadap solusi permasalahan tersebut. Jadi, konsep dapat kita peroleh dengan mengamati, menganalisis data dan menarik kesimpulan.

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Peminatan
Kelas	:	XII
Alokasi Waktu	:	12 JP
Judul Modul	:	Limit Fungsi Trigonometri

B. Kompetensi Dasar

3.1 Menjelaskan dan menentukan limit fungsi trigonometri

4.1 Menyelesaikan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri

C. Deskripsi Singkat Materi

Pada pendahuluan, Ananda telah diajak untuk memahami suatu konsep pendekatan pada nilai tertentu. Konsep tersebut merupakan contoh konsep dasar sederhana dari materi limit fungsi dalam kehidupan sehari-hari. Pada pertemuan kali ini kita akan membahas tentang limit fungsi trigonometri.

Di kelas XI Ananda telah belajar tentang limit fungsi aljabar, sedangkan materi yang akan kita bahas dalam modul ini yaitu tentang limit fungsi trigonometri. Ketika mendengar kata trigonometri pasti Ananda ingat bahasan tentang trigonometri di kelas X. Jadi benar apa yang Ananda pikirkan jika materi kali ini berkaitan dengan trigonometri di kelas X dan limit fungsi aljabar di kelas XI. Jika Ananda sedikit lupa tentang kedua hal tersebut, Ananda boleh membuka kembali buku matematika kelas X dan XI dan mengingat kedua konsep tersebut yang telah bapak/ibu guru matematika ajarkan di kelas X dan XI. Jika belum terlalu paham, jangan khawatir, dalam modul pembelajaran mengenai materi limit fungsi trigonometri kita akan belajar perlahan langkah demi langkah secara rinci agar Ananda dapat lebih mudah memahaminya.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda mempelajari e-modul ini, Ananda harus memperhatikan petunjuk sebagai berikut:

Petunjuk Umum

- Bacalah modul ini secara berurutan dan pahami isinya.
- Pelajari contoh-contoh penyelesaian permasalahan dengan seksama dengan pemahaman bukan dihapalkan.
- Kerjakan semua tugas-tugas yang ada dalam modul ini agar kompetensi Ananda berkembang sesuai dengan kompetensi yang diharapkan.
- Setiap mempelajari materi, Ananda harus mulai dari menguasai pengetahuan pendukung (uraian materi) melaksanakan tugas-tugas, mengerjakan lembar latihan.
- Dalam mengerjakan lembar latihan, Ananda jangan melihat kunci jawaban terlebih dahulu sebelum Ananda menyelesaikan lembar latihan.
- Kerjakan lembar kerja untuk pembentukan keterampilan sampai Ananda benar-benar terampil sesuai kompetensi.
- Sebelum konsultasi dengan guru ketika menghadapi kesulitan dalam memahami salah satu atau beberapa materi dalam modul ini, cobalah Ananda buka atau browsing literatur atau buka buku-buku referensi lain yang relevan dengan materi dalam modul ini.

Petunjuk Khusus

- Pada kegiatan pembelajaran kali ini Ananda akan mempelajari limit fungsi trigonometri dan rumus dasarnya, serta bagaimana cara mengerjakan limit fungsi trigonometri ini secara praktis dengan menggunakan konsep aljabar yang telah Ananda peroleh sebelumnya sejak SMP dan di kelas XI, serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri
- Perhatikan dengan seksama setiap konsep dan pahamilah contoh-contoh soal yang diberikan, dengan demikian Ananda dapat mengerjakan soal latihan pada lembar kerja secara sistematis.
- Kerjakanlah soal evaluasi dengan cermat agar Ananda dapat:
  - Menggunakan sifat-sifat limit fungsi dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan.
  - Menyelesaikan masalah limit fungsi trigonometri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Menyelesaikan Limit Fungsi Trigonometri dengan metode substitusi dan rumus dasar limit fungsi trigonometri

Kedua : Menyelesaikan Limit Fungsi Trigonometri dengan menggunakan rumus trigonometri

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Limit Fungsi Trigonometri 1

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan dapat Menjelaskan arti limit fungsi trigonometri di suatu titik; Menghitung limit fungsi trigonometri di suatu titik dan Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri

B. Uraian Materi

Pada pelajaran matematika wajib kelas XI, Ananda telah belajar mengenai definisi limit fungsi aljabar yaitu bahwa suatu limit fungsi f(x) dikatakan mendekati a {f(x), a} sebagai suatu limit. Bila x mendekati a, dinotasikan limit F(x) = L. Cara menyelesaikan limit fungsi aljabar, terdapat 3 cara untuk menyelesaikan limit fungsi aljabar yaitu dengan metode (1) substitusi langsung; (2) pemfaktoran; (3) merasionalkan penyebut. Nahhh semoga Ananda masih mengingat ini yaa...

Pada kegiatan pembelajaran ini Ananda akan belajar bagaimana menyelesaikan limit fungsi trigonometri. Cara menyelesaikan limit fungsi trigonometri dibagi menjadi 4 metode, yaitu (1) dengan metode substitusi langsung; (2) dengan menggunakan rumus dasar limit fungsi trigonometri; (3) dengan metode pemfaktoran; (4) dengan cara menyederhanakan fungsi trigonometrinya. Sebagai materi prasyarat pada bahasan limit fungsi trigonometri selain Ananda harus hapal nilai-nilai sudut istimewa untuk sin, cos, tan dan kebalikannya juga harus hapal rumus-rumus trigonometrinya ya. Jadi Ananda boleh sambil buka buku atau catatan kelas X tentang rumus-rumus trigonometri dan kelas XI tentang limit fungsi aljabar. Okay, sekarang kita lihat satu per satu cara menyelesaikan limit fungsi trigonometri..

1. Metode substitusi langsung

Penerapan metode substitusi langsung dalam menentukan atau menyelesaikan limit fungsi trigonometri sangat mudah, yakni dengan langsung mengganti x dengan angka yang tertera di soal atau

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Perhatikan contoh soal berikut:
Gunakan metode substitusi untuk menentukan nilai Limit fungsi trigonometri berikut ini:

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin 2x = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{2\pi}{4} = \sin 90^0 = 1$
2. $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}} \tan 3x + 2 = \tan 3\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2 = \tan(45^0) + 2 = 1 + 2 = 3$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin 0}{\sin 0 + \cos 0} = \frac{0}{0+1} = 0$
4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2 \cos 2x} = \frac{1 - \cos 2(\frac{\pi}{2})}{2 \cos 2(\frac{\pi}{2})} = \frac{1 - \cos \pi}{2 \cos \pi} = \frac{1-(-1)}{2\,(-1)} = \frac{1+1}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

Berikut disajikan tabel sudut istimewa yaa biar Ananda gak ribet lagi nihhh.. tapi nanti harus dihapalkan.

	0°	30°	45°	60°	90°
Sinα	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
	0	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$	**1**
Cosα	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
	1	$\mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	**0**
Tgα	$\frac{0}{1}$	$\mathbf{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}}$	$\mathbf{\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}}$	$\mathbf{\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{0}$
	0	$\mathbf{\frac{1}{3}\sqrt{3}}$	**1**	$\mathbf{\sqrt{3}}$	**Tdk terdefinisi**

2. Menggunakan rumus dasar limit fungsi trigonometri

Rumus dasar limit fungsi trigonometri tersebut adalah:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

Perhatikan dengan seksama dan teliti rumus dasar di atas, jika Ananda jeli Ananda akan menemukan pola jawaban rumus tersebut. Sebagai penguat kita simak contoh soal di bawah ini yaa.

Dengan menggunakan rumus limit fungsi trigonometri di atas, tentukan nilai limit fungsi trigonometri berikut:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\ 2x}{3x} = \frac{2}{3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{3x} = \frac{5}{3}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 6x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 5x} = \frac{2}{5}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 5x - \tan 3x}{3x} = \cdots$ *dengan menggunakan sifat dari limit fungsi aljabar yang telah Ananda pelajari di kelas XI, maka soal ini dapat kita pecah menjadi*

$$\lim_{x\to 0}\frac{tan5x}{3x} - \lim_{x\to 0}\frac{tan3x}{3x} = \mathbf{\frac{5}{3}} - \mathbf{\frac{3}{3}} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

Dari keenam contoh soal yang diberikan, ternyata untuk menjawabnya Ananda tinggal menuliskan angka yang tertera di soal aja yaa... Gimana mudah bukan...? Yakin deh 100% Ananda dapat mengikutinya sehingga kita lanjut ke tingkatan berikutnya. Yukk kita simak lagi contoh soal berikutnya.

Tentukan nilai limit fungsi trigonometri berikut ini:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 5x}{3x\tan 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}\,.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 2x} = \frac{1}{3}\,.\frac{5}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,sin^2 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x.\sin 2x}{3.x.x}$$
$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\,.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \frac{2}{3}\,.\frac{2}{1}\,.\frac{2}{1} = \frac{8}{3}$$

C. Rangkuman

Cara menyelesaikan limit fungsi trigonometri pada pembelajaran pertama ini dilakukan dengan dua cara yaitu cara substitusi dan pemfaktoran.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-a)f(a)}{(x-a\,)g(a)}$

D. Latihan Soal

Isilah soal dibawah ini dengan benar

1. Nilai dari $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 6x} = \cdots$

2. Nilai dari $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 7x+\tan 3x-\sin 5x}{\tan 9x-\tan 3x-\sin x} = \cdots$

3. Nilai dari $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ adalah ...

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^3 2x}{tan^3\frac{1}{2}x} = \cdots$

5. Nilai dari $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{\sin x} = \cdots$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sin 3x}{\sin 2x\tan 3x} = \cdots$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{a}{b}x}{\tan cx} = \cdots$

Pembahasan

No	Pembahasan	Skoring
1	Penyelesaian Substitusi langsung x = 0 akan menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$. Berdasarkan rumus limit fungsi trigonometri $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$ maka dari soal tersebut diketahui a = 2 dan b = 3 jadi nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$	10
2	Penyelesaian Substitusi langsung x = 0 akan menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$. Munculkan bentuk yang sesuai dengan rumus limit fungsi trigonometri yang ada dnegan cara mengalikannya dengan $\frac{1}{x}$. Sehingga diperoleh: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 7x+\tan 3x-\sin 5x}{\tan 9x-\tan 3x-\sin x}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 7x}{x}+\frac{\tan 3x}{x}-\frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\tan 9x}{x}-\frac{\tan 3x}{x}-\frac{\sin x}{x}}$ $=\frac{7+3-5}{9-3-1}=\frac{5}{5}=1$	10
3	Penyelesaian Gunakan rumus trigonometri berikut: $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ Dengan demikian akan diperoleh: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{x-\frac{\pi}{2}}$ $=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{-(\frac{\pi}{2}-x)}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-1$	10
4	Penyelesaian Substitusi langsung akan menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$. Berdasarkan rumus limit fungsi trigonometri untuk $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$ maka dari soal diketahui a = 2 dan b = ½ sehingga diperoleh: $\lim_{x\to 0}\frac{sin^3 2x}{tan^3\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\tan\frac{1}{2}x}\right)^3=\left(\frac{2}{\frac{1}{2}}\right)^3=4^3=64$	10
5	Penyelesaian Substitusi langsung akan menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ Langkah selanjutnya adalah dengan emlakukan pemisahan pecahan menjadi dua suku. Lalu munculkan bentuk yang sesuai dengan rumus trigonometri yang ada.	10

No	Pembahasan	Skoring
	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin x} + \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} 2x\frac{x}{\sin x} + \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} 2x \,.\, \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} + \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 2(0)(1)+1 = 0+1 = 1$	
6	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x \sin 3x}{\sin 2x \tan 3x} = \frac{2}{2}.\frac{3}{3} = 1$	10
7	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{a}{b}x}{\tan cx} = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b}.\frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$	10
TOTAL SKOR		70

E. Penilaian Diri

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu memahami cara menentukan limit fungsi trigonometri? ?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan limit fungsi trigonometri dengan substitusi?		
3.	Apakah Ananda mampu menyelesaikan limit fungsi trigonometri dengan menggunakan rumus dasar trigonometri?		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Limit Fungsi Trigonometri 2

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan dapat menghitung limit fungsi trigonometri di suatu titik dengan menggunakan rumus dasar trigonometri dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri

B. Uraian Materi

Pada pembelajaran kali ini, Ananda akan belajar bagaimana cara menghitung limit fungsi trigonometri. Cara menghitungnya kita akan gunakan rumus dasar trigonometri dan penyederhanaan rumus-rumusnya.

1) Menggunakan metode pemfaktoran

Untuk metode pemfaktoran konsepnya sama persis dengan metode pemfaktoran dalam limit fungsi aljabar yang telah Ananda pelajari di kelas XI. Metode pemfaktoran dilakukan ketika Ananda menemukan jawaban dengan bentuk tak tentu atau $\frac{0}{0}$, nahh artinya di sini Ananda harus melakukan pemfaktoran. Trik metode pemfaktoran adalah Ananda harus membuang si pembuat nol dalam fungsi tersebut. Sebagai contoh, perhatikan soal di bawah ini.

Tentukan nilai limit berikut:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{\underbrace{x(x+2)}_{\text{faktorkan}}} = \left[\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}\right] . \left[\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{(x+2)}\right] = \frac{1}{1} . \frac{1}{0+2} = 1 . \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)(2x+3)}{x^2+4x-5} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+5)} = \underbrace{\left[\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)}\right] . \left[\lim\limits_{x\to 1} \frac{(2x+3)}{(x+5)}\right]}_{\text{Sifat-sifat limit}} =$
$1 . \frac{2(1)+3}{(1+5)} = \frac{5}{6}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{x^2-2x+1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{(x-1)(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{(x-1)} . \lim_{x\to 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{(x-1)}$$
$$= 1 . \lim_{x\to 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$
$$= -1 . \lim_{x\to 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})} . \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1+\sqrt{x})} = -1 . 1 . \frac{1}{1+\sqrt{1}} = -1.1.\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

2) Menyederhanakan Fungsi Trigonometrinya

Untuk dapat mengerjakan soal limit fungsi trigonometri seperti ini, mengharuskan Ananda buka kembali rumus-rumus trigonometrinya. Agar lebih efektif yuk simak contoh soalnya.

Tentukan nilai limit fungsi berikut ini:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x \sin x} =$

Jika Ananda mensubstitusi x dengan 0 maka akan didapat bentuk tak tentu atau $\frac{0}{0}$. Dalam hal ini Ananda harus merubah cos x menjadi fungsi lain.

Ingat Kembali rumus:
$\cos 2x = cos^2 x - sin^2 x$
$\cos x = cos^2 \frac{1}{2}x - sin^2 \frac{1}{2}x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(cos^2\frac{1}{2}x - sin^2\frac{1}{2}x)}{2x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-cos^2\frac{1}{2}x) + sin^2\frac{1}{2}x}{2x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{sin^2\frac{1}{2}x + sin^2\frac{1}{2}x}{2x\sin x}$$

Ingat Kembali rumus:
$cos^2 x + sin^2 x = 1$
Maka $sin^2 x = 1 - cos^2 x$
$sin^2\frac{1}{2}x = 1 - cos^2\frac{1}{2}x$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{1}{2}x}{2x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2sin\frac{1}{2}x . sin\frac{1}{2}x}{2x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\,sin\frac{1}{2}x}{2x} . \lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{1}{2}x}{sinx} = \frac{2.\frac{1}{2}}{2} . \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{4}$$

2. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos^2 x - sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \cos x + \sin x = cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Bagaimana dengan contoh soal tersebut? Ananda sudah mulai paham kan cara mengerjakannya? Agar lebih matang, Ananda kembali ingat rumus-rumus trigonometrinya yaa... nihhh di bawah ini disajikan beberapa rumus trigonometri untuk Ananda.

Berikut ini merupakan kumpulan rumus dasar trigonometri. Ananda tinggal menyesuaikan sudut yang diminta dari soal yang diberikan seperti contoh soal di atas.

Identitas Trigonometri

1. $sin^2 x + cos^2 x = 1$
2. $sin^2 x = 1 - cos^2 x$
3. $cos^2 x = 1 - sin^2 x$
4. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
5. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
6. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
7. $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
8. $sec^2 = tan^2 x + 1$
9. $csc^2 x = cot^2 x + 1$

Rumus Trigonometri

1. $\sin(\alpha+\beta) = sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta) = sin\alpha\ cos\beta - cos\alpha\ sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$
5. $\tan(\alpha+\beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\ tan\beta}$
6. $\tan(\alpha-\beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 + tan\alpha\ tan\beta}$
7. $sin 2\alpha = 2\ sin\ \alpha \cos\alpha$
8. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
   $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
   $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
9. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$
10. $sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
11. $cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
12. $sin 3\alpha = 3\ sin\ \alpha - 4\sin^3\alpha$
13. $cos\ 3\alpha = 4\ cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
14. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$
15. $2\cos\alpha\ \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$
16. $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$
17. $-2\sin\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$
18. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
19. $\sin\alpha - \sin\beta = 2cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
20. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
21. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

C. Rangkuman

Pada pembelajaran ini Ananda diharapkan dapat mengingat rumus-rumus trigonometri di bawah ini agar ketika menyelesaikan limit fungsi trigonometri yang mengharuskan mengganti, atau menyederhanakan dengan rumus trigonometri, Ananda dapat lancar mengerjakannya.

Identitas Trigonometri

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
3. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
4. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
5. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
6. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
7. $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
8. $\sec^2 = \tan^2 x + 1$
9. $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$

Rumus Trigonometri

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
5. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$
6. $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$
7. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
8. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

   $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

   $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
9. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$
10. $\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
11. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
12. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
13. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
14. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$
15. $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$
16. $2c\,os\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$
17. $-2\sin\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$
18. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
19. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
20. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
21. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

D. Latihan Soal

Kerjakan soal untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep Ananda terhadap materi limit fungsi trigonometri berikut ini:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \cdots$
2. Nilai dari $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \cdots$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{x \tan\frac{1}{2}x} = \cdots$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan(3x-\pi)\cos 2x}{\sin(3x-\pi)} = \cdots$
5. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{x^2-2x+1} = \cdots$

Pembahasan

No	Pembahasan	Skoring
1	Penyelesaian $\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)(x+2)}$ $= \lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2\,)}{(x-2\,)} . \lim_{x\to 2}\frac{1}{(\,x+2)}$ $= 1 . \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$	10
2	Penyelesaian $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{cos^2 x-\ sin^2 x}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)}{(\cos x-\sin x)\ (\cos x+\sin x)}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x-\sin x} .\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x+\sin x} = 1 . \frac{1}{cos\frac{\pi}{4}+sin\frac{\pi}{4}}$ $= \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	10
3	Penyelesaian $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan(3x-\ \pi)\cos 2x}{\sin(3x-\ \pi)}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan(3x-\ \pi)}{\sin(3x-\ \pi)}.\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos 2x$ $= 1.\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos 2x = 1.\cos 2(\frac{\pi}{3})$ $= \cos 120 = -\ \frac{1}{2}$	10
4	Penyelesaian $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\tan\frac{1}{2}\ x} = \lim_{x\to 0}\frac{2sin^2 x}{x\tan\frac{1}{2}\ x}$ $= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x.\sin x}{x\tan\frac{1}{2}\ x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x} . \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan\frac{1}{2}x}$ $= 2 . \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} .\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan\frac{1}{2}x}$ $= 2 . 1 . \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.1.2 = 4$	10

5	$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{x^2-2x+1}$ $= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{(x-1)(x-1)}$ $= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\tan(x-1)}{(x-1)} \cdot \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{(x-1)}$ $= 1 \cdot \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-\sin(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$ $= -1 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1}+1} = -\dfrac{1}{2}$	10
TOTAL SKOR		50

E. Penilaian Diri

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu memahami cara menentukan limit fungsi trigonometri dengan menggunakan rumus trigonometri?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan limit fungsi trigonometri dengan pemfaktoran?		
3.	Apakah Ananda mampu menyelesaikan limit fungsi trigonometri dengan menggunakan penyederhanaan rumus trigonometri?		

EVALUASI

Pilih satu jawaban yang paling tepat!

1. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x + \sin 5x}{6x} = \cdots$

   A. 2 D. $\frac{1}{3}$
   B. 1 E. -1
   C. $\frac{1}{2}$

2. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 3x + 2} = \cdots$

   A. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
   B. $-\frac{1}{3}$ E. 1
   C. 0

3. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 12x}{2x\,(x^2 + 2x - 3\,)} = \cdots$

   A. -4 D. 2
   B. -3 E. 6
   C. -2

4. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 4x \sin 3x}{5x} = \cdots$

   A. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{1}{5}$
   B. 1 E. 0
   C. $\frac{5}{2}$

5. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} = \cdots$

   A. -8 D. 4
   B. -4 E. 8
   C. 2
   D. 4

6. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x^2 - 1\,) \sin 6x}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \cdots$

   A. -3 D. 3
   B. -2 E. 5
   C. 2

7. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cos(\,1 - \frac{1}{x})}{x - 1} = \cdots$

   A. -1 D. $\frac{1}{2}$
   B. $-\frac{1}{2}$ E. 1
   C. 0

8. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(\,x^2 - 5x + 6)\sin(x-2)}{(\,x^2 - x - 2\,)^2} = \cdots$

   A. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{9}$
   B. $\frac{1}{5}$ E. $-\frac{1}{3}$

C. 0

9. Nilai dari $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \cdots$

A. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$
B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
C. $\sqrt{2}$
D. $2\sqrt{2}$
E. $3\sqrt{2}$

10. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos 2x} = \cdots$

A. $-\frac{1}{2}$
B. 0
C. $\frac{1}{2}$
D. 1
E. 2

12. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x^2 + 2x} = \cdots$

A. 2
B. 1
C. 0
D. $\frac{1}{2}$
E. $-\frac{1}{2}$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin^3\ 2x}{tan^3 \frac{1}{2}x} = \cdots$

A. 2^3
B. 2^4
C. 2^5
D. 2^6
E. 2^7

14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\ sin^2\ 2x}{3x \tan 3x} = \cdots$

A. $\frac{2}{3}$
B. $\frac{4}{3}$
C. $\frac{8}{3}$
D. $\frac{8}{9}$
E. $\frac{8}{6}$

15. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{2 - 2\ c0s\ (2x + 6)} = \cdots$

A. 3
B. 1
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{3}$
E. $\frac{1}{4}$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{x \tan 2x} = \cdots$

A. – 4
B. – 2
C. 4
D. 6
E. 8

17. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}} = \cdots$

A. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
B. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
C. $\sqrt{3}$
D. $-2\sqrt{3}$
E. $-3\sqrt{3}$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{6x \tan 2x}{1 - \cos 6x} = \cdots$

A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{2}{3}$
C. 1
D. 2
E. 3

19. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)\ cos\ (\pi x - 2\pi)}{\tan(2\pi x - 4\pi)} = \cdots$

A. 2π
B. π
C. 0
D. $\frac{1}{\pi}$
E. $\frac{1}{2\pi}$

20. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}\pi} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}}{x - \frac{1}{4}\pi} = \cdots$

A. $-2\sqrt{2}$
B. $-\sqrt{2}$
C. 0
D. $\sqrt{2}$
E. $2\sqrt{2}$

KUNCI JAWABAN

1. B
2. E
3. C
4. C
5. E
6. A
7. E
8. D
9. C
10. C
11. D
12. D
13. D
14. D
15. E
16. D
17. C
18. B
19. E
20. A

DAFTAR PUSTAKA

Erlangga Fokus UN SMA/MA 2013 Program IPA. (2012). Jakarta: Erlangga.

Erlangga X-Press UN 2015 SMA/MA Program IPA. (2014). Jakarta: Erlangga.

Matematika Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (2014). Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Siswanto. (2005). Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Willa Adrian. (2008). 1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar. Bandung: Yrama Widya.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Peminatan

KELAS
XII

LIMIT FUNGSI DI KETAKHINGGAAN

MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XII

PENYUSUN

Yuyun Sri Yuniarti

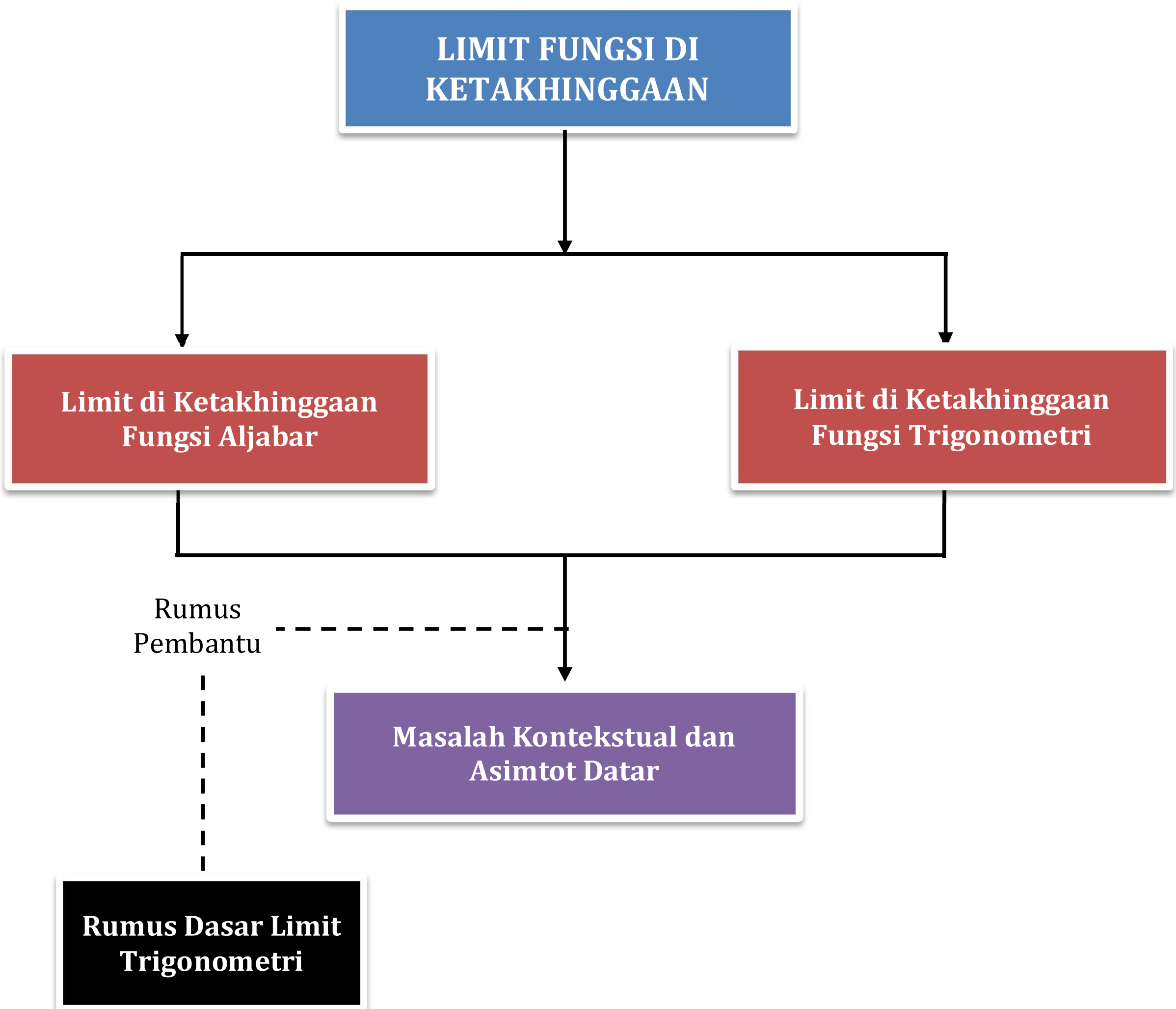
SMA Negeri 1 Pedes
Kabupaten Karawang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Asimtot	:	Suatu garis lurus yang didekati oleh lengkung dengan jarak semakin lama semakin kecil mendekati nol di tak hingga.
Asimtot datar	:	Suatu garis yang mendekati nilai y tertentu tidak melewati atau menyinggungnya
Fungsi	:	Merupakan suatu relasi yang memetakan setiap anggota dari suatu himpunan yang disebut daerah asal atau domain ke tepat satu anggota himpunan lain yang disebut daerah kawan atau kodomain
Limit	:	Batas atau suatu fungsi $f(x)$ akan mendekati nilai tertentu jika x mendekati nilai tertentu
Limit di ketakhinggaan	:	Batas atau suatu fungsi $f(x)$ akan mendekati nilai tertentu jika x mendekati tak hingga.
Tak hingga	:	"sesuatu" yang lebih besar dari bilangan manapun tetapi sesuatu itu BUKAN bilangan, dengan kata lain tidak ada bilangan yang lebih besar dari ∞.
Trigonometri	:	Sebuah cabang matematika yang berkaitan dengan sudut segitiga dan fungsi trigonometri seperti sinus, cosinus, dan tangen.

PETA KONSEP


LIMIT FUNGSI DI KETAKHINGGAAN
Limit di Ketakhinggaan Fungsi Aljabar
Limit di Ketakhinggaan Fungsi Trigonometri
Rumus Pembantu
Masalah Kontekstual dan Asimtot Datar
Rumus Dasar Limit Trigonometri

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Peminatan
Kelas	:	XII
Alokasi Waktu	:	12 jam pelajaran
Judul Modul	:	Limit Fungsi di Ketakhinggaan

B. Kompetensi Dasar

3.2 Menjelaskan dan menentukan limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri

4.3 Menyelesaikan masalah berkaitan dengan eksistensi limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri

C. Deskripsi Singkat Materi

Salam jumpa melalui pembelajaran matematika dengan materi Limit di Ketakhinggaan. Modul ini disusun sebagai satu alternatif sumber bahan ajar siswa untuk memahami materi matematika peminatan kelas XII khusunya Limit di Ketakhinggaan. Melalui modul ini diharapkan Anda dapat menjelaskan dan menentukan limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri serta dapat menyelesaikan masalah berkaitan dengan eksistensi limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.

Gambar 1 Fungsi ekonomi dapat diselesaikan dengan aturan limit
Sumber: https://surabaya.tribunnews.com/2018/07/11/indonesia-memasuki-era-new-normal-investasi-harus-penuh-strategi?

Gambar 1 merupakan contoh fungsi bisnis dan ekonomi. Fungsi-fungsi dalam bisnis dan ekonomi banyak yang berbentuk fungsi asinambung, terutama fungsi permintaan dan penawaran untuk jenis-jenis barang tertentu. Untuk menentukan nilai permintaan atau penawaran suatu barang dari fungsi tersebut dapat menggunakan aturan limit.

Masalah dalam kehidupan sehari-hari lainnya yang berkaitan dengan limit fungsi di ketakhinggaan adalah hubungan inang dan parasit tertentu. Diketahui bahwa kerapatan inang (jumlah inang per satuan luas) adalah x dan jumlah parasit selama periode waktu adalah $y = \frac{1200x}{15+30x}$. Jika kerapatan inang ditingkatkan tanpa batas, berapakah nilai yang akan didekati oleh y?

Gambar 2 Hubungan inang dan parasit
Sumber: https://www.kompas.com/skola/read/2020/02/03/200000469/tumbuhan-parasit--arti-dampak-dan-jenisnya?

Salah satu tokoh yang berjasa dalam mempelajari konsep limit adalah Agustin Louis Cauchy (1789-1857) seorang ilmuwan yang pertama kali memperkenalkan definisi yang tepat tentang limit. Cauchy adalah seorang maha guru di di Ecola Polytechnique, Sarbone, dan College de France.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi Anda dalam melakukan kegiatan pembelajaran secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan Anda dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan Anda terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar Anda dapat mengukur penguasaan terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan Anda untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi 2 kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Limit di Ketakhinggaan Fungsi Aljabar
Kedua : Limit di Ketakhinggaan Fungsi Trigonometri

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Limit di Ketakhinggaan Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini, diharapkan Anda dapat menjelaskan dan menentukan limit di ketakhinggaan fungsi aljabar serta dapat menyelesaikan masalah berkaitan dengan eksistensi limit di ketakhinggaan fungsi aljabar.

B. Uraian Materi

Pada pelajaran matematika wajib kelas XI, Anda telah belajar mengenai definisi limit fungsi aljabar yaitu bahwa suatu limit fungsi f(x) dikatakan mendekati a {f(x), a} sebagai suatu limit. Bila x mendekati a, dinotasikan limit F(x) = L. Cara menyelesaikan limit fungsi aljabar, terdapat 3 cara untuk menyelesaikan limit fungsi aljabar yaitu dengan metode (1) substitusi langsung; (2) pemfaktoran; (3) merasionalkan. Nahhh semoga Anda masih mengingat ini yaa...

Pada kegiatan pembelajaran ini kalian akan belajar bagaimana menyelesaikan limit fungsi di ketakhinggaan. Sebelum belajar bagaimana cara menyelesaikan limit fungsi di ketakhinggaan, kita kenalan dulu yuk sama yang namanya tak hingga. Jika kita berbicara tentang definisi, definisi dari simbol tak hingga (*Infinity*) adalah sebuah konsep abstrak yang menggambarkan sesuatu yang tanpa batas dan relevan dalam sejumlah bidang, terutama matematika dan fisika. Tak hingga diberi simbol ∞ "sesuatu" yang lebih besar dari bilangan manapun tetapi sesuatu itu BUKAN bilangan, dengan kata lain **tidak ada bilangan yang lebih besar dari ∞**.

$$a < \infty, \forall a \in R \text{ dan } \infty \notin R$$

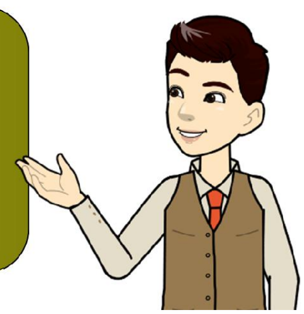
Karena ∞ bukan sebuah bilangan, maka ∞ tidak ganjil, tidak genap dan tidak prima. Dalam kamus matematika Carol Vorderman, definisi tak hingga adalah tanpa batas-batas ukuran atau jumlah, tidak terbatas, tidak ada akhirnya.

Definisi 1

Misalkan f adalah fungsi yang didefinisikan pada suatu interval (a, ∞). Maka

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Bermakna bahwa nilai $f(x)$ dapat dibuat sebarang dekat ke L dengan cara mengambil x cukup besar.



Cara menyelesaikan limit di ketakhinggaan dibagi menjadi 3, yaitu (1) substitusi langsung; (2) membagi dengan pangkat tertinggi; (3) merasionalkan penyebut. Sebagai materi prasyarat pada bahasan limit fungsi di ketakhinggaan, Anda harus mengingat kembali cara merasionalkan penyebut. Kalo Anda lupa gak perlu khawatir, di modul ini akan disajikan contoh soal beserta cara penyelesaiannya secara rinci.

Okay.. berikut ini kita simak bersama satu persatu cara menyelesaikan limit fungsi di ketakhinggaan.

Metode Substitusi Langsung

Penerapan metode substitusi langsung dalam menentukan atau menyelesaikan limit fungsi di ketakhinggan sangat mudah, sama halnya dengan limit fungsi aljabar, yakni dengan langsung mengganti x atau variabel lain dengan angka yang tertera di soal, seperti berikut:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Hal ini berlaku pula untuk limit fungsi di ketakhinggaan:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = f(\infty)$$

Sebagai contoh, gunakan metode substitusi untuk menentukan nilai Limit fungsi berikut :

1. $\lim_{x \to \infty} x + 3 = \infty + 3 = \infty$
2. $\lim_{x \to \infty} x^2 + 2x - 4 = (\infty)^2 + 2(\infty) - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$

Membagi dengan Pangkat Tertinggi

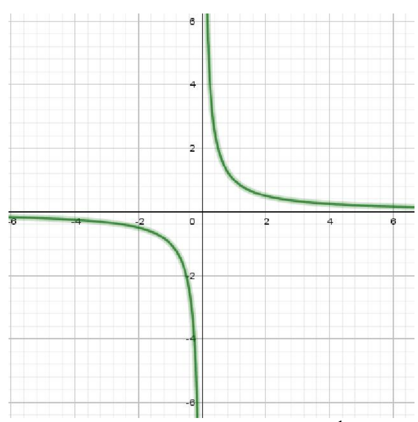
Misal kita akan mencari nilai $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

Amati bahwa ketika x cukup besar, $\frac{1}{x}$ semakin kecil. Misalkan

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 \quad \frac{1}{100} = 0{,}01 \quad \frac{1}{10.000} = 0{,}0001 \quad \frac{1}{1.000.000} = 0{,}000001$$

Nyatanya, dengan mengambil x cukup besar, kita dapat membuat $\frac{1}{x}$ sedekat yang diinginkan ke 0. Oleh karena itu, menurut definisi 1, kita mempunyai

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$



Gambar 1 sungsi $y = \frac{1}{x}$

Teorema limit yang diberikan pada modul sebelumnya berlaku juga untuk limit di ketakhinggaan. Berdasarkan contoh di atas kita peroleh aturan penting untuk perhitungan limit berikut.

Teorema

Jika $r > 0$ adalah bilangan rasional, maka

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Agar Anda dapat memahami cara penyelesaian soal limit fungsi di ketakhinggaan, Anda dapat memperhatikan contoh soal berikut:

1. Tentukan nilai $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-2x+3}{x+3}$

Perhatikan contoh soal nomor 1 tersebut, dapat Anda lihat soal tersebut memuat pangkat tertinggi yaitu x^2. Oleh karena itu kita bagi semua komponen dalam fungsi tersebut dengan x^2 seperti ini:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{3}{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to \infty} 1 - \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^2}}$$

(sifat limit)

$$= \frac{1 - 0 + 0}{0 + 0}$$

(teorema 1)

$$= \infty$$

Sebuah bilangan jika dibagi dengan tak hingga atau bilangan yang sangaaattttt besar, makanya nilainya akan mendekati NOL

2. Tentukan nilai $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{3x^2+5x-2}$

Nah untuk soal ini, Anda lihat bahwa pangkat tertinggi adalah x^3 sehingga Anda dapat membagi semua komponen dengan x^3. Begini yaa..

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3}{3x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{0 + 0}{3 + 0 - 0}$$

$$= \frac{0}{3}$$

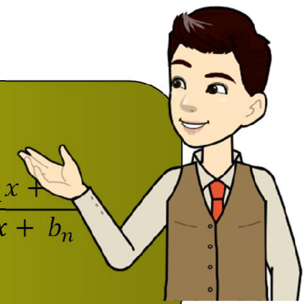
$$= 0$$

Sebuah bilangan jika dibagi dengan tak hingga atau bilangan yang sangaaattttt besar, makanya nilainya akan mendekati NOL

3. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4+2}{3-5x^4} = -\frac{3}{5}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 + 2}{3 - 5x^4} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^4}{x^4} + \frac{2}{x^4}}{\frac{3}{x^4} - \frac{5x^4}{x^4}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^4}}{\frac{3}{x^4} - \frac{5x^4}{x^4}} = \frac{3 + 0}{0 - 5} = -\frac{3}{5}$$

Okay.. kita lihat kembali secara seksama ketiga contoh tersebut, untuk nomor satu Anda dapat lihat bahwa pangkat tertinggi terdapat di bagian pembilang dan hasil dari limitnya adalah ∞. Lalu untuk contoh soal nomor dua, pangkat tertingginya ada di bagian penyebut, dan hasil limitnya adalah 0. Kemudian contoh soal ketiga, baik pembilang maupun penyebut mempunyai pangkat tertinggi yang sama, dan menghasilkan nilai limit sama dengan $-\frac{3}{5}$. Jika Anda jeli menyimak, kita dapat menyimpulkan ketiga contoh soal tersebut menjadi bentuk umum limit di ketakhinggaan fungsi aljabar sebagai berikut:



Bentuk Umum 1

Untuk $a\ dan\ b\ \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} f\ (x) = \lim_{x\to\ \infty} \frac{a_1x^m + a_2x^{m-1} + a_3x^{m-2} + \ \dots\ + a_{n-1}x +}{b_1x^p + b_2x^{p-1} + b_3x^{p-2} + \ \dots\ + b_{n-1}x + b_n}$$

- ❖ Jika $m > p$, maka $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- ❖ Jika $\mathrm{m} < \mathrm{p}$, maka $\lim_{\mathrm{x}\to\infty} \mathrm{f(x)} = 0$
- ❖ $Jika\ m = p$, maka $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_1}{b_1}$

Wahh ternyata setelah kita simpulkan bersama, tampak mudah yaa pengerjaan limit dengan cara membagi dengan pangkat tertinggi, gak ribet dan gak pakai sulit. Pasti dapat langsung mengerjakannya dengan sekejap.

