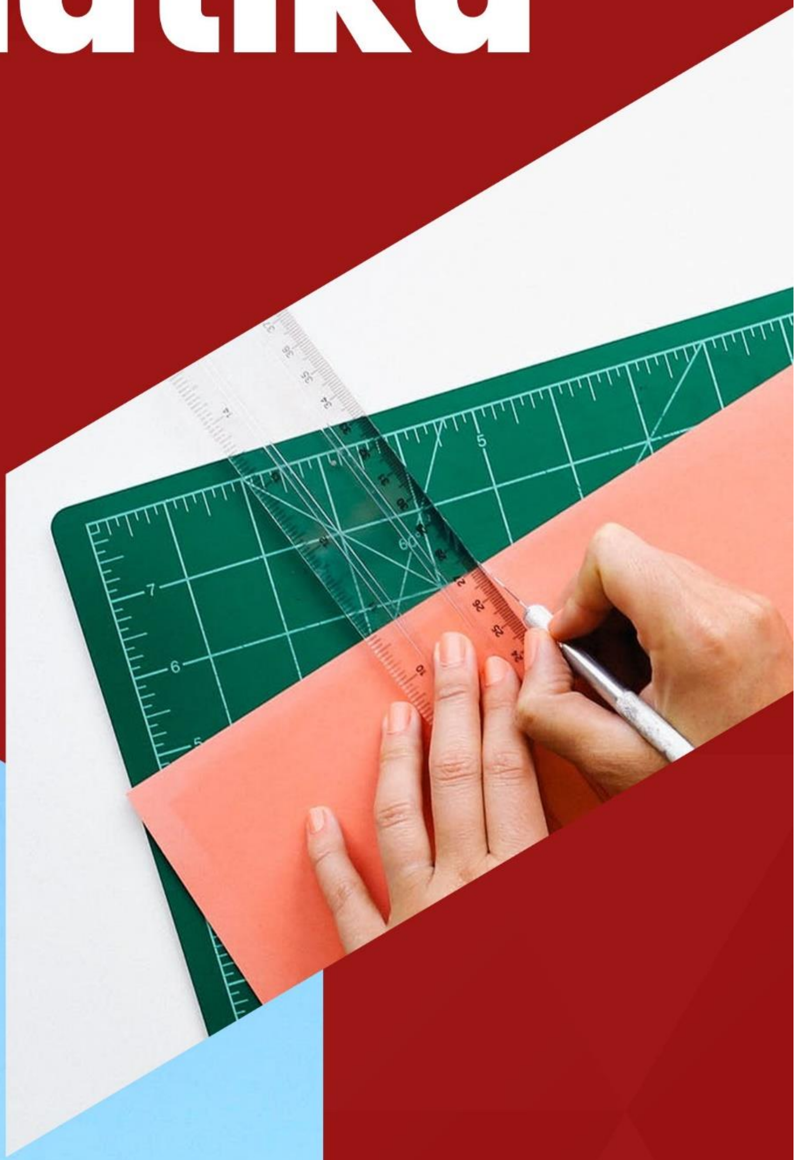
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS
XI