Menggunakan rumus umum di atas maka untuk mengerjakan soal berikut pasti mudah.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x-7}{10x^3+5x} = 0$ karena m $<$ p
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x^2-4)^2}{6x^4+3x^2-5x+1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ karena m $=$ p
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-1)^4}{(3x-1)(5x^2+x)} = \infty$ karena m $>$ p

Merasionalkan

Pada bagian ini Anda akan diajak mengenang masa lalu saat Anda belajar merasionalkan penyebut di SMP, jangan ditinggalkan yaa kenangan masa lalu nya (hehehe), karena secara konsep masih sama dan berlaku dalam penyelesaian limit fungsi di ketakhinggaan ini. Mengapa harus dengan merasionalkan?? Dari namanya juga merasionalkan, maka kita bertujuan agar fungsi irasional yang diberikan dalam limit tak hingga tersebut dapat berubah menjadi rasional sehingga memudahkan dalam pengerjaan soalnya. Okay Anda perhatikan contoh soal berikut:

1. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{x+2} = \cdots$

Cara menyelesaikan soal ini, kita akan mengalikan dengan bentuk sekawan dari fungsi tersebut yakni $\frac{\sqrt{x^2+2x-3} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2+2x-3} + \sqrt{x+2}}$ (ingat kembali pelajaran merasionalkannya yaa...).

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{x+2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{x+2}\ .\frac{\sqrt{x^2+2x-3} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2+2x-3} + \sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^2+2x-3 - (x+2)\ .\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3} + \sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 5}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{x + 2}}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^4} + \frac{2x}{x^4} - \frac{3}{x^4}} + \sqrt{\frac{x}{x^4} + \frac{2}{x^4}}}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}} + \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}}}$$
$$= \frac{1 + 0 - 0}{\sqrt{0 + 0 - 0} + \sqrt{0 + 0}} = \frac{1}{0} = \infty$$

2. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{5x - 3} - \sqrt{x^2 + 7} = \cdots$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{5x - 3} - \sqrt{x^2 + 7} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{5x - 3} - \sqrt{x^2 + 7} . \frac{\sqrt{5x - 3} + \sqrt{x^2 + 7}}{\sqrt{5x - 3} + \sqrt{x^2 + 7}}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{5x - 3 - (x^2 + 7)}{\sqrt{5x - 3} + \sqrt{x^2 + 7}}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{5x}{x^2} - \frac{3}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} - \frac{7}{x^2}}{\sqrt{\frac{5x}{x^4} - \frac{3}{x^4}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^4} + \frac{7}{x^4}}}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} - 1 - \frac{7}{x}}{\sqrt{\frac{5x}{x^3} - \frac{3}{x^4}} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^4}}}$$
$$= \frac{0 - 0 - 1 - 0}{\sqrt{0 - 0} + \sqrt{0 + 0}} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

3. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 5} - \sqrt{(2x + 1)^2} = \cdots$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 5} - \sqrt{(2x + 1)^2} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 5} - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 5} - \sqrt{4x^2 + 4x + 1} . \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 4x + 5 - (4x^2 + 4x + 1)}{\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-8x + 4}{\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-8x}{x} + \frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x}}}$$
$$= \frac{-8 + 0}{\sqrt{4 - 0 + 0} + \sqrt{4 + 0 + 0}} = \frac{-8}{2 + 2} = \frac{-8}{4} = -2$$

Bagaimana Anda setelah melihat ketiga contoh soal tersebut? Apakah merasa pusing? Hmmm... tenang.. kita simak lagi yuk contohnya (Anda lihat soalnya lagi yaa..). Bentuk soal nomor 1 dan 2 adalah $\lim_{x \to \infty} \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$. Perhatikan pangkat tertingginya deh.

Untuk soal nomor 1 pangkat tertinggi ada di $f(x)$ maka hasil limitnya sama dengan ∞. Soal kedua pangkat tertinggi ada di $g(x)$ maka hasilnya sama dengan $-\infty$, sedangkan untuk soal nomor 3 baik $f(x)$ maupun $g(x)$ pangkat nya sama yaitu x^2, dan hasilnya sama dengan -2.
Jadi... yuk kita buat rumus umum untuk bentuk soal di atas secara singkat sebagai berikut:

Bentuk Umum 2

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} = \begin{cases} \dfrac{b-q}{2\sqrt{a}} & \text{jika } a = p \\ \infty & \text{jika } a > p \\ -\infty & \text{jika } a < p \end{cases}$$

dengan $a, b, c, p, q, r \in R$

Berdasarkan bentuk umum2 tentukan nilai limit di ketakhinggan berikut.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2+3x-6} - \sqrt{2x^2-x+4}\right) = \frac{b-q}{2\sqrt{a}} = \frac{3-(-1)}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
2. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{3x^2 + 4x + 1} - \sqrt{(x-1)^2}$
   $= \lim_{x \to \infty} \sqrt{3x^2 + 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \infty$ karena $a > p$
3. $\lim_{x \to \infty} (x + 2) - \sqrt{2x^2 - 4x + 1}$
   $= \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{2x^2 - 4x + 1}$
   $= \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + 4x + 1} - \sqrt{2x^2 - 4x + 1}$

   $= -\infty$ karena $a < p$

Aplikasi Limit Fungsi di Ketakhinggaan Fungsi Aljabar

Bagaimana cara menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan konsep limit fungsi di ketakhinggaan fungsi aljabar ? untuk memahaminya pelajari contoh berikut.

Contoh

Beberapa ilmuwan sedang meneliti suatu senyawa. Senyawa ini merupakan hasil reaksi kimia dari beberapa senyawa. Setelah diteliti ternyata jumlah senyawa baru yang terbentuk mengikuti fungsi $f(t) = \frac{2t^2+3t+4}{(3+2t)(t-1)}$, dengan $f(t)$ menyatakan jumlah senyawa dalam milligram dan t waktu dalam detik. Tentukan jumlah senyawa yang terbentuk untuk jangka waktu yang sangat lama adalah ....

Penyelesaian:

Waktu yang sangat lama artinya $t \to \infty$

$$f(t) = \frac{2t^2 + 3t + 4}{(3 + 2t)(t - 1)} = \frac{2t^2 + 3t + 4}{2t^2 + t - 3}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{2t^2+3t+4}{2t^2+t-3} = 1$$

(karena pangkat tertinggi pembilang dan penyebut sama)
Jadi, senyawa yang terbentuk dalam waktu yang sangat lama adalah 1 miligram.

Asimtot Datar

Asimtot adalah suatu garis lurus yang didekati oleh lengkung dengan jarak semakin lama semakin kecil mendekati nol di tak hingga. Asimtot juga diartikan sebagai garis batas atau garis arah kelengkungan kurva dan ada pada domain tertentu. Asimtot datar adalah suatu garis yang mendekati nilai y tertentu tidak melewati atau menyinggungnya.

Garis $y = L$ disebut asimtot datar dari fungsi $f(x)$ jika memenuhi salah satu dari:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ atau } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Contoh

Tentukan asimtot datar untuk fungsi fungsi tigonometri berikut.

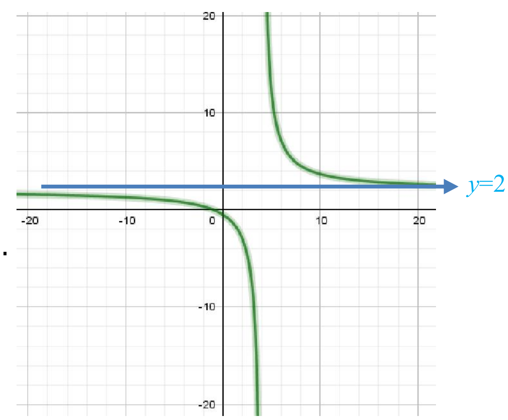
$f(x) = \frac{2x+2}{x-4}$

Penyelesaian:

Asimtot datar fungsi tersebut adalah:

$y = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{x-4} = 2$

Jadi, asimtot datar dari fungsi di atas adalah $y = 2$.



C. Rangkuman

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ artinya limit $f(x)$ seraya x mendekati tak hingga, adalah L.
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^m + a_2x^{m-1} + a_3x^{m-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_1x^p + b_2x^{p-1} + b_3x^{p-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$;
  - Jika $m > p$, maka $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
  - Jika m $<$ p, maka $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
  - $Jika\ m = p$, maka $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_1}{b_1}$
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{px^2+qx+r} = \begin{cases} \frac{b-q}{2\sqrt{a}} & \text{jika } a = p \\ \infty & \text{jika } a > p \\ -\infty & \text{jika } a < p \end{cases}$
- Asimtot adalah suatu garis lurus yang didekati oleh lengkung dengan jarak semakin lama semakin kecil mendekati nol di tak hingga.
- Asimtot datar adalah suatu garis yang mendekati nilai y tertentu tidak melewati atau menyinggungnya.

D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan jujur dan benar.

1. Nilai $\lim_{x\to\infty} \frac{(3x-2)^3}{(4x+3)^3} = \ldots.$

   A. 1
   B. $\frac{27}{64}$
   C. $\frac{8}{27}$
   D. $-\frac{8}{27}$
   E. $-\frac{27}{64}$

2. Nilai dari $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3x^3)(1+x)}{2x^4+5x^2-1} = \ldots.$

   A. 0
   B. 1
   C. $\frac{3}{2}$
   D. $-\frac{3}{2}$
   E. -2

3. Nilai $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x}{9x^2+x+1}\right) = \ldots.$

   A. 0
   B. $\frac{1}{3}$
   C. 1
   D. 3
   E. ∞

4. Nilai $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^3-2x-x^2+6x^5+6}{3x^4-5-2x+2x^5}\right) = \ldots.$

   A. ∞
   B. 3
   C. 2
   D. 0
   E. $-\infty$

5. Nilai $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{6x-3}}{x-2} = \ldots.$

   A. $-\frac{1}{6}$
   B. $-\frac{1}{9}$
   C. 0
   D. $\frac{1}{9}$
   E. $\frac{1}{6}$

6. Nilai $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+7}\right) = \ldots.$

   A. 0
   B. 2

C. 6
D. 8
E. ∞

7. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{5x+4}-\sqrt{3x+9}}{4x} = ...$

A. 0
B. $\frac{1}{2}$
C. 1
D. 2
E. 4

8. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{9x-1}}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-7}} = ...$

A. 3
B. 2
C. 1
D. −2
E. −3

9. Diketahui $f(x) = x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2x}}$, nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = ...$

A. −2
B. 0
C. 1
D. 2
E. ∞

10. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt{4x^2-5x}\right)$ adalah ....

A. 0
B. 1
C. 2
D. 4
E. 8

Pembahasan Latihan Soal Kegiatan Pembelajaran 1

1. Penyelesaian
Jawab B

$\lim_{x\to\infty} \frac{(3x-2)^3}{(4x+3)^3}$

Untuk menyelesaikan soal ini, Ananda cukup memangkatkan yang terdapat variabel x nya yaitu sebagai berikut:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(3x-2)^3}{(4x+3)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{(3x)^3}{(4x)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{27x^3}{64x^3} = \frac{27}{64}$$

2. Penyelesaian

Jawab D

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3x^3)(1+x)}{2x^4+5x^2-1}$$

Agar lebih singkat pekerjaan cukup Ananda kalikan di bagian pembilang $-3x^3\ dengan\ x$ sehingga:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3x^3)(1+x)}{2x^4+5x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(-3x^3)(x)}{2x^4+5x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^4}{2x^4+5x^2-1} = -\frac{3}{2}$$

3. Penyelesaian

Jawab A

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{9x^2+x+1} =$$

Soal ini dapat Ananda langsung jawab dengan menggunakan konsep di atas ya. Jika dilihat pangkat tertinggi dari fungsi limit tersebut berada di bagian penyebut, maka nilai limit fungsinya adalah 0.

4. Penyelsaian

Jawab B

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-2x-\ x^2+6x^5\ +6}{3x^4-5-2x+2x^5}$$

Ananda lihat bahwa pangkat bagian pembilang dan penyebut sama yaitu pangkat 5, oleh karena itu nilai dari limit fungsi ini adalah $\frac{6}{2} = 3$

5. Penyelsaian

Jawab A

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{6x-3}}{x-2}$$

Jika kita substitusikan nilai x = 2 ke fungsi limit akan menghasilkan bentuk tak tentu, oleh karena itu kita rasionalkan bagian pembilang sehingga diperoleh:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{6x-3}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{6x-3}}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{6x-3}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x-1-(6x-3)}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+\sqrt{6x-3})}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+\sqrt{6x-3})}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+\sqrt{6x-3})}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(\sqrt{5x-1}+\sqrt{6x-3})}=\frac{-1}{(\sqrt{5(2)-1}+\sqrt{6(2)-3})}$$

$$\frac{-1}{(\sqrt{10-1}+\sqrt{12-3}}=\frac{-1}{\sqrt{9}+\sqrt{9}}=\frac{-1}{3+3}=\frac{-1}{6}$$

6. Penyelesaian

Jawab E

$\lim_{x\infty}(\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+7})$ kita kalikan dengan sekawan, diperoleh:

$$\lim_{x\infty}(\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+7}).\frac{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x+7}}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x+7}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+1-3x-7}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x+7}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-6}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x+7}}=\infty$$

Soal bentuk ini dapat langsung dijawab oleh Ananda dengan melihat rumus:

$\lim_{x\infty}(\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d})$ jika a > c maka nilai fungsi tersebut adalah ∞

7. Penyelsaian

Jawab A

Ananda dapat langsung menjawab soal ini dengan melihat pangkat tertingginya. Soal ini mempunyai pangkat tertinggi ada di bagian penyebut, sehingga soal ini nilainya adalah 0.

8. Penyelesaian

Jawab D

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{9x-1}}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-7}}$$

semua unsur kita bagi dengan x, sehingga didapat:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{9x-1}}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-7}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}-\sqrt{\frac{9x}{x}-\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x}-\frac{7}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-0}-\sqrt{9-0}}{\sqrt{4+0}-\sqrt{1-0}}$$

$$\frac{1-3}{2-1}=-2$$

9. Penyelesaian

Jawab D

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2x}}}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2x}}}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\cancel{x}(\sqrt{x^2-2x}+x)}{\sqrt{x^2-2x}} + \frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}}}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)\left(\sqrt{\cancel{x^2}-2x}\right)}{x^2-2x}}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}\right)}{x^2-2x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-2x)+x\left(\sqrt{x^2-2x}\right)}{x^2-2x}$$

$$\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt{x^2-2x}\right)}{x(\cancel{x}-2)}$$

$$1 + \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}}$$

$$1 + \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-0}}{1-0} = 1 + 1 = 2$$

10. Penyelesaian

Jawab C

Dengan menggunakan rumus $\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$

Diperoleh nilai limit tersebut sama dengan

$$\frac{3-(-5)}{2\sqrt{4}} = \frac{8}{2\,(2)} = 2$$

E. Penilaian Diri

Anda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Anda mampu menentukan limit di ketakhinggaan aljabar dengan substitusi ?		
2.	Apakah Anda mampu menentukan limit di ketakhinggaan aljabar dengan membagi pangkat tertinggi ?		
3.	Apakah Anda mampu menentukan limit di ketakhinggaan aljabar dengan merasionalkan ?		
4.	Apakah anda telah mampu menggunakan limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri dalam masalah kontekstual.		
5.	Apakah anda telah mampu menentukan asimtot datar?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran.
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Limit di Ketakhinggaan Fungsi Trigonometri

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Anda dapat menjelaskan dan menentukan limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri serta dapat menyelesaikan masalah berkaitan dengan eksistensi limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri.

B. Uraian Materi

Pada kegiatan pembelajaran 2 ini kita akan membahas Limit Tak Hingga Fungsi Trigonometri. Materi Limit Tak Hingga Fungsi Trigonometri merupakan gabungan bentuk limit di ketakhinggaan dan limit fungsi trigonometri. Jika kita perdalam lagi, ternyata bentuk Limit Tak Hingga Fungsi Trigonometri lebih menekankan pada limit fungsi trigonometrinya, sehingga Anda harus benar-benar menguasai materi limit fungsi trigonometri pada modul sebelumnya.

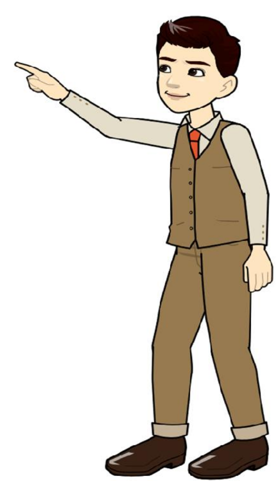
Bentuk tak hingga (∞) jika sebagai sudut suatu fungsi trigonometri maka tidak bisa ditentukan nilainya misal sin (∞), cos (∞), tan (∞) tidak bisa ditentukan nilainya karena nilai sin x berkisar $-1 \leq \sin x \leq 1$, begitu juga niai cos x berkisar $-1 \leq \cos x \leq 1$, dan untuk tan x berkisar $-\infty \leq \tan x \leq \infty$, tentu dengan x yang sudah pasti. Nah untuk memudahkan, maka bentuk yang digunakan adalah $\frac{1}{\infty} \approx 0$, sehingga nilai fungsi trigonometrinya bisa kita hitung yaitu $\sin \frac{1}{\infty} = 0$, $\cos \frac{1}{\infty} = 1$, $\tan \frac{1}{\infty} = 0$. Dan bentuk ini cocok dengan limit fungsi trigonometri yang akan di bahas dalam kegiatan belajar ini.

Limit fungsi trigonometri yang sudah dipelajari pada modul sebelumnya dan identitas trigonometri materi prasyarat untuk memahami konsep limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali

Rumus dasar limit fungsi trigonometri yang diperumum adalah:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
9. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0$



Rumus Trigonometri

- $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{1}{2}(x + y)\sin\frac{1}{2}(x - y)$
- $1 - \cos ax = 2\sin^2\frac{1}{2}(ax)$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Langkah-langkah menentukan limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri.

4. Lakukan pemisalan $y = \frac{1}{x}$.
5. Substitusikan $y = \frac{1}{x}$ ke persamaan awal
6. Selesaikan dengan rumus dasar limit fungsi trigonometri.
7. Tentukan hasil limitnya.

Agar Anda lebih memahami modul ini, pelajari beberapa contoh soal dari limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri.

Contoh 1

Tentukan limit di ketakhinggaan fungsi tigonometri berikut.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \tan\frac{5}{x}\csc\frac{2}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5\tan\frac{3}{x}}{x\left(1-\cos\frac{6}{x}\right)}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos^2\frac{6}{x}-1}{\sin\frac{3}{x}\tan\frac{2}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x(\cos\frac{3}{x}-\cos\frac{1}{x})}{\sin\frac{2}{x}}$

Penyelesaian:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right)$
   - Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

     Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

     $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right) &= \lim_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{1}{\frac{1}{x}}\sin\left(\frac{2}{x}\right)\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\sin(2y)\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{y}\\ &= 2\end{aligned}$$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \tan\frac{5}{x}\csc\frac{2}{x}$
   - Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

     Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\lim_{x\to\infty} \tan\frac{5}{x}\csc\frac{2}{x} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \tan 5.\frac{1}{x}\csc 2.\frac{1}{x}$$
$$= \lim_{y\to 0} \tan 5y \csc 2y$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{\tan 5y}{\sin 2y}$$
$$= \frac{5}{2}$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5\tan\frac{3}{x}}{x\left(1-\cos\frac{6}{x}\right)}$

❖ Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\tan\frac{3}{x}}{x\left(1-\cos\frac{6}{x}\right)} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{1}{x}\frac{5\tan\frac{3}{x}}{\left(2\sin^2\frac{3}{x}\right)}$$
$$= \lim_{y\to 0} y\frac{5\tan 3y}{(2\sin^2 3y)}$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{5}{2}\frac{y}{\sin 3y}\frac{\tan 3y}{\sin 3y}$$
$$= \frac{5}{2}\frac{1}{3}\frac{3}{3}$$
$$= \frac{5}{6}$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos^2\frac{6}{x}-1}{\sin\frac{3}{x}\tan\frac{2}{x}}$

❖ Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2\frac{6}{x}-1}{\sin\frac{3}{x}\tan\frac{2}{x}} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{\cos^2\frac{6}{x}-1}{\sin\frac{3}{x}\tan\frac{2}{x}}$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{\cos^2 6y - 1}{\sin 3y \tan 2y}$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin^2 6y}{\sin 3y \tan 2y}$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin 6y \sin 6y}{\sin 3y \tan 2y}$$
$$= -\frac{6}{3}\cdot\frac{6}{2}$$
$$= -6$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(\cos\frac{3}{x}-\cos\frac{1}{x})}{\sin\frac{2}{x}}$

❖ Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(\cos\frac{3}{x}-\cos\frac{1}{x})}{\sin\frac{2}{x}} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{1}{\frac{1}{x}}\frac{(\cos\frac{3}{x}-\cos\frac{1}{x})}{\sin\frac{2}{x}}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\cos 3y - \cos y}{y \sin 2y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-2 \sin 2y \sin y}{y \sin 2y}$$

$$= \lim_{y \to 0} -2 \frac{\sin 2y \;\; \sin y}{y \;\;\; \sin 2y}$$

$$= (-2)(2)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -2$$

Aplikasi Limit Fungsi di Ketakhinggaan Fungsi Trigonometri

Bagaimana cara menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan konsep limit fungsi di ketakhinggaan fungsi trigonometri ? untuk memahaminya pelajari contoh berikut.

Contoh 2

Jumlah pertumbuhan penduduk suatu kota diperkirakan t tahun dari sekarang akan menjadi $N(t)$ = 35.000 + t sin $\frac{40.000}{t}$

Tentukan pertumbuhan jumlah penduduk kota tersebut dalam jangka waktu yang sangat lama di masa depan.

Penyelesaian:

Waktu yang sangat lama artinya $t \to \infty$

$N(t)$ = 35.000 + $t \sin \frac{40.000}{t}$

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = \lim_{t \to \infty} \; 35.000 \; + \; t \sin \frac{40.000}{t}$$

- Misalkan $y = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{y}$

  Ketika $t \to \infty$ maka $\frac{1}{t} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = \lim_{t \to \infty} \; 35.000 \; + \; t \sin \frac{40.000}{t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \; 35.000 \; + \lim_{t \to \infty} t \sin \frac{40.000}{t}$$

$$= 35.000 + \lim_{\frac{1}{t} \to 0} \frac{1}{\frac{1}{t}} \sin \frac{40.000}{t}$$

$$= 35.000 + \frac{\sin 40.000\, y}{y}$$

$$= 35.000 + 40.000$$

$$= 75.000$$

Jadi, pertumbuhan jumlah penduduk kota tersebut dalam jangka waktu yang sangat lama di masa depan adalah 75.000.

Asimtot Datar

Asimtot adalah suatu garis lurus yang didekati oleh lengkung dengan jarak semakin lama semakin kecil mendekati nol di tak hingga. Asimtot juga diartikan sebagai garis batas atau garis arah kelengkungan kurva dan ada pada domain tertentu. Asimtot datar adalah suatu garis yang mendekati nilai y tertentu tidak melewati atau menyinggungnya.

Garis $y = L$ disebut asimtot datar dari fungsi $f(x)$ jika memenuhi salah satu dari:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ atau } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Contoh 3

Tentukan asimtot datar untuk fungsi fungsi tigonometri berikut.

$f(x) = x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

Penyelesaian:

Asimtot datar fungsi tersebut adalah:

$y = \lim_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

❖ Misalkan $z = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{z}$

Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $z \to 0$

$$\begin{aligned} y = \lim_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{1}{\frac{1}{x}}\tan\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\sin(z) \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, asimtot datar dari fungsi di atas adalah $y = 1$.

C. Rangkuman

- ❖ Langkah-langkah menentukan limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri.
  - ➢ Lakukan pemisalan $y = \frac{1}{x}$.
  - ➢ Substitusikan $y = \frac{1}{x}$ ke persamaan awal
  - ➢ Selesaikan dengan rumus dasar limit fungsi trigonometri.
  - ➢ Tentukan hasil limitnya.
- ❖ Asimtot adalah suatu garis lurus yang didekati oleh lengkung dengan jarak semakin lama semakin kecil mendekati nol di tak hingga.
- ❖ Asimtot datar adalah suatu garis yang mendekati nilai y tertentu tidak melewati atau menyinggungnya.

D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan jujur dan benar.

Tentukan limit di ketakhinggaan fungsi tigonometri berikut.

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x}\cot\left(\frac{1}{x}\right)$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{6x} \cos \dfrac{3}{\sqrt{x}} \sin \dfrac{5}{\sqrt{x}}$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x - x \cos \frac{6}{x}}{\tan \frac{3}{x}} \right)$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} x \left(\dfrac{1 - \cos^2 \left(\frac{2}{x}\right)}{\sin \frac{4}{x}} \right)$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(\sin \frac{4}{x} - \sin \frac{2}{x})}{\sin \frac{2}{x}}$
6. Kenaikan jumlah bakteri setiap jamnya pada makanan jatuh dinyatakan dalam funsi B(x) = $x\left(\sin \frac{4}{x} + \tan \frac{3}{x}\right)$, dengan x lama waktu makanan jatuh. Mula-mula jumlah bakteri pada makanan tersebut hanya 50 bakteri. Tentukan jumlah bakteri pada makan tersebutketika makanan tersebut tidak pernah diambil.
7. Tentukan asimtot datar untuk fungsi fungsi tigonometri berikut.
   $f(x) = \dfrac{2}{x \tan \frac{1}{x}}$

Penyelesaian:

Waktu yang sangat lama artinya $t \to \infty$

$N(t)$ = 35.000 + $t \sin \frac{40.000}{t}$

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = \lim_{t \to \infty} 35.000 + t \sin \frac{40.000}{t}$$

❖ Misalkan $y = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{y}$

Ketika $t \to \infty$ maka $\frac{1}{t} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to \infty} N(t) &= \lim_{t \to \infty} 35.000 + t \sin \frac{40.000}{t} \\
&= \lim_{t \to \infty} 35.000 + \lim_{t \to \infty} t \sin \frac{40.000}{t} \\
&= 35.000 + \lim_{\frac{1}{t} \to 0} \frac{1}{\frac{1}{t}} \sin \frac{40.000}{t} \\
&= 35.000 + \frac{\sin 40.000\, y}{y} \\
&= 35.000 + 40.000 \\
&= 75.000
\end{aligned}$$

Jadi, pertumbuhan jumlah penduduk kota tersebut dalam jangka waktu yang sangat lama di masa depan adalah 75.000.

Pembahasan Latihan Soal Kegiatan Pembelajaran 2

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x}\cot\left(\frac{1}{x}\right)$
   - Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

     Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

     $$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x}\cot\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{2}{x}\cot\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{y\to 0} 2y\cot y \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{2y}{\tan y} \\ &= 2 \end{aligned}$$

     (skor 10)

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{6x}\cos\frac{3}{\sqrt{x}}\sin\frac{5}{\sqrt{x}}$
   - Misalkan $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{y}$

     Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ atau $y \to 0$

     $$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \sqrt{6x}\cos\frac{3}{\sqrt{x}}\sin\frac{5}{\sqrt{x}} &= \lim_{\frac{1}{\sqrt{x}}\to 0} \sqrt{6}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cos\frac{3}{\sqrt{x}}\sin\frac{5}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{y\to 0} \sqrt{6}\frac{1}{y}\cos 3y\sin 5y \\ &= \lim_{y\to 0} \sqrt{6}\cos 3y\frac{\sin 5y}{y} \\ &= \sqrt{6}\,(1)(5) \\ &= 5\sqrt{6} \end{aligned}$$

     (skor 15)

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x - x\cos\frac{6}{x}}{\tan\frac{3}{x}}\right)$
   - Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

     Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

     $$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x - x\cos\frac{6}{x}}{\tan\frac{3}{x}}\right) &= \lim_{\frac{1}{x}\to 0} x\left(\frac{1-\cos\frac{6}{x}}{\tan\frac{3}{x}}\right) \\ &= \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{1}{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\cos\frac{6}{x}}{\tan\frac{3}{x}}\right) \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\left(\frac{1-\cos 6y}{\tan 3y}\right) \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{2\sin^2 3y}{y\tan 3y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{2\sin 3y\sin 3y}{y\tan 3y} \\ &= 2(3)(1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

     (skor 15)

4. $\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1-\cos^2\left(\frac{2}{x}\right)}{\sin\frac{4}{x}}\right)$

- ❖ Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

  Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1-\cos^2\left(\frac{2}{x}\right)}{\sin\frac{4}{x}}\right) = \lim_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\cos^2\left(\frac{2}{x}\right)}{\sin\frac{4}{x}}\right)$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\cos^2\left(\frac{2}{x}\right)}{\sin\frac{4}{x}}\right)$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 2y}{y\sin 4y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y \quad \sin 2y}{y \qquad \sin 4y}$$

$$= 2(\frac{2}{4}\}$$

$$= 1$$

(skor 15)

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{(\sin\frac{4}{x}-\sin\frac{2}{x})}{\sin\frac{2}{x}}$

- ❖ Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

  Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sin\frac{4}{x}-\sin\frac{2}{x})}{\sin\frac{2}{x}} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{(\sin\frac{4}{x}-\sin\frac{2}{x})}{\sin\frac{2}{x}}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin 4y - \sin 2y}{\sin 2y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin 4y}{\sin 2y} - \frac{\sin 2y}{\sin 2y}$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1$$

(skor 15)

6. Kenaikan jumlah bakteri setiap jamnya pada makanan jatuh dinyatakan dalam fungsi $B(x) = x\left(\sin\frac{4}{x}+\tan\frac{3}{x}\right)$, dengan x lama waktu makanan jatuh. Mula-mula jumlah bakteri pada makanan tersebut hanya 50 bakteri. Tentukan jumlah bakteri pada makan tersebutketika makanan tersebut tidak pernah diambil.

   Penyelesaian:

   Karena makanan tidak pernah diambil (waktu yang sangat lama artinya $t \to \infty$), maka kenaikan jumlah bakteri dapat diselesaikan dengan cara berikut.

$$\lim_{x\to\infty} B(x) = \lim_{x\to\infty}\ 35.000 + t\sin\frac{40.000}{t}$$

- ❖ Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow t = \frac{1}{x}$

  Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\lim_{x\to\infty} B(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sin\frac{4}{x} + \tan\frac{3}{x}\right)$$
$$= \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{1}{\frac{1}{x}}\left(\sin\frac{4}{x} + \tan\frac{3}{x}\right)$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin 4y}{y} + \frac{\tan\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}$$
$$= 4 + 3$$
$$= 7$$

Jadi, jumlah bakteri yang terdapat pada makanan jatuh tersebut ketika tidak pernah diambil adalah:
Bakteri = 50 + 7(5) = 400. **(skor 15)**

7. Tentukan asimtot datar untuk fungsi fungsi tigonometri berikut.

$$f(x) = \frac{2}{x\tan\frac{1}{x}}$$

Penyelesaian:

Asimtot datar fungsi tersebut adalah:

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x\tan\frac{1}{x}}$$

- ❖ Misalkan $z = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{z}$
  Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $z \to 0$

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x\tan\frac{1}{x}} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{\frac{2}{x}}{\tan\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{2z}{\tan z}$$
$$= 2$$

Jadi, asimtot datar dari fungsi di atas adalah y =2. **(skor 15)**

E. Penilaian Diri

Anda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Anda telah memahami limit fungsi trigonometri.		
2.	Apakah Anda telah mampu menentukan limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri.		
3.	Apakah anda telah mampu menggunakan limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri dalam masalah kontekstual.		
4.	Apakah anda telah mampu menentukan asimtot datar?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran.
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 6x + 8}{4x^2 + 5x - 7} = \ldots.$
   A. $-\frac{3}{4}$
   B. $-\frac{6}{5}$
   C. $\frac{3}{4}$
   D. $\frac{6}{5}$
   E. $\frac{8}{7}$
2. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 9}{5x^3 + 2x - 4} = \ldots.$
   A. 0
   B. $\frac{2}{5}$
   C. $\frac{2}{4}$
   D. 1
   E. $\frac{9}{4}$
3. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7 - 2x^2 + 4x^3}{5x + 6x^2} = \ldots.$
   A. 0
   B. $\frac{2}{6}$
   C. $\frac{4}{6}$
   D. $\frac{7}{5}$
   E. ∞
4. $\operatorname{Lim}\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + 2 \ldots + \mathrm{x}}{\frac{1}{2}\mathrm{x}^2 + 1} = \ldots$
   A. 0
   B. $\dfrac{1}{9}$
   C. $\frac{1}{2}$
   D. 1
   E. 2
5. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+3} \right) = \ldots.$
   A. -2
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. ∞

6. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-5x}\right)=....$
   A. 0
   B. $\frac{1}{2}$
   C. 2
   D. $\frac{5}{2}$
   E. 5
7. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\left((2x-1)-\sqrt{4x^2-3x+6}\right)=....$
   A. $-\frac{1}{4}$
   B. 1
   C. $\frac{7}{4}$
   D. 2
   E. $\frac{5}{2}$
8. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(4x+5)}-2x+1\right)=....$
   A. 0
   B. $\frac{1}{4}$
   C. $\frac{1}{2}$
   D. $\frac{9}{4}$
   E. ∞
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{16x^2+ax+d}-\sqrt{bx^2-2x+c}\right)=1$. Nilai $a^2-b^2=\ldots$
   A. – 156
   B. – 220
   C. 220
   D. 644
   E. 900
10. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^4+2x^3+4x^2}-\sqrt{x^4+2x^3-\ x^2}$
    A. 0
    B. ½
    C. 1
    D. $\frac{3}{2}$
    E. $\frac{5}{2}$
11. Nilai $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$ adalah
    A. $-\frac{1}{4}$
    B. $-\frac{1}{2}$
    C. 0
    D. $\frac{1}{4}$
    E. $\frac{1}{2}$
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2+6x+3}-2x\right)=....$
    A. 4
    B. 3
    C. 2
    D. 1
    E. 0

13. Untuk suatu hubungan inang dan parasite tertentu, ditentukan bahwa kerapatan inang (jumlah inang per satuan luas) adalah x dan jumlah parasite selama suatu periode waktu adalah $y = \frac{1200x}{15+30x}$. Jika kerapatan inang ditingkatkan tanpa batas, nilai yang akan didekati oleh y adalah ….
    A. 20
    B. 30
    C. 40
    D. 50
    E. 60
14. Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\left(2 + cos\ \frac{4}{x}\right)$ adalah … .
    A. 0
    B. 1
    C. 2
    D. 3
    E. 4
15. Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\left(-x + \tan\ \frac{1}{x}\right)\ adalah\,..$
    A. $-\infty$
    B. 0
    C. 1
    D. 2
    E. ∞
16. Nilai $\lim_{x\to\infty}\left(3x + \sin\frac{1}{x}\right)$ = ...
    A. 0
    B. 3
    C. 4
    D. 5
    E. ∞
17. Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cot\frac{1}{x} = \cdots$.
    A. –1
    B. 0
    C. 1
    D. 2
    E. 3
18. Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}\tan\frac{3}{x}}$ adalah ..
    A. $\frac{1}{3}$
    B. $\frac{2}{3}$
    C. $\frac{4}{3}$
    D. $\frac{8}{3}$
    E. ∞
19. Nilai dari $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{3}{x}\cos\frac{5}{x}$ = ….
    A. 0
    B. 3
    C. 4
    D. 5
    E. 15
20. Seorang ilmuwan sedang meneliti suatu senyawa. Senyawa ini merupakan hasil reaksi kimia dari beberapa senyawa. Setelah diteliti ternyata jumlah senyawa baru yang

terbentuk mengikuti fungsi $f(t) = 40 + t\sin\frac{30}{t}$, dengan f(t) menyatakan jumlah senyawa dalam milligram dan t waktu dalam detik. Jumlah senyawa yang terbentuk untuk jangka waktu yang sangat lama adalah ….

A. 40
B. 50
C. 70
D. 80
E. 90

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. C
2. A
3. E
4. D
5. E
6. D
7. A
8. D
9. B
10. E
11. E
12. A
13. C
14. D
15. A
16. E
17. D
18. D
19. B
20. C

DAFTAR PUSTAKA

Domi. https://math.smapetrus.net/kelas-xii/matematika-minat-xii/limit-diketakhinggaan. diakses tanggal 14 Oktober 2020.

Priatna, Nanang dan Titi Sukamto. 2016. *Buku Siswa Aktif dan Kreatif Belajar Matematika untuk SMA/MA Kelas XII Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam*. Bandung: Grafindo Media Pratama.

Purcell, E.J., dan Dale Varberg. 1990. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

Putu Darmayasa. https://www.konsep-matematika.com/2017/06/limit-tak-hingga-fungsi-trigonometri.html. diakses tanggal 14 Oktober 2020.

Siswanto. 2005. *Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya*. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Suparmin dan Kurniawati. 2017. *Modulku Matematika Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam untuk SMA/MA Kelas XII*. Surakarta: Mediatama.

Stewart, James. 2001. *Kalkulus Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

Willa Adrian. 2008. *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

BERANI JUJUR! HEBAT!

JUJUR ADALAH LANGKAH AWAL BERANTAS KORUPSI

ZI-WBK

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Peminatan

KELAS XII

TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XII

PENYUSUN
Entis Sutisna, S.Pd.

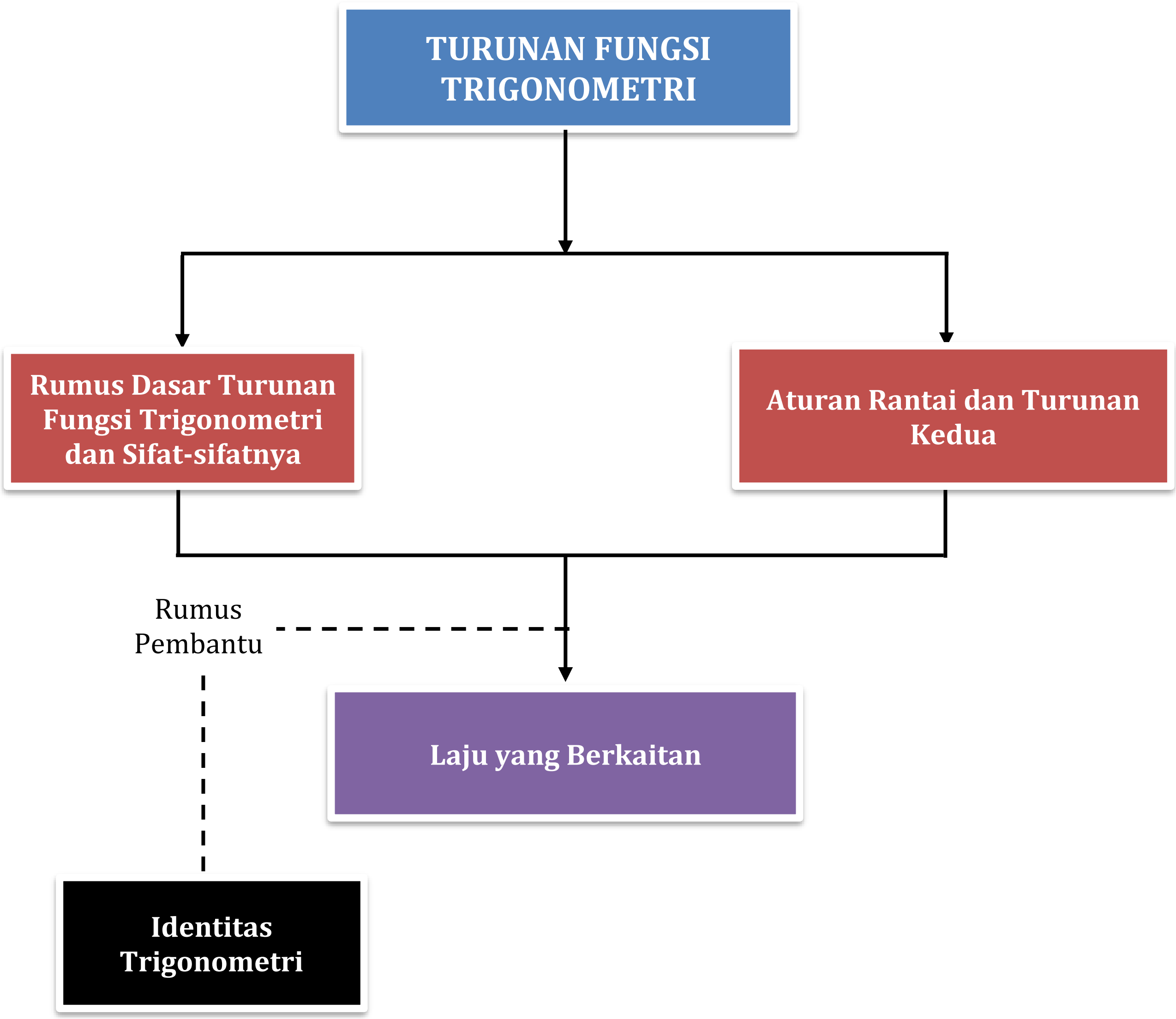
SMA Negeri 4 Tangerang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Cosinus	:	Suatu fungsi trigonometri dari sebuah sudut. Cosinus suatu sudut dalam segitiga siku-siku adalah perbandingan antara sisi di samping sudut itu terhadap sisi miringnya (hipotenusa).
Fungsi	:	Merupakan suatu relasi yang memetakan setiap anggota dari suatu himpunan yang disebut daerah asal atau domain ke tepat satu anggota himpunan lain yang disebut daerah kawan atau kodomain
Laju yang berkaitan	:	Menghitung laju perubahan suatu besaran dalam bentuk laju perubahan besaran lain
Sinus	:	Suatu fungsi trigonometri dari sebuah sudut. Sinus suatu sudut dalam segitiga siku-siku adalah perbandingan antara sisi yang berhadapan dengan sudut itu terhadap sisi miringnya (hipotenusa).
Tangen	:	Suatu fungsi trigonometri dari sebuah sudut. tangen suatu sudut dalam segitiga siku-siku adalah perbandingan antara sisi yang berhadapan dengan sudut itu terhadap sisi samping sudutnya.
Trigonometri	:	Sebuah cabang matematika yang berkaitan dengan sudut segitiga dan fungsi trigonometri seperti sinus, cosinus, dan tangen.
Turunan	:	Laju perubahan suatu fungsi terhadap perubahan peubahnya.
Turunan kedua	:	Turunan dari turunan pertama.

PETA KONSEP


TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI
Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri dan Sifat-sifatnya
Aturan Rantai dan Turunan Kedua
Rumus Pembantu
Laju yang Berkaitan
Identitas Trigonometri

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Peminatan
Kelas	:	XII
Alokasi Waktu	:	12 jam pelajaran
Judul Modul	:	Turunan Fungsi Trigonometri

B. Kompetensi Dasar

3.3 Menggunakan prinsip turunan ke fungsi trigonometri sederhana
4.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri

C. Deskripsi Singkat Materi

Salam jumpa melalui pembelajaran matematika dengan materi Turunan Fungsi Trigonometri. Modul ini disusun sebagai satu alternatif sumber bahan ajar siswa untuk memahami materi matematika peminatan kelas XII khususnya Turunan Fungsi Trigonometri. Melalui modul ini Anda diajak untuk memahami konsep Turunan Fungsi Trigonometri, Sifat-sifat Turunan Trigonometri dan Pemecahan Masalah yang terkait dengan Turunan Fungsi Trigonometri.

Jika berbicara mengenai kecepatan, percepatan, nilai maksimum dan minimum suatu fungsi maka sebenarnya kita sedang membahas mengenai turunan. Turunan terkait dengan perubahan. Sesuatu yang bersifat tetap di dunia ini adalah perubahan itu sendiri, banyak kejadian-kejadian yang melibatkan perubahan. Misalnya gerak suatu obyek (kendaraan berjalan, roket bergerak, laju pengisian air suatu tangki), pertumbuhan bibit suatu tanaman, pertumbuhan ekonomi, inflasi mata uang, berkembangbiaknya bakteri, peluruhan muatan radioaktif dan sebagainya. Konsep dasar dari turunan suatu fungsi adalah laju perubahan nilai fungsi.

Tokoh-tokoh yang berjasa dalam mempelajari konsep perubahan sehingga menghasilkan cabang ilmu matematika kalkulus diferensial (turunan) diantaranya: Archimedes (287 – 212 SM), Kepler (1571 – 1630), Galileo (1564 – 1642), Newton (1642 – 1727) dan Leibniz (1646 – 1716). Menurut pendapat para ahli Newton dan Leibniz-lah dua orang yang paling banyak andilnya pada pertumbuhan kalkulus diferensial.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi Anda dalam melakukan kegiatan pembelajaran secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan Anda dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.

5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan Anda terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar Anda dapat mengukur penguasaan terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan Anda untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi 2 kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri dan Sifat-sifatnya

Kedua : Aturan Rantai, Turunan Kedua, dan Laju yang Berkaitan dari Fungsi Trigonometri

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri dan Sifat-sifatnya

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini, diharapkan Anda dapat membuktikan rumus-rumus dasar turunan fungsi trigonometri dan menggunakan prinsip atau aturan-aturan turunan ke fungsi trigonometri sederhana.

B. Uraian Materi

Masih ingatkah Anda dengan definisi turunan yang sudah dipelajari saat Anda di kelas XI? Atau pelajaran trigonometri yang sudah Anda pelajari di kelas X dan XI? Mudah-mudahan masih ingat, termasuk materi limit fungsi trigonometri yang sudah dipelajari pada modul sebelumnya, karena materi-materi tersebut merupakan materi prasyarat untuk memahami konsep turunan fungsi trigonometri.

Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri

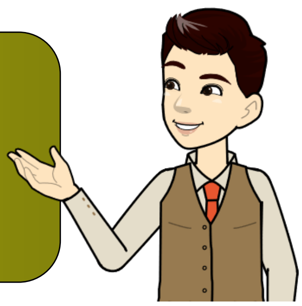
Anda telah melihat pada modul sebelumnya bahwa gradien garis singgung dan kecepatan sesaat adalah manifestasi dari pemikiran dasar yang sama, yaitu *diferensial* atau *turunan*.

Definisi 1

Diferensial/turunan pertama fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan x adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika limitnya ada.



Notasi turunan pertama adalah

$f'(x) = y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = D_x f(x)$

$f'(x) = y'$ diperkenalkan oleh Joseph Louis Lagrange

$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$ diperkenalkan oleh Gottfried Leibniz

D dan $\frac{d}{dx}$ merupakan operator turunan

Dengan menggunakan definisi turunan mari kita buktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri untuk $y = \sin x$, $y = \sec x$, dan $y = \tan x$, untuk fungsi trigonometri lainnya, yaitu $y = \cos x$, $y = \csc x$, dan $y = \cot x$ diberikan sebagai latihan.

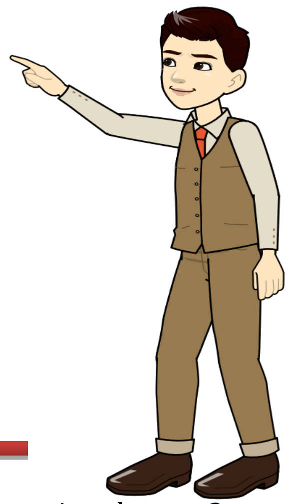
Contoh 1

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sin x$.

Penyelesaian:

Sebelum Anda menentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sin x$, Anda harus mengingat kembali identitas trigonometri sudut rangkap, jumlah dan selisih sudut dan limit fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali



- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x + y)\sin\frac{1}{2}(x - y)$
- $1 - \cos ax = 2\sin^2\frac{1}{2}(ax)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}x}{x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{2}x = 2.\frac{1}{2}.\sin(0) = 0$$

Anda akan disajikan menentukan turunan pertama fungsi $y = \sin x$ dengan 2 cara.

Cara 1

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$ (substitusikan $f(x) = \sin x$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}$$ ($\sin(x+h) = \sin x\cos h + \cos x\sin h$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h - \sin x\,(1 - \cos h)}{h}$$ (sifat distributif)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\,(1 - \cos h)}{h}$$ (sifat limit)

$$= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} - \sin x\lim_{h\to 0}\frac{(1 - \cos h)}{h}$$ (sifat limit)

$$= \cos x(1) - \sin x\,(0)$$ (rumus limit)

$$= \cos x$$

Cara 2

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$ (substitusikan $f(x) = \sin x$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{1}{2}(x + h + x)\sin\frac{1}{2}(x + h - x)}{h}$$ ($\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x + y)\sin\frac{1}{2}(x - y)$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right)\sin\frac{1}{2}h}{h}$$ (penyederhanaan)

$$= \lim_{h\to 0}2\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}$$ (sifat limit)

$$= 2\cos x\,.\frac{1}{2}$$ (sifat limit)

$$= \cos x$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \cos x$

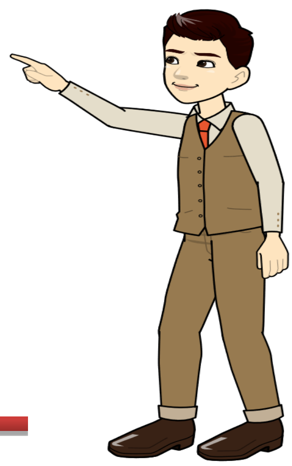
Contoh 2

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sec x$.

Penyelesaian:

Sebelum Anda menentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sec x$, Anda harus mengingat kembali identitas trigonometri sudut rangkap, jumlah dan selisih sudut dan limit fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali



- $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\qquad$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos x - \cos y = -2\sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{(definisi turunan)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h} \quad \text{(substitusikan } f(x) = \sec x\text{)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right) \quad \left(\sec x = \frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}\right) \quad \text{(samakan penyebut)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x - [\cos x \cos h - \sin x \sin h]}{\cos(x+h)\cos x}\right) \quad (\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x - \cos x \cos h + \sin x \sin h}{\cos(x+h)\cos x}\right) \quad \text{(penyederhanaan)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x\,(1 - \cos h) + \sin x \sin h}{\cos(x+h)\cos x}\right) \quad \text{(sifat distributif)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\,(1 - \cos h)}{h\cos(x+h)\cos x} + \frac{\sin x \sin h}{h\cos(x+h)\cos x} \quad \text{(penyederhanaan)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1 - \cos h)}{h\cos(x+h)} + \frac{\sin x}{\cos x}\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h\cos(x+h)} \quad \text{(sifat limit)}$$

$$= \frac{0}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} \quad \text{(sifat limit)}$$

$$= \sec x \tan x$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \sec x$ adalah $f'(x) = \sec x \tan x$.

Contoh 3

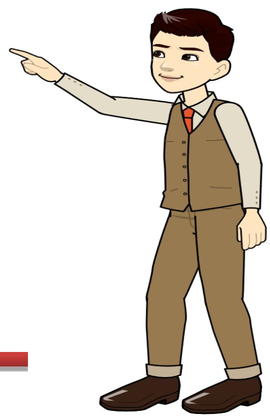
Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \tan x$.

Penyelesaian:

Sebelum Anda menentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \tan x$, Anda harus mengingat kembali identitas trigonometri, jumlah dan selisih sudut dan limit fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali

- $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$



$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \text{(definisi turunan)}\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} && \text{(substitusikan } f(x) = \tan x\text{)}\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x\right) && \left(\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\right)\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\tan x + \tan h - \tan x\,(1 - \tan x \tan h)}{1 - \tan x \tan h}\right) && \text{(samakan penyebut)}\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\tan x + \tan h - \tan x + \tan^2 x \tan h}{1 - \tan x \tan h}\right) && \text{(penyederhanaan)}\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\tan h\,(1 + \tan^2 x)}{h(1 - \tan x \tan h)} && \text{(sifat distributif)}\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\tan h}{h} \lim_{h \to 0} (1 + \tan^2 x) \lim_{h \to 0} \frac{1}{1 - \tan x \tan h} && \text{(sifat limit)}\\
&= (1)\,(1 + \tan^2 x)\,(1) && \text{(sifat limit)}\\
&= \sec^2 x && (1 + \tan^2 x = \sec^2 x)
\end{aligned}
$$

Jadi, turunan fungsi trigonometri $f(x) = \tan x$ adalah $f'(x) = \sec^2 x$.

Sebagai lantihan Anda harus membuktikan turunan fungsi trigonometri berikut.

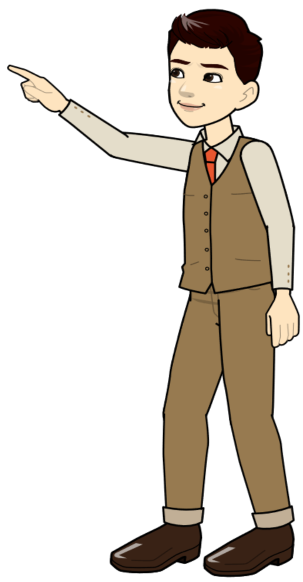
- $f(x) = \cos x \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \csc x \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$
- $f(x) = \cot x \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$

Prinsip Turunan untuk Fungsi Trigonometri Sederhana

Proses pencarian turunan suatu fungsi menggunakan definisi, yakni $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ memakan waktu. Karena itu pada pembelajaran berikutnya kita akan menggunakan aturan pencarian turunan yang telah dipelajari di Kelas XI saat belajar turunan fungsi aljabar untuk memperpendek proses dari fungsi-fungsi yang tampak rumit.

Namun, sebelumnya kita ulas kembali aturan dasar pencarian turunan dari fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali



- $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$, dengan k konstanta
- $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
- $f(x) = k\,x^n \Rightarrow f'(x) = k.n.x^{n-1}$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
- $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$
- $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$
- $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$

Jika k suatu konstanta dan u, v adalah fungsi dari x dan terturunkan, maka aturan pencarian turunan fungsi aljabar berlaku juga pada turunan fungsi trigonometri .

1. Aturan Jumlah, Selisih, dan Perkalian dengan Konstanta

- $f(x) = k\,u \Rightarrow f'(x) = k\,u'$
- $f(x) = u + v \Rightarrow f'(x) = u' + v'$
- $f(x) = u - v \Rightarrow f'(x) = u' - v'$

dengan k konstanta, $u = u(x)$, dan $v = v(x)$

Contoh 4

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = \sin x - \cos x$.
b. $f(x) = 3x^2 - 4 \cos x$
c. $f(x) = 2\tan x + 3x$

Penyelesaian:

a. $f(x) = \sin x - \cos x$
pilih : $u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$
$v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$
$f(x) = \sin x - \cos x = u - v$
maka
$f'(x) = u' - v'$
$f'(x) = \cos x - (-\sin x)$
$f'(x) = \cos x + \sin x$

b. $f(x) = 3x^2 - 4 \cos x$
pilih : $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$
$v = \cos x \Rightarrow v' = -\cos x$

$k_1 = 3$ dan $k_2 = 4$
$f(x) = 3x^2 - 3\cos x = k_1u + k_2v$
maka
$f'(x) = k_1\, u' + k_2\, v'$
$f'(x) = 3\,(2x) - 3\,(-\sin x)$
$f'(x) = 6x + 3\sin x$

c. $f(x) = 2\tan x + 3x$
pilih : $u = \tan x \Rightarrow u' = \sec^2 x$
$v = x \Rightarrow v' = 1$
$k_1 = 2$ dan $k_2 = 3$
$f(x) = 2\tan x + 3x = k_1u + k_2v$
maka
$f'(x) = k_1\, u' + k_2\, v'$
$f'(x) = 2\sec^2 x + 3$

Contoh 5

Jika $f(x) = \sin x + \cos x + \tan x$, maka $f'(0) = \ldots.$

Penyelesaian:

$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x$
$f'(x) = \cos x - \sin x + \sec^2 x$
$f'(0) = \cos 0 - \sin 0 + \sec^2 0$
$= 1 - 0 + 1$
$= 2$

2. Aturan Perkalian

$f(x) = u\,.\,v \Rightarrow f'(x) = u'.\,v + u\,.\,v'$ dengan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$

Contoh 6

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = x^2 \sin x$
b. $f(x) = 3x\sin x + \cot x$
c. $f(x) = 2\cos x \sin x$

Penyelesaian:

a. $f(x) = x^2 \sin x$
pilih $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$
$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$
$f(x) = x^2 \sin x = u\,.\,v$
maka
$f'(x) = u'.\,v + u\,.\,v'$
$f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$

b. $f(x) = 3x\sin x + \cot x$
pilih $u = 3x \Rightarrow u' = 3$
$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$
$w = \cot x \Rightarrow w' = -\csc^2 x$
$f(x) = 3x\sin x + \cot x = u\,.\,v + w$
maka
$f'(x) = u'\,.\,v + u\,.\,v' + w'$
$f'(x) = 3\sin x + 3x\cos x + (-\csc^2 x)$

$= 3 \sin x + 3x \cos x - \csc^2 x$

c. $f(x) = 2 \cos x \sin x$

pilih $u = 2 \cos x \Rightarrow u' = -2 \sin x$

$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$

$f(x) = 2 \cos x \sin x = u \,.\, v$

maka

$f'(x) = u' \,.\, v + u \,.\, v'$

$f'(x) = (-2 \sin x)(\sin x) + (2 \cos x)(\cos x)$

$f'(x) = -2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$

$f'(x) = 2 (\cos^2 x - \sin^2 x)$

$f'(x) = 2 \cos 2x$ $(\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x)$

3. Aturan Pembagian

$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ dengan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$

Contoh 7

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = \tan x$

b. $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$

c. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$

Penyelesaian:

a. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

pilih $u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{u}{v}$$

maka

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

$$f'(x) = \sec^2 x \qquad \left(\frac{1}{\cos x} = \sec x\right)$$

Menunjukkan hasil yang sama dengan turunan $f(x) = \tan x$ menggunakan definisi.

b. $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$

pilih $u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$

$v = 1 + \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{u}{v}$$

maka

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(1+\cos x) - (\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-\sin x - \sin x \cos x + \cos x \sin x}{(1+\cos x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

c. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$

pilih $u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$

$v = \sin x + \cos x \Rightarrow v' = \cos x - \sin x$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{u}{v}$$

maka

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(\sin x + \cos x) - (\cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x + \cos x \sin x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}$$
$$f'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{1 + \sin 2x} \qquad (2\sin x \cos x = \sin 2x)$$
$$f'(x) = \frac{-1}{1 + \sin 2x} \qquad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

C. Rangkuman

- Diferensial/turunan pertama fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan x adalah
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
Jika limitnya ada.

- Rumus dasar turunan pertama fungsi trigonometri
  - $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
  - $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
  - $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
  - $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$
  - $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$
  - $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$

- Jika k suatu konstanta dan u, v adalah fungsi dari x dan terturunkan, maka aturan pencarian turunan fungsi aljabar berlaku juga pada turunan fungsi trigonometri .
  - $f(x) = k\,u \Rightarrow f'(x) = k\,u'$
  - $f(x) = u + v \Rightarrow f'(x) = u' + v'$
  - $f(x) = u - v \Rightarrow f'(x) = u' - v'$
  - $f(x) = u\,.\,v \Rightarrow f'(x) = u'.\,v + u\,.\,v'$
  - $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan jujur dan benar.

1. Buktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri berikut dengan definisi.
   a. $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$
   b. $f(x) = \csc x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$
   c. $f(x) = \cot x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$
2. Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.
   a. $f\ (x) = 3x \sin x + \cos x$
   b. $f\ (x) = 2x \cos x - x^3$
   c. $f\ (x) = \frac{\cos x}{5+\sin x}$
3. Tentukan $f'(x)$ dan nilai $f'(x)$ dari fungsi $f(x) = 3x - \cos x + \tan x$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$.
4. Tentukan $f'(x)$ untuk $f(x) = \cos^3(2x - 1)$

Kunci Jawaban dan Pembahasan

1. Buktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri berikut dengan definisi.

a. $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$ ***(Skor Maksimum 20)***

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} && \text{(definisi turunan)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} && \text{(substitusikan } f(x) = \cos x\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} && \text{(}\cos(x+h)=\cos x\cos h - \sin x\sin h\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h} && \text{(sifat distributif)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\sin h}{h} && \text{(sifat limit)}\\
&= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} && \text{(sifat limit)}\\
&= \cos x(0)-\sin x(1) && \text{(rumus limit)}\\
&= -\sin x
\end{aligned}
$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \cos x$ adalah $f'(x) = -\sin x$.

b. $f(x) = \csc x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$ ***(Skor Maksimum 20)***

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} && \text{(definisi turunan)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\csc(x+h)-\csc x}{h} && \text{(substitusikan } f(x) = \sec x\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sin(x+h)}-\frac{1}{\sin x}\right) && \left(\csc x = \tfrac{1}{\sin x}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin x-\sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}\right) && \text{(samakan penyebut)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin x-[\sin x\cos h+\cos x\sin h]}{\sin(x+h)\sin x}\right) && \text{(}\sin(x+y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin x-\sin x\cos h-\cos x\sin h}{\sin(x+h)\sin x}\right) && \text{(penyederhanaan)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin x(1-\cos h)-\cos x\sin h}{\sin(x+h)\sin x}\right) && \text{(sifat distributif)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(1-\cos h)}{h\sin(x+h)\sin x}-\frac{\cos x\sin h}{h\sin(x+h)\sin x} && \text{(penyederhanaan)}\\
&= \frac{\cos x}{\sin x}\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)}{h\sin(x+h)}-\frac{\cos x}{\sin x}\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h\sin(x+h)} && \text{(sifat limit)}\\
&= \cot x\frac{0}{\cos x}-\cot x\frac{1}{\sin x} && \text{(sifat limit)}\\
&= -\csc x\cot x
\end{aligned}
$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \csc x$ adalah $f'(x) = -\csc x \cot x$.

c. $f(x) = \cot x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$ ***(Skor Maksimum 20)***

$$
f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{(definisi turunan)}
$$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$ (substitusikan $f(x)$ = cot x)

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{\tan(x+h)} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$ $(\cot x = \frac{1}{\tan x})$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1-\tan x \tan h}{\tan x + \tan h} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$ $(\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y})$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{(1-\tan x \tan h)\tan x - (\tan x + \tan h)}{(\tan x + \tan h)\tan x}\right)$ (samakan penyebut)

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{\tan x - \tan^2 x \tan h - \tan x - \tan h}{(\tan x + \tan h)\tan x}\right)$ (penyederhanaan)

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\tan h\,(\tan^2 x + 1)}{h\,(\tan x + \tan h)\tan x}$ (sifat distributif)

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\tan h}{h} \lim\limits_{h\to 0}(\tan^2 x + 1) \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{(\tan x + \tan h)\tan x}$ (sifat limit)

$= (-1)\,(1 + \tan^2 x)\,(\frac{1}{\tan^2 x})$ (sifat limit)

$= -\sec^2 x(\frac{1}{\tan^2 x})$ $(1 + \tan^2 x = \sec^2 x)$

$= -\frac{1}{\cos^2 x}(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x})$ $(\sec x = \frac{1}{\cos x}, \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x})$

$= -\frac{1}{\sin^2 x}$

$= -\csc^2 x$

Jadi, turunan fungsi trigonometri $f(x)$ = cot x adalah $f'(x) = -\csc^2 x$.

2. Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f\ (x) = 3x \sin x + \cos x$ ***(Skor Maksimum 10)***

Penyelesaian:

$y = 3x \sin x + \cos x$

Untuk $3x$.sin x dimisalkan:

$u = 3x \ \rightarrow u' = 3$

$v = \sin x \ \rightarrow v' = \cos x$

Jadi,

$y' = 3\sin x + 3x\cos x + (-\sin x)$

$y' = 2\sin x + 3x\cos x$

b. $f\ (x) = 2x \cos x - x^3$ ***(Skor Maksimum 10)***

Penyelesaian:

$y = 2x \cos x - x^3$

Untuk $2x$.cos x dimisalkan:

$u = 2x \ \rightarrow u' = 2$

$v = \cos x \ \rightarrow v' = -\sin x$

Jadi,

$y' = 2.(\cos x) + 2x.(-\sin x) - 3x^2$

$y' = 2\cos x - 2x\sin x - 3x^2$

c. $f\ (x) = \frac{\cos x}{5 + \sin x}$ ***(Skor Maksimum 10)***

Penyelesaian:

$f\ (x) = \dfrac{\cos x}{5 + \sin x}$

Misalkan:

$u = \cos x \rightarrow u\,' = -\sin x$

$v = 5 + \sin x \ \rightarrow v\,' = \cos x$

Jadi,

$$f\ '\ (x) = \frac{u\ 'v - uv\ '}{v^2}$$
$$= \frac{(-\sin x\ )(5 + \sin x\ ) - \cos x\ \ \cos x}{(5 + \sin x\ )^2}$$
$$= \frac{-5\sin x\ - \sin^2 x\ - \cos^2 x}{(5 + \sin x\ )^2}$$
$$= \frac{-5\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x\ )}{(5 + \sin x\ )^2}$$
$$= \frac{-5\sin x\ - 1}{(5 + \sin x\ )^2}$$

3. Tentukan $f'(x)$ dan nilai $f'(x)$ dari fungsi $f(x) = 3x - \cos x + \tan x$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$.

(Skor Maksimum 10)

Penyelesaian:

$f(x) = 3x - \cos x + \tan x$

$f'(x) = 3 + \sin x - \sec^2 x$ dan

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 + \sin\frac{\pi}{3} - \sec^2\frac{\pi}{3}$$
$$= 3 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 4$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1$$

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Anda telah memahami pengertian turunan fungsi trigonometri.		
2.	Apakah Anda telah mampu membuktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri.		
3.	Apakah anda telah mampu menggunakan prinsip turunan jumlah dan selisih ke turunan fungsi trigonometri?		
4.	Apakah anda telah mampu menggunakan prinsip turunan perAnda dua fungsi ke turunan fungsi trigonometri?		
5.	Apakah anda telah mampu menggunakan prinsip turunan pembagian ke turunan fungsi trigonometri?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Aturan Rantai, Turunan Kedua, dan Laju yang Berkaitan dari Fungsi Trigonometri

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Anda dapat menerapkan Aturan Rantai dalam menentukan turunan fungsi komposisi trigonometri, menentukan turunan kedua fungsi trigonometri, dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri khususnya laju yang berkaitan.

B. Uraian Materi

Aturan Rantai

Andaikan Anda diminta menentukan turunan fungsi $F(x) = \cos(3x - 5)$. Rumus turunan yang telah Anda pelajari tidak memungkinkan Anda untuk menghitung $F'(x)$.

Amati oleh Anda bahwa F berupa fungsi komposisi. Pada kenyataannya, andaikan $y = f(u) = \cos u$ dan $u = g(x) = 3x - 5$, maka kita dapat menuliskan $y = F(x) = f(g(x))$, yakni $F = f \text{ o } g$. Kita ketahui bagaimana menentukan turunan fungsi f dan g, sehingga akan bermanfaat sebagai aturan yang memberitahu kita bagaimana menurunkan $F = f \circ g$ dalam bentuk turunan dari f dan g.

Ternyata turunan fungsi komposisi adalah hasil kali turunan f dan g. Fakta ini merupakan salah satu dari aturan turunan yang terpenting dan disebut **Aturan Rantai**.

Aturan Rantai

Jika f dan g keduanya fungsi fungsi yang dapat diturunkan dan $F = f \text{ o } g$ adalah fungsi komposisi yang didefinisikan oleh $F = f(g(x))$, maka F dapat diturunkan menjadi F' yang diberikan oleh hasil kali

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x) \qquad (1)$$

Dalam notasi Leibniz, jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ keduanya fungsi yang dapat diturunkan, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} \qquad (2)$$

Untuk lebih memahami lagi tentang aturan rantai pelajari contoh beriku.

Contoh 1

Carilah $F'(x)$ jika $F(x) = \cos(3x - 5)$.

Penyelesaian:

❖ **Menggunakan persamaan (1)**

- Nyatakan F sebagai $F(x) = f \text{ o } g\ (x) = f(g(x))$, dengan
  $f(u) = \cos u$ dan $u = g(x) = 3x - 5$
- Cari turunan dari f dan g
  $f'(u) = -\sin u$
  $f'(g(x)) = -\sin g(x) = -\sin(3x - 5)$
  dan $g'(x) = 3$

- Cari $F'(x)$

  $F'(x) = f'(g(x))g'(x)$

  $= -\sin(3x-5).(3)$

  $= -3\sin(3x-5)$

❖ **Menggunakan persamaan (2)**

Misalkan $u = 3x - 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3$

dan $y = \cos u \Rightarrow \frac{dy}{du} = -\sin u$

maka

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -\sin u\ (3) = -3\sin u = -3\sin(3x-5)$$

Catatan:

Dalam menggunakan aturan rantai kita bekerja dari luar ke dalam. Rumus (1) mengatakan bahwa kita menurunkan fungsi sebelah luar f (pada fungsi lebih dalam $g(x)$) *dan kemudian kita kalikan dengan turunan fungsi sebelah dalam*.

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{luar}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{dihitung}\\\text{pada fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{turunan}\\\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{luar}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{dihitung}\\\text{pada fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}}\cdot\underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{turunan}\\\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}}$$

Contoh 2

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.

a. $y = \sin(x^2 - 3x)$

b. $y = \sin^2 x$

Penyelesaian:

a. Jika $y = \sin(x^2 - 3x)$, maka fungsi sebelah luar adalah fungsi sinus dan fungsi sebelah dalam adalah fungsi kuadrat, sehingga aturan rantai memberikan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\sin}_{\substack{\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{luar}}}\underbrace{(x^2-3x)}_{\substack{\text{dihitung}\\\text{pada fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{turunan}\\\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{luar}}}\underbrace{(x^2-3x)}_{\substack{\text{dihitung}\\\text{pada fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}}\cdot\underbrace{(2x-3)}_{\substack{\text{turunan}\\\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x-3)\cos(x^2-3x)$$

b. Jika $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$, maka fungsi sebelah luar adalah fungsi kuadrat dan fungsi sebelah dalam adalah fungsi sinus, sehingga aturan rantai memberikan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\sin x)^2}_{\substack{\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{luar}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{turunan}\\\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{luar}}}\underbrace{(\sin x)}_{\substack{\text{dihitung}\\\text{pada fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}}\cdot\underbrace{(\cos x)}_{\substack{\text{turunan}\\\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin x\cos x$$

$= \sin 2x$ ($\sin 2x = 2\sin x \cos x$)

Dari Contoh 2 dapat disimpulkan sebagai berikut.

Aturan Rantai

$y = k\,u^n \Rightarrow y' = k\,n\,u^{n-1} \,.\, u'$
$y = \sin u \Rightarrow y' = \cos u \,.\, u'$
$y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \,.\, u'$
$y = \tan u \Rightarrow y' = \sec^2 u \,.\, u'$
$y = \cot u \Rightarrow y' = -\csc^2 u \,.\, u'$
$y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \tan u \,.\, u'$
$y = \csc u \Rightarrow y' = -\csc u \cot u \,.\, u'$
dengan k kostanta dan $u = u(x)$

Contoh 3

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.
a. $y = \cos(3x^2 - 5)$
b. $y = \tan^2 x$

Penyelesaian:

a. $y = \cos(3x^2 - 5)$
$y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \,.\, u'$
$y = \cos(3x^2 - 5) \Rightarrow y = -\sin(3x^2 - 5) \,.\, (6x) = -6x \sin(3x^2 - 5)$
b. $y = \tan^2 x = (\tan x)^2$
$y = k\,u^n \Rightarrow y' = k\,n\,u^{n-1} \,.\, u'$
$y = \tan^2 x = (\tan x)^2 \Rightarrow y' = 2 \tan x \,.\, (\sec^2 x) = 2 \tan x \,.\, \sec^2 x$

Alasan untuk nama "Aturan Rantai" menjadi jelas pada waktu kita membuat rantai yang lebih panjang dengan cara menambahkan mata rantai lain. Andaikan bahwa $y = f(u)$, $u = g(v)$, dan $v = h(x)$, dengan fungsi f, g, dan dapat diturunkan. Maka, untuk menghitung turunan y terhadap x, kita gunakan Aturan rantai dua kali:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Contoh 4

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri $y = \sin^3(2x^2 - 3x)$

Penyelesaian:
Cara 1
$y = \sin^3(2x^2 - 3x)$
Misalkan $v = 2x^2 - 3x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 4x - 3$
$u = \sin v \Rightarrow \frac{du}{dv} = \cos v$
$y = u^3 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2$
maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$= 3u^2 \cos v\,(4x - 3)$

$= 3(\sin v)^2 \cos(2x^2 - 3x)\,(4x - 3)$
$= 3\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)\,(4x - 3)$
$= 3\,(4x - 3)\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)$
$= (12x - 9)\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)$

Cara 2

Fungsi sebelah luar adalah fungsi kubik, fungsi tengah adalah fungsi sinus, dan fungsi dalam adalah fungsi kuadrat.

$$\frac{dy}{dx} = 3\sin^2(2x^2 - 3x)\frac{d}{dx}(\sin(2x^2 - 3x))$$

$$= 3\sin^2(2x^2 - 3x)(\cos(2x^2 - 3x))\frac{d}{dx}(2x^2 - 3x)$$

$$= 3\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)\left(4x \quad - 3\right)$$

$$= (12x - 9)\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)$$

Cara 3

$y = \sin^n u \quad \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u \,.\cos u \,. u'$

$y = \sin^3(2x^2 - 3x) \quad \Rightarrow y' = 3\sin^2(2x^2 - 3x).\cos(2x^2 - 3x).(4x - 3)$

$y' = (12x - 9)\sin^2(2x^2 - 3x).\cos(2x^2 - 3x).(4x - 3)$

Jadi, untuk aturan rantai lainnya diperoleh:

Aturan Rantai

$y = \sin^n u \;\Rightarrow\; y' = n \sin^{n-1} u \,.\cos u \,.\, u'$

$y = \cos^n u \;\Rightarrow\; y' = -n \cos^{n-1} u \,.\, \sin u \,.\, u'$

$y = \tan^n u \;\Rightarrow\; y' = n \tan^{n-1} u \,.\, \sec^2 u \,.\, u'$

$y = \cot^n u \;\Rightarrow\; y' = -\,n \cot^{n-1} u \,.\csc^2 u \,.\, u'$

$y = \sec^n u \;\Rightarrow\; y' = n \sec^{n-1} u \,.\sec u \tan u \,.\, u'$

$y = \csc^n u \;\Rightarrow\; y' = -\,n \csc^{n-1} u \,.\csc u \cot u \,.\, u'$

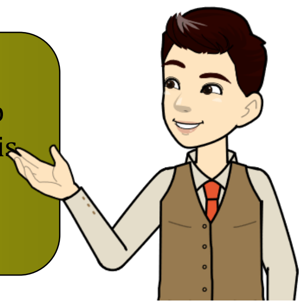
dengan $u = u(x)$

Turunan Kedua

Jika f fungsi yang terturunkan, maka turunannya f' juga berupa fungsi, sehingga f' boleh jadi mempunyai turunan tersendiri, yang dinyatakan oleh $(f')' = f''$. Fungsi f'' yang baru ini disebut turunan kedua dari f karena dia berupa turunan dari turunan f.

Definisi 1

Jika $f'(x)$ (turunan pertama suatu fungsi) diturunkan lagi terhadap x, maka akan diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x, ditulis dengan $f''(x)$ atau y'' atau $\frac{d^2 f}{dx^2}$ atau $\frac{d^2 y}{dx^2}$ atau $D^2 f(x)$.



Contoh 5

Tentukan turunan kedua fungsi trigonometri berikut.

a. $y = \sin(3x + \pi)$
b. $y = \cos^2 x$
c. $y = x \cos x$

Penyelesaian :

a. $y = \sin(3x + \pi)$

$y' = 3\cos(3x + \pi)$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

$y'' = -9\sin(9x + \pi)$ (turunan $y = \cos u$ adalah $y' = -\,u' \sin u$)

b. $y = \cos^2 x$
$y' = -2\cos x \sin x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \cdot u'$)
$y' = -\sin 2x$ ($\sin 2x = 2\sin x \cos x$)
$y'' = -2\cos 2x$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

c. $y = x\cos x$
$y' = \cos x - x\sin x$ ($y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$)
$y'' = -\sin x - (\sin x + x\cos x)$ ($y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$)
$y'' = -2\sin x - x\cos x$

Laju yang Berkaitan

Hal utama dalam persoalan laju yang berkaitan adalah menghitung laju perubahan suatu besaran dalam bentuk laju perubahan besaran lain (yang boleh jadi jauh lebih mudah diukur). Jika variabel y tergantung kepada waktu, maka turunannya $\frac{dy}{dt}$ disebut **laju sesaat perubahan**. Tentu saja, jika y mengukur jarak, maka laju sesaat perubahan ini juga disebut kecepatan (v). Laju sesaat dari perubahan kecepatan akan menghasilkan percepatan (a).

- kecepatan $v \Rightarrow v(t) = \frac{dy}{dt} = y'(t)$
- percepatan $a \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = y''(t)$

Kita tertarik pada beraneka laju sesaat, laju air mengalir ke dalam ember, laju membesarnya luas pencemaran minyak, laju bertambahnya nilai kapling tanah, dan lain-lain.