INDUKSI MATEMATIKA

MATEMATIKA UMUM KELAS XI

PENYUSUN

Asmar Achmad, S.Pd

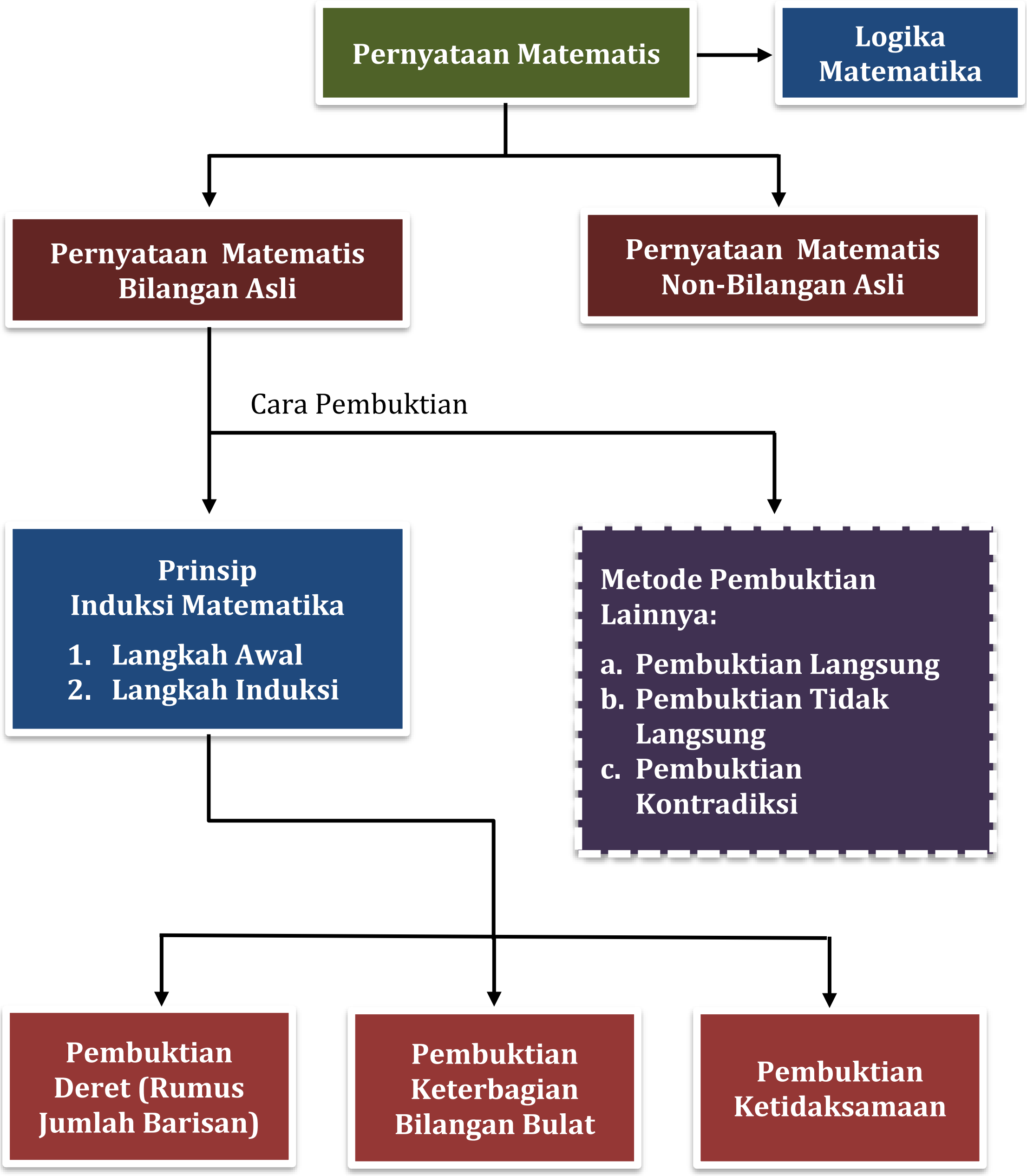
SMA Negeri 17 Makassar

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Induksi Matematika	:	Induksi matematika merupakan metode untuk membuktikan bahwa suatu sifat yang didefinisikan pada bilangan asli n adalah bernilai benar untuk semua nilai n yang lebih besar atau sama dengan sebuah bilangan asli tertentu.
Deret	:	Bentuk penjumlahan yang terdiri atas suku-suku barisan bilangan yang tersusun secara berurutan.
Keterbagian	:	Habis dibagi, bukan hanya dapat dibagi
Ketaksamaan	:	Kalimat pernyataan yang menyatakan hubungan tidak sama. Menggunakan tanda hubung $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, atau $\neq$.

PETA KONSEP


Pernyataan Matematis
Logika Matematika
Pernyataan Matematis Bilangan Asli
Pernyataan Matematis Non-Bilangan Asli
Cara Pembuktian
Prinsip Induksi Matematika
1. Langkah Awal
2. Langkah Induksi
Metode Pembuktian Lainnya:
a. Pembuktian Langsung
b. Pembuktian Tidak Langsung
c. Pembuktian Kontradiksi
Pembuktian Deret (Rumus Jumlah Barisan)
Pembuktian Keterbagian Bilangan Bulat
Pembuktian Ketidaksamaan

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	8 Jam Pelajaran (2 KP)
Judul Modul	:	Induksi Matematika

B. Kompetensi Dasar

3.1. Menjelaskan metode pembuktian Pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagiaan dengan induksi matematika

4.1. Menggunakan metode pembuktian induksi matematika untuk menguji pernyataan matematis berupa barisan, ketidaksamaan, keterbagiaan

C. Deskripsi Singkat Materi

Induksi matematika merupakan teknik pembuktian yang baku dalam matematika. Melalui induksi Matematika, kita dapat mengurangi langkah pembuktian yang sangat rumit untuk menemukan suatu kebenaran dari pernyataan matematis hanya dengan sejumlah langkah terbatas yang cukup mudah. Prinsip induksi matematika memiliki efek domino (jika domino disusun berjajar dengan jarak tertentu, saat satu ujung domino dijatuhkan ke arah donimo lain, maka semua domino akan jatuh satu per satu).

Gambar 1. Prinsip induksi matematika berlaku dalam pola susunan kartu

Dengan induksi matematika kita dapat melakukan pembuktian kebenaran suatu pernyataan matematika yang berhubungan dengan bilangan asli, tetapi bukan untuk menemukan suatu formula atau rumus.

Modul ini akan membahas tentang prinsip induksi matematik, metode pembuktiannya, dan penerapan induksi matematika pada pembuktian rumus jumlah barisan (deret), keterbagian, dan ketidaksamaan.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Metode Pembuktian dengan Induksi Matematika

Kedua : Penerapan Induksi Matematika

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
METODE PEMBUKTIAN DENGAN INDUKSI MATEMATIKA

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat menjelaskan metode pembuktian dengan induksi matematika, menjelaskan prinsip induksi matematika, dan menggunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis.

B. Uraian Materi

Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dalam matematika. Secara umum, Induksi matematika merupakan metode untuk membuktikan bahwa suatu sifat yang didefinisikan pada bilangan asli n adalah bernilai benar untuk semua nilai n yang lebih besar atau sama dengan sebuah bilangan asli tertentu. Melalui induksi Matematika, kita dapat mengurangi langkah pembuktian yang sangat rumit untuk menemukan suatu kebenaran dari pernyataan matematis hanya dengan sejumlah langkah terbatas yang cukup mudah.

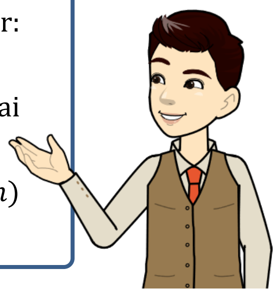
Perlu ditekankan bahwa dengan induksi matematika kita dapat melakukan pembuktian kebenaran suatu pernyataan matematika yang berhubungan dengan bilangan asli, tetapi bukan untuk menemukan suatu formula atau rumus.

Prinsip Induksi Matematika

Misalkan $P(n)$ adalah sifat yang didefinisikan untuk suatu bilangan asli n, dan misalkan pula a merupakan suatu bilangan asli tertentu. Andaikan dua pernyataan berikut bernilai benar:

1. $P(a)$ bernilai benar.
2. Untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$, jika $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k + 1)$ juga bernilai benar.

Maka pernyataan untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, $P(n)$ bernilai benar.



Untuk memberikan gambaran ide tentang induksi matematika, bayangkan sebarisan kartu-kartu domino seperti pada gambar.

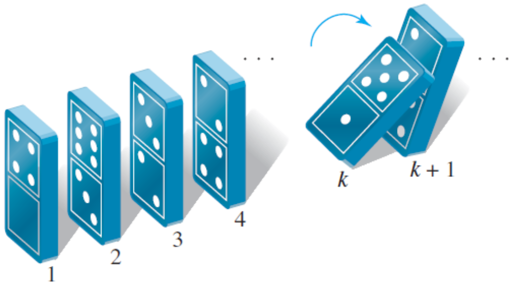
Gambar 1. Efek Domino

Kita gunakan dua asumsi:

1. Kartu domino pertama dijatuhkan.
2. Jika suatu kartu domino dijatuhkan, maka kartu domino berikutnya juga akan jatuh.

Jika dua asumsi tersebut benar, maka seluruh kartu domino juga akan jatuh.

Untuk melihat hubungan hal tersebut dengan prinsip induksi matematika, kita misalkan $P(n)$ adalah kalimat “domino ke-n akan jatuh”. Ini dapat dinyatakan bahwa jika $P(1)$ benar (domino pertama jatuh), maka untuk sebarang $k \geq 1$, jika $P(k)$ bernilai benar (domino ke-k jatuh), maka $P(k+1)$ juga bernilai benar (domino ke-$(k+1)$ juga jatuh). Menurut prinsip induksi matematika, maka $P(n)$, yaitu domino ke-n jatuh, juga bernilai benar untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$.