Strategi untuk pemecahan masalah khususnya mengenai laju yang berkaitan, adalah:

1. Baca masalah secara seksama.
2. Gambarkan diagram jika mungkin.
3. Perkenalkan notasi. Berikan lambing kepada semua besaran yang merupakan fungsi waktu.
4. Nyatakan informasi yang diketahui dan laju yang diperlukan dalam bentuk turunan.
5. Tuliskan persamaan yang mengaitkan beragam besaran dari masalah tersebut. Jika perlu, gunakan geometri untuk menghilangkan satu peubah melalui substitusi.
6. Gunakan aturan rantai untuk menurunkan kedua ruas persamaan terhadap t.
7. Substitusikan informasi yang diketahui ke dalam persamaan yang dihasilkan dan pecahkan untuk laju yang tidak diketahui tersebut.

Contoh 6

Sebuah gelombang transversal merambat dengan persamaan $y = 0{,}1\sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 2 meter dari pusat gelombang. Berapakah kecepatan dan percepatan partikel gelombang itu pada saat detik ke-3?

Penyelesaian:

$$y = 0{,}1\sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$$

Persamaan kecepatan dan percepatan gelombang tersebut adalah:

$v = y' = \left(\frac{1}{4}\pi\right) 0{,}1\cos\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right) = 0{,}025\pi\cos\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$, dan

$a = v' = y'' = \left(\frac{1}{4}\pi\right) 0{,}025\pi\sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right) = 0{,}00625\pi^2\sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$

Pada saat $t = 3$ detik dan $x = 2$ meter, maka

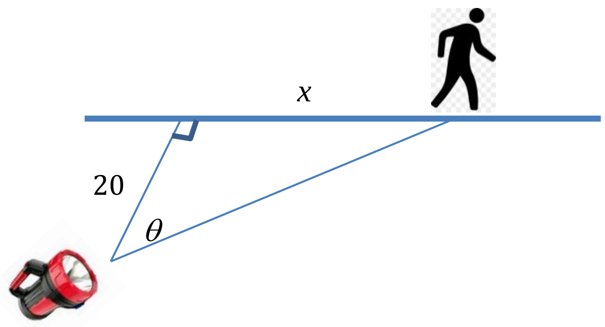
$$v = 0{,}025\pi \cos\left(\frac{1}{4}\pi(3) - \frac{1}{4}\pi(2)\right)$$
$$= 0{,}025\pi \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$$
$$= 0{,}025\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$
$$= 0{,}0125\pi\sqrt{2}$$
$$\approx 0{,}056$$
$$a = 0{,}00625\pi^2 \sin\left(\frac{1}{4}\pi(3) - \frac{1}{4}\pi(2)\right)$$
$$= 0{,}00625\pi^2 \sin\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= 0{,}00625\pi^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$
$$\approx 0{,}0436$$

Jadi, kecepatan partikel gelombang pada detik ke-3 di posisi 2 meter dari pusat gelombang adalah 0,056 m/detik dan percepatan partikel gelombangnya adalah 0,0436 m^2/detik.

Contoh 7

Seseorang berjalan menurut tapak lurus pada kecepatan 4 meter/detik. Lampu pencari terletak di tanah sejauh 20 meter dari tapak dan tetap dipusatkan pada orang itu. Pada laju berapa lampu pencari berputar jika orang itu berada 15 meter dari titik pada tapak yang terdekat ke lampu pencari?

Penyelesaian:



Kita lukiskan seperti gambar di atas dan misalkan x adalah jarak dari titik pada tapak yang terdekat ke lampu pencari ke orang tersebut. Kita misalkan θ adalah sudut antara sinar lampu pencari dan garis tegak lurus pada tapak.

Diketahui bahwa $\frac{dx}{dt} = 4$ meter/detik dan diminta mencari $\frac{d\theta}{dt}$ pada saat $x = 15$. Persamaan yang mengaitkan x dan θ dapat dituliskan berdasarkan Gambar.

$$\frac{x}{20} = \tan\theta$$
$$x = 20\tan\theta$$

Dengan menurunkan masing-masing ruas terhadap t, diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

Sehingga

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\,\frac{dx}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$$

Pada saat x = 15, panjang sinar adalah 25, sehingga $\cos\theta = \frac{4}{5}$ dan

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0{,}128$$

Jadi, lampu pencari berputar pada laju 0,128 radian/detik.

C. Rangkuman

- Jika f dan g keduanya fungsi fungsi yang dapat diturunkan dan $F = f \circ g$ adalah fungsi komposisi yang didefinisikan oleh $F = f(g(x))$, maka F dapat diturunkan menjadi F' yang diberikan oleh hasil kali
$$F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$
Dalam notasi Leibniz, jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ keduanya fungsi yang dapat diturunkan, maka
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$
- Misalkan $u = u(x)$, maka rumus umum turunan fungsi trigonometri adalah:
  - $y = \sin^n u \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u . \cos u . u'$
  - $y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n \cos^{n-1} u . \sin u . u'$
  - $y = \tan^n u \Rightarrow y' = n \tan^{n-1} u . \sec^2 u . u'$
  - $y = \cot^n u \Rightarrow y' = -n \cot^{n-1} u . \csc^2 u . u'$
  - $y = \sec^n u \Rightarrow y' = n \sec^{n-1} u . \sec u \tan u . u'$
  - $y = \csc^n u \Rightarrow y' = -n \csc^{n-1} u . \csc u \cot u . u'$
- Jika $f'(x)$ (turunan pertama suatu fungsi) diturunkan lagi terhadap x, maka akan diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x, ditulis dengan $f''(x)$ atau y'' atau $\frac{d^2 f}{dx^2}$ atau $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
- Laju yang berkaitan adalah menghitung laju perubahan suatu besaran dalam bentuk laju perubahan besaran lain (yang boleh jadi jauh lebih mudah diukur). Jika variabel y tergantung kepada waktu, maka turunannya $\frac{dy}{dt}$ disebut laju sesaat perubahan.

D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan jujur dan benar.

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $f(x) = \cos(4x - \pi)$
   b. $f(x) = \cos^5(3 - 2x)$
   c. $f(x) = x\cos^2 2x - 2x^3$
2. a. Jika $f(x) = 4\cos^3 x$, maka tentukan nilai $f'(x)$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$
   b. Jika $f(x) = \sin^2(2x + \frac{\pi}{6})$, maka tentukan nilai $f'(0)$.
3. Tentukan turunan kedua dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $y = \cos(2x + \pi)$
   b. $y = \sin^2 x$
4. Sebuah gelombang transversal merambat dengan persamaan $y = 2\sin(5\pi t - \pi x)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 4 meter dari pusat gelombang. Berapakah kecepatan dan percepatan partikel gelombang itu pada saat detik ke-2?
5. Disebuah menara yang tingginya 100 m dari atas tanah, seorang penjaga pantai melihat sebuah kapal mendekat dengan laju 5 m/s. Tentukan laju perubahan sudut depresi penjaga pantai terhadap waktu pada saat jarak kapal terhadap menara 100 m.

Kunci Jawaban dan Pembahasan

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $f(x) = \cos(4x - \pi)$
   b. $f(x) = \cos^5(3 - 2x)$
   c. $f(x) = x\cos^2 2x - 2x^3$

   Penyelesaian:

   a. $f(x) = \cos(4x - \pi)$ **(skor maksimum 10)**

   $y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \,.\, u'$

   maka

   $f'(x) = -\sin(4x - \pi)\,(4)$

   $f'(x) = -4\sin(4x - \pi)$

   b. $f(x) = \cos^5(3 - 2x)$ **(skor maksimum 10)**

   $y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n\cos^{n-1} u \,.\, \sin u \,.\, u'$

   maka

   $$\begin{aligned} f'(x) &= -5\cos^4(3 - 2x)\sin(3 - 2x)\,(-2) \\ &= 10\cos^4(3 - 2x)\sin(3 - 2x) \\ &= 5\cos^3(3 - 2x)\,[2\cos(3 - 2x)\sin(3 - 2x) \\ &= 5\cos^3(3 - 2x)\sin 2(3 - 2x) \\ &= 5\cos^3(3 - 2x)\sin(6 - 4x) \end{aligned}$$

   c. $f(x) = x\cos^2 2x - 2x^3$ **(skor maksimum 10)**

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 1.\cos^2 2x + x.(2.\cos 2x.(-\sin 2x).2) - 6x^2 \\ &= \cos^2 2x - 4x.\cos 2x \sin 2x - 6x^2 \\ &= \cos^2 2x - 2x.(2\cos 2x \sin 2x) - 6x^2 \\ &= \cos^2 2x - 2x.\sin 2(2x) - 6x^2 \\ &= \cos^2 2x - 2x.\sin 4x - 6x^2 \end{aligned}$$

2. a. Jika $f(x) = 4\cos^3 x$, maka tentukan nilai $f'(x)$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$

   Penyelesaian: **(skor maksimum 10)**

   $f(x) = 4\cos^3 x$

   $f'(x) = 4.3.\cos^2 x.(-\sin x)$

   $f'(x) = -12.\sin x.\ \cos^2 x$

   $$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -12\sin\frac{\pi}{3}.\ \cos^2\frac{\pi}{3} \\ &= -12\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

   b. Jika $f(x) = \sin^2(2x + \frac{\pi}{6})$, maka tentukan nilai $f'(0)$.

   Penyelesaian: **(skor maksimum 10)**

   $f(x) = \sin^2(2x + \frac{\pi}{6})$

   $f'(x) = 2.\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).2$

   $f'(x) = \sin 2\left(\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right).2$

   $$\begin{aligned} f'(0) &= 2.\sin 2(2.0 + \frac{\pi}{6}) \\ &= 2.\sin\frac{2\pi}{6} \\ &= 2.\sin\frac{\pi}{3} \\ &= 2.\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$= 1$

3. Tentukan turunan kedua dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $y = \cos(2x + \pi)$
   b. $y = \sin^2 x$

   Penyelesaian:

   a. $y = \cos(2x + \pi)$ **(skor maksimum 10)**
      $y' = -2\sin(2x + \pi)$ (turunan $y = \cos u$ adalah $y' = -u'\sin u$)
      $y'' = -4\cos(2x + \pi)$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u'\cos u$)
   b. $y = \sin^2 x$ **(skor maksimum 10)**
      $y' = 2\sin x\cos x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \,.\, u'$)
      $y' = \sin 2x$ ($\sin 2x = 2\sin x\cos x$)
      $y'' = 2\cos 2x$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u'\cos u$)

4. Sebuah gelombang transversal merambat dengan persamaan $y = 2\sin(5\pi t - \pi x)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 4 meter dari pusat gelombang. Berapakah kecepatan dan percepatan partikel gelombang itu pada saat detik ke-2?

   Penyelesaian: **(skor maksimum 10)**

   $y = 2\sin(5\pi t - \pi x)$

   Persamaan kecepatan dan percepatan gelombang tersebut adalah:

   $v = y' = (5\pi)\,2\cos(5\pi t - \pi x) = 10\pi\cos(5\pi t - \pi x)$, dan

   $a = v' = y'' = -(5\pi)10\pi\sin(5\pi t - \pi x) = -50\pi^2\sin(5\pi t - \pi x)$

   Pada saat $t = 2$ detik dan $x = 4$ meter, maka

   $v = 10\pi\cos\big(5\pi(2) - \pi(4)\big) = 10\pi\cos(6\pi) = 10\pi$

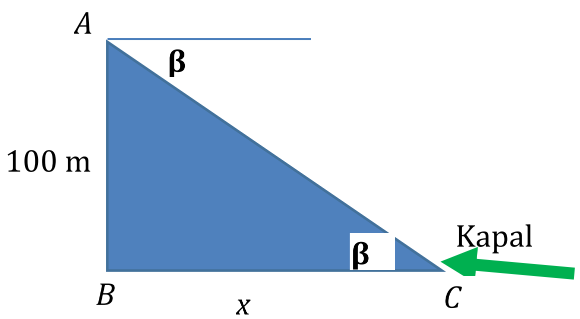
   $a = -50\pi^2\sin\big(5\pi(2) - \pi(4)\big) = -50\pi^2\sin(6\pi) = 0$

   Jadi, kecepatan partikel gelombang pada detik ke-2 di posisi 4 meter dari pusat gelombang adalah 10π m/detik dan percepatan partikel gelombangnya adalah 0.

5. Disebuah menara yang tingginya 100 m dari atas tanah, seorang penjaga pantai melihat sebuah kapal mendekat dengan laju 5 m/s. Tentukan laju perubahan sudut depresi penjaga pantai terhadap waktu pada saat jarak kapal terhadap menara 100 m.

   Penyelesaian: **(skor maksimum 10)**

   Perhatikan gambar berikut:



Diketahui : $\frac{dx}{dt} = 5$ m/s, $AB = 100$ m, $BC = 100$ m

Ditanyakan : $\frac{d\beta}{dt}$

Dari ΔABC, perhatikan

$\cot\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{100}$

$x = 100.\cot\beta$

Ruas kiri dan ruas kanan diturunkan terhadap t.

$\frac{dx}{dt} = 100.(-\csc^2\beta)\frac{d\beta}{dt}$, Subtitusikan $\frac{dx}{dt} = 5$ dan $\tan\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{100}{100} = 1 \rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$

5 = 100.$(-\csc^2 \frac{\pi}{4}) \frac{d\beta}{dt}$

$\frac{5}{100} = -(\sqrt{2})^2 \frac{d\beta}{dt}$

$\frac{1}{20} = -2 \frac{d\beta}{dt}$

$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{40}$ (tanda negative hanya menunjukkan arah)

Jadi, laju perubahan sudut depresi penjaga pantai terhadap waktu $\frac{1}{40}$ radian/sekon.

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Anda mampu menentukan turunan fungsi trigonometri ?		
2.	Apakah Anda telah memahami penggunaan aturan rantai?		
3.	Apakah Anda dapat menggunakan aturan rantai dalam turunan fungsi trigonometri?		
4.	Apakah Anda dapat menentukan turunan kedua fungsi trigonometri?		
5.	Dapatkah Anda menyelesaikan masalah penggunaan turunan fungsi trigonometri dalam laju yang berkaitan?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Jika $y = 3x^4 + \sin 2x + \cos 3x$, maka $\frac{dy}{dx}$ = ...
   A. $12x^3 + 2\cos 2x + 3\sin 3x$
   B. $12x^3 + \cos 2x - \sin 3x$
   C. $12x^3 - 2\cos 2x + 3\sin 3x$
   D. $12x^3 - 2\cos 2x - 3\sin 3x$
   E. $12x^3 + 2\cos 2x - 3\sin 3x$
2. Jika $y = 3\sin 2x - 2\cos 3x$, maka $\frac{dy}{dx} = \cdots$.
   A. $6\cos 2x + 6\sin 3x$
   B. $-6\cos 2x - 6\sin 3x$
   C. $6\cos 2x - 6\sin 3x$
   D. $3\cos 2x + 3\sin 3x$
   E. $3\cos 2x - 3\sin 3x$
3. Jika $f(x) = a\tan x + bx$, dengan $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ dan $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 9$, nilai $a + b$ = ...
   A. 0
   B. 1
   C. $\frac{1}{2}\pi$
   D. 2
   E. π
4. Jika $f(x) = a\cot x + bx$ dan $f'(\frac{1}{6}\pi) = 5$ dan $f'(\frac{1}{4}\pi) = 1$, maka nilai $a.b$ = ...
   A. -6
   B. -3
   C. 3
   D. 6
   E. 8
5. Jika fungsi $f(x) = \sin ax + \cos bx$ memenuhi $f'(0) = b$ dan $f'\left(\frac{\pi}{2a}\right) = -1$, maka $a + b$ = ...
   A. -1
   B. 0
   C. 1
   D. 2
   E. 3
6. Jika $f(x) = x\cos x$, maka $f'(x + \frac{1}{2}\pi)$ = ...
   A. $-\sin x - x\cos x + \frac{1}{2}\pi\cos x$
   B. $-\sin x - x\cos x - \frac{1}{2}\pi\cos x$
   C. $-\sin x + x\cos x - \frac{1}{2}\pi\cos x$
   D. $-\sin x + x\cos x + \frac{1}{2}\pi\cos x$
   E. $-\cos x + x\sin x + \frac{1}{2}\pi\cos x$
7. Turunan pertama fungsi $f(x) = 5\sin x\cos x$ adalah $f'(x)$ = ...
   A. $5\sin 2x$
   B. $5\cos 2x$
   C. $5\sin^2 x\cos x$
   D. $5\sin x\cos^2 x$
   E. $5\sin 2x\cos x$

8. Turunan pertama dari $f(x) = (3x^2 - 5)\cos x$ adalah $f'(x) = \ldots.$
   A. $3x \sin x + (3x^2 - 5) \cos x$
   B. $3x \cos x + (3x^2 - 5) \sin x$
   C. $-6x \sin x - (3x^2 - 5) \cos x$
   D. $6x \cos x + (3x^2 - 5) \sin x$
   E. $6x \cos x - (3x^2 - 5) \sin x$
9. Turunan pertama dari $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ adalah $y' = \ldots.$
   A. $\dfrac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$
   B. $\dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$
   C. $\dfrac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$
   D. $\dfrac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$
   E. $\dfrac{2 \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$
10. Diketahui $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$. Jika $f'(x)$ adalah turunan dari $f(x)$ maka nilai dari $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ldots.$
    A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
    B. $-\frac{1}{2}$
    C. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$
    D. $\frac{1}{2}$
    E. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
11. Jika $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x}$, $\sin x \neq 0$ dan $f'(x)$ adalah turunan $f(x)$, maka $f'(\frac{\pi}{2}) = \ldots.$
    A. -2
    B. -1
    C. 0
    D. 1
    E. 2
12. Nilai turunan pertama $y = \sin(x + 20^\circ)$ pada $x = 10^\circ$ adalah ….
    A. $\frac{1}{2}$
    B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
    C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
    D. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
    E. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
13. Jika $f(x) = -(\cos^2 x - \sin^2 x)$, maka $f'(x)$ adalah ….
    A. $2(\sin x + \cos x)$
    B. $2(\cos x - \sin x)$
    C. $\sin x \cos x$
    D. $2 \sin x \cos x$
    E. $4 \sin x \cos x$

14. Diketahui fungsi $f(x) = (x + \sin 3x)$ dan $g(x) = x^2$. Jika $u(x) = g(f(x))$, maka turunan pertama dari $u(x)$ adalah $u'(x) = ...$
    A. $2\ (x + \sin 3x + 3\ x \sin 3x + 3 \sin^2 3x)$
    B. $2x + 2 \sin 3x + 6\ x \cos 3x + 3 \sin 6x$
    C. $2x + 6 \sin 3x + \cos 3x$
    D. $2\ (x + \sin 3x + 3 \sin 3x + \sin^2 3x)$
    E. $2x + 6 \sin 3x + 3x \cos 3x + \sin 3x \cos 3x$
15. Turunan pertama $f(x) = \cos^3 x$ adalah ….
    A. $f'\ (x) = -\frac{3}{2} \cos x \sin 2x$
    B. $f'\ (x) = \frac{3}{2} \cos x \sin 2x$
    C. $f'\ (x) = -3 \sin x \cos x$
    D. $f'\ (x) = 3 \sin x \cos x$
    E. $f'\ (x) = -3\cos^2 x$
16. Diketahui $F(x) = \sin^2(2x + 3)$. Turunan pertama dari $F(x)$adalah….
    A. $F'(x) = -4\sin(4x + 6)$
    B. $F'(x) = -2\sin(4x + 6)$
    C. $F'(x) = \sin(4x + 6)$
    D. $F'(x) = 2\sin(4x + 6)$
    E. $F'(x) = 4\sin(4x + 6)$
17. Turunan pertama dari $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 3x}$ adalah $f'(x) = \ldots.$
    A. $\frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}} 3x$
    B. $2\cos^{-\frac{1}{3}} 3x$
    C. $\frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}} 3x\sin 3x$
    D. $-2\cot 3x \cdot \sqrt[3]{\sin^2 3x}$
    E. $2\cot 3x \cdot \sqrt[3]{\sin^2 3x}$
18. Jika $f(x) = \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, maka nilai dari $f'(0) = \ldots.$
    A. $2\sqrt{3}$
    B. 2
    C. $\sqrt{3}$
    D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
    E. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
19. Diketahui $y = x \cos x$, maka $y'' + y = ….$
    A. $\sin x \cos x$
    B. $2 \cos x$
    C. $-2 \sin x$
    D. $\cos x - \sin x$
    E. $2 \cos x - 1$
20. Turunan kedua dari $f(x) = \cos^2 2x$ adalah ....
    A. $-6 \sin 2x$
    B. $-8 \cos 4x$
    C. $8 \cos 4x$
    D. $8 \sin 4x$
    E. $3 \sin 2x \cos 2x$
21. Sebuah partikel sedang bergerak dengan persamaan perpindahan dari titik awal gerak $x = 5 \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$ dengan x dalam meter dan t dalam sekon. Kecepatan awal partikel adalah ….

A. 2
B. 3
C. 4
D. 5
E. $5\sqrt{3}$

22. Sebuah gelombang merambat dengan persamaan $y = 3\sin(2\pi t - \pi x)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 2 meter dari pusat gelombang. Kecepatan gelombang itu pada saat detik ke-2 adalah ….
A. 3π m/detik
B. 4π m/detik
C. 6π m/detik
D. 7π m/detik
E. 8π m/detik

23. Rata-rata pertumbuhan suatu bakteri setelah t detik diberikan oleh persamaan $N(t)$ = cos t + 5 tan 5t. Laju sesaat pertumbuhan bakteri tersebut ketika mencapai 30 detik ….
A. $\frac{197}{12}$ bakteri/detik
B. $\frac{197}{6}$ bakteri/detik
C. $\frac{100}{3}$ bakteri/detik
D. $\frac{197}{3}$ bakteri/detik
E. $\frac{197}{2}$ bakteri/detik

24. Sebuah layang-layang terbang 100 kaki di atas tanah, bergerak dalam arah horizontal dengan laju 10 kaki / detik. Seberapa cepat sudut antara tali dan perubahan horizontal ketika panjang tali yang terulur 300 kaki keluar?
A. $\frac{1}{90}$
B. $\frac{1}{45}$
C. $\frac{1}{30}$
D. 30
E. 90

25. Dua sisi sebuah segitiga mempunyai panjang 4 m dan 5 m dan sudut diantaranya bertambah pada laju 0,06 radial/detik. Laju bertambahnya luas segitiga pada waktu sudut antar sisi panjang tetap $\frac{\pi}{3}$ adalah ….
A. 0,03 m^2/detik
B. 0,1 m^2/detik
C. 0,2 m^2/detik
D. 0,3 m^2/detik
E. 0,6 m^2/detik

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. E
2. A
3. A
4. D
5. D
6. B
7. B
8. E
9. B
10. A
11. B
12. C
13. E
14. B
15. A
16. D
17. E
18. C
19. B
20. B
21. D
22. C
23. B
24. A
25. D

DAFTAR PUSTAKA

Chakrabarti, J, *et al*. 2014. *Matematika untuk SMA Kelas XI Peminatan Matematika dan Ilmu Alam*. Bogor: Quadra.

Kanginan, Marthen. 2016. *Matematika Kelas XII Peminatan*. Bandung: Yrama Widya.

Priatna, Nanang dan Titi Sukamto. 2016. *Buku Siswa Aktif dan Kreatif Belajar Matematika untuk SMA/MA Kelas XII Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam*. Bandung: Grafindo Media Pratama.

Purcell, E.J., dan Dale Varberg. 1990. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

Setiawan. 2004. *Pengantar Kalkulus*. Yogyakarta: PPPG Matematika.

Simangunsong, W., dan Frederik M. Poyk. 2016. *Matematika Peminatan Kelas XII SMA/MA*. Jakarta: Gematama.

Soedyarto, Nugroho. 2008. *Matematika Aplikasi Jilid 2*. Jakarta: Pusat Perbukuan Depatemen Pendidikan Nasional.

Suparmin dan Aditya Nur Rochma. 2016. *Matematika Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam untuk SMA/MA Kelas XII*. Surakarta: Mediatama.

Stewart, James. 2001. *Kalkulus Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Peminatan

KELAS XII

APLIKASI TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XII

PENYUSUN
Kusnandar

SMA Negeri 4 Bogor

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

cekung ke atas : Jika grafik fungsi terletak di atas semua garis singgungnya pada suatu interval tertentu.

cekung ke bawah : Jika grafik fungsi terletak di bawah semua garis singgungnya pada suatu interval tertentu.

fungsi naik : sebarang fungsi $f(x)$ dimana x bergerak ke kanan, maka grafik fungsi tersebut bergerak ke atas atau naik.

fungsi turun : sebarang fungsi $f(x)$ dimana x bergerak ke kanan, maka grafik fungsi tersebut bergerak ke bawah atau turun.

gradien **:** kemiringan, ukuran seberapa cepat nilai fungsinya berubah; nilai turunan fungsi di titik singgungnya.

garis singgung **:** kurva bidang pada titik yang diketahui ialah garis lurus yang "hanya menyentuh" kurva pada titik tersebut.

garis normal : garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung.

nilai maksimum **:** nilai terbesar dari suatu fungsi pada interval tertentu.

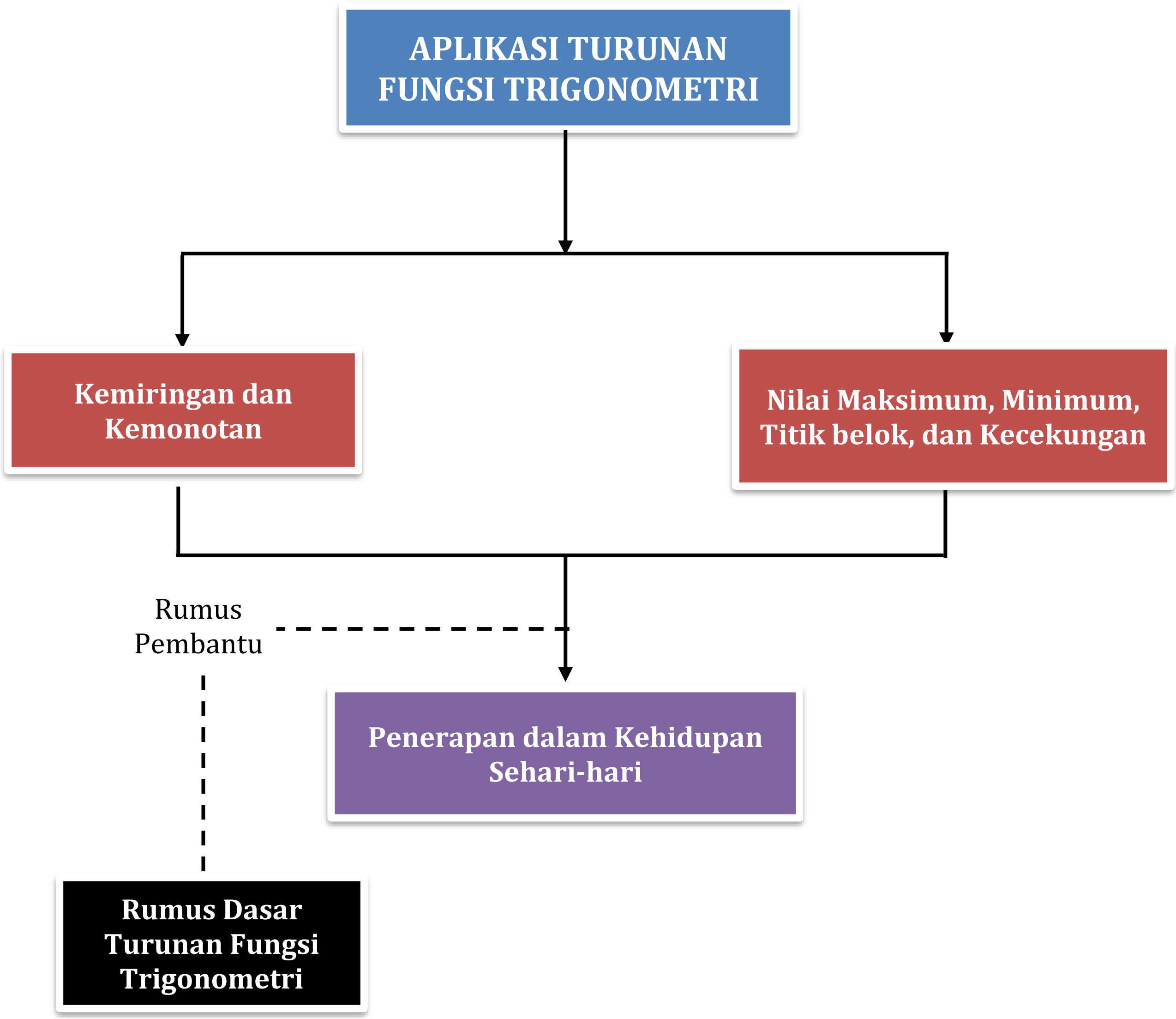
nilai minimum : nilai terkecil dari suatu fungsi pada interval tertentu.

titik stasioner : titik pada kurva yang mengakibatkan kurva tersebut tidak naik dan tidak turun.

titik belok : jika fungsi cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi yang lainnya dari *I.*

turunan : laju perubahan suatu fungsi terhadap perubahan peubahnya.

PETA KONSEP


APLIKASI TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI
Kemiringan dan Kemonotan
Nilai Maksimum, Minimum, Titik belok, dan Kecekungan
Rumus Pembantu
Penerapan dalam Kehidupan Sehari-hari
Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri

`

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Peminatan
Kelas	:	XII
Alokasi Waktu	:	12 jam pelajaran
Judul Modul	:	Aplikasi Turunan Fungsi Trigonometri

B. Kompetensi Dasar

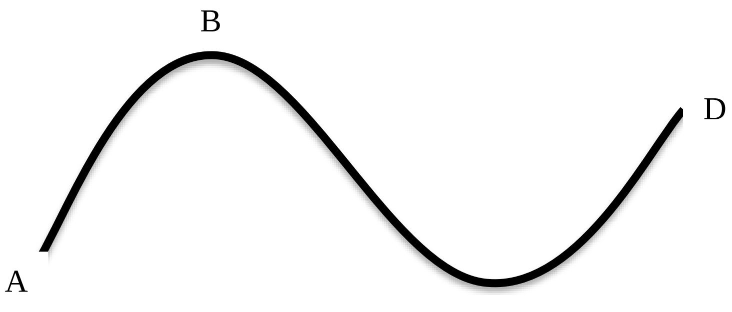
3. 4 Menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri

4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung sertatitik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri

C. Deskripsi Singkat Materi

Konsep turunan adalah subjek yang banyak berperan dalam aplikasi matematika di kehidupan sehari-hari di berbagai bidang. Konsep turunan digunakan untuk menentukan interval fungsi naik/turun, keoptimalan fungsi dan titik belok suatu kurva. Untuk memahami apa yang akan Ananda pelajari dalam modul ini, perhatikan ilustrasi berikut.

Coba bayangkan ketika Ananda mendaki gunung. Ananda akan memulainya di kaki gunung, kemudian perlahan bergerak ke atas sampai tiba di puncak gunung. Ketika berada di puncak gunung Ananda merasa berada di titik paling atas bukan? Nahh setelah itu Ananda turun kembali menuju lembah sampai tiba di kaki gunung kembali. Pergerakan Ananda mendaki gunung dapat diilustrasikan dengan gambar sebagai berikut:



Gambar 1

Dari ilustrasi tersebut, ketika Ananda bergerak dari titik A menuju ke titik B, Ananda akan bergerak naik hingga sampai puncak, kemudian Ananda bergerak dari titik B ke titik C, pergerakan Ananda akan turun, demikian juga ketika Ananda bergerak dari titik C ke D Ananda akan bergerak naik. Deskripsi ini menggambarkan fungsi naik untuk pergerakan dari A ke B, fungsi turun untuk pergerakan dari *B* ke *C*. Dari Gambar 1 juga dapat kita lihat terdapat puncak dan lembah. Nahh ketika Ananda berada di puncak berarti Ananda akan berada di titik maksimum, demikian juga ketika Ananda berada di bawah akan berada di titik minimum. Inilah yang disebut titik ekstrim atau titik puncak yang bisa berarti maksimum atau minimum.

Terdapat berbagai pemanfaatan aplikasi turunan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu:

- Salah satu penerapan turunan yang paling umum adalah penentuan nilai maksimum dan minimum. Hal tersebut dapat diamati dengan seberapa sering kita mendengar atau membaca istilah keuntungan terbesar, biaya terkecil, kekuatan terbesar, dan jarak terjauh. Nilai balik maksimum suatu fungsi pada domain *f* dapat berupa nilai maksimum mutlak atau nilai maksimum relatif. Begitupun dengan nilai minimum, dapat berupa nilai minimum mutlak dan nilai minimum relatif. Jika dalam interval tertentu terdapat dua nilai maksimum atau lebih, nilai maksimum mutlak (*absolut*) adalah nilai tertinggi sedangkan yang lainnya merupakan nilai maksimum relatif, begitupun sebaliknya. Jika terdapat dua atau lebih nilai minimum pada suatu fungsi, maka titik terendah merupakan nilai minimum mutlak (*absolut*), sedangkan yang lainnya merupakan nilai minimum relatif.
- Turunan dapat digunakan untuk menentukan kecepatan dan percepatan sehingga sering digunakan dalam pekerjaan dan penelitian yang membutuhkan ilmu fisika. Selain itu percepatan juga digunakan dalam menghitung laju percepatan pada kegiatan lempar lembing, lempar cakram, menembak, dan lain-lain. Setiap waktu dan percepatannya mempunyai nilai yang dapat diketahui melalui fungsi turunan.
- Dalam membuat konstruksi bangunan, percampuran bahan bahan bangunan yang di lakukan oleh arsitek, pembuatan tiang-tiang, langit-langit, ruangan, dan lain lain menggunakan turunan sehingga bangunan terlihat cantik dan kokoh (optimal). Pembuatan kapal, pesawat, dan kendaraan lainnya menggunakan turunan.
- Kegunaan penurunan, terdapat juga pada *quick count*. Dalam perhitungan tersebut, terdapat juga perhitungan yang baik sehingga dapat mempunyai perhitungan yang maksimal.
- Dalam dunia penerbangan, turunan mempunyai fungsi terpenting untuk menentukkan laju pesawat dengan cepat. Pesawat akan mengikuti navigasi dari tower yang berada di bandara. Setiap laju pesawat akan terdeteksi pada navigasi (menggunakan perhitungan kalkulus otomatis) sehingga laju pesawat tidak salah arah dan percepatannya sesuai dengan panduan dari tower. (Brainly.co.id)

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi Ananda dalam melakukan kegiatan pembelajaran secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.

3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan Ananda dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan Ananda terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar Ananda dapat mengukur penguasaan terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan Ananda untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi 2 kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Kemiringan Garis Singgung dan Kemonotan Fungsi Trigonometri

Kedua : Nilai Maksimum, Nilai Minimum, Kecekungan, dan Titik Belok Fungsi Trigonometri

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Kemiringan Garis Singgung dan Kemonotan Fungsi Trigonometri

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini, diharapkan Ananda dapat menjelaskan keberkaitan turunan pertama fungsi trigonometri dengan kemiringan garis singgung dan selang kemonotonan fungsi (interval fungsi naik dan fungsi turun) dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kemiringan garis singgung serta persamaan garis singgung dan selang kemonotonan fungsi trigonometri.

B. Uraian Materi

Dalam mempelajari modul Aplikasi Turunan Fungsi Trigonometri ada beberapa materi prasayarat yang harus dipelajari kembali, diantaranya adalah rumus turunan atau diferensial fungsi aljabar dan fungsi trigonometri beserta sifat-sifatnya dan rumus dasar persamaan trigonometri.

Rumus Turunan Fungsi Aljabar dan Trigonometri serta Sifat-sifatnya

Untuk $u = u(x)$ dan $v = v(x)$, berlaku:

- $y = \sin u \Rightarrow y' = \cos u \,.\, u'$
- $y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \,.\, u'$
- $y = \tan u \Rightarrow y' = \sec^2 u \,.\, u'$
- $y = \cot u \Rightarrow y' = -\csc^2 u \,.\, u'$
- $y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \tan x$
- $y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cot x$
- $y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n\cos^{n-1} u \,.\sin u \,.u'$
- $y = \sin^n u \Rightarrow y' = n\sin^{n-1} u \,.\cos u \,.u'$
- $y = ax^n \Rightarrow y' = anx^{n-1}$
- $y = u^n \Rightarrow y' = n\, u^{n-1} .\, u'$
- $y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v'$
- $y = u \,.\, v \Rightarrow y' = u' .\, v + u \,.\, v'$
- $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Rumus Dasar Persamaan Trigonometri

Untuk menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri sederhana, perhatikan rumusan berikut.

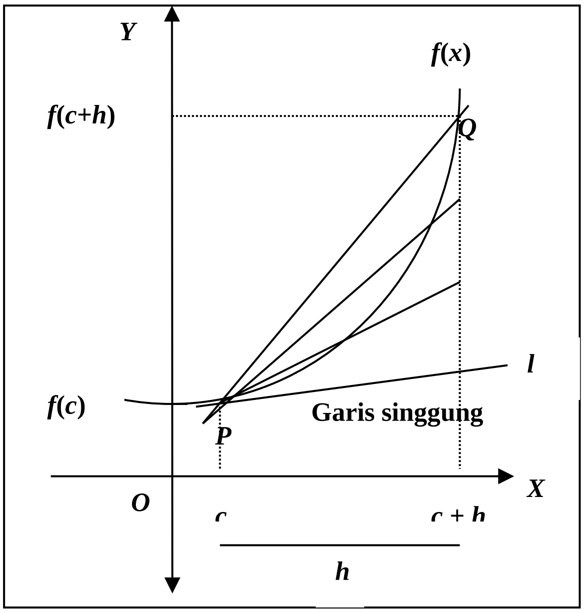
- $\sin x = \sin \alpha$
  - $x = \alpha + n.2\pi$
  - $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$
- $\cos x = \cos \alpha$
  - $x = \alpha + n.\, 2\pi$
  - $x = -\,\alpha + n.2\pi$
- $\tan x = \tan \alpha$
  - $x = \alpha + n.\, \pi$

$n \in B = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dan π dapat diganti dengan 180°

Nah pada modul pembelajaran kali ini Ananda akan mempelajari di interval dimana fungsi naik dan fungsi turun serta statsionernya.

Kemiringan Garis Singgung

Perhatikan Gambar 2 berikut!



Gambar 2. Konsep kemiringan garis singgung

Misalkan P adalah sebuah titik tetap pada suatu kurva dan andaikan Q adalah sebuah titik berdekatan yang dapat dipindah-pindahkan pada kurva tersebut. Koordinat titik P adalah $(c, f(c))$, titik Q mempunyai koordinat $(c + h, f(c + h))$. Tali busur yang melalui P dan Q mempunyai kemiringan atau gradien

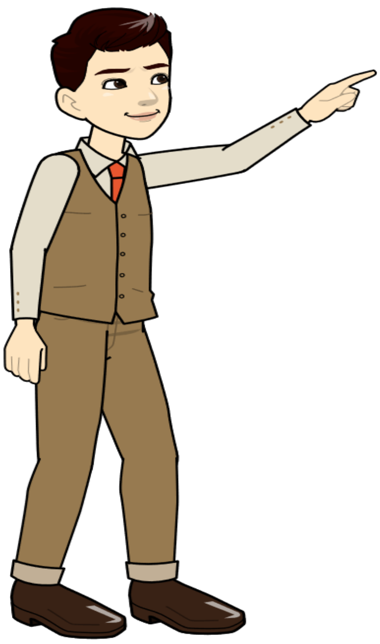
$$m_{PQ} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Garis l merupakan garis singgung kurva di titik P. Kemiringan (gradien) garis singgung l adalah:

$$m = f'(c) = \lim_{h \to 0} m_{PQ}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m\ (x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$

Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung. Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.



Catatan:
Pengertian dua garis sejajar dan tegak lurus sering muncul dalam persamaan garis singgung.

- ❖ Misalkan garis $g: y = m_1x + c_1$ sejajar garis $h: y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h, maka $m_1 = m_2$.
- ❖ Misalkan garis $g: y = m_1x + c_1$ tegak lurus garis $h: y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h, maka $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Contoh 1

Tentukan gradien garis singgung kurva $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ di $x = \frac{\pi}{2}$.

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama dari fungsi y
  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
  $\frac{dy}{dx} = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
- Tentukan gradien garis singgung m
  $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}$
  $m = 2\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{6} = 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}$
- Jadi, gradien garis singgung kurva adalah $-\sqrt{3}$.

Contoh 2

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva $y = \tan x$ di tiik berabsis $\frac{\pi}{3}$.

Penyelesaian :

- Tentukan titik singgung (x_1, y_1)
  absis = x dan ordinat = y
  $x_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y_1 = \tan x_1$
  $y_1 = \tan\frac{\pi}{3}$
  $= \sqrt{3}$
  Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = \left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$
- Tentukan turunan pertama fungsi y
  $y = \tan x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$
- Tentukan gradien m
  $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = \sec^2\frac{\pi}{3} = (2)^2 = 4$
- Tentukan persamaan garis singgung
  $y - y_1 = m(x - x_1)$
  $\Leftrightarrow y - \sqrt{3} = 4\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
  $\Leftrightarrow 3y - 3\sqrt{3} = 12x - 4\pi$ (kedua ruas kalikan dengan 3)
  $\Leftrightarrow 12x - 3y - 4\pi + 3\sqrt{3} = 0$
- Tentukan persamaan garis normal
  $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$
  $\Leftrightarrow y - \sqrt{3} = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
  $\Leftrightarrow 12y - 12\sqrt{3} = -3x + \pi$ (kedua ruas kalikan dengan 12)
  $\Leftrightarrow 3x + 12y - \pi - 12\sqrt{3} = 0$
- Kesimpulan
  Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = \tan x$ di tiik berabsis $\frac{\pi}{3}$ adalah $12x - 3y - 4\pi + 3\sqrt{3} = 0$ dan persamaan garis normalnya adalah $3x + 12y - \pi - 12\sqrt{3} = 0$.

Contoh 3

Diketahui kurva $y = \cos^2(x + 15^o)$ pada interval $0^o \le x \le 90^o$. Tentukan persamaan garis singgung yang tegak lurus dengan garis $6x + 3y - 1 = 0$.

Penyelesaian :

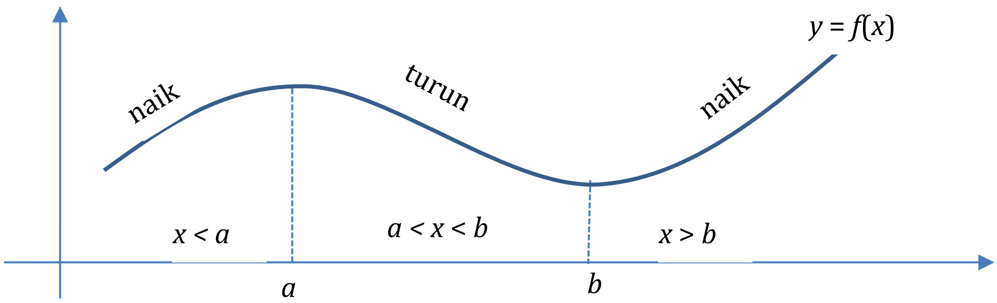
- Tentukan turunan pertama fungsi y
  $y = \cos^2(x + 15^o)$
  $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2\cos(x + 15^o)\sin(x + 15^o)$
  $= -\sin 2(x + 15^o)$
  $= -\sin(2x + 30^o)$
- Tentukan gradien garis singgung
  Misal garis h: $6x + 3y - 1 = 0$
  $y = -2x - \frac{1}{3} \Rightarrow m_h = -2$
  Misal g adalah garis singgung kurva, karena garis g tegak lurus garis h ($g \perp h$), maka $m_g \cdot m_h = -1$
  $m_g \cdot (-2) = -1$
  $m_g = \frac{1}{2}$
- Tentukan titik singgung (x_1, y_1)
  $m_g = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$
  $\frac{1}{2} = -\sin(2x_1 + 30^o)$
  $\sin(2x_1 + 30^o) = -\frac{1}{2}$
  $\sin(2x_1 + 30^o) = \sin 210^o$ ($\sin x = \sin\alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$)
  $2x + 30^o = 210^o + n.360^o$ atau $2x + 30^o = (180^o - 210^o) + n.360^o$
  $2x = 180^o + n.360^o$ atau $2x = -60^o + n.360^o$
  $x = 90^o + n.180^o$ atau $x = -30^o + n.180^o$
  $n = 0 \Rightarrow x = 90^o$ $n = 1 \Rightarrow x = 150^o$ (tidak memenuhi $0^o \le x \le 90^o$)

  - $x = 90^o \Rightarrow y = \cos^2(90^o + 15^o) = \cos^2(105^o)$
    $\cos(105^o) = \cos(60^o + 45^o)$
    $= \cos 60^o \cos 45^o - \sin 60^o \sin 45^o$
    $= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$
    $= \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$
    $y = \cos^2(105^o) = \left(\frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})\right)^2 = \frac{1}{16}(8 - 4\sqrt{3}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$

  Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = (\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3})$
- Tentukan persamaan garis singgung
  $y - y_1 = m_g(x - x_1)$
  $\Leftrightarrow y - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})$
  $\Leftrightarrow 4y - 2 + \sqrt{3} = 2x - \pi$ (kedua ruas kalikan dengan 4)
  $\Leftrightarrow 2x - 4y - \pi + 2 - \sqrt{3} = 0$
- Kesimpulan
  Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = \cos^2(x + 15^o)$ pada interval $0^o \le x \le 90^o$ dan tegak lurus dengan garis $6x + 3y - 1 = 0$ adalah $2x - 4y - \pi + 2 - \sqrt{3} = 0$.

Kemonotan Fungsi

Secara grafik, jika kurva suatu fungsi merupakan sebuah kurva mulus, maka fungsi monoton naik dan fungsi monoton turun dapat dengan mudah Ananda amati. Misalnya untuk grafik fungsi yang digambarkan dibawah ini, Ananda dapat mengatakan bahwa fungsi $y = f(x)$ monoton naik pada interval $x < a$ atau $x > b$, monoton turun pada interval $a < x < b$. Kadangkala istilah monoton bisa dihilangkan sehingga menjadi fungsi naik dan fungsi turun.



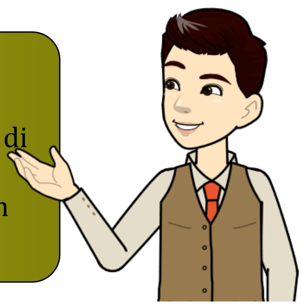
Gambar 3. Interval kurva naik dan turun

Secara aljabar pengertian fungsi naik dan fungsi turun adalah sebagai berikut.

Definisi 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I.

- Fungsi f disebut ***naik*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
- Fungsi f dikatakan ***turun*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

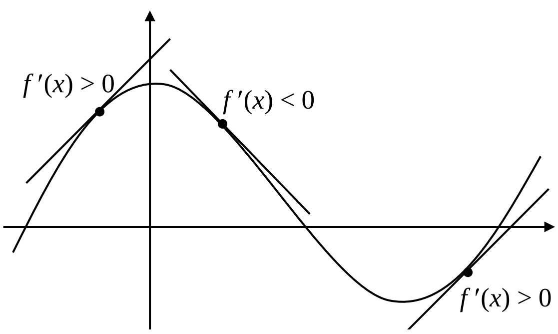


Ingat kembali bahwa turunan pertama $f'(x)$ memberikan makna kemiringan dari garis singgung pada grafik f di titik x. Jika $f'(x) > 0$, garis singgung naik ke kanan (lihat Gambar 3), jika $f'(x) < 0$, garis singgung jatuh ke kanan Untuk menyelidiki atau mencari interval di mana fungsi naik dan di mana fungsi turun, Ananda dapat menggunakan turunan pertama seperti teorema berikut.

Teorema 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I.

- Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi naik.
- Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi turun.



Gambar 3 Fungsi naik dan fungsi turun

Agar Ananda lebih mahir dalam menentukan interval di mana fungsi naik dan turun pada fungsi trigonometri, pelajari contoh berikut.

Contoh 4

Tentukan interval fungsi naik dan fungsi turun dari fungsi trigonometri $f(x) = \cos x$ pada interval $[0, 360^o]$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

  $f(x) = \cos x$

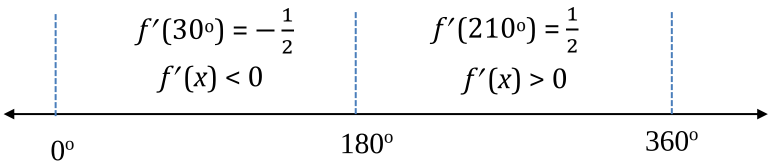
  $f'(x) = -\sin x$ (turunan $y = \cos x$ adalah $y' = -\sin x$)
- Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$

  $f'(x) = 0$

  $-\sin x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan (-1))

  $\sin x = 0$

  $x = 0^o, 180^o, 360^o$
- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda



Gambar 4 Uji nilai $f'(x)$

- Kesimpulan
  - Syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga berdasarkan Gambar 4 $f(x)$ naik pada interval $180^o < x < 360^o$.
  - Syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga berdasarkan Gambar 4 $f(x)$ turun pada interval $0^o < x < 180^o$.

Contoh 5

Tentukan interval fungsi naik dan fungsi turun dari fungsi trigonometri $f(x) = \sin 2x$ pada interval $[0, \pi]$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

  $f(x) = \sin 2x$

  $f'(x) = 2 \cos 2x$ (turunan $y = \sin ax$ adalah $y' = a \cos ax$)
- Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$

  $f'(x) = 0$

  $2 \cos 2x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{2}$)

  $\cos 2x = 0$

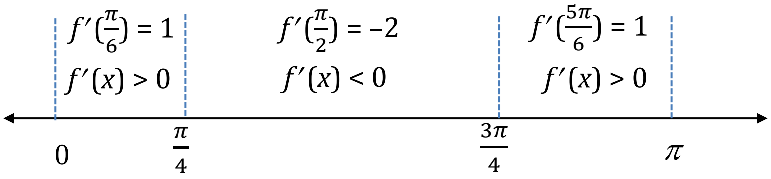
  $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{2}$ (cos x =cos α maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = -\alpha + n.2\pi$)

  $2x = \frac{\pi}{2} + n.\,2\pi$ $\quad$ $2x = -\frac{\pi}{2} + n.\,2\pi$

  $x = \frac{\pi}{4} + n.\,\pi$ $\quad$ $x = -\frac{\pi}{4} + n.\,\pi$

  $n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ $n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

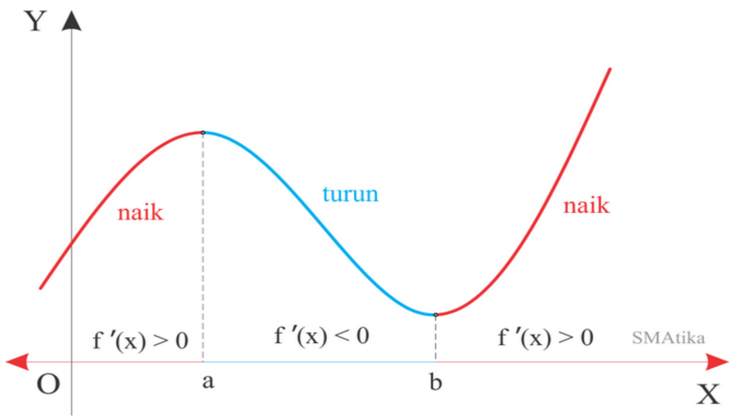


Gambar 5 Uji nilai $f'(x)$

- Kesimpulan
  - Syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga berdasarkan Gambar 5 $f(x)$ naik pada interval $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ atau $\frac{3\pi}{4} < x \leq \pi$.
  - Syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga berdasarkan Gambar 5 $f(x)$ turun pada interval $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

C. Rangkuman

- Gradien garis singgung di titik (x_1, y_1) adalah $m = f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$
- Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m\,(x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$
- Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung. Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.
- Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I.
  - Fungsi f disebut ***naik*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
  - Fungsi f dikatakan ***turun*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.
- Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I.
  - Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi naik.
  - Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi turun.



D. Latihan Soal

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Gradien garis singgung kurva y = tan x di $x = \frac{\pi}{4}$ adalah ….
   A. – 3
   B. –2
   C. –1
   D. 2
   E. 3

2. Gradien garis singgung kurva y = sin $(2x + \frac{\pi}{6})$ di $x = \frac{\pi}{3}$ adalah ….
   A. $-\sqrt{3}$
   B. $-\sqrt{2}$
   C. -1
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   E. $\sqrt{3}$

3. Gradien garis singgung kurva $y = \sqrt{3}$ sin x – cos x di titik berabsis $x = \frac{\pi}{6}$ adalah ….
   A. –2
   B. $-1\frac{1}{2}$
   C. 1
   D. $1\frac{1}{2}$
   E. 2

4. Persamaan garis singgung kurva y = csc x di titik $(30^o, 2)$ adalah ….
   A. $y = -2\sqrt{3}(x - 30^o) - 2$
   B. $y = -2\sqrt{3}(x + 30^o) + 2$
   C. $y = -2\sqrt{3}(x - 30^o) + 2$
   D. $y = 2\sqrt{3}(x - 30^o) + 2$
   E. $y = 2\sqrt{3}(x - 30^o) - 2$

5. Persamaan garis normal dari fungsi y = tan x di titik $(\frac{1}{4}\pi, 1)$ adalah …
   A. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi + 1$
   B. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\pi - 1$
   C. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi - 1$
   D. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\pi - 1$
   E. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\pi + 1$

6. Diketahui garis g menyinggung kurva y = sin x + cos x di titik yang berabsis $\frac{1}{2}\pi$. Garis g memotong sumbu Y dititik ….
   A. $(0, 1 - \frac{\pi}{2})$
   B. $(0, 1)$
   C. $(0, \frac{\pi}{2})$
   D. $(0, \pi)$
   E. $(0, 1 + \frac{\pi}{2})$

7. Grafik fungsi $f(x)$ = sin x akan turun pada interval ....
   A. $0^o < x < 90^o$
   B. $0^o < x < 180^o$
   C. $90^o < x < 1800^o$
   D. $90^o < x < 270^o$
   E. $270^o < x < 360^o$

8. Grafik fungsi $f(x)$ = cos $2x$ akan naik pada interval ....
   A. $0 < x < \frac{\pi}{2}$
   B. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
   C. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$
   D. $\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$
   E. $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

9. Grafik fungsi $f(x) = \sin^2 x$ akan naik pada interval ....
   A. $0 < x < \frac{\pi}{2}$
   B. $0 < x < \pi$
   C. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
   D. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$
   E. $\pi < x < 2\pi$

10. Grafik fungsi $f(x) = \cos^2 (x + 10^o)$ pada interval $0^o < x < 90^o$ akan ....
    A. turun
    B. naik
    C. turun-naik-turun
    D. turun kemudian naik
    E. naik kemudian turun

Pembahasan Latihan Soal Kegiatan Pembelajaran 1

1. Gradien garis singgung kurva y = tan x di $x = \frac{\pi}{4}$ adalah ….
   Jawaban: D
   - Tentukan turunan pertama dari fungsi y
     $y = \tan x$
     $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$
   - Tentukan gradien garis singgung m
     $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$
     $m = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

   Penyelesaian:
     $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$
   - Jadi, gradien garis singgung kurva adalah 2.

2. Gradien garis singgung kurva $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ di $x = \frac{\pi}{3}$ adalah ….
   Jawaban: A
   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dari fungsi y
     $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$
     $\frac{dy}{dx} = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$
   - Tentukan gradien garis singgung m
     $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}}$
     $m = 2\cos\left(2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}$
   - Jadi, gradien garis singgung kurva adalah $-\sqrt{3}$.

3. Gradien garis singgung kurva $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ di titik berabsis $x = \frac{\pi}{6}$ adalah ….
   Jawaban: E
   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dari fungsi y
     $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$
     $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\cos x + \sin x$
   - Tentukan gradien garis singgung m
     $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{6}}$
     $m = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$
   - Jadi, gradien garis singgung kurva adalah 2.

4. Persamaan garis singgung kurva $y = \csc x$ di titik $(30^{\circ}, 2)$ adalah ….
   Jawaban: C
   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dari fungsi y
     $y = \csc x$
     $\frac{dy}{dx} = -\csc x \cot x$
   - Tentukan gradien garis singgung m
     $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=30^{\circ}}$

$m = -\csc 30^o \cot 30^o = -2(\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$

❖ Tentukan persamaan garis singgung di titik $(30^o, 2)$

$y - y_1 = m\ (x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 2 = -2\sqrt{3}\ (x - 30^o)$

$\Leftrightarrow y = -2\sqrt{3}\ (x - 30^o) + 2$

5. Persamaan garis normal dari fungsi $y = \tan x$ di titik $(\frac{1}{4}\pi, 1)$ adalah …

Jawaban: E

Penyelesaian:

❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi y

$y = \tan x$

$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$

❖ Tentukan gradien garis singgung m

$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$

$m = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

❖ Tentukan persamaan garis normal di titik $(\frac{\pi}{4}, 1)$

$y - y_1 = -\frac{1}{m}\ (x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}\ (x - \frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$

6. Diketahui garis g menyinggung kurva $y = \sin x + \cos x$ di titik yang berabsis $\frac{1}{2}\pi$. Garis g memotong sumbu Y dititik ….

Jawaban: E

Penyelesaian:

❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi y

$y = \sin x + \cos x$

$\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$

❖ Tentukan gradien garis singgung m

$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}$

$m = \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$

❖ Tentukan titik singgung (x_1, y_1)

$y = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$

Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = (\frac{\pi}{2}, 1)$

❖ Tentukan persamaan garis singgung

$y - y_1 = m\ (x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 1 = -1(x - \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow y = -x + \frac{\pi}{2} + 1$

❖ Tentukan titik potong dengan sumbu Y

$x = 0 \Rightarrow y = 0 + \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{2} + 1$

Jadi, garis g memotong sumbu Y dititik $(0, \frac{\pi}{2} + 1)$

7. Grafik fungsi $f(x) = \sin x$ akan turun pada interval ...
   Jawaban: D
   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$
     $f(x) = \sin x$
     $f'(x) = \cos x$
   - Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$
     $f'(x) = 0$
     $\cos x = 0$
     $x = 90^o, 270^o$
   - Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

     $f'(60^o) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $f'(180^o) = -1$ $\quad$ $f'(300^o) = \frac{1}{2}$
     $f'(x) > 0$ $\quad$ $f'(x) < 0$ $\quad$ $f'(x) > 0$
     0^o $\quad$ 90^o $\quad$ 270^o $\quad$ 360^o
   - Kesimpulan
     Syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $90^o < x < 270^o$.

8. Grafik fungsi $f(x) = \cos 2x$ akan naik pada interval ...
   Jawaban: B
   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$
     $f(x) = \cos 2x$
     $f'(x) = -2\sin 2x$
   - Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$
     $f'(x) = 0$
     $-2\sin 2x = 0$
     $\sin 2x = 0$
     $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$
   - Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

     $f'(\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$ $\quad$ $f'(\frac{5\pi}{6}) = \sqrt{3}$ $\quad$ $f'(\frac{7\pi}{6}) = -\sqrt{3}$ $\quad$ $f'(\frac{11\pi}{6}) = \sqrt{3}$
     $f'(x) < 0$ $\quad$ $f'(x) > 0$ $\quad$ $f'(x) < 0$ $\quad$ $f'(x) > 0$
     0 $\quad$ $\frac{\pi}{2}$ $\quad$ π $\quad$ $\frac{3\pi}{2}$ $\quad$ 2π
   - Kesimpulan
     Syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ dan $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

9. Grafik fungsi $f(x) = \sin^2 x$ akan naik pada interval ....
   Jawaban: A
   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$
     $f(x) = \sin^2 x$
     $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$
   - Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$
     $f'(x) = 0$
     $\sin 2x = 0$
     $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

- ❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
$f'(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}$	$f'(\frac{7\pi}{12}) = -\frac{1}{2}$	$f'(\frac{13\pi}{12}) = \frac{1}{2}$	$f'(\frac{19\pi}{12}) = -\frac{1}{2}$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$

$0 \qquad \frac{\pi}{2} \qquad \pi \qquad \frac{3\pi}{2} \qquad 2\pi$

- ❖ Kesimpulan

  Syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $0 < x < \frac{\pi}{2}$ dan $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

10. Grafik fungsi $f(x) = \cos^2(x + 10^o)$ pada interval $0^o < x < 90^o$ akan ....

Jawaban: D

Penyelesaian:

- ❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$

  $f(x) = \cos^2(x + 10^o)$

  $f'(x) = -2\cos(x + 10^o)\sin(x + 10^o) = -\sin 2(x + 10^o)$

- ❖ Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$

  $f'(x) = 0$

  $-\sin 2(x + 10^o) = 0$

  $\sin(2x + 20^o) = 0$

  $\sin(2x + 20^o) = \sin 0^o$ (sin x = sin α maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$)

  $2x + 20^o = 0^o + n.360^o$ atau $2x + 20^o = (180^o - 0^o) + n.360^o$

  $2x = -20^o + n.360^o$ atau $2x = 160^o + n.360^o$

  $x = -10^o + n.180^o$ atau $x = 80^o + n.180^o$

  $n = 1 \Rightarrow x = 170^o$ $\qquad$ $n = 0 \Rightarrow x = 80^o$

  $n = 2 \Rightarrow x = 350^o$ $\qquad$ $n = 1 \Rightarrow x = 260^o$

- ❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

$0^o < x < 80^o$	$80^o < x < 170^o$	$170^o < x < 260^o$	$260^o < x < 350^o$	$x > 350^o$
$f'(5^o) = -\frac{1}{2}$	$f'(95^o) = \frac{1}{2}$	$f'(185^o) = -\frac{1}{2}$	$f'(275^o) = \frac{1}{2}$	
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$

$0^o \qquad 80^o \qquad 170^o \qquad 260^o \qquad 350^o$

- ❖ Kesimpulan
  - ➢ Syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $80^o < x < 170^o$ dan $260^o < x < 350^o$.
  - ➢ Syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $0^o < x < 80^o$, $170^o < x < 2600^o$ dan $350^o < x < 360^o$.
  - ➢ Jadi, pada interval $0^o < x < 90^o$ grafikk fungsi turun kemudian naik.

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu menentukan turunan fungsi trigonometri ?		
2.	Apakah Ananda mampu menentukan kemiringan garis singgung suatu kurva trigonometri?		
3.	Apakah Ananda mampu menentukan persamaan garis singgung pada fungsi trigonometri?		
4.	Apakah Ananda mampu menentukan persamaan garis normal pada fungsi trigonometri?		
5.	Apakah Ananda mampu menentukan interval fungsi naik pada fungsi trigonometri ?		
6.	Apakah Ananda mampu menentukan interval fungsi turun pada fungsi trigonometri ?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Nilai Maksimum, Nilai Minimum, Titik Belok, dan Kecekungan Fungsi Trigonometri

A. Tujuan Pembelajaran

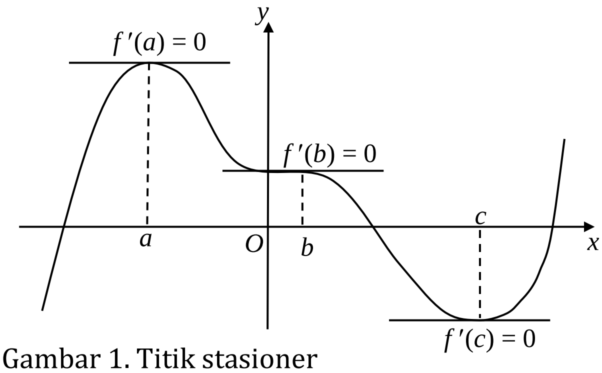
Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Ananda dapat menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi trigonometri dengan nilai maksimum, nilai minimum, titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.

B. Uraian Materi

Titik dan Nilai Stasioner Fungsi Trigonometri

Titik stasioner terjadi apabila garis singgung pada kurva di titik tersebut merupakan garis horisontal. Perhatikan Gambar a disamping.

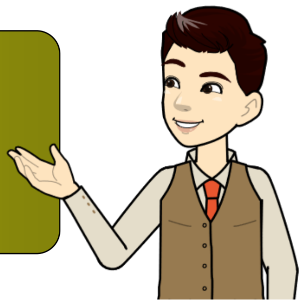
Definisi titik stasioner diberikan sebagai berikut:



Gambar 1. Titik stasioner

Definisi 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang yang mempunyai turunan.
Jika $f'(a) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di titik $x = a$, dengan
- Nilai $f(a)$ disebut nilai stasioner $f(x)$ di $x = a$.
- Titik $(a, f(a))$ disebut titik stasioner



Contoh 1

Tentukan titik dan nilai stasioner fungsi $y = f(x) = \cos 2x$ pada interval $0 \le x \le 2\pi$

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

  $f(x) = \cos 2x$

  $f'(x) = -2 \sin 2x$ (turunan $y = \cos ax$ adalah $y' = -a \sin ax$)
- Syarat stasioner

  $f'(x) = 0$

  $-2 \sin 2x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $-\frac{1}{2}$)

  $\sin 2x = 0$

$\sin 2x = \sin 0$ $\quad$ ($\sin x = \sin \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$)

$2x = 0 + n.\,2\pi$ $\qquad$ $2x = \pi + n.\,2\pi$

$x = n.\,\pi$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{2} + n.\,\pi$

$n = 0 \Rightarrow x = 0$ $\qquad$ $n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$n = 1 \Rightarrow x = \pi$ $\qquad$ $n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

$n = 2 \Rightarrow x = 2\pi$

❖ Menentukan nilai stasioner

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \cos 2(0) = \cos 0 = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \cos 2(\frac{\pi}{2}) = \cos \pi = -1$

$x = \pi \Rightarrow f(\pi) = \cos 2(\pi) = \cos 2\pi = 1$

$x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2}) = \cos 2(\frac{3\pi}{2}) = \cos 3\pi = -1$

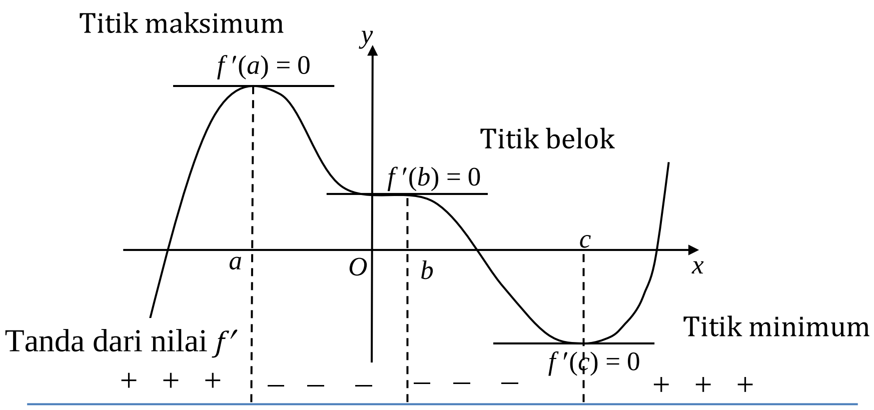
$x = 2\pi \Rightarrow f(2\pi) = \cos 2(2\pi) = \cos 4\pi = 1$

❖ Kesimpulan

- Nilai stasionernya adalah– 1 dan 1.
- Titik stasionernya adalah $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, -1)$, $(\pi, 1)$, $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ dan $(2\pi, 1)$.

Uji Turunan Pertama untuk Menentukan Titik Maksimum, Titik Minimum, dan Titik Belok

Perhatikan Gambar 2 berikut, menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, diuraikan dalam sifat berikut.

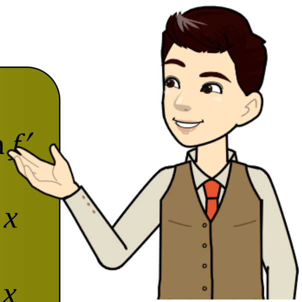


Gambar 2. Titik Maksimum, Titik Minimum, dan Titik Belok

Sifat 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang yang mempunyai turunan dan $f'(a) = 0$

- Jika nilai f' bertanda positif di $x < a$ dan bertanda negatif di $x > a$, maka $(a, f(a))$ disebut titik maksimum lokal.
- Jika nilai f' bertanda negatif di $x < c$ dan bertanda positif di $x > c$, maka $(c, f(c))$ disebut titik minimum lokal.
- Jika disekitar titik $x = b$ tidak ada perubahan tanda nilai f', maka $(b, f(b))$ disebut titik belok horisontal.



Untuk lebih memahami lagi Ananda dalam menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, pelajari contoh berikut.

Contoh 2

Menggunakan uji turunan pertama, carilah titik maksimum dan minimum fungsi trigonometri $y = \cos 2x$ pada interval $0 \le x \le 2\pi$.

Penyelesaian :

❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$f(x) = \cos 2x$

$f'(x) = -2 \sin 2x$ (turunan $y = \cos ax$ adalah $y' = -a \sin ax$)

❖ Syarat stasioner

$f'(x) = 0$

$-2 \sin 2x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $-\frac{1}{2}$)

$\sin 2x = 0$

$\sin 2x = \sin 0$ ($\sin x = \sin \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$)

$2x = 0 + n.\,2\pi$

$x = n.\,\pi$

$n = 0 \Rightarrow x = 0$

$n = 1 \Rightarrow x = \pi$

$n = 2 \Rightarrow x = 2\pi$

$2x = \pi + n.\,2\pi$

$x = \frac{\pi}{2} + n.\,\pi$

$n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

❖ Menentukan nilai stasioner

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \cos 2(0) = \cos 0 = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \cos 2(\frac{\pi}{2}) = \cos \pi = -1$

$x = \pi \Rightarrow f(\pi) = \cos 2(\pi) = \cos 2\pi = 1$

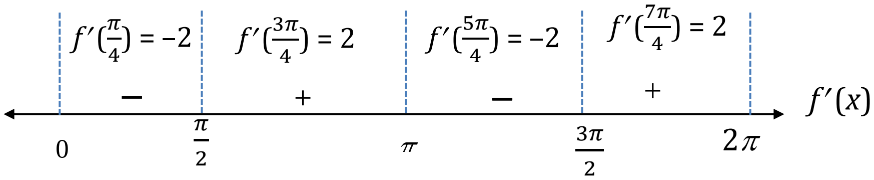
$x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2}) = \cos 2(\frac{3\pi}{2}) = \cos 3\pi = -1$

$x = 2\pi \Rightarrow f(2\pi) = \cos 2(2\pi) = \cos 4\pi = 1$

➢ Nilai stasionernya adalah – 1 dan 1.

➢ Titik stasionernya adalah $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, -1)$, $(\pi, 1)$, $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ dan $(2\pi, 1)$.

❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda



Gambar 3 Uji nilai $f'(x)$

❖ Kesimpulan

➢ Titik $(0, 1)$, $(\pi, 1)$, dan $(2\pi, 1)$ merupakan titik balik maksimum, karena f' berubah tanda dari + (positif) ke – (negatif)

➢ titik $(\frac{\pi}{2}, -1)$ dan $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ merupakan titik balik minimum, karena f' berubah tanda dari – (negatif) ke + (positif).

Contoh 3

Menggunakan uji turunan pertama, carilah titik maksimum dan minimum fungsi trigonometri $y = \sin x\,(1 + \cos x)$ pada interval $0^o < x < 90^o$.

Penyelesaian :

❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$

$f'(x) = \cos x\,(1 + \cos x) + \sin x\,(-\sin x)$ (turunan $y = u\,.\,v$ adalah $y' = u'v + u\,v'$)

$f'(x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$

$f'(x) = \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$ ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$

❖ Syarat stasioner

$f'(x) = 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$ (faktorkan)

$\cos x = \frac{1}{2}$ atau $\cos x = -1$

$x = 60^o$ $\quad x = 180^o$ (tidak memenuhi karena $0^o < x < 90^o$)

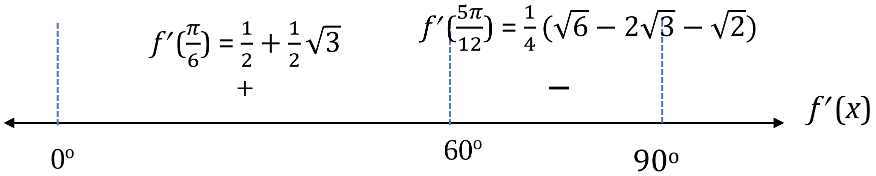
❖ Menentukan nilai stasioner

$x = 60^o \Rightarrow f(60^o) = \sin 60^o\,(1 + \cos 60^o) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$

➢ Nilai stasionernya adalah $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

➢ Titik stasionernya adalah $\left(60^o, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda



Gambar 4 Uji nilai $f'(x)$

❖ Kesimpulan

Titik $\left(60^o, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$ merupakan titik balik maksimum, karena f' berubah tanda dari + (positif) ke – (negatif)

Contoh 4

Menggunakan uji turunan pertama, carilah titik belok fungsi trigonometri $y = x + \sin x$ pada interval $0 < x < 2\pi$.

Penyelesaian :

❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$f(x) = x + \sin x$

$f'(x) = 1 + \cos x$

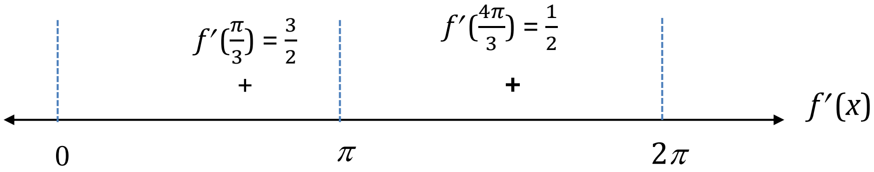
❖ Syarat stasioner

$f'(x) = 0$

$1 + \cos x = 0$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

- Menentukan nilai stasioner
  $x = \pi \Rightarrow f(\pi) = \pi + \sin \pi = \pi$
  - Nilai stasionernya adalah π.
  - Titik stasionernya adalah (π, π).
- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda



Gambar 5 Uji nilai $f'(x)$

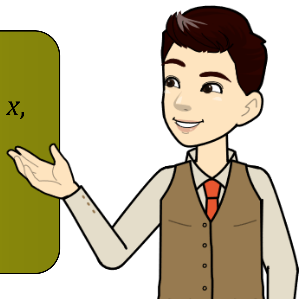
- Kesimpulan
  Titik (π, π) merupakan titik belok, karena f' disekitar titik $x = \pi$ tidak ada perubahan tanda (positif (+) ke positif (+)).

Uji Turunan Kedua untuk Menentukan Titik Maksimum, Titik Minimum, Kecekungan, dan Titik Belok

Sebelum menentukan titik maksimum, titik minimum, kecekungan, dan titik belok menggunakan uji turunan kedua, Ananda harus memahami terlebih dahulu definisi turunan kedua.

Definisi 2

Jika $f'(x)$ (turunan pertama suatu fungsi) diturunkan lagi terhadap x, maka akan diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x, ditulis dengan $f''(x)$ atau y'' atau $\frac{d^2 f}{dx^2}$ atau $\frac{d^2 y}{dx^2}$.



Contoh 5

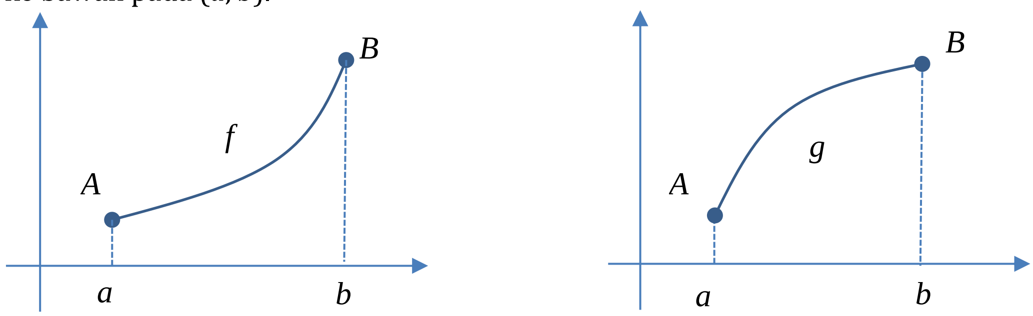
Tentukan turunan kedua fungsi trigonometri berikut.

a. $y = \sin(2x + \pi)$
b. $y = \cos^2 x$

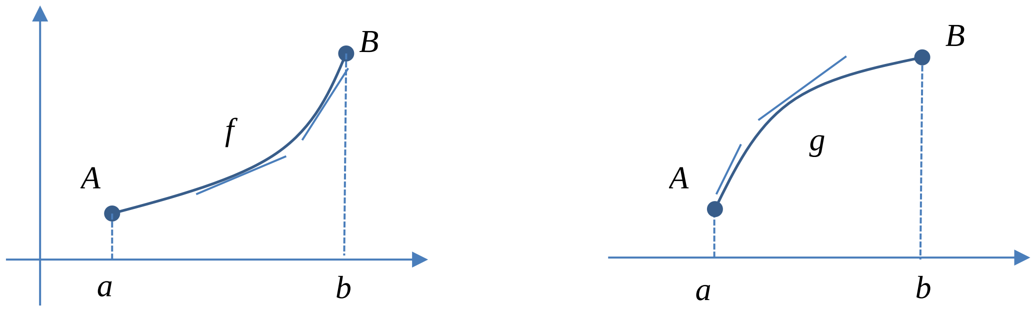
Penyelesaian :

a. $y = \sin(2x + \pi)$
   $y' = 2\cos(2x + \pi)$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)
   $y'' = -4\sin(2x + \pi)$ (turunan $y = \cos u$ adalah $y' = -u' \sin u$)
b. $y = \cos^2 x$
   $y' = -2\cos x \sin x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \cdot u'$)
   $y' = -\sin 2x$ ($\sin 2x = 2\sin x \cos x$)
   $y'' = -2\cos 2x$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

Gambar 6 memperlihatkan grafik dua fungsi yang naik pada (a, b). Kedua grafik menghubungkan titik A ke titik B tetapi kelihatan berbeda karena melengkung dalam arah berlainan. Bagaimana Ananda dapat membedakan antara dua tipe kelakuan ini? Dalam Gambar 7 garis singgung pada kurva ini telah digambarkan pada beberapa titik. Dalam (a) kurva terletak di atas garis singgung dan f disebut cekung ke atas pada (a, b). Dalam (b) kurva terletak di bawah garis singgung dan g disebut cekung ke bawah pada (a, b).