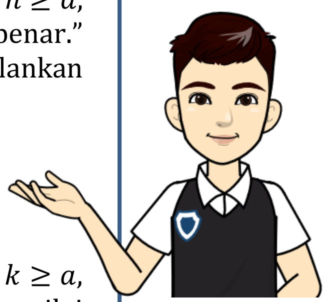
Gambar 2. Prinsip induksi matematika pada efek domino

Pembuktian dengan induksi matematika terdiri dari dua langkah. Langkah pertama disebut sebagai langkah dasar (*basis step*), dan langkah kedua disebut sebagai langkah induktif (*inductive step*).

Metode pembuktian dengan induksi matematika

Pandang suatu pernyataan “Untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, sifat $P(n)$ bernilai benar.” Untuk membuktikan pernyataan tersebut, kita akan menjalankan dua langkah berikut:

- Langkah dasar (*basis step*)
  Akan ditunjukkan bahwa $P(a)$ bernilai benar.
- Langkah induktif (*inductive step*)
  Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.



Pada proses pembuktian dengan Prinsip Induksi Matematika, untuk langkah awal tidak selalu dipilih untuk $n = 1$, $n = 2$, atau $n = 3$, tetapi dapat dipilih sebarang nilai n sedemikian sehingga dapat mempermudah supaya proses langkah awal dipenuhi. Selanjutnya, yang ditemukan pada langkah awal merupakan modal untuk langkah induksi. Artinya, jika $P(1)$ benar, maka $P(2)$ benar; jika $P(2)$ benar maka $P(3)$ benar; demikian seterusnya hingga disimpulkan $P(k)$ benar. Dengan menggunakan $P(k)$ benar, maka akan ditunjukkan $P(k+1)$ benar.

Jika $P(n)$ memenuhi kedua prinsip induksi matematika, maka pernyataan matematis P(n) terbukti benar. Jika salah satu dari kedua prinsip tidak dipenuhi, maka pernyataan matematis $P(n)$ salah. Perhatikan bahwa pada langkah induktif, kita tidak membuktikan bahwa $P(k)$ benar. Kita hanya menunjukkan bahwa jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar. Pemisalan bahwa $P(k)$ benar tersebut dinamakan hipotesis induktif.

Contoh 1.

Buktikan dengan induksi matematika bahwa jumlah n bilangan ganjil positif yang pertama sama dengan n^2.

Jawab

Kita ketahui pola bilangan ganjil positif adalah $(2n - 1)$ untuk n bilangan asli.

Akan kita tunjukkan bahwa: $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$

Misalkan $P(n)$ adalah persamaan

$$P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

Untuk membuktikan kebenaran pernyataan $P(n)$, kita harus menyelidiki apakah $P(n)$ memenuhi prinsip induksi matematika, yaitu langkah dasar dan langkah induksi.

- Langkah dasar

  Akan ditunjukkan bahwa $P(1)$ bernilai benar.

  Untuk $n = 1$, maka $P(1) = 1 = 1^2 = 1$.

  Jadi $P(1)$ bernilai benar. (Langkah dasar selesai)

- Langkah induktif

  Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

  Misalkan bahwa $P(k)$ diasumsikan bernilai benar untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, yaitu

  $$P(k) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

  Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$ maka $P(k+1)$ juga bernilai benar, yaitu

  $$P(k+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$$

  Karena $P(k) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ adalah pernyataan yang benar, maka dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh:

  $$\begin{aligned} 1+3+5+7+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1) &= \underbrace{\left(1+3+5+7+\ldots+(2k-1)\right)}_{P(k)}+(2(k+1)-1) \\ &= k^2+(2k+2-1) \\ &= k^2+2k+1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

  Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai)

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah selesai, maka menurut prinsip induksi matematis terbukti bahwa: $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$. Jadi disimpulkan bahwa jumlah n bilangan ganjil positif yang pertama sama dengan n^2, dengan n bilangan asli.

Contoh 2.

Buktikan bahwa jumlah n bilangan asli yang pertama sama dengan $\frac{n(n+1)}{2}$.

Jawab

Akan dibuktikan bahwa untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$, maka

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Misalkan $P(n)$ adalah persamaan

$$P(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Langkah dasar

  Akan ditunjukkan bahwa $P(1)$ bernilai benar.

  Untuk $n = 1$, maka ruas kiri $P(1) = 1$ dan ruas kanan $P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

  Jadi $P(1)$ bernilai benar. (Langkah dasar selesai)

- Langkah induktif

  Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

  Misalkan bahwa $P(k)$ diasumsikan bernilai benar untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, yaitu

$$P(k) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

  Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$ maka $P(k+1)$ juga bernilai benar, yaitu

$$P(k+1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)}{2}$$

  atau ekuivalen dengan

$$P(k+1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

  Karena $P(k) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ adalah pernyataan yang benar, maka dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh:

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+\ldots+k+(k+1) &= \underbrace{\left(1+2+3+4+\ldots+k\right)}_{P(k)}+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2+k}{2}+\frac{2k+2}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai)

Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematis terbukti bahwa $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$.

Contoh 3.

Buktikan dengan induksi matematika bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

untuk setiap n bilangan asli.

Jawab

Misalkan $P(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

- Langkah dasar
  Akan ditunjukkan bahwa $P(1)$ bernilai benar.
  Ambil n = 1, diperoleh
  $$P(1) = \frac{1}{(2(1)-1)(2(1)+1)} = \frac{1}{2(1)+1}$$
  $$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
  Jadi $P(1)$ bernilai benar. (Langkah dasar selesai)
- Langkah Induktif
  Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

  Misalkan bahwa $P(k)$ diasumsikan bernilai benar untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, yaitu
  $$P(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k}{2k+1}$$
  Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k+1$ maka $P(k+1)$ juga bernilai benar, yaitu
  $$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1} = \frac{k+1}{2k+3}$$
  Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh:
  $$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}}_{P(k)} + \sum_{i=k+1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k+1}{2k+3}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).

Jadi, disimpulkan bahwa $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$ untuk setiap n bilangan asli.

Contoh 4.

Tunjukkan dengan induksi matematis bahwa

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

untuk sebarang bilangan bulat nonnegatif n.

Jawab

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

untuk sebarang bilangan bulat nonnegatif n.

- Langkah dasar

  $P(0)$ benar karena di ruas kiri $P(0) = 2^0 = 1$ dan di ruas kanan $2^{0+1} - 1 = 1$. Langkah dasar selesai.