Gambar 6 Kecekungan Fungsi



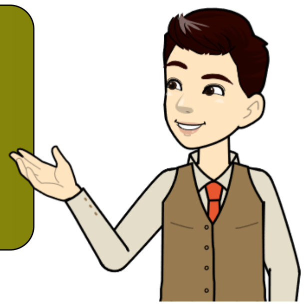
(b) cekung ke atas

(a) cekung ke bawah

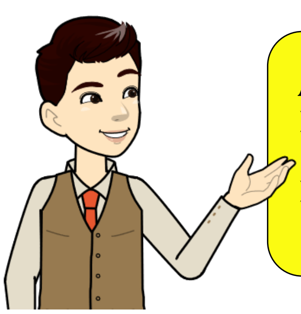
Gambar 7 Kecekungan Fungsi

Definisi 3

- Jika grafik f terletak di atas semua garis singgungnya pada suatu selang I (f' naik) maka grafik disebut cekung ke atas
- Jika grafik f terletak di bawah semua garis singgungnya pada suatu selang I (f' turun) maka grafik disebut cekung ke bawah



Kriteria sederhana untuk memutuskan di mana kurva cekung ke atas dan di mana kurva cekung ke bawah dengan cukup Ananda mengingat dalam hati bahwa turunan kedua dari f adalah turunan pertama dari f'. Jadi, f' naik jika f'' positif dan f' turun jika f''negative, sabagaimana teorema berikut.



Teorema 1

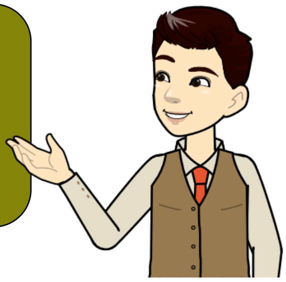
Andaikan f terturunkan dua kali pada selang terbuka (a, b)

- Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f cekung ke atas pada (a, b)
- Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f cekung ke bawah pada (a, b)

Jika kurva pada suatu titik P berubah dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah atau dari cekung ke bawah menjadi cekung ke atas maka titik P disebut titik belok. Secara umum, titik belok adalah titik tempat kurva berubahnya arah kecekungan.

Definisi 4

Misalkan f kontinu di c. Titik $(c, f(c))$ dinamakan titik belok dari grafik f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi yang lainnya dari I. Untuk menentukan titik belok suatu grafik fungsi maka di cari nilai c jika $f''(c) = 0$.



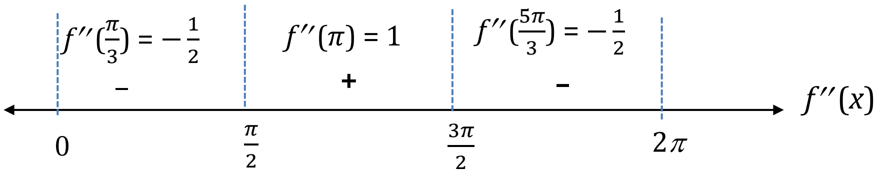
Agar Ananda lebih memahami lagi dalam menentukan kecekungan dan titik belok fungsi trigonometri menggunakan uji turunan kedua, pelajari contoh berikut.

Contoh 6

Tentukan interval di mana fungsi cekung ke atas dan cekung ke bawah dan carilah titik belok fungsi trigonometri $y = x + \cos x$ pada interval $0 < x < 2\pi$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama dan turunan kedua fungsi $f(x)$
  $f(x) = x + \cos x$
  $f'(x) = 1 - \sin x$
  $f''(x) = -\cos x$
- Syarat titik belok
  $f''(x) = 0$
  $-\cos x = 0$
  $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ dan $x = \frac{3\pi}{2}$
- Hitung nilai $f(x)$
  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$
  $x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$
- Uji nilai fungsi $f''(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda



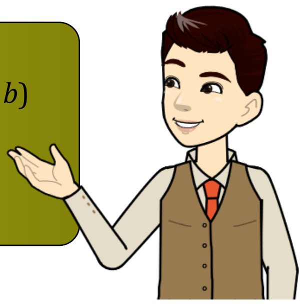
Gambar 8 Uji nilai $f''(x)$

- Kesimpulan
  - Fungsi $f(x)$ cekung ke atas pada interval $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ karena $f''(x) > 0$
  - Fungsi $f(x)$ cekung ke bawah pada interval $0 < x < \frac{\pi}{2}$ atau $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ karena $f''(x) < 0$
  - Titik $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ merupakan titik belok, karena di titik $x = \frac{\pi}{2}$ dan $x = \frac{3\pi}{2}$ terjadi perubahan kecekungan.

Penerapan lain dari turunan kedua adalah pengujian untuk nilai maksimum dan minimum yang merupakan akibat dari Uji kecekungan.

Teorema 2

Andaikan f' dan f'' ada pada setiap titik dalam selang terbuka (a, b) yang memuat c, dan andaikan $f''(c) = 0$.
- Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.
- Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.



Agar Ananda lebih memahami lagi dalam menentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri menggunakan uji turunan kedua, pelajari contoh berikut.

Contoh 7

Menggunakan uji turunan kedua, carilah titik maksimum dan minimum fungsi trigonometri $f(x) = x + \sin 2x$ pada interval $0^\circ < x < 180^\circ$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama dan kedua dari fungsi $f(x)$
  $f(x) = x + \sin 2x$
  $f'(x) = 1 + 2\cos 2x$ (turunan $y = \sin ax$ adalah $y' = a\cos ax$)
  $f''(x) = -4\sin 2x$ (turunan $y = \cos ax$ adalah $y' = -a\sin ax$)
- Syarat stasioner
  $f'(x) = 0$
  $1 + 2\cos 2x = 0$
  $\cos 2x = -\frac{1}{2}$
  $\cos 2x = \cos 120^\circ$ ($\cos x = \cos\alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = -\alpha + n.2\pi$)
  $2x = 120^\circ + n.360^\circ$ atau $2x = -120^\circ + n.360^\circ$
  $x = 60^\circ + n.180^\circ$ atau $x = -60^\circ + n.180^\circ$
  $n = 0 \Rightarrow x = 60^\circ$ atau $n = 1 \Rightarrow x = 120^\circ$
- Menentukan nilai stasioner
  $x = 60^\circ \Rightarrow f(60^\circ) = 60^\circ + \sin 120^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
  $x = 60^\circ \Rightarrow f(120^\circ) = 120^\circ + \sin 240^\circ = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- Uji turunan kedua
  $f''(x) = -4\sin 2x$
  $f''(60^\circ) = -4\sin 120^\circ = (-4)\frac{1}{2}\sqrt{3} = -2\sqrt{3} < 0$
  $f''(120^\circ) = -4\sin 240^\circ = (-4)(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} > 0$
- Kesimpulan
  Titik $\left(60^\circ, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ merupakan titik balik maksimum, karena $f'' < 0$.
  Titik $\left(120^\circ, \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ merupakan titik balik minimum, karena $f'' > 0$.

Bagaimana menyelesaikan masalah fungsi trigonometri dalam kehidupan sehari-hari? Untuk memahaminya, pelajari Contoh 7 berikut.

Contoh 7

Sebuah rumah panggung dihubungkan dengan sebuah tangga menuju halamannya. Tangga tersebut ditopang oleh kayu dengan tinggi 2 m dan berjarak 2 m dari rumah. Jika permukaan tanah disekitar rumah dianggap datar dan tinggi tiang penyangga rumah tegak lurus pada permukaan tanah, tentukan panjang minimum dari tangga rumah tersebut.

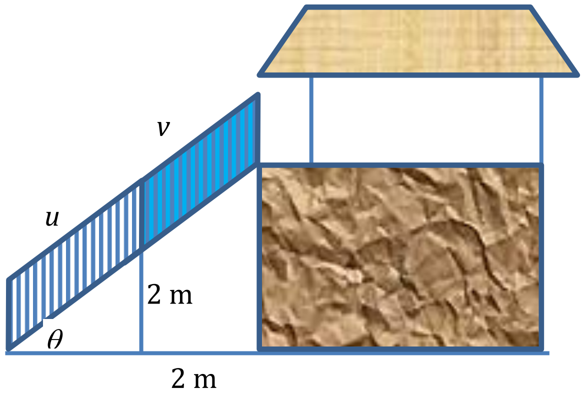
Penyelesaian :

❖ Buat pemodelan dari permasalahan

Misalkan θ, dengan $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ adalah sudut antara tangga dan permukaantanah dan panjang tangganya adalah $u + v$, maka

$\sin\theta = \frac{2}{u} \Rightarrow u = \frac{2}{\sin\theta}$ dan

$\cos\theta = \frac{2}{v} \Rightarrow v = \frac{2}{\cos\theta}$



Gambar 9. Panjang tangga rumah

Sehingga panjang tangga dapat dimodelkan dalam bentuk fungsi berikut

$f(\theta) = u + v = \frac{2}{\sin\theta} + \frac{2}{\cos\theta} = 2\csc\theta + 2\sec\theta$

Tujuan kita adalah mencari nilai minimum dari fungsi tersebut.

❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(\theta)$

$f(\theta) = 2\csc\theta + 2\sec\theta$

$f'(\theta) = -2\csc\theta\cot\theta + 2\sec\theta\tan\theta$

❖ Syarat stasioner

$f'(x) = 0$

$-2\csc\theta\cot\theta + 2\sec\theta\tan\theta = 0$

$\sec\theta\tan\theta = \csc\theta\cot\theta$

$\frac{1}{\cos\theta}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} = 1$

$\tan^3\theta = 1$

$\tan\theta = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}$, karena $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

❖ Menentukan nilai stasioner

$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = 2\csc\frac{\pi}{4} + 2\sec\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

❖ Kesimpulan

Jadi, panjang tangga minimum dari rumah ke tanah adalah $4\sqrt{2}$ m.

C. Rangkuman

- Misalkan f fungsi trigonometri yang yang mempunyai turunan. Jika $f'(a) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di titik $x = a$, dengan
  - Nilai $f(a)$ disebut nilai stasioner $f(x)$ di $x = a$.
  - Titik $(a, f(a))$ disebut titik stasioner
- Misalkan f fungsi trigonometri yang yang mempunyai turunan dan $f'(a) = 0$
  - Jika nilai f' bertanda positif di $x < a$ dan bertanda negatif di $x > a$, maka $(a, f(a))$ disebut titik maksimum lokal.
  - Jika nilai f' bertanda negatif di $x < c$ dan bertanda positif di $x > c$, maka $(c, f(c))$ disebut titik minimum lokal.
  - Jika disekitar titik $x = b$ tidak ada perubahan tanda nilai f', maka $(b, f(b))$ disebut titik belok horisontal.
- Jika $f'(x)$ (turunan pertama suatu fungsi) diturunkan lagi terhadap x, maka akan diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x, ditulis dengan $f''(x)$ atau y'' atau $\frac{d^2 f}{dx^2}$ atau $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
- Jika grafik f terletak di atas semua garis singgungnya pada suatu selang I (f' naik) maka grafik disebut cekung ke atas.
- Jika grafik f terletak di bawah semua garis singgungnya pada suatu selang I (f' turun) maka grafik disebut cekung ke bawah.
- Andaikan f terturunkan dua kali pada selang terbuka (a, b)
  - Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f cekung ke atas pada (a, b)
  - Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f cekung ke bawah pada (a, b)
- Misalkan f kontinu di c. Titik $(c, f(c))$ dinamakan titik belok dari grafik f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi yang lainnya dari I. Menentukan titik belok suatu grafik fungsi maka di cari nilai c jika $f''(c) = 0$.
- Andaikan f' dan f'' ada pada setiap titik dalam selang terbuka (a, b) yang memuat c, dan andaikan $f''(c) = 0$.
  - Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.
  - Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.

D. Latihan Soal

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Pada interval $0^o \leq x \leq 180^o$, nilai stasioner dari fungsi $f(x) = \sin 2x$ diperoleh pada….
   A. $x = 45^o$ dan $x = 135^o$
   B. $x = 0^o$, $x = 90^o$, dan $x = 180^o$
   C. $x = 0^o$ dan $x = 145^o$
   D. $x = 65^o$ dan $x = 135^o$
   E. $x = 45^o$ dan $x = 165^o$

2. Agar $f(x) = \sin(2x + b)$ mempunyai nilai stasioner pada $x = 36^o$, maka nilai b harus sama dengan ….
   A. -18^o
   B. -14^o
   C. 10^o

D. 14^{o}
E. 18^{o}

3. Salah satu nilai stasioner dari fungsi $f(x) = 2 + \cos^2 x$ adalah ….
A. 0
B. 1
C. 3
D. 4
E. 5

4. Titik stasioner dari fungsi $f(x) = \tan^2 x$ adalah untuk nilai x = ….
A. $\{0^{o}, 45^{o}\}$
B. $\{180^{o}, 360^{o}\}$
C. $\{45^{o}, 360^{o}\}$
D. $\{90^{o}, 180^{o}\}$
E. $\{45^{o}, 90^{o}$

5. Pada interval $0^{o} \leq x \leq 180^{o}$, nilai maksimum dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ adalah…
A. 1
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
D. $\sqrt{2}$
E. $\sqrt{3}$

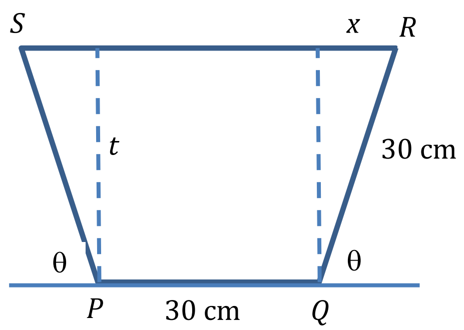
6. Nilai minimum dari fungsi $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ adalah ….
A. $-\frac{1}{4}$
B. 0
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{3}{4}$
E. 2

7. Jika diketahui $y = \cos^2 x$, maka $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y$ = ….
A. –2
B. –1
C. 0
D. 1
E. 2

8. Fungsi $f(x) = \sin^2 x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, cekung ke bawah pada interval ….
A. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$
B. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ dan $0 < x < 3$
C. $0 < x < \frac{\pi}{4}$ dan $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$
D. $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ dan $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$
E. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ dan $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$

9. Titik belok fungsi $y = \sin x + \cos x$ pada interval $[0, \pi]$ adalah ....
   A. $(\frac{\pi}{4}, 0)$
   B. $(\frac{\pi}{3}, 0)$
   C. $(\frac{\pi}{2}, 0)$
   D. $(\frac{3\pi}{4}, 0)$
   E. $(\pi, 0)$

10. Sebuah pancuran atap (talang) logam dengan permukaan berbentuk prisma memiliki sisi 30 cm dan alas mendatar 30 cm, sisi-sisi talang tersebut tersebut membentuk sudut yang sama besar, yaitu θ. Besar sudut θ agar kapasitas pancuran maksimum adalah ....
    A. $\frac{\pi}{12}$
    B. $\frac{\pi}{6}$
    C. $\frac{\pi}{5}$
    D. $\frac{\pi}{4}$
    E. $\frac{\pi}{3}$



Pembahasan Latihan Soal Kegiatan Pembelajaran 2

1. Pada interval $0^o \le x \le 180^o$, nilai stasioner dari fungsi $f(x) = \sin 2x$ diperoleh pada....
   Jawaban: A

   Penyelesaian:
   ❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$
   $f(x) = \sin 2x$
   $f'(x) = 2\cos 2x$ (turunan $y = \sin ax$ adalah $y' = a\cos ax$)
   ❖ Syarat stasioner
   $f'(x) = 0$
   $2\cos 2x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{2}$)
   $\cos 2x = 0$
   $\cos 2x = \cos 90^o$ ($\cos x = \cos \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = -\alpha + n.2\pi$)
   $2x = 90^o + n.360^o$ $2x = -90^o + n.360^o$
   $x = 45^o + n.180^o$ $x = -45^o + n.180^o$
   $n = 0 \Rightarrow x = 45^o$ $n = 1 \Rightarrow x = 135^o$
   ❖ Kesimpulan
   Jadi, pada interval $0^o \le x \le 180^o$, nilai stasioner dari fungsi $f(x) = \sin 2x$ diperoleh pada $x = 45^o$ dan $x = 135^o$.

2. Agar $f(x) = \sin(2x + b)$ mempunyai nilai stasioner pada $x = 36^o$, maka nilai b harus sama dengan ....
   Jawaban: E

Penyelesaian:

❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$

$f(x) = \sin(2x + b)$

$f'(x) = 2\cos(2x + b)$ (turunan $y = \sin(ax+b)$ adalah $y' = a\cos(ax+b)$)

❖ Syarat stasioner

$f'(x) = 0$

$2\cos(2x + b) = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{2}$)

$\cos(2x + b) = 0$

$\cos(2x + b) = \cos 90^\circ$ ($\cos x = \cos\alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = -\alpha + n.2\pi$)

$2x + b = 90^\circ + n.\,360^\circ$ | $2x + b = -90^\circ + n.\,360^\circ$

$b = 90^\circ - 2x + n.\,360^\circ$ | $b = -90^\circ - 2x + n.\,360^\circ$

$b = 90^\circ - 2(36^\circ) + n.\,360^\circ$ | $b = -90^\circ - 2(36^\circ) + n.\,360^\circ$

$b = 18^\circ + n.\,360^\circ$ | $b = -162^\circ + n.\,360^\circ$

$n = 0 \Rightarrow b = 18^\circ$ | $n = 1 \Rightarrow x = 198^\circ$

❖ Kesimpulan

Jadi, agar $f(x) = \sin(2x + b)$ mempunyai nilai stasioner pada $x = 36^\circ$, maka nilai b harus sama dengan 18°.

3. Salah satu nilai stasioner dari fungsi $f(x) = 2 + \cos^2 x$ adalah ....

Jawaban: C

Penyelesaian:

❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$

$f(x) = 2 + \cos^2 x$

$f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2\,u\,.\,u'$)

❖ Syarat stasioner

$f'(x) = 0$

$-\sin 2x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan (-1))

$\sin 2x = 0$

$\sin 2x = \sin 0^\circ$ ($\sin x = \sin\alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = (180^\circ - \alpha) + n.2\pi$)

$2x = 0^\circ + n.\,360^\circ$ | $2x = 180^\circ + n.\,360^\circ$

$x = n.\,180^\circ$ | $x = 90^\circ + n.\,180^\circ$

$n = 0 \Rightarrow x = 0^\circ$ | $n = 0 \Rightarrow x = 90^\circ$

$n = 1 \Rightarrow x = 180^\circ$ | $n = 1 \Rightarrow x = 270^\circ$

$n = 2 \Rightarrow x = 360^\circ$

❖ Nilai stasioner

$x = 0^\circ \Rightarrow f(0^\circ) = 2 + \cos^2(0^\circ) = 3$

$x = 90^\circ \Rightarrow f(90^\circ) = 2 + \cos^2(90^\circ) = 2$

$x = 180^\circ \Rightarrow f(180^\circ) = 2 + \cos^2(180^\circ) = 3$

$x = 270^\circ \Rightarrow f(270^\circ) = 2 + \cos^2(270^\circ) = 2$

$x = 360^\circ \Rightarrow f(360^\circ) = 2 + \cos^2(360^\circ) = 3$

Jadi, nilai stasionernya adalah 2 dan 3.

4. Titik stasioner dari fungsi $f(x) = \tan^2 x$ adalah untuk nilai $x = ...$

Jawaban: B

Penyelesaian:

❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x)$

$f(x) = \tan^2 x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u\,.\,u'$)

$f'(x) = 2\tan x \sec^2 x$ (turunan $y = \tan x$ adalah $y' = \sec^2 x$)

❖ Syarat stasioner

$f'(x) = 0$

$2\tan x \sec^2 x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{2}$)

$\tan x \sec^2 x = 0$
$\tan x = 0$ atau $\sec^2 x = 0$ (tidak ada nilai x yang memenuhi)
$x = 0^o, 180^o, 360^o$

- Kesimpulan
  Jadi, titik stasioner dari fungsi $f(x) = \tan^2 x$ adalah untuk nilai $x = 0^o$, 180^o, dan 360^o

5. Pada interval $0^o \leq x \leq 180^o$, nilai maksimum dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ adalah...
   Jawaban: D

   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dan kedua dari fungsi $f(x)$
     $f(x) = \sin x + \cos x$
     $f'(x) = \cos x - \sin x$
     $f''(x) = -\sin x - \cos x$
   - Syarat stasioner
     $f'(x) = 0$
     $\cos x - \sin x = 0$
     $\cos x = \sin x$
     $\tan x = 1$
     $x = 45^o, 225^o$
   - Menentukan nilai stasioner
     $x = 45^o \Rightarrow f(45^o) = \sin 45^o + \cos 45^o = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$
     $x = 225^o \Rightarrow f(225^o) = \sin 225^o + \cos 225^o = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$
   - Uji turunan kedua
     $f''(x) = -\sin x - \cos x$
     $x = 45^o \Rightarrow f''(45^o) = -\sin 45^o - \cos 45^o = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2} < 0$
     $x = 225^o \Rightarrow f''(225^o) = -\sin 225^o - \cos 225^o = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2} > 0$
   - Kesimpulan
     Nilai $f(45^o) = \sqrt{2}$ merupakan nilai maksimum, karena $f'' < 0$.
     Titik $f(225^o) = -\sqrt{2}$ merupakan nilai minimum, karena $f'' > 0$.

6. Nilai minimum dari fungsi $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ adalah ....
   Jawaban: A

   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dan kedua dari fungsi $f(x)$
     $f(x) = \sin^2 x + \sin x$
     $f'(x) = 2 \sin x \cos x + \cos x = \sin 2x + \cos x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \cdot u'$)
     $f''(x) = 2 \cos 2x - \sin x$ (turunan $y = \sin ax$ adalah $y' = a \cos ax$)
   - Syarat stasioner
     $f'(x) = 0$
     $2 \sin x \cos x + \cos x = 0$
     $\cos x\,(2\sin x + 1) = 0$
     $\cos x = 0$ atau $\sin x = -\frac{1}{2}$
     $x = 90^o, 270^o$ $x = 210^o, 330^o$
   - Menentukan nilai stasioner
     $x = 90^o \Rightarrow f(90^o) = \sin^2 90^o + \sin 90^o = 1 + 1 = 2$
     $x = 210^o \Rightarrow f(210^o) = \sin^2 210^o + \sin 210^o = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$
     $x = 270^o \Rightarrow f(270^o) = \sin^2 270^o + \sin 270^o = 1 - 1 = 0$

$x = 330^{o} \quad \Rightarrow f(330^{o}) = \sin^2 330^{o} + \sin 330^{o} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

❖ Uji turunan kedua

$f''(x) = 2 \cos 2x - \sin x$

$x = 90^{o} \quad \Rightarrow f''(90^{o}) = 2 \cos 2(90^{o}) - \sin (90^{o}) = -2 - 1 = -3 < 0$

$x = 210^{o} \quad \Rightarrow f''(210^{o}) = 2 \cos 2(210^{o}) - \sin (210^{o}) = 2(\frac{1}{2}) - (-1) = 2 > 0$

$x = 270^{o} \quad \Rightarrow f''(270^{o}) = 2 \cos 2(270^{o}) - \sin (270^{o}) = 2(-1) - (-1) = -1 < 0$

$x = 330^{o} \quad \Rightarrow f''(330^{o}) = 2 \cos 2(330^{o}) - \sin (330^{o}) = 2(\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} > 0$

❖ Kesimpulan

Nilai $f(210^{o}) = f(330^{o}) = -\frac{1}{4}$ merupakan nilai minimum, karena $f'' > 0$.

7. Jika diketahui $y = \cos^2 x$, maka $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = ...$

Jawaban: E

Penyelesaian:

❖ Tentukan turunan pertama dan kedua dari fungsi y

$y = \cos^2 x$

$\frac{dy}{dx} = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \cdot u'$)

$\frac{d^2y}{dx^2} = -2 \cos 2x$ (turunan $y = \sin ax$ adalah $y' = a \cos ax$)

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} + 4y &= -2\cos 2x + 4\cos^2 x \\ &= -2(2\cos^2 x - 1) + 4\cos^2 x \quad (\cos 2x = 2\cos^2 x - 1) \\ &= -4\cos^2 x + 2 + 4\cos^2 x \\ &= 2\end{aligned}$$

8. Fungsi $f(x) = \sin^2 x$, $0 \le x \le 2\pi$, cekung ke bawah pada interval ....

Jawaban: E

Penyelesaian:

❖ Tentukan turunan pertama dan turunan kedua fungsi $f(x)$

$f(x) = \sin^2 x$

$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

$f''(x) = 2\cos 2x$

❖ Syarat titik belok

$f''(x) = 0$

$2\cos 2x = 0$

$\cos 2x = 0$

❖ $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{2}$ ($\cos x = \cos \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = -\alpha + n.2\pi$)

$2x = \frac{\pi}{2} + n.\,2\pi \qquad 2x = -\frac{\pi}{2} + n.\,2\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + n.\,\pi \qquad x = -\frac{\pi}{4} + n.\,\pi$

$n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \qquad n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

$n = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \qquad n = 2 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$

❖ Uji nilai fungsi $f''(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

$f''(\frac{\pi}{6}) = 1$	$f''(\frac{\pi}{2}) = -2$	$f''(\pi) = 2$	$f''(\frac{3\pi}{2}) = -2$	$f''(\frac{11\pi}{6}) = 1$	$f''(x)$
+	–	+	–	+	

$0 \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{7\pi}{4} \quad 2\pi$

❖ Kesimpulan

- Fungsi $f(x)$ cekung ke atas pada interval $0 < x < \frac{\pi}{4}$ atau $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ atau $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$ karena $f''(x) > 0$
- Fungsi $f(x)$ cekung ke bawah pada interval $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ atau $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ karena $f''(x) < 0$

9. Titik belok fungsi $y = \sin x + \cos x$ pada interval $[0, \pi]$ adalah ….
Jawaban: D

Penyelesaian:

❖ Tentukan turunan pertama dan turunan kedua fungsi $f(x)$

$f(x) = \sin x + \cos x$
$f'(x) = \cos x - \sin x$
$f''(x) = -\sin x - \cos x$

❖ Syarat titik belok

$f''(x) = 0$
$-\sin x - \cos x = 0$
$-\sin x = \cos x$
$\frac{\sin x}{\cos x} = -1$
$\tan x = -1$
$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

❖ Nilai fungsi

$x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow f(\frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = 0$

$x = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow f(\frac{7\pi}{4}) = \sin\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4} = 0$

❖ Uji nilai fungsi $f''(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

$f''(\frac{\pi}{2}) = -1$ $f''(\pi) = 1$ $f''(\frac{11\pi}{6}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $f''(x)$

$-$ $+$ $-$

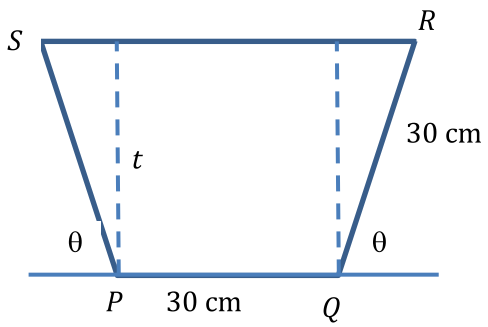
0 $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{7\pi}{4}$ 2π

❖ Kesimpulan

- Fungsi $f(x)$ cekung ke atas pada interval $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$ karena $f''(x) > 0$
- Fungsi $f(x)$ cekung ke bawah pada interval $0 < x < \frac{3\pi}{4}$ atau $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$ karena $f''(x) < 0$
- Titik $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ dan $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$ merupakan titik belok, karena di titik $x = \frac{3\pi}{4}$ dan $x = \frac{7\pi}{4}$ terjadi perubahan kecekungan.

10. Sebuah pancuran atap (talang) logam dengan permukaan berbentuk prisma memiliki sisi 30 cm dan alas mendatar 30 cm, sisi-sisi talang tersebut tersebut membentuk sudut yang sama besar, yaitu θ. Besar sudut θ agar kapasitas pancuran maksimum adalah ….

x



Jawaban: E

Penyelesaian:

- Buat model matematika dari permasalahan

  Volume atau kapasitas pancuran maksimum, jika luas penampang talang itu maksimum.

  Misalkan tinggi pancuran terhadap bidang alas adalah t, maka t = 30 sin θ dan x = 30 cos θ dengan $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

  Luas permukaan talang dinyatakan sebagai fungsi dari θ, maka

  $L(\theta)$ = luas trapezium $PQRS$

  $= \frac{1}{2}(PQ + RS) \times t$

  $= \frac{1}{2}(30 + 30 + 2x) \times t$

  $= \frac{1}{2}(60 + 2x) \times t$

  $= 30t + xt$

  $= 30\,(30 \sin \theta) + (30 \cos \theta)(30 \sin \theta)$

  $= 900 \sin \theta + 900 \cos \theta \sin \theta$

  $= 900 \sin \theta + 450 \sin 2\theta$

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(\theta)$

  $L(\theta) = 900 \sin \theta + 450 \sin 2\theta$

  $L'(\theta) = 900 \cos \theta + 900 \cos 2\theta$

- Syarat stasioner

  $L'(x) = 0$

  $900 \cos \theta + 900 \cos 2\theta = 0$

  $\cos \theta + \cos 2\theta = 0$

  $\cos \theta + (2\cos^2 \theta - 1) = 0$

  $2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$

  $(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0$

  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ atau $\cos \theta = -1$

  $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \pi$ (tidak memenuhi)

- Menentukan nilai stasioner

  $\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow L(\frac{\pi}{3}) = 900 \sin \frac{\pi}{3} + 450 \sin \frac{2\pi}{3} = 900\,(\frac{1}{2}\sqrt{3}) + 450\,(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 675\sqrt{3}$

- Kesimpulan

  Jadi, agar kapasitas volume pancuran maksimum, maka besar suduta $\theta = \frac{\pi}{3}$.

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai dan titik stasioner fungsi trigonometri ?		
2.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi trigonometri dengan uji turunan pertama?		
3.	Apakah Ananda mampu menentukan turunan kedua fungsi trigonometri?		
4.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi trigonometri dengan uji turunan kedua?		
5.	Apakah Ananda mampu menentukan titik belok fungsi trigonometri ?		
6.	Apakah Ananda mampu menentukan kecekungan fungsi trigonometri ?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

1. Gradien garis singgung kurva y = sin (x + 20^o) pada x = 10^o adalah ….
   A. $\frac{1}{2}$
   B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   D. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. Garis g menyinggung kurva y = sin x + cos x di titik yang berabsis $\frac{1}{3}\pi$. Gradien garis yang tegak lurus pada garis g adalah ….
   A. $1 - \sqrt{3}$
   B. $1 + \sqrt{3}$
   C. 1
   D. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$
   E. $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$

3. Diketahui garis g menyinggung kurva $f(x) = \frac{2+\cos x}{\sin x}$ di titik $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$. Garis g memotong sumbu Y dititik ….
   A. $(0, 2 - \frac{\pi}{2})$
   B. $(0, 1)$
   C. $(0, \frac{\pi}{2})$
   D. $(0, \pi)$
   E. $(0, 2 + \frac{\pi}{2})$

4. Pada interval 20^o < x < 60^o, gradien garis singgung kurva y = sin^2 (2x) adalah $\sqrt{3}$. Dengan demikian maka absis titik singgungnya adalah ….
   A. 25^o
   B. 30^o
   C. 35^o
   D. 40^o
   E. 45^o

5. Garis singgung kurva $y = \frac{1}{2}\cos(2x + 20^o)$ sejajar dengan garis 2y + x + 4 = 0. Salah satu absis titik singgung kurva adalah ….
   A. 35^o
   B. 55^o
   C. 65^o
   D. 75^o
   E. 85^o

6. Persamaan garis singgung kurva y = 2cos x + sin x di titik x = 0^o adalah ….
   A. $x + y + 2 = 0$
   B. $x + y - 2 = 0$

C. $x - y + 2 = 0$
D. $x - y - 2 = 0$
E. $x - y + 4 = 0$

7. Persamaan garis singgung kurva y = 2sin x + sin 2x di titik x = 60^{o} adalah ….
A. $2y - 3\sqrt{3} = 0$
B. $2y + 3\sqrt{3} = 0$
C. $y - 3\sqrt{3} = 0$
D. $y + 3\sqrt{3} = 0$
E. $x + y - 3\sqrt{3} = 0$

8. Grafik fungsi $f(x) = \cos^2 x$ akan turun pada interval ...
A. $0 < x < \pi$
B. $0 < x < \frac{\pi}{2}$
C. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
D. $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$
E. $\pi < x < 2\pi$

9. Pada interval $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ maka grafik fungsi $f(x)$ = cos 2x akan ....
A. selalu naik
B. selalu turun
C. naik kemudian turun
D. turun kemudian naik
E. naik kemudian turun kemudian naik

10. $f(x) = \sin x + \cos x \sin x + \cos^2 x \sin x + \ldots$ untuk $0 < x < \pi$
A. merupakan fungsi naik
B. merupakan fungsi turun
C. mempunyai maksimum saja
D. mempunyai minimum saja
E. mempunyai maksimum dan minimum

11. Nilai stasioner dari fungsi $f(x)$ = 2 sin x adalah ….
A. –2 dan 2
B. –1 dan 1
C. 0
D. 0 dan 1
E. 0 dan 2

12. Nilai maksimum fungsi $f(x) = \cos^2 (2x)$ dapat dicapai pada x sama dengan ….
A. 30°
B. 45°
C. 60°
D. 75°
E. 90°

13. Pada interval $0^{\circ} \leq x \leq 180^{\circ}$, nilai minimum dari fungsi $f(x) = \cos (2x + 10^{\circ})$ diperoleh pada x = ….
A. 45°
B. 55°
C. 65°

D. 75^o
E. 85^o

14. Pada interval $\frac{\pi}{3} < x < \pi$, nilai maksimum dari fungsi $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos^2 x + \sin x$ dapat dicapai pada x = ….
A. $\frac{1}{2}\pi$
B. $\frac{3}{5}\pi$
C. $\frac{3}{4}\pi$
D. $\frac{2}{3}\pi$
E. $\frac{4}{5}\pi$

15. Titik minimum dari fungsi $y = \frac{1+\sin x}{\sin x}$ pada interval $0^o \leq x \leq 360^o$ adalah ….
A. $(90^o, 2)$
B. $(270^o, 0)$
C. $(45^o, 1+\sqrt{2})$
D. $(150^o, 1)$
E. $(30^o, 3)$

16. Pada interval $0^o < x < 180^o$ titik maksimum dari fungsi $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ adalah ….
A. $(30^o, 2)$
B. $\left(45^o, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$
C. $\left(60^o, \sqrt{3}\right)$
D. $(150^o, -1)$
E. $(120^o, 0)$

17. Nilai minimum dari fungsi $f(x) = x + 2\cos x$ pada interval $0 < x < \pi$ adalah ….
A. $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$
B. $\frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
C. $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$
D. $\frac{5\pi}{6} + \sqrt{3}$
E. $\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$

18. Titik maksimum dari fungsi $y = \frac{1}{3}\cos^3 x + \sin^2 x$ pada interval $0^o < x < 180^o$ adalah ….
A. $\left(0^o, \frac{1}{3}\right)$
B. $\left(45^o, \frac{6+\sqrt{2}}{12}\right)$
C. $(90^o, 1)$
D. $\left(120^o, \frac{17}{24}\right)$
E. $\left(150^o, \frac{2-\sqrt{3}}{8}\right)$

19. Diketahui $y = x \sin x$, maka $y'' + y =$ ….
    A. $\sin x \cos x$
    B. $2 \cos x$
    C. $\cos x$
    D. $\cos x - \sin x$
    E. $2 \cos x - 1$

20. Turunan kedua dari $f(x) = \sin^2 2x$ adalah ....
    A. $6 \sin 2x$
    B. $12 \cos 4x$
    C. $8 \cos 4x$
    D. $8 \sin 4x$
    E. $3 \sin 2x \cos 2x$

21. Interval fungsi trigonometri $f(x) = x - 3 \cos x$ cekung ke bawah adalah ....
    A. $0 < x < \frac{\pi}{2}$
    B. $0 < x < \pi$
    C. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
    D. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$
    E. $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

22. Interval fungsi trigonometri $f(x) = \cos^2 x$ cekung ke atas adalah ....
    A. $0 < x < \frac{\pi}{4}$
    B. $0 < x < \frac{\pi}{2}$
    C. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$
    D. $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$
    E. $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

23. Titik belok fungsi trigonometri $y = 2 - \cos x$ adalah ....
    A. $(0, 1)$
    B. $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$
    C. $(\pi, 3)$
    D. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\right)$
    E. $(2\pi, 1)$

24. Sebuah ayunan bergetar dengan periode 1,5 sekon dan amplitudo ayunan sebesar 100 cm. Ayunan mencapai percepatan maksimum pada detik ke ....
    A. $\frac{3}{8}$
    B. $\frac{1}{2}$
    C. $\frac{3}{4}$
    D. 1
    E. 2

25. Dua orang pekerja bangunan hendak menarik tumpukan bahan bangunan di sepanjang bidang lurus. Apabila gaya yang diperlukan untuk menarik bahan bangunan seberat W dinyatakan dalam $F(\theta) = \frac{\mu W}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$ dengan θ adalah sudut antara tali dengan bidang datar dan μ adalah koefisien gesekan. Apabila koefisien gaya gesek $\mu = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, gaya minimum yang diperlukan oleh pekerja tersebut adalah ....
    A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
    B. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
    C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
    D. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
    E. $\sqrt{3}$

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. C
2. B
3. E
4. B
5. C
6. C
7. A
8. C
9. C
10. B
11. A
12. E
13. E
14. C
15. B
16. A
17. C
18. C
19. B
20. C
21. D
22. C
23. B
24. A
25. B

DAFTAR PUSTAKA

Budhi, Wono Setya. 2010. *Matematika 4*. Jakarta: Zamrud Kemala.

Chakrabarti, J, *et al*. 2014. *Matematika untuk SMA Kelas XI Peminatan Matematika dan Ilmu Alam*. Bogor: Quadra.

Priatna, Nanang dan Titi Sukamto. 2016. *Buku Siswa Aktif dan Kreatif Belajar Matematika untuk SMA/MA Kelas XII Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam*. Bandung: Grafindo Media Pratama.

Purcell, E.J., dan Dale Varberg. 1990. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

Simangunsong, W., dan Frederik M. Poyk. 2016. *Matematika Peminatan Kelas XII SMA/MA*. Jakarta: Gematama.

Suparmin dan Aditya Nur Rochma. 2016. *Matematika Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam untuk SMA/MA Kelas XII*. Surakarta: Mediatama.

Stewart, James. 2001. *Kalkulus Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Peminatan

KELAS XII

DISTRIBUSI BINOMIAL

MATEMATIKA PEMINATAN

KELAS XII

PENYUSUN
Dr. Yuyun Sri Yuniarti, M.Pd.