- Langkah induktif

  Untuk hipotesis induktif, kita asumsikan bahwa $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan bulat nonnegatif k, yaitu

  $$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

  Menggunakan asumsi tersebut, selanjutnya $P(k+1)$ juga harus ditunjukkan benar.

  Kita menunjukkan bahwa $P(k+1)$:

  $$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{(k+1)+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

  Dengan asumsi $P(k)$ benar, maka

  $$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= \left(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k\right) + 2^{k+1} \\ &= \left(2^{k+1} - 1\right) + 2^{k+1} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai)

Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan bulat nonnegatif n. Dengan demikian terbukti bahwa
$1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$ untuk sebarang bilangan bulat nonnegatif n.

Contoh 5.

Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk setiap bilangan asli $n \geq 1$, berlaku

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Jawab

Misalkan $\mathrm{P(n)}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

- Langkah dasar
  Ambil n = 1 sehingga diperoleh
  $\mathrm{P(1)}=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{1+1} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
  Berarti untuk n = 1, P(1) bernilai benar. Langkah dasar selesai.
- Langkah induktif

  Misalkan $n = k$, berarti

  $$P(k)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

  Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli.

  Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n=k+1$ maka $P(k+1)$ juga bernilai benar, yaitu

  $$P(k+1)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

  Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh:

  $$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

  $$=\underbrace{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}}_{P(k)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

  $$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

  $$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

  $$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

  $$=\frac{(k+1)(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai)

Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$.

Jadi, disimpulkan bahwa $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ berlaku untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$.

C. Rangkuman

- Induksi matematika merupakan metode untuk membuktikan bahwa suatu sifat yang didefinisikan pada bilangan asli n adalah bernilai benar untuk semua nilai n yang lebih besar atau sama dengan sebuah bilangan asli tertentu tertentu.
- Prinsip Induksi Matematika
  Misalkan $P(n)$ adalah sifat yang didefinisikan untuk suatu bilangan asli n, dan misalkan pula a merupakan suatu bilangan asli tertentu. Andaikan dua pernyataan berikut bernilai benar:
  1. $P(a)$ bernilai benar.
  2. Untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$, jika $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

  Maka pernyataan untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, $P(n)$ bernilai benar.
- Metode pembuktian dengan induksi matematika
  Pandang suatu pernyataan "Untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, sifat $P(n)$ bernilai benar." Untuk membuktikan pernyataan tersebut, kita akan menjalankan dua langkah berikut:
  1. Langkah dasar (*basis step*)
     Akan ditunjukkan bahwa $P(a)$ bernilai benar.
  2. Langkah induktif (*inductive step*)
     Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

D. Latihan Soal

1. Untuk setiap rumusan $P(k)$ yang diberikan, tentukan masing-masing $P(k+1)$.
   a. $P(k)=\frac{5}{k(k+1)}$
   b. $P(k)=\frac{1}{2(k+2)}$
   c. $P(k)=\frac{k^2(k+3)^2}{6}$
   d. $P(k)=\frac{k}{3}(2k+1)$
   e. $P(k)=\frac{3}{(k+2)(k+3)}$

2. Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan bahwa rumus berikut benar untuk sebarang bilangan asli n.

a. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

b. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

c. $(1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + \cdots + (n.n!) = (n + 1)! - 1$

d. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

e. $2(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}) = 3^n - 1$

3. Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan kebenaran pernyataan berikut.

a. $\sum_{i=1}^{n}(3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ untuk setiap bilangan asli *n*.

b. $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$ untuk setiap bilangan asli *n*.

c. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ untuk setiap bilangan asli *n*.

d. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ untuk setiap bilangan asli *n*.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

1. Alternatif penyelesaian

   Untuk setiap rumusan $P(k)$ yang diberikan, tentukan masing-masing $P(k+1)$.

   a. $P(k) = \frac{5}{k(k+1)}$

   $$P(k+1) = \frac{5}{(k+1)((k+1)+1)} = \frac{5}{(k+1)(k+2)}$$

   b. $P(k) = \frac{1}{2(k+2)}$

   $$P(k+1) = \frac{1}{2((k+1)+2)} = \frac{1}{2(k+3)} = \frac{1}{2k+6}$$

   c. $P(k) = \frac{k^2(k+3)^2}{6}$

   $$P(k+1) = \frac{k^2(k+3)^2}{6} = \frac{(k+1)^2((k+1)+3)^2}{6} = \frac{(k+1)^2(k+4)^2}{6}$$

   d. $P(k) = \frac{k}{3}(2k+1)$

   $$P(k+1) = \frac{(k+1)}{3}(2(k+1)+1) = \frac{(k+1)}{3}(2k+3) = \frac{(k+1)(2k+3)}{3}$$

   e. $P(k) = \frac{3}{(k+2)(k+3)}$

   $$P(k+1) = \frac{3}{((k+1)+2)((k+1)+3)} = \frac{3}{(k+3)(k+4)}$$

2. Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan bahwa rumus berikut benar untuk sebarang bilangan asli n.

   a. $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$
   Misalkan $P(n)$ = $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$

   Langkah Dasar:
   Untuk n = 1, diperoleh $P(1)$ = 2 = 1(1 + 1) = 1(2)
   Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

   Langkah Induksi:
   Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

   $$P(k) = 2+4+6+\cdots+2k = k(k+1)$$

   Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar

   $$P(k+1) = 2+4+6+\cdots+2k+2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

   Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh

   $$\begin{aligned} 2+4+6+...+2k+2(k+1) &= \underbrace{(2+4+6+...+2k)}_{P(k)}+2(k+1) \\ &= k(k+1)+2(k+1) \\ &= k^2+1+2k+2 \\ &= k^2+2k+3 \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

   Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

b. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

Misalkan $P(n) = 1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1) = 1 = \dfrac{1(3(1)-1)}{2} = \dfrac{2}{2}$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k) = 1 + 4 + 7 + ... + (3k-2) = \frac{k(3k-1)}{2}$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = 1 + 4 + 7 + ... + (3k-2) + (3(k+1)-2) = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 7 + ... + (3k-2) + (3(k+1)-2) &= \underbrace{\left(1 + 4 + 7 + ... + (3k-2)\right)}_{P(k)} + (3(k+1)-2) \\ &= \frac{k(3k-1)}{2} + (3(k+1)-2) \\ &= \frac{k(3k-1) + 2(3k+1)}{2} \\ &= \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2} \\ &= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(3k+2)}{2} = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2} \end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k + 1)$ sama, maka $P(k + 1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

c. $(1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + \cdots + (n.n!) = (n + 1)! - 1$