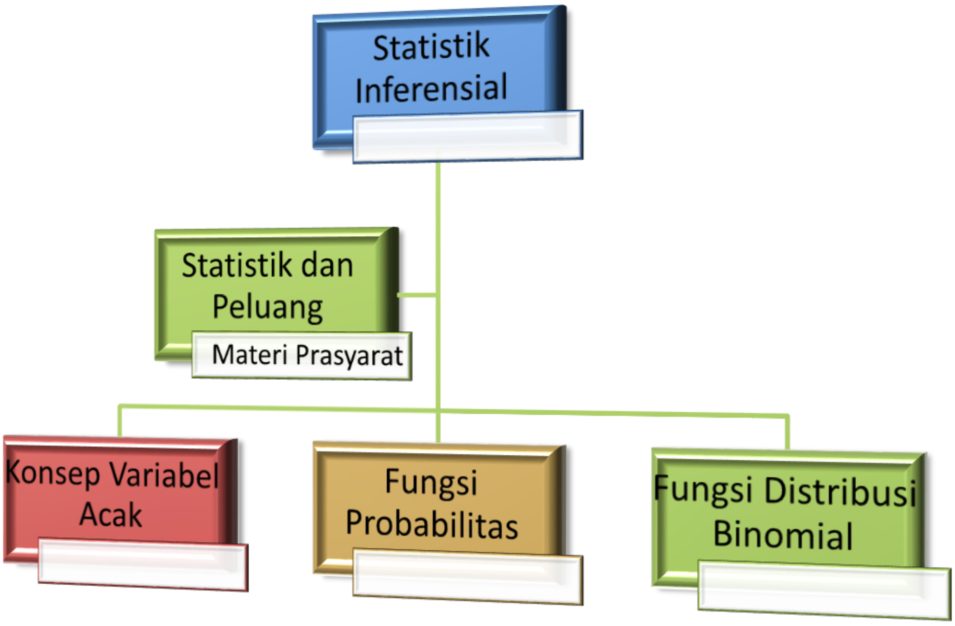
SMA Negeri 1 Pedes

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Binomial	:	teorema yang menjelaskan tentang pengembangan eksponen dari penjumlahan antar variabel
Data	:	catatan atau informasi atas kumpulan fakta.
Hipotesis	:	dugaan sementara yang harus dibuktikan secara ilmiah
Parameter	:	tempat penyimpanan variabel di dalam fungsi yang digunakan untuk melakukan pemberian data dari pemanggil ke dalam fungsi
Populasi	:	seluruh objek penelitian yang menjadi fokus peneitian kita
Probabilitas	:	peluang atau kemungkinan dari suatu kejadian
Ruang Sampel	:	semua kemungkinan yang terjadi dalam suatu percobaan
Sampel	:	bagian dari populasi
Sampel representative	:	bagian dari populasi yang diambil untuk mewakili penelitian
Statistik	:	merupakan kumpulan data baik berupa bilangan maupun bukan bilangan yang disusun dalam table ataupun diagram yang melukiskan atau menggambarkan suatu persoalaaan
Statistik inferensial	:	metode yang berhubungan dengan menganalisa sebuah data sampai pada tahap penarikan kesimpulan
Variabel	:	besaran yang dapat berubah serta berpengaruh pada sebuah peristiwa atau kejadian

PETA KONSEP


Statistik Inferensial
Statistik dan Peluang
Materi Prasyarat
Konsep Variabel Acak
Fungsi Probabilitas
Fungsi Distribusi Binomial

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	: Matematika Peminatan
Kelas	: XII
Alokasi Waktu	: 10 JP
Judul Modul	: Distribusi Binomial

B. Kompetensi Dasar

3. 5 Menjelaskan dan menentukan distribusi peluang binomial berkaitan dengan fungsi peluang binomial

4.5 Menyelesaikan masalah berkaitan dengan distribusi peluang binomial suatu percobaan (acak) dan penarikan kesimpulannya

C. Deskripsi Singkat Materi

Statistik inferensial adalah statistik yang digunakan untuk keperluan menganalisa data dan hasilnya akan digeneralisasikan atau diinferesialkan kepada populasi dimana sampel diambil. Statistik inferensial sering juga dikenal dengan metode yang berhubungan dengan menganalisa sebuah data atau sampel kemudian sampai pada peramalan / pendugaan atau penarikan kesimpulan mengenai seluruh data induknya.

Dalam *statistik inferensial* ada beberapa hal yang harus dilakukan seperti menduga parameter, memutuskan hipotesis sampai menguji hipotesis tersebut sebelum akhirnya mengambil kesimpulan. Meskipun sifatnya masih tidak pasti dan mungkin saja salah, statistik inferensial tetap memiliki beberapa manfaat yang bisa Ananda pertimbangkan seperti berikut ini.

1. Berangkat dari cara penggunaannya, maka statistik inferensial memiliki manfaat untuk menduga nilai populasi. Ketika Ananda melakukan pengukuran data dengan metode ini, maka dapat diperoleh hasil yang cukup akurat dan tepat sampai menggambarkan kondisi yang sebenarnya
2. Manfaat berikutnya dari statistik inferensial adalah bisa menjadi metode analisis yang sangat terstruktur, asalkan Ananda memahami teori peluang dengan sempurna, metode yang digunakan sudah teruji secara matematis sehingga bisa menjadi estimator yang tidak condong ke manapun. Kok bisa begitu? Karena memang formula statistik inferensial begitu rapi

Ingin mengetahui kebenaran dalam sebuah asumsi yang menyeruak di kalangan masyarakat? Maka Ananda bisa melakukan uji hipotesis yang merupakan pengujian statistik. Uji hipotesis kerap digunakan untuk mengecek klaim yang beredar di kalangan masyarakat, sehingga membantu siapapun membuktikan sebuah pendapat yang dipercaya itu benar atau salah. Sebagai contoh misalnya salah satu klaim yang sering disebutkan adalah bahwa matematika merupakan mata pelajaran yang sangat sulit dipahami untuk siswa jenjang SMA. Untuk membuktikan klaim ini, Ananda harus mengambil beberapa sampel representatif dan kemudian melakukan perhitungan analisis nilai matematika dari sampel yang mewakilkan tersebut.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, mari berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Sebaiknya Ananda mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, Ananda mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.
4. Ananda dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika Ananda memperoleh nilai < 75 maka Ananda harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Konsep Variabel Acak

Kedua : Distribusi Peluang Binomial

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Konsep Variabel Acak

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan Ananda dapat memahami konsep variabel Acak dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hal tersebut.

B. Uraian Materi

Statistik inferensial ada 2 macam yaitu:

- Statistik parametrik, yaitu ilmu yang mempertimbangkan jenis sebaran atau distribusi data apakah data menyebar secara normal atau tidak. Dengan kata lain data yang akan dianalisis menggunakan statistik parametris harus memenuhi asumsi normalitas. Secara umum, jika data tidak menyebar normal maka data seharusnya dikerjakan dengan metoda statistik non parametrik, atau setidaknya dilakukan transformasi terlebih dahulu agar data mengikuti sebaran normal, sehingga bisa dikerjakan dengan statistik parametrik. Contoh metode statistik parametrik yaitu uji Z, uji t, korelasi pearson, perancangan percobaan (one way anova parametrik. Ciri dari statistik paramterik yaitu data dengan skala interval dan rasio, data menyebar berdistribusi normal.
- Statistik non parametrik, yaitu statistik bebas sebaran (tidak mensyaratkan bentuk sebaran parametrik populasi, baik normal maupun tidak). Selain itu, statistik ini biasanya menggunakan skala sosial, yaitu nominal dan ordinal yang umumnya tidak berdistribusi normal. Contoh, uji tanda, rank sum test. Ciri dari statistik non parametrik data tidak berdistribusi normal, umumnya data nominal atau ordinal, penelitian sosial, dengan jumlah sampel kecil.

➢ Konsep Variabel Acak

Variabel merupakan suatu besaran yang memiliki nilai tidak tunggal, misalnya bilangan asli kurang dari 10, bilangan bulat kurang dari 3, dan waktu tempuh kendaraan. Variabel ada dua yaitu variabel diskrit dan variabel kontinu. Variabel diskrit memiliki nilai-nilai yang dapat dihitung, sedangkan variabel kontinu memiliki nilai-nilai yang tidak dapat dihitung. Salah satu contoh variabel diskrit yaitu bilangan asli kurang dari 5, sedangkan salah satu contoh variabel kontinu yaitu bilangan bulat lebih dari 3 dan waktu tempuh kendaraan.

Variabel acak merupakan variabel yang nilainya ditentukan oleh hasil percobaan. Variabel acak digunakan untuk menggambarkan hasil-hasil percobaan sebagai nilai-nilai numerik secara sederhana. Variabel acak dinyatakan dengan huruf besar, misalnya X, Y, Z atau lainnya sedangkan nilai variabel acak dinyatakan dengan huruf kecil misalnya x, y dan z.

Telah disampaikan bahwa terdapat dua variabel yaitu variabel diskrit dan variabel kontinu, makan variabel acak pun sama ada variabel acak diskrit dan ada variabel acak kontinu. Variabel acak diskrit diperoleh dari hasil menghitung/membilang, nilainya berupa bilangan bulat. Nilai-nilai variabel acak diskrit digambarkan pada garis interval berupa deretan titik-titik yang saling terpisah, contoh X = banyak sisi gambar yang terlihat pada percobaan melambungkan sekeping uang logam. Variabel acak kontinu diperoleh dari hasil mengukur dan nilainya berupa bilangan riil. Nilai-nilai variabel acak kontinu jika digambarkan pada garis interval berupa titik-titik yang saling tersambung membentu garis. Sebagai contoh hasil penimbangan berat badan, hasil pengukuran suhu tubuh, atau hasil pencatatan waktu yang diperoleh seorang pelari mencapai garis finish.

Pada bagian uraian materi kali ini kita akan membahas secara khusus mengenai variabel acak diskrit.

Contoh soal:

1. Ayu melakukan pelemparan sebuah dadu satu kali. Hasil yang mungkin diperoleh Ayu adalah....

   Jawab: Misalkan X = mata dadu yang muncul sehingga dapat Ananda nyatakan bahwa X = {1,2,3,4,5,6}
2. Andika melemparkan satu keping uang logam sebanyak dua kali. Andika mengamati banyak hasil angka yang diperoleh adalah..

   Jawab : Misalkan X = banyak hasil angka yang diperoleh sehingga X = {0, 1,2}
3. Dewi melemparkan sekeping uang logam sebanyak empat kali.
   a. Variabel acak yang menyatakan banyaknya sisi angka yang diperoleh adalah X = {0,1,2,3,4}
   b. Variabel acak yang menyatakan banyaknya sis gambar yang diperoleh adalah X = {0,1,2,3,4}
4. Rina melakukan pelemparan dua buah dadu sebanyak satu kali. Variabel acak X menyatakan hasil kali kedua mata dadu. Nyatakan hasil yang mungkin diperoleh sebagai variabel acak

   Jawab: ruang sampel dari pelemparan dua buah dadu satu kali adalah sebagai berikut:

Dadu 1	Dadu 2					
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

   Jika X menyatakan hasil kali kedua mata dadu maka:
   X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36}

Perhatikan di sini dalam penyelesaian soal untuk menentukan variabel acak, Ananda harus dapat menentukan ruang sampel terlebih dahulu.

➢ Peluang Variabel Acak Diskrit

1) Distribusi peluang variabel acak diskrit

   Pada variabel acak diskrit, nilai-nilainya mempunyai peluang. Peluang nilai variabel acak X dinotasikan dengan $f(x) = P(X = x)$. Bentuk penyajian peluang nilai-nilai variabel acak diskrit disebut dengan distribusi peluang variabel acak. Distribusi peluang dapat dinyatakan dalam bentuk tabel, grafik, atau fungsi. Distribusi peluang disebut juga distribusi probabilitas atau fungsi peluang atau fungsi probabilitas.

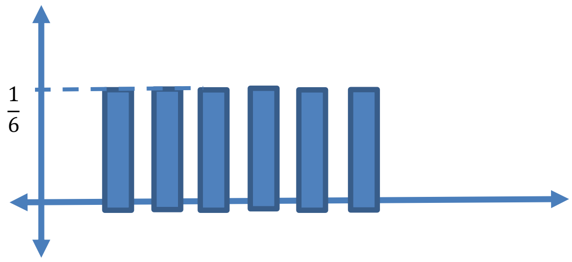
Contoh soal:
Diana melakukan pelemparan sebuah dadu. Variabel X menyatakan mata dadu yang muncul. Sajikan distribusi peluang variabel acak X dalam bentuk
a. Tabel
b. Grafik
c. Fungsi

Jawab:
X = mata dadu yang muncul sehingga dapat dinyatakan X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Peluang diperoleh hasil mata dadu 1 yaitu $f(1) = P\ (X = 1) = \frac{1}{6}$
Peluang diperoleh hasil mata dadu 1 yaitu $f(1) = P\ (X = 2) = \frac{1}{6}$
Peluang diperoleh hasil mata dadu 1 yaitu $f(1) = P\ (X = 3) = \frac{1}{6}$
Peluang diperoleh hasil mata dadu 1 yaitu $f(1) = P\ (X = 4) = \frac{1}{6}$
Peluang diperoleh hasil mata dadu 1 yaitu $f(1) = P\ (X = 5) = \frac{1}{6}$
Peluang diperoleh hasil mata dadu 1 yaitu $f(1) = P\ (X = 6) = \frac{1}{6}$

a. Jika ditulis dalam bentuk tabel maka:

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b. Jika ditulis dalam bentuk grafik sebagai berikut:



c. Jika ditulis dalam bentuk fungsi sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{, untuk } x = 1 \\ \frac{1}{6} & \text{, untuk } x = 2 \\ \frac{1}{6} & \text{, untuk } x = 3 \\ \frac{1}{6} & \text{, untuk } x = 4 \\ \frac{\ }{6} & \text{, untuk } x = 5 \\ \frac{\ }{6} & \text{, untuk } x = 6 \end{cases}$$

2) Distribusi peluang kumulatif variabel acak diskrit
Peluang variabel acak X yang lebih kecil atau sama dengan suatu nilai x, ditulis dengan $F(x) = P\ (X = x)$. Nilai $F(x)$ tersebut dinamakan peluang kumulatif. Misalkan $x = c$ merupakan salah satu nilai variabel acak X yang memiliki peluang $f(x)$, maka nilai $F(c)$ dinyatakan dengan :

$$F(c) = P(X \leq c) = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(c).$$

Contoh soal:

1. Cintia melakukan pelemparan sebuah dadu. Variabel X menyatakan mata dadu yang muncul. Tentukan nilai dari
   a. $F(1)$
   b. $F(3)$
   c. $F(5)$

   Jawab:
   Ruang sampel dari pelemparan sebuah dadu adalah S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
   X = mata dadu yang muncul sehingga dapat dinyatakan X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
   a. $F(1) = P(X \leq 1) = f(1) = \frac{1}{6}$
   b. $F(3) = P(X \leq 3) = f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
   c. $F(5) = P(X \leq 5) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
2. Sekeping uang logam dilempar dua kali. Variabel acak X menyatakan banyak sisi angka yang muncul. Tentukan nilai dari:

   a. $F(0)$

   b. $F(1)$

   c. $F(2)$

   Jawab:

   Ruang sampel S = {AA, AG, GA, GG}

   X = banyak sisi angka yang muncul sehingga dapat dinyatakan

   x = {0, 1, 2}

   a. $F(0) = P(X \leq 0\} = f(0) = \frac{1}{4}$

   b. $F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

   c. $F(2) = P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Sifat-sifat distribusi peluang

Misalkan x adalah variabel acak diskrit yang bernilai $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dan $f(x_i)$ merupakan peluang nilai-nilai variabel acak X dengan $i = 1,2,3,4, \ldots, n$ maka $f(x_i)$ memenuhi dua sifat berikut

a. $0 \leq f(x_i) \leq 1$ untuk $i = 1,2,3,4, \ldots, n$

b. $\sum_{x=1}^{n} f(x_i) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = 1$

Contoh. Diketahui distribusi peluang variabel acak diskrit X berikut.

$\boldsymbol{X = x}$	3	4	5	6
$\boldsymbol{f(x)}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{k}{9}$	$\frac{2k+1}{18}$	$\frac{1}{6}$

a. Tentukan nilai k
b. Hitunglah nilai $P(X \geq 5)$

Jawab.

a. $\sum_{x=1}^{n} f(x_i) = 1$

$f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 1$

$\frac{1}{3} + \frac{k}{9} + \frac{2k+1}{18} + \frac{1}{6} = 1$

$\frac{6 + 2k + (2k+1) + 3}{18} = 1$

$4k + 10 = 18$

$k = \frac{18-10}{4} = \frac{8}{4} = 2$

b. $P(X \geq 5) = f(5) + f(6)$

$P(X \geq 5) = \frac{2k+1}{18} + \frac{1}{6}$

$P(X \geq 5) = \frac{2.2+1}{18} + \frac{1}{6}$

$P(X \geq 5) = \frac{5}{18} + \frac{1}{6}$

$P(X \geq 5) = \frac{5}{18} + \frac{3}{18}$

$P(X \geq 5) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

C. Rangkuman

Peluang Variabel Acak Diskrit dibagi 2:

1. Distribusi peluang variabel acak diskrit
   Pada variabel acak diskrit, nilai-nilainya mempunyai peluang. Peluang nilai variabel acak X dinotasikan dengan $f(x) = P(X = x)$.

2. Distribusi peluang kumulatif variabel acak diskrit, yang dinyatakan oleh:
   $F(c) = P(X \leq c) = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(c)$.

D. Latihan Soal

Kerjakan semua soal di bawah ini di buku latihan. Diskusikan dengan teman dan guru matematika di kelas Ananda.

1) Variabel acak X menyatakan banyak gambar pada pelemparan dua keping mata uang logam. Tentukan nilai dari :
   a. $P(X = 0)$
   b. $P(X = 1)$
   c. $P(X = 2)$
2) Dewi melakukan pelemparan dua buah dadu satu kali. Variabel acak X menyatakan jumlah kedua mata dadu. Nyatakan hasil yang mungkin diperoleh sebagai variabel acak.
3) Sebuah kantong berisi 4 butir kelereng kuning dan 3 butir kelereng hijau. Dari dalam kantong tersebut diambil 3 butir kelereng sekaligus. Variabel acak X menyatakan banyak kelereng kuning yang terambil. Tentukan nilai dari :
   a. $P(X = 0)$
   b. $P(X = 1)$
   c. $P(X = 2)$
   d. $P(X = 3)$
4) Variabel acak X menyatakan banyaknya angka pada pelemparan empat keping mata uang logam. Tentukan nilai dari:
   a. $P(X \leq 1)$
   b. $P(X \leq 2)$
   c. $P(X \leq 3)$
   d. $P(X \leq 4)$

5) Perhatikan tabel distribusi frekuensi berikut:

X	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	k	$\frac{1}{5}$

Tentukan nilai k.

6) Perhatikan tabel berikut

X	1	2	3	4	5	6	7
P(X = x)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Tentukan nilai dari:

a. $P(X \leq 4)$
b. $P(X \leq 6)$
c. $P(4 \leq X \leq 6)$
d. $P(5 \leq X \leq 7)$
e. $P(X \geq 6)$

7) Variabel X menyatakan jumlah mata dadu yang muncul pada pelemparan dua buah dadu. Tentukan nilai dari:

a. $P(X \leq 3)$
b. $P(X \leq 10)$
c. $P(6 \leq X \leq 2)$

Kunci Jawaban Pembahasan

<table>
<tr><th>No</th><th>Pembahasan</th><th>Skor</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Penyelesaian

Pada pelemparan dua buah mata uang logam diperoleh:
S = $\{AA, AG, GA, GG\}$
n(S) = 4
X menyatakan banyaknya hasil gambar sehingga dapat dinyatakan $X = \{0, 1, 2\}$
a. P (X = 0) = ¼

b. P (X = 1) = 2/4

c. P (X = 2) = ¼</td><td>15</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
<table>
<tr><th>Dadu 1</th><th colspan="6">Dadu 2</th></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>(1,1)</td><td>(1,2)</td><td>(1,3)</td><td>(1,4)</td><td>(1,5)</td><td>(1,6)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>(2,1)</td><td>(2,2)</td><td>(2,3)</td><td>(2,4)</td><td>(2,5)</td><td>(2,6)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>(3,1)</td><td>(3,2)</td><td>(3,3)</td><td>(3,4)</td><td>(3,5)</td><td>(3,6)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>(4,1)</td><td>(4,2)</td><td>(4,3)</td><td>(4,4)</td><td>(4,5)</td><td>(4,6)</td></tr>
<tr><td>5</td><td>(5,1)</td><td>(5,2)</td><td>(5,3)</td><td>(5,4)</td><td>(5,5)</td><td>(5,6)</td></tr>
<tr><td>6</td><td>(6,1)</td><td>(6,2)</td><td>(6,3)</td><td>(6,4)</td><td>(6,5)</td><td>(6,6)</td></tr>
</table>

Perhatikan gambar tersebut, Jika X menyatakan hasil jumlah kedua mata dadu, maka $X = \{2\ , 3, 4,5,6,7,8,9,10,11, 12\}$</td><td>10</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$n(S) = C_3^7 = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.4.3.2.1} = 35$

X banyak kelereng kuning yang terambil sehingga dapat dinaytakan $X = \{0,1,2,3,4\}$

a. $P(X = 0) = f(0) = \frac{C_0^4\,.C_3^3}{35} = \frac{1\,.1}{35} = \frac{1}{35}$

b. $P(X = 1) = f(1) = \frac{C_1^4\,.C_2^3}{35} = \frac{4\,.3}{35} = \frac{12}{35}$

c. $P(X = 2) = f(2) = \frac{C_2^4\,.C_1^3}{35} = \frac{6\,.3}{35} = \frac{18}{35}$

d. $P(X = 3) = f(3) = \frac{C_3^4\,.C_0^3}{35} = \frac{4\,.1}{35} = \frac{4}{35}$</td><td>20</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>No</th><th>Pembahasan</th><th>Skor</th></tr>
<tr><td>4</td><td>Penyelesaian:

$S = \begin{Bmatrix} AAAA, AAAG, AAGG, AGAA, AAGA, AGGG, GGGA, GGAA, \\ GAAA, AGAG, GAAG, GAGA, GAGGGGAG, GGGA, GGGG \end{Bmatrix}$
X Menyatakan Banyak Angka sehingga
$X = \{0,1,2,3,4\}$

a. P(X ≤ 1) = $f(0) + f(1) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$
b. P (X ≤ 2) = $f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$
c. P (X ≤ 3) $= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} = \frac{15}{16}$
d. P (X ≤ 4) $= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{16}{16}$</td><td>20</td></tr>
<tr><td>5</td><td>

X	1	2	3	4
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	k	$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + k + \frac{1}{5} = 1$

Maka $k = 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$</td><td>15</td></tr>
<tr><td colspan="2">TOTAL SKOR</td><td></td></tr>
</table>

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggung jawab.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami konsep variabel acak ?		
2.	Apakah Ananda telah mampu memahami konsep distribusi peluang acak diskrit?		
3.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi peluang acak diskrit ?		
4.	Apakah Ananda telah mampu memahami konsep distribusi peluang kumulatif acak diskrit?		
5.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi peluang kumulatif acak diskrit ?		

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan riview pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Distribusi Peluang Binomial

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran kedua, Ananda akan dibimbing untuk dapat memahami dan menyelsaikan permasalahan yang berkaitan dengan konsep Distribusi binomial. Di pembelajaran kedua ini Ananda kembali akan dibimbing untuk dapat memahami konsep variabel acak binomial serta distribusi peluang binomialnya. Yuk kita mulai.

B. Uraian Materi

DISTRIBUSI BINOMIAL

1. Variabel Acak Binomial

Variabel acak binomial merupakan variabel acak yang nilai-nilainya ditentukan oleh hasil percobaan binomial. Beberapa syarat pada percobaan binomial sebagai berikut:

- Percobaan dilakukan berulang-ulang
- Percobaan bersifat saling bebas atau dengan pengembalian. Hasil percobaan yang satu tidak mempengaruhi hasil percobaan yang lain
- Setiap percobaan memiliki dua macam kejadian yaitu kejadian yang diharapkan disebut sukses dan kejadian yang tidak diharapkan disebut gagal
- Peluang setiap kejadian tetap dalam setiap percobaan

Percobaan binomial dapat diamati melalui percobaan pelambungan uang logam. Sebagai contoh misalnya Raka melambungkan sekeping uang logam sebanyak 3 kali. Pada setiap pelemparan dilakukan pencatatan terhadap sisi angka. Percobaan ini merupakan percobaan binomial dengan alasan sebagai berikut:

- Percobaan dilakukan secara berulang-ulang
- Percobaan saling bebas
- Percobaan memiliki dua macam ekjadian yaitu keluar sisi angka atau keluar sisi gambar

Karena uang logam dilambungkan lagi, maka peluang sisi angka dalam setiap percobaan selalu sama yaitu ½.

2. Distribusi Peluang Binomial

a. Fungsi Distribusi Binomial

Telah dibahas tadi bahwa setiap percobaan memiliki dua macam kejadian yaitu sukses dan gagal. Oleh karena itu jumlah peluang kedua kejadian dalam setiap percobaan akan sama dengan satu karena nilai yang berimbang. Misalkan p menyatakan peluang kejadian sukses dan q menyatakan peluang kejadian gagal, maka hasil dari p + q = 1.

Peluang nilai-nilai variabel acak binomial dapat disusun dalam bentuk tabel atau grafik sehingga diperoleh distribusi peluang variabel acak binomial. Distirbusi peluang variabel acak binomial disebut distribusi binomial. Peluang suatu nilai variabel acak binomial dinamakan peluang binomial. Secara umum rumus peluang binomial x kejadian yang diharapkan dari n percobaan binomial dinyatakan:

$$f(x) = b(x\,;\, n;\, p) = C\,(n,x) \,.\, p^{x} \,.\, q^{n-x}$$

Keterangan:
$C(n, x)$ = koefisien binomial
x = banyaknya kejadian yang diharapkan dengan x = 0, 1, 2, .. n
p = peluang kejadian yang diharapkan
q = peluang kejadian yang tidak diharapkan

Contoh soal
Regia melakukan latihan tendangan penalti sebanyak 3 kali. Peluang sukses melakukan tendangan sebesar 4/5 . tentukan peluang Regia mencetak tepat dua gol.
Jawab:
p = peluang sukses mencetak gol, maka p = 4/5
q = peluang gagal mencetak gol, maka q = 1 – p = 1 – 4/5 = 1/5

Tanpa rumus distribusi binomial:
Misalkan M = tendangan masuk dan G = tendangan gagal
Tepat mencetak dua gol yaitu MMG, MGM, GMM

1) Peluang hasil tendangan MMG maka peluangnya = $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{125}$
2) Peluang hasil tendangan MGM maka peluangnya = $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{125}$
3) Peluang hasil tendangan GMM maka peluangnya = $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{125}$

Dengan demikian, peluang Regia mencetak tepat dua gol yaitu

$$\frac{16}{125} + \frac{16}{125} + \frac{16}{125} = \frac{48}{125} = 0{,}384$$

Kalo pakai rumus distribusi binomial:
Diketahui
n = 3
x = 2
p = 4/5
q = 1/5

karena Regia berharap mencetak 2 gol, maka
f(2) = $\left(2; 3; \frac{4}{5}\right) = C\ (3,2).\left(\frac{4}{5}\right)^2 . \left(\frac{1}{5}\right)^{3-2} = 3 . \frac{16}{25} . \frac{1}{5} = \frac{48}{125} = 0,384$

Catatan: ingat bahwa
$\boldsymbol{C(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3.2.1}{1.2.1} = \frac{6}{2} = 3}$

jadi peluang Regia mencetak tepat dua gol adalah 0,384

b. Fungsi Distribusi Binomial Kumulatif

Peluang paling banyak x kejadian yang diharapkan dinamakan fungsi distribusi binomial kumulatif. Misalkan x = t, maka peluang paling banyak t kejadian yang diharapkan dinyatakan dengan:

$$\mathbf{f(t) = P\ (X \leq 1) = \sum_{x=0}^{t} C\ (n, x).\, p^{x}\ .\, q^{n-x}}$$

Keterangan:
C(n,x) = koefisien binomial

x = banyaknya kejadian yang diharapkan dengan x = 0, 1, 2, .. n
p = peluang kejadian yang diharapkan
q = peluang kejadian yang tidak diharapkan

Contoh Soal

Rudi melakukan latihan tendangan penalti sebanyak tiga kali. Peluang sukses melakukan tendangan sebesar 4/5. Tentukan peluang Rudi mencetak paling banyak satu gol.
a. tanpa rumus distribusi binomial
b. dengan rumus distribusi binomial
Jawab:
Diketahui
p = peluang sukses melakukan gol = 4/5
q = peluang gagal mencetak gol = 1/5

tanpa rumus distribusi binomial

Misalkan M = tendangan masuk dan G = tendangan gagal
Mencetak paling banyak satu gol MGG, GMG, GGM, GGG

1) Peluang hasil tendangan MGG maka peluangnya = $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$
2) Peluang hasil tendangan GMG maka peluangnya = $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$
3) Peluang hasil tendangan GGM maka peluangnya = $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{125}$
4) Peluang hasil tendangan GGG maka peluangnya = $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$

Dengan demikian, peluang Regia mencetak tepat dua gol yaitu

$$\frac{4}{125} + \frac{4}{125} + \frac{4}{125} + \frac{1}{125} = \frac{13}{125} = 0{,}104$$

Dengan rumus distribusi binomial

Karena diharapkan mencetak paling banyak satu gol artinya bisa 1 gol atau 0 gol.

Kalo mencetak 1 gol:
n = 3 ; x = 1 ; p = 4/5 dan q = 1/5 dengan demikian
f(1) = b $(1; 3; \frac{4}{5}) = C\ (3,1).\,(\frac{4}{5})^1.\,(\frac{1}{5})^{3-1} = 3 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{25} = \frac{12}{125}$

Catatan: ingat bahwa
$\boldsymbol{C(3,0) = \frac{3!}{(3-0)!0!} = \frac{3.2.1}{3.2.1.1} = \frac{6}{2} = 3}$

Kalo mencetak 0 gol:
n = 3 ; x = 0 ; p = 4/5 dan q = 1/5 dengan demikian
f(1) = b $(0; 3; \frac{4}{5}) = C\ (3,0).\,(\frac{4}{5})^0.\,(\frac{1}{5})^{3-0} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{125} = \frac{1}{125}$

jadi peluang Rudi mencetak paling banyak 1 gol adalah

$\frac{12}{125} + \frac{1}{125} = \frac{13}{125} = 0,104$

Bagaimana... mudah bukan ketika Ananda memahami nya secara perlahan dan jangan lupa untuk mengingat aturan pangkatnya yaa

C. Rangkuman

Berdasarkan paparan di atas, maka dapat dibuat rangkuman bahwa distribusi peluang binomial dibagi menjadi dua yaitu fungsi distribusi binomial dengan rumus sebagai berikut:

$$f(x) = b(x\,;\,n;\,p) = C\,(n,x)\,.\,p^{x}\,.\,q^{n-x}$$

Keterangan:
C(n,x) = koefisien binomial
x = banyaknya kejadian yang diharapkan dengan x = 0, 1, 2, .. n
p = peluang kejadian yang diharapkan
q = peluang kejadian yang tidak diharapkan

Dan fungsi distribusi kumulatif dengan rumus:

$$f(t) = P\,(X \le 1) = \sum_{x=0}^{t} C\,(n,x).\,p^{x}\,.\,q^{n-x}$$

Keterangan:
C(n,x) = koefisien binomial
x = banyaknya kejadian yang diharapkan dengan x = 0, 1, 2, .. n
p = peluang kejadian yang diharapkan
q = peluang kejadian yang tidak diharapkan

D. Latihan Soal

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan tepat dan tulis jawaban Ananda secara detil di buka latihan. Diskusikan dengan teman-teman dan guru matematika di kelas Ananda yaa... Semangatttttt....

1) Selidiki apakah percobaan berikut merupakan percobaan binomial atau bukan
   a. Deni melemparkan bola ke dalam keranjang sebanyak 4 kali. Deni mencatat banyak lemparan bola yang masuk ke dalam keranjang
   b. Dania mengambil tiga kartu satu per satu tanpa pengembalian dari setumpuk kartu remi dan mencatat jumlah kartu bergambar yang terambil
   c. Sani melempar sebuah dadu sebanyak dua kali dan mencatat jumlah mata dadu 10 yang muncul

2) Sebuah mata uang logam dilemparkan sebanyak 10 kali. Tentukan peluang muncul gambar sebnayak
   a. Dua kali
   b. Tujuh kali

3) Diketahui $P(x) = C(4,x) . (0,8)^{x} . (0,2)^{4-x}$ untuk x = 0, 1, 2, 3, dan 4. Tentukan nilai dari:
   a. P(1)
   b. P(3)

4) Dalam suatu tes, peserta diminta mengerjakan 15 soal pilihan benar salah. tentukan peluang seorang peserta tes menjawab dengan benar:
   a. 7 soal
   b. 10 soal
   c. 12 soal
   d. 15 soal

5) Peluang seorang bayu=i tidak diimunisasi polio sebesar 0,1. Pada suatu waktu di posyandu terdapat 4 bayi. tentukan peluang bayi tersebut
   a. 2 bayi belum imunisasi polio
   b. 1 bayi belum imuniasi polio
   c. keempat bayi tersebut belum imunisasi polio

6) Sebuah mata uang logam dilemparkan sebanyak 4 kali. tentuka peluang muncul angka paling banyak 4 kali

7) Diketahui $P(X) = C (4, x) . (0,8)^{x} . (0,2)^{4-x}$ untuk x = 0,1,2,3,4. tentukan nilai untuk:
   a. $P(X \leq 3)$
   b. $P(X \leq 4)$
   c. $P(2 \leq X \leq 4)$

8) Peluang Bayu mencetak gol lewat tendangan penalti sebesar 0,8. tentukan peluang Bayu mencetak:
   a. paling banyak 2 gol dari 5 kali penalti
   b. paling banyak 3 gol dari 5 kali penalti

9) Kepala bagian produksi PT sejahtera melaporkan bahwa rata-rata produksi TV yang rusak setiap kali produksi sebesar 15%. dari total produksi tersebut diambil secara acak sebanyak 6 unit TV. tentukan peluang:

a. paling banyak 1 TV rusak
b. paling banyak 2 TV rusak

10) Sebuah kantong berisi 3 bola merah dan 2 bola putih. dari dalam kantong tersebut diambil dua bola sekaligus. Variabel acak X menyatakan banyak bola merah yang terambil. Tentukan nilai dari
a. $P(X = 2)$
b. $P(X \leq 1)$

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggung jawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami definisi konsep distrbusi binomial?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menentukan niali dari distribusi binomial?		
3.	Apakah Ananda telah mampu memahami konsep distribusi kumulatif binomial?		
4.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan distribusi kumulatif binomial?		

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan riview pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

EVALUASI

Pilih satu jawaban yang paling tepat

1. Data yang melibatkan variabel diskrit adalah ……..
   A. bilangan asli lebih dari 44
   B. bilangan bulat kurang dari 55
   C. usia penduduk suatu daerah
   D. berat badan sekelompok siswa
   E. banyak anak dalam sebuah keluarga

2. Beni melemparkan sekeping uang logam sebanyak tiga kali. Variabel acak X menyatakan banyak hasil sisi gambar yang diperoleh. Hasil yang mungkin untuk X adalah
   A. {0,1,2,3,4}
   B. {0,1,2,3}
   C. {0,1,2}
   D. {1,2,3}
   E. {1,2}

3. Dewi melemparkan lima keping uang logam. Variabel acak X menyatakan banyak hasil sisi angka yang diperoleh. Hasil yang mungkin untuk X adalah ……..
   A. {1,2,3,4,5}
   B. {0,1,2,3,4}
   C. {0,1,2,3,4,5}
   D. {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
   E. {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

4. Anita melambungkan dua buah dadu secara bersamaan. Jika variabel acak X menyatakan jumlah mata dadu yang muncul, maka X=⋯.
   A. {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}
   B. {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
   C. {0,1,2,3,4,5,6,7,8}
   D. {1,2,3,4,5,6}
   E. {0,1,2,3,4,5}

5. Deni melambungkan sebuah dadu satu kali. Jika variabel acak X menyatakan mata dadu yang muncul, maka X=⋯.
   A. {0,1,2,3,4,5,6}
   B. {1,2,3,4,5,6}
   C. {0,1,2,3,4,5}
   D. {0,1}
   E. {6}

6. Sepasang pengantin baru merencanakan mempunyai dua anak. Jika variabel X menyatakan banyak anak perempuan, maka X=⋯.
   A. {0,1}
   B. {1,2}
   C. {0,1,2}
   D. {0,1,2,3}
   E. {0,1,2,3,4}

7. Andi mengerjakan 6 butir soal. Variabel acak X menyatakan banyak soal yang dikerjakan dengan benar. Hasil yang mungkin untuk X adalah ⋯⋯⋯
A. {0,1,2,3,4,5,6}
B. {1,2,3,4,5,6}
C. {0,1,2,3,4,5}
D. {0,6}
E. {6}

8. Sepasang pengantin baru merencanakan mempunyai tiga anak. Variabel acak X menyatakan banyak anak perempuan.
Nilai P(X=1) adalah ..
A. $\frac{1}{8}$
B. $\frac{2}{8}$
C. $\frac{3}{8}$
D. $\frac{4}{8}$
E. $\frac{5}{8}$

9. Sebuah dadu dilemparkan sebanyak 4 kali. Peluang muncul mata dadu berkelipatan 3 sebanyak 2 kali adalah
A. 0,3951
B. 0,2963
C. 0,1157
D. 0,988
E. 0,154

10. Andri mengerjakan 10 soal pilihan benar salah. Peluang Andri menjawab dengan benar sebanyak 6 soal adalah ⋯⋯⋯
A. 0,1816
B. 0,2051
C. 0,2672
D. 0,3145
E. 0,3264

11. Seorang penjaga gawang profesional mampu menahan tendangan penalti dengan peluang 35. Dalam sebuah kesempatan dilakukan 5 kali tendangan. Peluang penjaga gawang mampu menahan 3 kali tendangan penalti tersebut adalah
A. $\frac{180}{625}$
B. $\frac{612}{625}$
C. $\frac{216}{625}$
D. $\frac{228}{625}$
E. $\frac{230}{625}$

12. Peluang mendapatkan satu kali jumlah angka 77 dalam tiga kali pelemparan dua buah dadu adalah ⋯⋯
A. $\frac{5}{246}$
B. $\frac{5}{36}$
C. $\frac{25}{46}$

D. $\frac{25}{72}$
E. $\frac{135}{432}$

13. Suatu survei menemukan bahwa 1 dari 5 orang berkata bahwa dia telah mengunjungi dokter dalam sembarang bulan yang ditanyakan. Jika 10 orang dipilih secara acak, peluang tiga di antaranya sudah mengunjungi dokter bulan lalu adalah
A. 0,108
B. 0,201
C. 0,245
D. 0,289
E. 0,301

Kunci Jawaban Evaluasi

1. E
2. B
3. C
4. A
5. B
6. C
7. A
8. C
9. B
10. B
11. C
12. D
13. B

DAFTAR PUSTAKA

Tim. (2019). Belajar Praktis Matematika. Klaten : Viva Pakarindo

Erlangga Fokus UN SMA/MA 2013 Program IPA. (2012). Jakarta: Erlangga.

Erlangga X-Press UN 2015 SMA/MA Program IPA. (2014). Jakarta: Erlangga.

Matematika Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (2014). Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Siswanto. (2005). *Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya*. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Willa Adrian. (2008). *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

BERANI JUJUR HEBAT!

JUJUR ADALAH LANGKAH AWAL BERANTAS KORUPSI

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Peminatan

KELAS XII

DISTRIBUSI NORMAL
MATEMATIKA PEMINATAN
KELAS XII

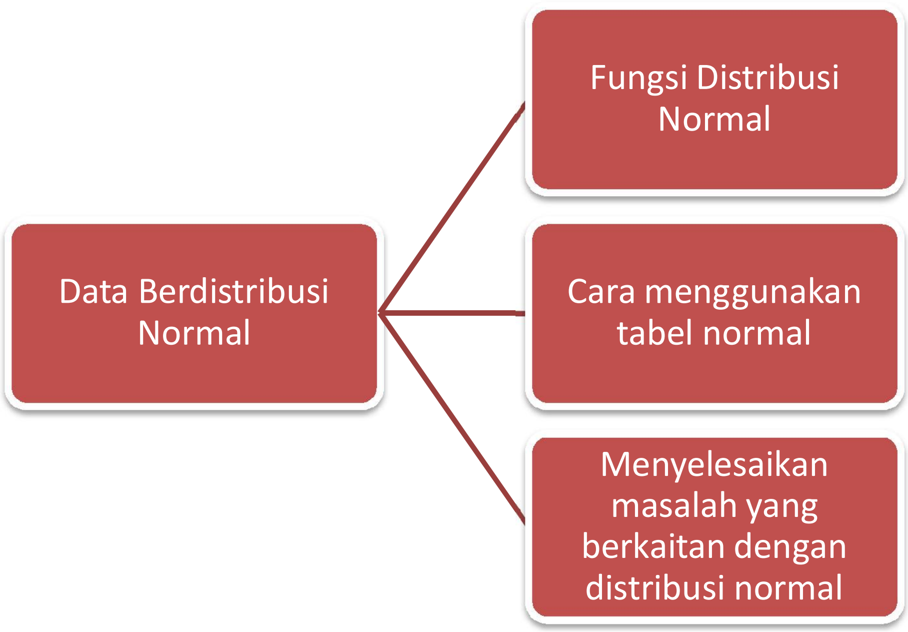
PENYUSUN
Yuyun Sri Yuniarti
SMA Negeri 1 Pedes

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Data	:	catatan atau informasi atas kumpulan fakta.
Hipotesis	:	dugaan sementara yang harus dibuktikan secara ilmiah
Parameter	:	tempat penyimpanan variabel di dalam fungsi yang digunakan untuk melakukan pemberian data dari pemanggil ke dalam fungsi
Populasi	:	seluruh objek penelitian yang menjadi fokus peneitian kita
Probabilitas	:	peluang atau kemungkinan dari suatu kejadian
Variabel	:	besaran yang dapat berubah serta berpengaruh pada sebuah peristiwa atau kejadian
Variabel acak kontinu	:	adalah variabel acak yang nilai-nilainya tak berhingga banyaknya atau berisi sederetan anggota yang banyaknya sebanyak titik dalam sebuah garis
Distribusi normal	:	disebut pula distribusi Gauss, adalah salah satu jenis distribusi dengan variabel *random* yang kontinu, dengan kurva yang berbentuk menyerupai lonceng
Tabel distribusi normal	:	adalah tabel yang berisi peluang dari nilai Z atau $P(Z \leq z)$ yang selalu berada di antara 0 dan 1
Distribusi peluang variabel acak kontinu	:	adalah variabel acak yang dapat memperoleh semua nilai pada skala kontinu

PETA KONSEP


Data Berdistribusi Normal
Fungsi Distribusi Normal
Cara menggunakan tabel normal
Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan distribusi normal

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran : Matematika Peminatan
Kelas : XII
Alokasi Waktu : 12 JP
Judul Modul : Distribusi Normal

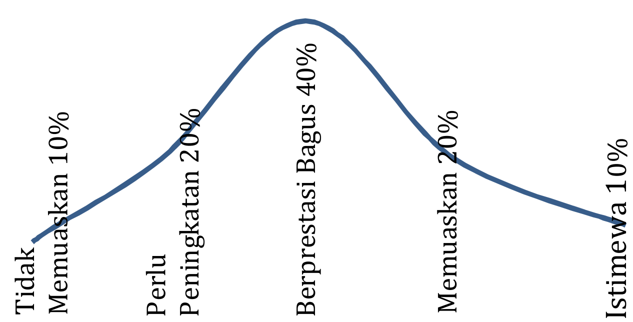
B. Kompetensi Dasar

3.6 Menjelaskan karakteristik data berdistribusi normal yang berkaitan dengan data berdistribusi normal.

4.6 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan distribusi normal dan penarikan kesimpulannya.

C. Deskripsi Singkat Materi

Metode yang juga dikenal dengan sebutan *forced distribution* ini mendapatkan namanya dari kenyataan bahwa para penilai yang terlibat memang "dipaksa" untuk mendistribusikan nilai peserta didik ke dalam sejumlah kategori tuntas dalam suatu tes yang sudah ditetapkan persentase proporsinya. Biasanya, bentuk distribusi yang diterapkan adalah distribusi normal, dimana persentase yang setara kecilnya ditempatkan di sisi kanan (terbaik) dan sisi kiri (terburuk) sedangkan persentase yang lebih besar ditempatkan di bagian tengah atau di antara kedua sisi tersebut. Sebagai contoh, proporsi yang mungkin digunakan adalah: Istimewa 10%, Memuaskan 20%, Berprestasi Bagus 40%, Perlu Peningkatan 20%, dan Tidak Memuaskan 10%. Adapun asumsi yang mendasari metode ini adalah bahwa, secara statistik, tingkat ketuntasan peserta didik terdistribusi mengikuti pola kurva normal. Agar lebih jelas silahkan cermati ilustrasi kurva normal berikut.



Selain itu skenario Tuhan yang Maha Kuasa yang telah menciptakan alam atau makhluk ini dengan sangat luar biasa. Penciptaan dengan aturan yang amat mengesankan, antara aturan yang satu dengan yang lainnya saling harmoni tidak bertentangan. Ketidakbertentangan antara aturan yang satu dengan yang lainnya ini cukup menunjukkan bahwa Sang Pencipta, Penguasa kehidupan ini adalah Esa (satu). Salah satu aturan yang dibuatNya adalah tentang data atribut/karakter makhlukNya dengan pola menyerupai kurva normal. Contoh tentang IQ, berat badan, tinggi badan, dan yang lainnya setelah diukur atas sejumlah sampel, menunjukkan yang nilainya sangat tinggi atau rendah jumlahnya sedikit, yang paling banyak adalah yang mendekati atau sama dengan rata-ratanya, intinya jika digambarkan histogramnya menyerupai kurva normal atau genta terbalik.

Oleh karena itu melalui materi peluang binomial, distribusi normal, dan hipotesis, diharapkan dapat membuka wawasan Ananda mengenai fenomena kejadian yang realistis dalam kehidupan, selanjutnya supaya Ananda memiliki kompetensi untuk melakukan perhitungan terkait hal-hal peluang binomial, distribusi normal, dan hipotesis tersebut.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, mari berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Sebaiknya Ananda mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, Ananda mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.
4. Ananda dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika Ananda memperoleh nilai < 75 maka Ananda harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Distribusi Peluang Acak Kontinu

Kedua : Ditribusi Normal

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Distribusi Peluang Acak Kontinu

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran kali ini, Ananda akan diajak untuk memahami konsep variabel acak kontinu.

B. Uraian Materi

Distribusi Peluang Acak Kontinu

1. Variabel Acak Kontinu

Pada modul sebelumnya yaitu modul KD 3.5 Ananda telah belajar tentang variabel acak diskrit, yaitu variabel yang menggunakan bilangan bulat untuk menyatakan hasil suatu percobaan. Nahhh untuk variabel acak kontinu menggunakan bilangan riil untuk menyatakan hasil suatu percobaan.

Variabel acak kontinu diperoleh dari hasil mengukur dan nilainya berupa bilangan riil. Nilai-nilai variabel acak kontinu jika digambarkan pada garis interval berupa deretan titik-titik yang saling tersambung membentuk garis. Sebagai contoh hasil pengukuran tinggi badan, hasil pengukuran suhu tubuh, dan lain-lain.

Contoh:
Pada suatu kelas yang beranggotakan 35 siswa dilakukan pengukuran tinggi badan siswa. Dari data hasil pengukuran tinggi badan tersebut diperoleh tinggi badan siswa tertinggi yaitu 175 cm dan terpendek 150 cm. Tentukan variabel acak yang menyatakan hasil pengukuran tinggi badan tersebut!

Jawab:
Tinggi badan siswa tertinggi adalah 175 cm dan terpendek adalah 150 cm. Jika tinggi badan siswa dinyatakan dalam t maka nilainya adalah $150 \leq t \leq 175$. Variabel acak t menyatakan tinggi badan siswa, maka T = $\{t \mid 150 \leq t \leq 175\}$.

2. Distribusi Peluang Variabel Acak Kontinu

Variabel acak kontinu berupa interval bilangan pada garis bilangan riil. Fungsi peluang pada variabel acak kontinu X = {x | a ≤ x ≤ b, x bilangan riil} dinyatakan sebagai f(x) dengan ketentuan sebagai berikut:

a) Nilai f(x) ≥ 0 untuk semua x anggota variabel acak kontinu X
b) Luas daerah di bawah kurva y = f(x) pada interval terdefinisinya variabel acak X adalah 1, yaitu: $\int_a^b f(x)dx = 1$
c) Jika dipilih secara acak sebuah nilai data, peluang terambil nilai data pada interval c ≤ X ≤ d. Maka P (c ≤ X ≤ d) = $\int_c^d f(x)dx$

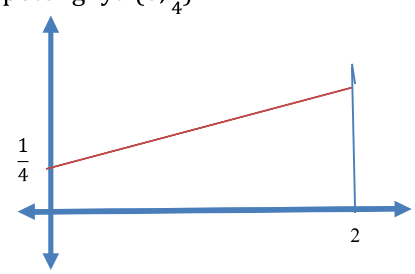
d) Nilai P(X = x) ≈ 0
P(X ≤ x) = P(X < x)
P(X ≥ x) = P (X > x)

Contoh
Diketahui sebuah fungsi peluang f(x) sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{4}, \mathit{untuk}\ 0 \le x \le 2 \\ 0, \text{ untuk x yang lain} \end{cases}$$

a. Tunjukkan bahwa f(x) merupakan fungsi peluang
b. Tentukan nilai peluang P (X ≤ 1)
c. Tentukan nilai peluang P(X ≥ 1)

Jawab:
a. Pertama kita akan membuat grafik fungsi $f(x) = \frac{x+1}{4}$ dalam interval 0 ≤ x ≤ 2
titik potong terhadap sumbu x, diperoleh jika y = 0. Maka $\frac{x+1}{4} = 0; x + 1 = 0; x = -1$.
jadi titik potongnya (-1,0)
titik potong terhadap sumbu y diperoleh jika x =0. Maka $f(0) = \frac{0+1}{4} = \frac{1}{4}$
jadi titik potongnya (0, $\frac{1}{4}$)



Pada interval 0 ≤ x ≤ 2, nilai f(x) selalu bernilai positif
Luas daerah di bawah kurva y = f(x) (garis berwarna merah) pada interval 0 ≤ x ≤ 2 adalah:

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{x+1}{4}dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (x+1)dx = \frac{1}{4}\ .(\frac{1}{2}x^2 + x)_0^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}2^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{2}0^2 + 0\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\ (4) + 2\right) - 0 = \frac{1}{4}(\ 2 + 2) = 1\right.$$

Diperoleh fungsi f(x) pada interval 0 ≤ x ≤ 2 selalu bernilai positif dan luas daerah di bawahnya sama dengan 1. Terbukti f(x) merupakan sebuah fungsi peluang
b. P (X ≤ 1) = P (0 ≤ x ≤ 1)

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x+1}{4}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (x+1)dx = \frac{1}{4}\ .(\frac{1}{2}x^2 + x)_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}1^2 + 1\right) - \left(\frac{1}{2}0^2 + 0\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\ (1) + 1\right) - 0 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}\right.$$

Jadi nilai P (X ≤ 1) = $\frac{3}{8}$

c. P(X > 1) = P(1 < X ≤ 2) = P (0 ≤ X ≤ 2) – P (0 ≤ X ≤ 1) = $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

Jadi nilai peluang P(X ≥ 1) = $\frac{5}{8}$.

C. Rangkuman

Variabel acak kontinu berupa interval bilangan pada garis bilangan riil. Fungsi peluang pada variabel acak kontinu X = {x | a ≤ x ≤ b, x bilangan riil} dinyatakan sebagai fungsi f(x) dengan ketentuan sebagai berikut:

a) Nilai f(x) ≥ 0 untuk semua x anggota variabel acak kontinu X
b) Luas daerah di bawah kurva y = f(x) pada interval terdefinisinya variabel acak X adalah 1, yaitu: $\int_a^b f(x)dx = 1$
c) Jika dipilih secara acak sebuah nilai data, peluang terambil nilai data pada interval c ≤ X ≤ d. Maka P (c ≤ X ≤ d) = $\int_c^d f(x)dx$
d) Nilai P(X = x) ≈ 0
P(X ≤ x) = P(X < x)
P(X ≥ x) = P (X > x)

Keempat syarat tersebut harus terpenuhi yaa.. karena kalo tidak terpenuhi salah satunya maka fungsi peluang variabel acak kontinu bukan merupakan fungsi f(x). Silahkan Ananda membaca kembali syarat fungsi di kelas XI.

D. Latihan Soal

Kerjakan semua soal di bawah ini di buku latihan. Diskusikan dengan teman dan guru matematika di kelas Ananda.

1) Diketahui fungsi peluang $f(x) = \frac{x^2-1}{k}$ terdefinisi untuk $-3 \leq x \leq 3$ dan bernilai 0 untuk nilai x yang lain.
   a. Tentukan nilai k
   b. Tentukan nilai peluang P(-1 ≤ x ≤ 2)

2) Diketahui fungsi peluang $f(x) = \frac{3}{16}x^2$ terdefinisi untuk -2 ≤ x ≤ 2 dan bernilai 0 untuk nilai x yang lain.
   a. Tunjukkan bahwa f(x) merupakan fungsi peluang
   b. Tentukan nilai peluang P(0 ≤ x ≤ 1)

3) Diketahui fungsi peluang $f(x) = \frac{1}{5}$ terdefinisi untuk -2 ≤ x ≤ k dan bernilai 0 untuk nilai x yang lain
   a. Tentukan nilai k
   b. Tentukan nilai peluang P (0 ≤ x ≤ 2)

4) Diketahui fungsi peluang f(x) sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}\text{; untuk } 0 < x \leq 6 \\ 0 \text{ ; untuk x yang lain} \end{cases}$$

   a. Tunjukkan bahwa f(x) merupakan fungsi peluang
   b. Tentukan nilai peluang P (X ≤ 2)
   c. Tentukan nilai peluang P (X > 4)

Pembahasan

1. a. Menentukan nilai k

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-3}^{3} (\frac{x^2-1}{k})dx = 1$$

$$\frac{1}{k}(\frac{1}{3}x^3 - x)_{-3}^{3} = 1$$

$$(\frac{1}{3}x^3 - x)_{-3}^{3} = k$$

$$k = \left(\frac{3^3}{3} - 3\right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} - 3\right) = 6 + 6 = 12$$

Jadi nilai k = 12, sehingga $f(x) = \frac{x^2-1}{12}$

d. P(-1 ≤ x ≤ 2)

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2-1}{12}dx = \frac{1}{12}\int_{-1}^{2}(x^2-1)dx = \frac{1}{12} . (\frac{1}{3}x^3 - x)_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{12}\left(\left(\frac{1}{3}2^3 - 2\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)\right)\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}(8) - 2\right) - (\frac{1}{3}(-1)^3 + 1))$$

$$= \frac{1}{12}(\left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) - 2 - 1) = 0$$

Jadi nilai P (1 ≤ x ≤ 2) = 0.

2. a. Akan ditunjukkan bahwa luas daerah di bawah kurva y = f(x) = 1.
Luas daerah di bawah kurva y = f(x) pada interval -2 ≤ x ≤ 2 adalah:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{2} \frac{3}{16}x^2\ dx = \frac{3}{16}\int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{3}{16} . (\frac{1}{3}x^3)_{-2}^{2}$$

$$= \frac{1}{16}(2^3 - (-2)^3) = \frac{1}{16}\left(8 - (-8)\right) = \frac{16}{16} = 1$$

Diperoleh fungsi f(x) pada interval -2 ≤ x ≤ 2 selalu bernilai positif dan luas daerah di bawahnya sama dengan 1. Terbukti f(x) merupakan sebuah fungsi peluang.

b. P(0 ≤ x ≤ 1)

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} \frac{3}{16}x^2\ dx = \frac{3}{16}\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{3}{16} . (\frac{1}{3}x^3)_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{16}(1^3 - 0) = \frac{1}{16}.1 = \frac{1}{16}$$

Jadi nilai P (0 ≤ x ≤ 1) = $\frac{1}{16}$.

3. a. Menentukan nilai k

$$\int_{-2}^{k} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-2}^{k} \frac{1}{5} dx = 1$$
$$(\frac{1}{5} x)_{-2}^{k} = 1$$
$$\frac{1}{5}(k-(-2)) = 1$$
$$k+2 = 5, \quad k = 3$$
Jadi nilai k = 3

b. P(0 ≤ x ≤ 2)

$$\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5}(x)_{0}^{2}$$
$$= \frac{1}{5}(2-0) = \frac{2}{5}$$

Jadi nilai P (0 ≤ x ≤ 2) = $\frac{2}{5}$.

4. a. Akan ditunjukkan bahwa luas daerah di bawah kurva y = f(x) = 1.

Luas daerah di bawah kurva y = f(x) pada interval 0 ≤ x ≤ 6 adalah:

$$\int_{0}^{6} f(x)dx = \int_{0}^{6} \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6}\int_{0}^{6} dx = \frac{1}{6} (x)_{0}^{6}$$
$$= \frac{1}{6}(6-0) = \frac{6}{6} = 1$$

Diperoleh fungsi f(x) pada interval 0 ≤ x ≤ 6 selalu bernilai positif dan luas daerah di bawahnya sama dengan 1. Terbukti f(x) merupakan sebuah fungsi peluang.

b. P(0 ≤ x ≤ 1)

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} \frac{3}{16} x^2 dx = \frac{3}{16}\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{3}{16} . (\frac{1}{3}x^3)_{0}^{1}$$
$$= \frac{1}{16}(1^3-0) = \frac{1}{16}.1 = \frac{1}{16}$$

Jadi nilai P (0 ≤ x ≤ 1) = $\frac{1}{16}$.

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggung jawab.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami konsep variabel acak kontinu?		
2.	Apakah Ananda telah mampu memahami konsep distribusi peluang variabel acak kontinu?		
3.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi peluang variabel acak kontinu ?		
4.	Apakah Ananda telah mampu memahami konsep distribusi peluang kumulatif variabel acak kontinu?		
5.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan distribusi peluang kumulatif variabel acak kontinu ?		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Distribusi Normal

A. Tujuan Pembelajaran

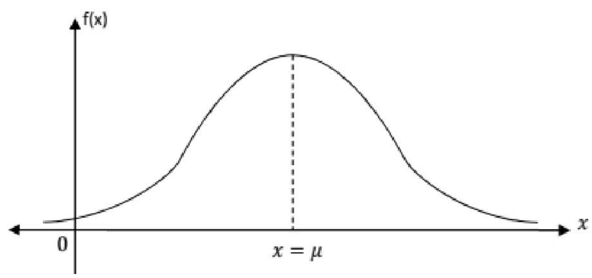
Pada pembelajaran kedua, Ananda akan dibimbing untuk dapat memahami dan menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan konsep Distribusi Normal. Semoga saja Ananda dapat membedakan antara modul sebelumnya yang membahas tentang distribusi binomial dengan distribusi normal. Dan apa saja kegunaan dari konsep atau materi keduanya.

B. Uraian Materi

Distribusi Normal

1. Grafik Distribusi Normal

Pada suatu data frekuensi tertinggi biasanya berada di sekitar nilai rata-rata data (Mean). Semakin jauh nilai data dari rata-rata (mean), frekuensinya akan semakin rendah. Misalkan rata-rata data μ sebaran data secara umum dapat digambarkan sebagai berikut:



Kurva di atas dikenal dengan nama kurva normal atau kurva lonceng karena bentuknya yang seperti lonceng. Persamaan dari kurva tersebut dinamakan fungsi distribusi normal atau distribusi Gauss. Fungsi distribusi normal dengan variabel acak X didefinisikan sebagai berikut:

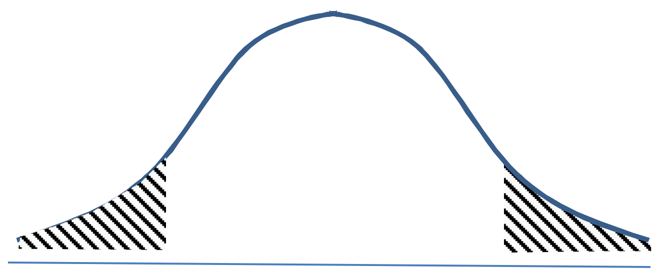
$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \text{ untuk } -\infty < x < \infty$$

Keterangan:
Variabel acak X berdistribusi normal dilambangkan $X \sim N(\mu, \sigma)$
μ = parameter untuk rata-rata
σ = parameter untuk simpangan baku
π = konstanta bernilai 3, 14
e = konstanta bernilai 2,72

Jika nilai $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$ diperoleh distribusi normal baku (standar) yaitu N(0,1). Rumus fungsi variabel acak Z yang berdistribusi normal baku adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad \textbf{untuk} - \infty \le x \le \infty}$$

Grafik distribusi normal baku N(0,1) dapat digambarkan sebagai berikut:



2. Nilai Peluang Variabel Acak Berdistribusi Normal Baku N(0,1)

Luas daerah yang dibatasi kurva normal baku N(0,1) dan sumbu mendatar adalah 1. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1$$

Grafik distribusi normal baku N(0,1) bersifat simetris terhadap garis Z = 0 maka luas daerah di kiri dan kanan garis Z adalah sama, yaitu:

$$\int_{-\infty}^{0} f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,5$$

Menghitung luas daerah di bawah kurva normal tidaklah mudah karena harus melakukan pengintegralan terhadap fungsi eksponen. Misalnya integral berikut untuk menentukan luas daerah di bawah kurva normal baku pada interval Z ≤ z seperti tampak pada gambar di bawah ini:

$$P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1$$

Perubahan bentuk dari normal umum menjadi normal baku dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

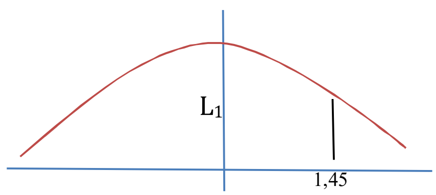
1. Cari z_{hitung} dengan rumus:
   $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$
2. Gambarkan kurvanya.

3. Tuliskan nilai z_{hitung} pada sumbu x di kurva di atas dan tarik garis dari titik z_{hitung} ke atas sehinggga memotong garis kurva.
4. Luas yang terdapat dalam tabel merupakan luas daerah antara garis tegak ke titik 0 di tengah kurva.
5. Carilah tempat nilai z dalam tabel normal.
6. Luas kurva normal = 1, karena $\mu = 0$, maka luas dari 0 ujung ke kiri = 0,5. luas dari 0 ke titik kanan = 0,5.
7. Luas daerah kurva nomal dicari dengan menggunakan tabel kurva normal baku.

Untuk lebih jelasnya silahkan Ananda memperhatikan contoh berikut dengan teliti dan cermat.

Contoh 1

Daerah yang diarsir berikut dibatasi oleh kurva normal N(0,1) pada interval $Z \leq 1,45$



a. Tuliskan bentuk integral yang menyatakan luas daerah L_1
b. Tentukan luas daerah L_1 dengan menggunakan tabel distribusi normal baku

Jawab:

Fungsi normal baku dalam variabel *x* adalah $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}z^2}}$

a. Daerah L_1 dibatasi oleh kurva normal baku pada interval $Z \leq 1,45$ maka luasnya adalah

$$L = \int_{-\infty}^{1,45} f(z)dz = \int_{-\infty}^{1,45} \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz}$$

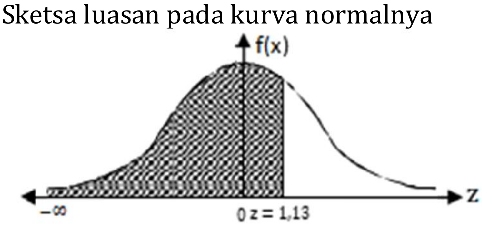
b. Cara menentukan luas daerah di bawah kurva normal baku pada interval $Z \leq 1,45$.
Perhatikan tabel distribusi normal baku di bawah ini. Batas kiri interval adalah Z = - ∞ dan batas kanannya adalah Z = 1,45 = 1,4 + 0,05 maka pilih bilangan 1,4 pada kolom paling kiri dan bilangan 0,05 pada baris paling atas. Pertemuan antara baris 1,4 dengan kolom 0,05 adalah luas daerah yang dimaksud. Perhatikan gambar berikut:

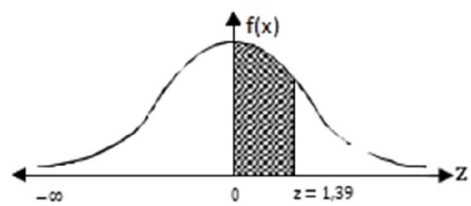
Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	.09834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916

Dari tabel distribusi normal baku diperoleh luas daerah di bawah kurva normal baku pada interval $Z \leq 1,45$ adalah 0,9265. Jadi luas daerah L_1 adalah 0,9265.

Contoh lain misal Misal akan dicari nilai $P(Z < 1,13)$ dan $P(0 < Z < 1,39)$. Untuk menyelesaikan ini, ditempuh cara:

1) Sketsa luasan pada kurva normalnya





Luas untuk z = 1, 13

Luas untuk 0 < z < 1, 39

2) Periksa tabel

Tabel 9. Peluang Normal Standar Distribusi Z, a = 0, 05

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319

- Memeriksa P(Z < 1,13), fokus ke 1,13 = 1,1 + 0,03, periksa "1,1" pada kolom pertama, "z", dan "0,03" pada baris teratas, dari "1,1" telusuri ke kanan, dari "0,03" telusuri ke bawah, persikuannya didapat 0,8708. Artinya dari interval $-\infty$ hingga 1,13 luas daerah di bawah kurvanya adalah 0,8708.
- Memeriksa P(Z < 1,39), dilakukan serupa dengan sebelumnya, dari "1,3" telusuri ke kanan, dari "0,09" telusuri ke bawah, persikuannya didapat 0,9177.

3) Analisis rasionalisasi perhitungan luas dari tabel untuk

P(Z < 1,13) = 0,8708 (sudah selesai)
P(0 < Z < 1,39) = P(Z < 1,39) − P(Z < 0) = 0,9177 − 0,5 = 0,4177

Contoh 2

Dari 100 responden didapat harga rata-rata untuk anget motivasi kerja = 75 dengan simpangan baku = 4. Tentukan:

a. Berapa jumlah responden yang mendapat nilai 80 ke atas?
b. Berapa nilai responden yang dapat dikualifikasikan 10 % dari nilai tertinggi?

Jawab

a. $Z = \frac{(80-7\ 5)}{4}$= 1,25 dari tabel kurva normal didapat luas ke kanan = 10,56%.
   Jadi jumlah responden = 10,56% x 100 = 11 orang.
b. Batas kualifikasi 10% tertinggi = 50% - 10% = 40% dari tabel diperoleh 1,28. karena SD tertinggi 4, maka untuk 1,28SD = 1,28 x 4 = 5,12.
   Jadi skor tertinggi = 75 + 5,12 = 80,12.

C. Rangkuman

Berikut adalah ciri dari distribusi normal yang perlu Ananda ketahui:

- Mempunyai sebuah parameter μ dan σ yang lokasi serta bentuk distribusinya dapat ditentukan sendiri.
- Kurva juga memiliki suatu puncak tunggal.
- Rata-rata terletak di tengah distribusi dan distribusinya simetris di sekitar garis tegak lurus yang ditarik melalui rata-rata.
- Total luas daerah di bawah kurva normal adalah 1 (hal ini berlaku untuk seluruh distribusi probabilitas kontinu).
- Dapat memotong sumbu horizontal dan dapat memanjang kedua ekor kurva itu hingga tidak ada batasnya.
- Kurvanya berbentuk seperti lonceng atau genta.
- Standar deviasi σ (Simpangan baku) yang menjadi penentu lebarnya kurva. Akan semakin runcing bentuk kurvanya apabila makin kecil σ.

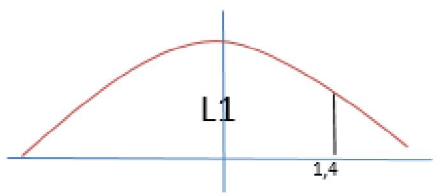
D. Latihan Soal

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan tepat dan tulis jawaban Ananda secara detil di buka latihan. Diskusikan dengan teman-teman dan guru matematika di kelas Ananda yaa... Semangattttt....

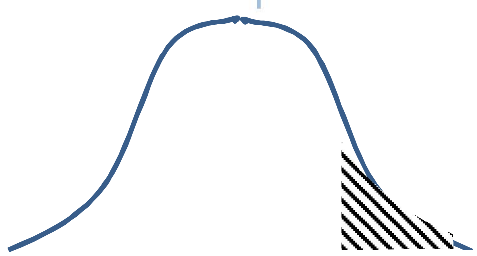
1) Tentukan luas daerah yang dibatasi kurva normal berikut:
   a. Kurva normal N(0,1) pada interval Z < - 0,42
   b. Kurva normal N(0,1) pada interval 0,16 < Z < 1,32

2) Gunakan tabel distribusi normal baku untuk menentukan hasil pengintegralan berikut:
   a. $\int_{0}^{1,2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$
   b. $\int_{-3}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

3) Tentukan integral yang menyatakan luas daerah di bawah kurva normal baku berikut, kemudian tentukan luasnya (L_1) menggunakan tabel distribusi normal.
   a.



   b.



0,84

4) Diketahui variabel acak Z berdistribusi normal baku. Tentukan besar peluang berikut:
   a. P (Z < 0,75)
   b. P(Z > - 0,67)
   c. P (0 < Z < 1,86)
   d. P(0,45 < Z < 2,4)

Pembahasan

1. Luas daerah yang dibatasi kurva normal berikut:
   a. Kurva normal N(0,1) pada interval Z < - 0,42
   Lihat gambar tabel z berikut

z	0	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	~~0,6554~~	~~0,6591~~	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967

   Memeriksa P(Z < 0,42), fokus ke 0,42 = 0,4 + 0,02, periksa "0,4" pada kolom pertama, "z", dan "0,02" pada baris teratas, dari "0,4" telusuri ke kanan, dari "0,02" telusuri ke bawah, persikuannya didapat 0,6628. Luas (Z < 0,42) = 0,6628.

   Luas (Z < -0,42) = 1 – Luas (Z < 0,42) = 1 – 0,6628 = **0,3372** (Skor: 12).

   b. Kurva normal N(0,1) pada interval 0,16 < Z < 1,32
   Lihat gambar tabel z berikut

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.0120	0.0160	0.0199	0.5239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	~~0.5398~~	~~0.5438~~	~~0.5478~~	~~0.5517~~	~~0.5557~~	~~0.5596~~	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6064	0.1064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	~~0.9032~~	~~0.9049~~	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

   Memeriksa P(Z < 0,16), fokus ke 0,16 = 0,1 + 0,06, periksa "0,1" pada kolom pertama, "z", dan "0,06" pada baris teratas, dari "0,1" telusuri ke kanan, dari "0,06" telusuri ke bawah, persikuannya didapat 0,5636. Luas (Z < 0,16) = 0,5636.

Memeriksa P(Z < 1,32), fokus ke 1,32 = 1,3 + 0,02, periksa “1,3” pada kolom pertama, “z”, dan “0,02” pada baris teratas, dari “1,3” telusuri ke kanan, dari “0,02” telusuri ke bawah, persikuannya didapat 0,9066. Luas (Z < 0,16) = 0,9066.

Luas (0,16 < Z < 1,32) = Luas (Z < 0,16) – Luas (Z < 0,16) = 0,9066 – 0,5636 = **0,3430**. (Skor: 13).

2. a. Berdasarkan tabel distribusi normal baku maka hasil pengintegralan $\int_0^{1,2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ adalah dengan menentukan luas daerah di bawah kurva normal baku pada interval 0 ≤ Z ≤ 1,2.
Perhatikan tabel distribusi normal baku di bawah ini. Batas kiri interval adalah Z = 0 dan batas kanannya adalah Z = 1,2 maka pilih bilangan 1,2. Perhatikan gambar berikut:

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.0120	0.0160	0.0199	0.5239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6064	0.1064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

Dari tabel distribusi normal baku diperoleh luas daerah di bawah kurva normal baku pada interval Z ≤ 1,2 adalah 0,8849.
Jadi luas daerah antara interval 0 ≤ Z ≤ 1,2 adalah:
Luas (Z ≤ 1,2) – Luas (Z ≤ 0) = 0,8849 – 0,5000 = 0,3849.

Jadi hasil pengintegralan $\int_0^{1,2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ adalah **0,3849**. (Skor: 12)

b. Berdasarkan tabel distribusi normal baku maka hasil pengintegralan $\int_{-3}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ adalah dengan menentukan luas daerah di bawah kurva normal baku pada interval -3 ≤ Z ≤ 1.

Perhatikan tabel distribusi normal baku di bawah ini. Batas kiri interval adalah Z = -3 dan batas kanannya adalah Z = 1, maka pilih bilangan -3 dan 1. Perhatikan gambar berikut:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026

Dari tabel distribusi normal baku diperoleh luas daerah di bawah kurva normal baku pada interval Z ≤ 1 adalah 0,8413 dan Z ≤ -3 adalah 0,0013.
Jadi luas daerah antara interval -3 ≤ Z ≤ 1 adalah:
Luas (Z ≤ 1) – Luas (Z ≤ -3) = 0,8413 – 0,0013 = **0,8400**.

Jadi hasil pengintegralan $\int_0^{1,2} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}}\, \boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^2} \boldsymbol{dz}$ adalah 0,8400. (Skor: 13)

3. a. Daerah L_1 dibatasi oleh kurva normal baku pada interval Z ≤ 1,4 maka luasnya adalah

$$L = \int_{-\infty}^{1,4} f(z)dz = \int_{-\infty}^{1,4} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}}\, \boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^2} \boldsymbol{dz}$$

Cara menentukan luas daerah di bawah kurva normal baku pada interval Z ≤ 1,4.
Perhatikan tabel distribusi normal baku di bawah ini. Batas kiri interval adalah Z = ∞ dan batas kanannya adalah Z = 1,4 maka pilih bilangan 1,4 pada kolom paling kiri. Perhatikan gambar berikut:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

Dari tabel distribusi normal baku diperoleh luas daerah di bawah kurva normal baku pada interval Z ≤ 1,4 adalah 0,9192. Jadi luas daerah L_1 adalah **0,9192.** (Skor: 12)

b. Daerah L_1 dibatasi oleh kurva normal baku pada interval Z ≥ 0,84 maka luasnya adalah

$$L = \int_{0,84}^{\infty} f(z)dz = \int_{0,84}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}}\, \boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}z^2}\boldsymbol{dz}$$

Cara menentukan luas daerah di bawah kurva normal baku pada interval Z ≥ 0,84.
Perhatikan tabel distribusi normal baku di bawah ini. Batas kiri interval adalah Z = 0,84 dan batas kanannya adalah Z = ∞ maka pilih bilangan 0,8 pada kolom paling kiri dan bilangan 0,04 pada baris paling atas. Pertemuan antara baris 0,8 dengan kolom 0,04 adalah luas daerah yang dimaksud. Perhatikan gambar berikut:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

Dari tabel distribusi normal baku diperoleh luas daerah $Z \leq 0,84$ adalah 0,7995. Luas daerah di bawah kurva normal baku pada interval $Z \geq 0,84$ adalah 1 – Luas ($Z \leq 0,84$) = 1 – 0, 7995 = 0,2005 .
Jadi luas daerah L_1 adalah **0,2005**. (Skor: 13)

4. Besar peluang berikut:
   a. P ($Z < 0,75$) = 0,7734 (Skor: 6)
   b. P($Z >$ - 0,67) = 1 – 0,2514 = 0,7486 (Skor: 6)
   c. P ($0 < Z < 1,86$) = 0,9686 – 0,5000 = 0,4686 (Skor: 6)
   d. P($0,45 < Z < 2,4$) = 0,9918 – 0,6736 = 0,3182 (Skor: 7).

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggung jawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami definisi konsep distrbusi normal?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menentukan luas daerah dari kurva normal?		
3.	Apakah Ananda telah mampu menjelaskan sifat-sifat dari distribusi normal?		
4.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan distribusi normal?		

EVALUASI

Kerjakan soal di bawah ini dengan tepat dan benar

1. Diketahui variabel acak Z berdistribusi normal baku. Tentukan besar peluang berikut:
   a. $P(Z < 0,7)$
   b. $P(Z > -1,67)$
   c. $P(0 < Z < 1,67)$

2. Berdasarkan data kependudukan, usia harapan hidup penduduk di suatu wilayah berdistribusi normal dengan rata-rata 44,8 tahun dan simpangan baku 11,3 tahun. Jika jumlah penduduk mencapai 110 orang, tentukan jumlah penduduk yang mempunyai harapan hidup.
   a. Usia di atas 60 tahun
   b. Antara 45 dan 65 tahun

3. Sebuah pangkalan minyak tanah yang menguasai daerah 3T dari bulan Desember sampai dengan Februari dapat memasarkan minyak rata-rata 8.000 liter per hari dengan simpangan baku 1.000 liter per hari. Jika dalam satu hari pangkalan dapat menawarkan 9.250 liter, berapa probabilitas bahwa permintaan dalam satu hari dapat melampaui jumlah yang dapat ditawarkan?

4. Upah bulanan karyawan perusahaan asing mengikuti distribusi normal dengan rata-rata M = Rp. 15.000.000,00 dan simpangan baku adalah Rp 3.500.000,00. Jika peristiwa ini dianggap sebagai peristiwa acak, berapa peluang bahwa upahnya lebih besar dari Rp 16.260.000,00?

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. a. P (Z < 0,7) = 0,7580.
   b. P(Z > - 1,67) = 0,9525.
   c. P (0 < Z < 1,67) = 0,3413.

2. a. 10 orang.
   b. 50 orang.

3. Probabilitasnya adalah 0,1056.

4. Peluangnya adalah 0,3594.

DAFTAR PUSTAKA

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (2014). *Matematika*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Siswanto. (2005). *Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya*. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Tim. (2019). *Belajar Praktis Matematika*. Klaten : Viva Pakarindo

Willa Adrian. (2008). *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya.

https://anitaharum.wordpress.com/2013/11/12/distribusi-normal-kurva-normal/ 2013. Diakses 3 Oktober 2020.

https://quipper.co.id/distribusi-normal/2020. Diakses 3 Oktober 2020.

http://staffnew.uny.ac.id/upload/198401312014042002/pendidikan/DISTRIBUSI%20NORMAL.pdf . 2020. Diakses 26 Oktober 2020.