Misalkan $P(n) = (1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + ... + (n.n!) = (n+1)! - 1$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1) = (1.1!) = (1+1)! - 1$

$$\Leftrightarrow \; 1 = 2! - 1 = 2 - 1$$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k) = (1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + ... + (k.k!) = (k+1)! - 1$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = (1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + ... + (k.k!) + ((k+1).(k+1)!) = ((k+1)+1)! - 1$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned} &(1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + ... + (k.k!) + ((k+1).(k+1)!) \\ =\; &\underbrace{(1.1!) + (2.2!) + (3.3!) + ... + (k.k!)}_{P(k)} + ((k+1).(k+1)!) \\ =\; &(k+1)! - 1 + ((k+1).(k+1)!) \end{aligned}$$

$= (k+1).(k+1)!+(k+1)!-1$
$= (k+2).(k+1)!-1$
$= (k+2)!-1=((k+1)+1)!-1$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

d. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Misalkan $P(n)=1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1)=1.2=\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3}$

$$\Leftrightarrow \; 2=\frac{2(3)}{3}=2$$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=1.2+2.3+3.4+...+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1)=1.2+2.3+3.4+...+k(k+1)+(k+1)((k+1)+1)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$1.2+2.3+3.4+...+k(k+1)+(k+1)((k+1)+1)$
$= \underbrace{1.2+2.3+3.4+...+k(k+1)}_{P(k)}+(k+1)((k+1)+1)$
$= \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$
$= \dfrac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$
$= \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

e. $2(1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}) = 3^n - 1$

Misalkan $P(n)=2(1+3+3^2+3^3+...+3^{n-1})=3^n-1$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1)=2(1)=3^1-1$

$$\Leftrightarrow \; 2=3-1$$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=2(1+3+3^2+3^3+...+3^{k-1})=3^k-1$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar

$$P(k+1)=2(1+3+3^2+3^3+...+3^{k-1}+3^{(k+1)-1})=3^{k+1}-1$$

Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh

$$\begin{aligned}2(1+3+3^2+3^3+...+3^{k-1}+3^{(k+1)-1}) &= 2(1+3+3^2+3^3+...+3^{k-1})+2(3^{(k+1)-1})\\ &= \underbrace{2(1+3+3^2+3^3+...+3^{k-1})}_{P(k)}+2(3^{(k+1)-1})\\ &=(3^k-1)+2(3^k)\\ &=3.3^k-1\\ &=3^{k+1}-1\end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

3. Gunakan prinsip induksi matematika untuk membuktikan kebenaran pernyataan berikut.

a. $\sum_{i=1}^{n}(3i-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ untuk setiap bilangan asli n.

Misalkan $P(n)=\sum_{i=1}^{n}(3i-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$

Langkah Dasar:

Untuk $n = 1$, diperoleh $P(1)=\sum_{i=1}^{1}(3i-2)=3(1)-2=\frac{1(3(1)-1)}{2}$

$$\Leftrightarrow\ 1=\frac{2}{2}$$

Pernyataan benar untuk $n = 1$ (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=\sum_{i=1}^{k}(3i-2)=\frac{k(3k-1)}{2}$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar

$$P(k+1)=\sum_{i=1}^{k+1}(3i-2)=\frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$$

Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}(3i-2) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k}(3i-2)}_{P(k)}+\sum_{i=k+1}^{k+1}(3i-2)\\ &= \frac{k(3k-1)}{2}+\sum_{i=k+1}^{k+1}(3i-2)\\ &= \frac{k(3k-1)}{2}+(3(k+1)-2)\\ &= \frac{k(3k-1)}{2}+(3k+1)\\ &= \frac{k(3k-1)+2(3k+1)}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2}$$
$$= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(3k+2)}{2} = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

b. $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$ untuk setiap bilangan asli n.

Misalkan $P(n) = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1) = \sum_{i=1}^{1} 2^{i-1} = 2^{1-1} = 2^1 - 1$

$$\Leftrightarrow \quad 2^0 = 2 - 1 = 1$$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k) = \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = 2^k - 1$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} = 2^{k+1} - 1$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1}}_{P(k)} + \sum_{i=k+1}^{k+1} 2^{i-1}$$
$$= (2^k - 1) + \sum_{i=k+1}^{k+1} 2^{i-1}$$
$$= (2^k - 1) + 2^{(k+1)-1}$$
$$= 2^k - 1 + 2^k$$
$$= 2.2^k - 1$$
$$= 2^{k+1} - 1$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

c. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ untuk setiap bilangan asli n.

Misalkan $P(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1)=\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad 1=\frac{2^2}{4}=\frac{4}{4}$$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1)=\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} i^3}_{P(k)} + \sum_{i=k+1}^{k+1} i^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \sum_{i=k+1}^{k+1} i^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

d. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ untuk setiap bilangan asli n.

Misalkan $P(n)=\sum_{i=1}^{n} i(i+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Langkah Dasar:

Untuk n = 1, diperoleh $P(1)=\sum_{i=1}^{1} i(i+1)=1(1+1)=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad 2=\frac{2(3)}{3}=2$$

Pernyataan benar untuk n = 1 (langkah dasar selesai).

Langkah Induksi:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=\sum_{i=1}^{k} i(i+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar

$$P(k+1)=\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} i(i+1)}_{P(k)}+\sum_{i=k+1}^{k+1} i(i+1)\\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}+\sum_{i=k+1}^{k+1} i(i+1)\\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)((k+1)+1)\\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)\\
&= \frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}
\end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai). Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu yang dimaksud pernyataan matematis?	◯	◯
2	Apakah Anda tahu yang dimaksud induksi matematika?	◯	◯
3	Apakah Anda dapat menjelaskan prinsip induksi matematika?	◯	◯
4	Apakah Anda dapat menjelaskan metode pembuktian dengan induksi matematika?	◯	◯
5	Apakah Anda dapat membuktikan pernyataan matematis dengan induksi matematika?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PENERAPAN INDUKSI MATEMATIKA

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan kalian dapat menggunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis berupa rumus jumlah barisan (deret), keterbagian, dan ketidaksamaan.

B. Uraian Materi

Dalam penerapannya, prinsip induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikan rumus jumlah barisan (deret), ketidaksamaan, dan keterbagian bilangan bulat.

1. Penerapan Induksi Matematika pada Rumus Jumlah Barisan (Deret)

Sebelum melakukan pembuktian jumlah barisan (deret), ada beberapa hal yang perlu kalian pahami terkait deret bilangan, yaitu:

Jika $P(n) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = Sn$, maka
$P(1) = u_1 = S_1$
$P(k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k = S_k$
$P(k + 1) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + u_{k+1} = S_{k+1}$

Contoh 1.

Gunakan induksi matematis untuk membuktikan bahwa rumus jumlah berhingga dari deret aritmetika dengan suku pertama *a* dan beda *b* adalah

$$a+(a+b)+(a+2b)+...+(a+(n-1)b)=\frac{1}{2}n(2a+(n-1)b)$$

dengan *n* adalah bilangan asli.

Jawab

Misalkan $P(n)=a+(a+b)+(a+2b)+...+(a+(n-1)b)=\frac{1}{2}n(2a+(n-1)b)$

Langkah dasar:

Untuk $n = 1$, $P(1)$ benar, karena

$P(1)=\frac{1}{2}.1(2a+(1-1)b)=\frac{1}{2}(2a)=a$

Langkah dasar selesai.

Langkah Induktif:

Untuk $n = k$ dengan *k* adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=a+(a+b)+(a+2b)+...+(a+(k-1)b)=\frac{1}{2}k(2a+(k-1)b)$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1)=a+(a+b)+(a+2b)+...+(a+(k-1)b)+(a+((k+1)-1)b)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)(2a+((k+1)-1)b)=\frac{1}{2}(k+1)(2a+kb)$$

Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
&a+(a+b)+(a+2b)+...+(a+(k-1)b)+(a+((k+1)-1)b)\\
&= \underbrace{a+(a+b)+(a+2b)+...+(a+(k-1)b)}_{P(k)}+(a+((k+1)-1)b)\\
&= \frac{1}{2}k(2a+(k-1)b)+(a+((k+1)-1)b)\\
&= \frac{1}{2}k(2a+bk-b)+(a+bk)\\
&= ak+\frac{1}{2}bk^2-\frac{1}{2}bk+a+bk\\
&= ak+\frac{1}{2}bk^2+\frac{1}{2}bk+a\\
&= \frac{1}{2}\left(2ak+bk^2+2a+bk\right)\\
&= \frac{1}{2}(k+1)(2a+kb)
\end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan

$$P(n)=a+(a+b)+(a+2b)+...+(a+(n-1)b)=\frac{1}{2}n(2a+(n-1)b)$$

benar untuk setiap n bilangan asli.

Contoh 2.

Gunakan induksi matematis untuk membuktikan bahwa rumus jumlah berhingga dari deret geometri dengan suku pertama a dan rasio r adalah

$$a+ar+ar^2+...+ar^{n-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

Dengan $r > 1$ dan n adalah bilangan asli.

Jawab

Misalkan $P(n)=a+ar+ar^2+...+ar^{n-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

Langkah dasar:

Untuk $n = 1$, $P(1)$ benar, karena

$$P(1)=\frac{a(r^1-1)}{r-1}=\frac{a(r-1)}{r-1}=a$$

Langkah dasar selesai.

Langkah Induktif:

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k) = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k-1} = \frac{a(r^k - 1)}{r-1}$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k-1} + ar^{(k+1)-1} = \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r-1}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned} a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k-1} + ar^{(k+1)-1} &= \underbrace{a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k-1}}_{P(k)} + ar^{(k+1)-1} \\ &= \frac{a(r^k - 1)}{r-1} + ar^{(k+1)-1} \\ &= \frac{a(r^k - 1)}{r-1} + ar^k \\ &= \frac{a(r^k - 1) + ar^k(r-1)}{r-1} \\ &= \frac{a(r^k - 1 + r^{k+1} - r^k)}{r-1} \\ &= \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r-1} \end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika peryataan

$$P(n) = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$$

benar untuk setiap n bilangan asli.

Contoh 3.

Untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$, buktikan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Jawab

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Langkah dasar.

$P(1)$ benar, karena $1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = \frac{1\cdot2\cdot3}{6} = 1$.

Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Asumsikan hipotesis induktif bahwa $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k. Sehingga hipotesis induktif $P(k)$ adalah pernyataan bahwa

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ benar.

Untuk menyelesaikan hipotesis induktif, harus ditunjukkan bahwa jika $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ juga benar.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+k^2)+(k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\ &= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\ &= \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

Dengan demikian hal tersebut menunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar berdasarkan asumsi bahwa $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$.

2. Penerapan Induksi Matematika pada Keterbagian

Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang penerapan induksi matematika pada keterbagian, perlu ditegaskan makna keterbagian dalam hal ini, yaitu habis dibagi bukan hanya dapat dibagi.

Pernyataan "a habis dibagi b" bersinonim dengan:

- a kelipatan b
- b faktor dari a
- b membagi a

Jika p habis dibagi a dan q habis dibagi a, maka $(p + q)$ juga habis dibagi a.
Sebagai contoh, 4 habis dibagi 2 dan 6 habis dibagi 2, maka (4 + 6) juga habis dibagi 2.

Contoh 4.

Buktikan bahwa $7^n - 1$ habis dibagi 6, untuk sebarang bilangan asli n.

Jawab

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan $7^n - 1$ habis dibagi 6.

Langkah dasar.

$P(1)$ benar karena $7^n - 1 = 7^1 - 1 = 7 - 1 = 6$ habis dibagi 6.
Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa $(7^k - 1)$ habis dibagi 6 untuk sebarang bilangan asli k. Sehingga P(k) dapat dinyatakan sebagai $7^k - 1 = 6c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$, yaitu pernyataan bahwa $7^{k+1}-1$ habis dibagi 6, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa $7^{k+1}-1$ habis dibagi 6.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 7^{k+1}-1 &= 7^k(7)-1 \\ &= 7^k(6+1)-1 \\ &= 6.7^k + \underbrace{7^k-1}_{P(k)} \\ &= 6.7^k + 6c \\ &= 6(7^k + c) \end{aligned}$$

Jelas bahwa ruas kanan $6(7^k + c)$ merupakan kelipatan 6. Jadi $P(k+1)$ benar.

Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif dipenuhi, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa $7^n - 1$ habis dibagi 6 untuk sebarang bilangan asli n.

Contoh 5.

Buktikan bahwa 2 adalah faktor dari $n^2 + 5n$ untuk sebarang bilangan asli n.

Jawab

Untuk sebarang bilangan bulat positif n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 2 adalah faktor dari $n^2 + 5n$.

Langkah dasar.

$P(1)$ benar karena $n^2 + 5n = 1^2 + 5 \cdot 1 = 6 = 2 \cdot 3$.
Sehingga 2 adalah faktor dari $n^2 + 5n$ untuk $n = 1$.
Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 2 adalah faktor dari $k^2 + 5k$ atau ekuivalen dengan $k^2 + 5k = 2c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$, yaitu pernyataan bahwa 2 adalah faktor dari $(k+1)^2 + 5(k+1)$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 2 adalah faktor dari $(k+1)^2 + 5(k+1)$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (k+1)^2 + 5(k+1) &= k^2 + 2k + 1 + 5k + 5 \\ &= (k^2 + 5k) + (2k + 6) \\ &= (k^2 + 5k) + 2(k+3) \\ &= 2c + 2(k+3) \\ &= 2(c + k + 3) \end{aligned}$$

Dari baris terakhir, karena bentuk $(c + k + 3)$ adalah bilangan bulat, maka jelas bahwa 2 adalah faktor dari $(k+1)^2 + 5(k+1)$. Jadi $P(k+1)$ benar.
Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa 2 adalah faktor dari $n^2 + 5n$ untuk sebarang bilangan asli n.

3. Penerapan Induksi Matematika pada Ketidaksamaan

Sebelum kita mengkaji lebih jauh tentang penerapan induksi matematika pada ketidaksamaan, kita perlu memperhatikan sifat-sifat ketidaksamaan yang sering digunakan berikut ini.

- Sifat transitif
  a > b > c $\Rightarrow$ a > c atau
  a < b < c $\Rightarrow$ a < c
- a < b dan c > 0 $\Rightarrow$ ac < bc atau
  a > b dan c > 0 $\Rightarrow$ ac > bc
- a < b $\Rightarrow$ a + c < b + c atau
  a > b $\Rightarrow$ a + c > b + c

Contoh 6.

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $2^n < (n!)$ untuk sebarang bilangan asli n, dengan $n \geq 4$.

Jawab

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $2^n < (n!)$. Perhatikan bahwa ketaksamaan salah untuk $n = 1, 2,$ dan 3.

Langkah dasar

Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 4$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(4)$. Perhatikan bahwa $P(4)$ benar karena $2^4 = 16 < 24 = 4!$. Langkah dasar selesai.

Langkah induktif

Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 4$, yaitu asumsikan bahwa $2^k < (k!)$ untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 4$. Pada hipotesis induktif harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Dalam hal ini harus ditunjukkan jika $2^k < (k!)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 4$, maka $2^{k+1} < (k+1)!$ juga benar.
Diperoleh

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &< 2 \cdot k! \\ &< (k+1)k! \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 4$. Dengan demikian terbukti bahwa $2^n < (n!)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 4$.

Contoh 7.

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa ketaksamaan $n < 2^n$ untuk sebarang bilangan asli n.

Jawab

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $n < 2^n$.

Langkah dasar.

$P(1)$ benar, karena $1 < 2^1 = 2$. Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Asumsikan hipotesis induktif bahwa $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k. Sehingga hipotesis induktif $P(k)$ adalah pernyataan bahwa $k < 2^k$. Untuk menyelesaikan hipotesis induktif, harus ditunjukkan bahwa jika $P(k)$ benar, maka

$P(k+1)$, yaitu pernyataan bahwa $k+1 < 2^{k+1}$, juga benar. Dalam hal ini, kita tunjukkan bahwa jika $k < 2^k$, maka $k+1 < 2^{k+1}$.

Untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk sebarang bilangan asli k, tambahkan 1 ke dalam kedua ruas dari $k < 2^k$. Perhatikan bahwa $1 \le 2^k$.
Hal ini menyebabkan

$$k+1 < 2^k + 1 \le 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar, yaitu $k+1 < 2^{k+1}$, berdasarkan asumsi bahwa $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa $n < 2^n$ benar untuk sebarang bilangan asli n.

C. Rangkuman

- Metode pembuktian dengan induksi matematika
  Pandang suatu pernyataan "Untuk sebarang bilangan asli $n \ge a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, sifat $P(n)$ bernilai benar." Untuk membuktikan pernyataan tersebut, kita akan menjalankan dua langkah berikut:
  1. Langkah dasar (*basis step*)
     Akan ditunjukkan bahwa $P(a)$ bernilai benar.
  2. Langkah induktif (*inductive step*)
     Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $k \ge a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

- Dalam penerapannya, prinsip induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikan rumus jumlah barisan (deret), ketidaksamaan, dan keterbagian bilangan bulat.

D. Latihan Soal

Gunakan induksi matematis untuk membuktikan kebenaran pernyataan berikut.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$ untuk sebarang bilangan asli n.
2. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ untuk sebarang bilangan asli n.
3. $3 + 9 + 15 + \cdots + (6n-3) = 3n^2$ untuk sebarang bilangan asli n.
4. $2 + 7 + 12 + \cdots + (5n-3) = \frac{1}{2}n(5n-1)$ untuk sebarang bilangan asli n.
5. $n^2 + n$ habis dibagi 2 untuk sebarang bilangan asli n.
6. $n^3 + 2n$ habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n.
7. $n^5 - n$ habis dibagi 5 untuk sebarang bilangan asli n.
8. $(n+1)^2 < 2n^2$ untuk sebarang bilangan asli $n \ge 3$.
9. $n! > 2^n$ untuk sebarang bilangan asli $n \ge 4$.
10. $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$ untuk sebarang bilangan asli $n \ge 7$.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa
   $$P(n) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$$

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar, karena $1(1 + 1) = 2$

   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan
   $$P(k) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k + 1)$$

   Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar
   $$P(k + 1) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)((k + 1) + 1)$$

   Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh
   $$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k + 1) &= (2 + 4 + 6 + \cdots + 2k) + +2(k + 1) \\ &= k(k + 1) + 2(k + 1) \\ &= (k + 1)(k + 2) \\ &= (k + 1)((k + 1) + 1) \end{aligned}$$

   Kedua ruas dari $P(k + 1)$ sama, maka $P(k + 1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
   Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ untuk sebarang bilangan asli n.

2. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa
   $$P(n) = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar, karena $\frac{1(3(1)-1)}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan
   $$P(k) = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) = \frac{k(3k - 1)}{2}$$

   Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = 1+4+7+\cdots+(3k-2)+(3(k+1)-2) = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned} 1+4+7+\cdots+(3k-2)+(3(k+1)-2) \\ &= \big(1+4+7+\cdots+(3k-2)\big)+(3(k+1) \\ &= \frac{k(3k-1)}{2}+(3(k+1)-2) \\ &= \frac{k(3k-1)}{2}+(3k+1) \\ &= \frac{k(3k-1)+2(3k+1)}{2} \\ &= \frac{3k^2-k+6k+2}{2} \\ &= \frac{3k^2+5k+2}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2} \end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa

$$1+4+7+\cdots+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

untuk sebarang bilangan asli n.

3. $3+9+15+\cdots+(6n-3) = 3n^2$ untuk sebarang bilangan asli n.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

$$P(n) = 3+9+15+\cdots+(6n-3) = 3n^2$$

Langkah dasar.

$P(1)$ benar, karena $3(1)^2 = 3$

Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k) = 3+9+15+\cdots+(6k-3) = 3k^2$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = 3+9+15+\cdots+(6k-3)+(6(k+1)-3) = 3(k+1)^2$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned} 3+9+15+\ldots+(6k-3)+(6(k+1)-3) &= \big(3+9+15+\ldots+(6k-3)\big)+(6(k+1)-3) \\ &= 3k^2+(6(k+1)-3) \\ &= 3k^2+6k+3 \\ &= 3(k^2+2k+1) \\ &= 3(k+1)^2 \end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa $3+9+15+\cdots+(6n-3)=3n^2$ untuk sebarang bilangan asli n.

4. $2+7+12+\cdots+(5n-3)=\frac{1}{2}n(5n-1)$ untuk sebarang bilangan asli n.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

$$P(n)=2+7+12+\cdots+(5n-3)=\frac{1}{2}n(5n-1)$$

Langkah dasar.

$P(1)$ benar, karena $\frac{1}{2}(1)(5(1)-1)=\frac{1}{2}(4)=2$

Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=2+7+12+\cdots+(5k-3)=\frac{1}{2}k(5k-1)$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$\begin{aligned} P(k+1)=2+7+12+...+(5k-3)+(5(k+1)-3) &= \frac{1}{2}(k+1)(5(k+1)-1) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(5k+4) \end{aligned}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned} 2+7+12+...+(5k-3)+(5(k+1)-3) &= \left(2+7+12+...+(5k-3)\right)+(5(k+1)-3) \\ &= \frac{1}{2}k(5k-1)+(5(k+1)-3) \\ &= \frac{1}{2}k(5k-1)+(5k+2) \\ &= \frac{1}{2}\left(k(5k-1)+2(5k+2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(5k^2-k+10k+4\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(5k^2+9k+4\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(k+1\right)(5k+4) \end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa $2+7+12+\cdots+(5n-3)=\frac{1}{2}n(5n-1)$ untuk sebarang bilangan asli n.

5. $n^2 + n$ habis dibagi 2 untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Untuk sebarang bilangan bulat positif n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 2 adalah faktor dari $n^2 + n$.

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar karena $n^2 + n = 1^2 + 1 = 2 = 2 \cdot 1$.
   Sehingga 2 adalah faktor dari $n^2 + n$ untuk $n = 1$.
   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 2 adalah faktor dari $k^2 + k$ atau ekuivalen dengan $k^2 + k = 2c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$, yaitu pernyataan bahwa 2 adalah faktor dari $(k + 1)^2 + (k + 1)$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 2 adalah faktor dari $(k + 1)^2 + (k + 1)$.

   Perhatikan bahwa
   $$\begin{aligned}(k+1)^2 + (k+1) &= k^2 + 2k + 1 + k + 1\\ &= (k^2 + k) + (2k + 2)\\ &= (k^2 + k) + 2(k + 1)\\ &= 2c + 2(k + 1)\\ &= 2(c + k + 1)\end{aligned}$$

   Dari baris terakhir, karena bentuk $(c + k + 1)$ adalah bilangan bulat, maka jelas bahwa 2 adalah faktor dari $(k + 1)^2 + (k + 1)$. Jadi $P(k + 1)$ benar.
   Langkah induktif selesai.

   Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa $n^2 + n$ habis dibagi 2 untuk sebarang bilangan asli n.

6. $n^3 + 2n$ habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n.
   Alternatif Penyelesaian

   Untuk sebarang bilangan bulat positif n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 3 adalah faktor dari $n^3 + 2n$.

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar karena $n^3 + 2n = 1^3 + 2(1) = 3 = 3 \cdot 1$.
   Sehingga 2 adalah faktor dari $n^3 + 2n$ untuk $n = 1$.
   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 3 adalah faktor dari $k^3 + 2k$ atau ekuivalen dengan $k^3 + 2k = 3c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$, yaitu pernyataan bahwa 3 adalah faktor dari $(k + 1)^3 + 2(k + 1)$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 3 adalah faktor dari $(k + 1)^3 + 2(k + 1)$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(k+1)^3+2(k+1) &= k^3+3k^2+3k+1+2k+2\\ &= (k^3+2k)+(3k^2+3k+3)\\ &= (k^3+2k)+3(k^2+k+1)\\ &= 3c+3(k^2+k+1)\\ &= 3(c+k^2+k+1)\end{aligned}$$

Dari baris terakhir, karena bentuk $(c+k^2+k+1)$ adalah bilangan bulat, maka jelas bahwa 3 adalah faktor dari $(k+1)^3+2(k+1)$. Jadi $P(k+1)$ benar.
Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa n^3+2n habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n.

7. n^5-n habis dibagi 5 untuk sebarang bilangan asli n.
Alternatif Penyelesaian

Untuk sebarang bilangan bulat positif n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 5 adalah faktor dari n^5-n.

Langkah dasar.

$P(1)$ benar karena $n^5-n=1^5-1=0=5\cdot 0$.
Sehingga 5 adalah faktor dari n^5-n untuk $n=1$.
Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 5 adalah faktor dari k^5-k atau ekuivalen dengan $k^5-k=5c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$, yaitu pernyataan bahwa 5 adalah faktor dari $(k+1)^5-(k+1)$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 5 adalah faktor dari $(k+1)^5-(k+1)$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(k+1)^5-(k+1) &= k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1-k-1\\ &= (k^5-k)+(5k^4+10k^3+10k^2+5k)\\ &= (k^5-k)+5(k^4+2k^3+2k^2+k)\\ &= 5c+5(k^4+2k^3+2k^2+k)\\ &= 5(c+k^4+2k^3+2k^2+k)\end{aligned}$$

Dari baris terakhir, karena bentuk $(c+k^4+2k^3+2k^2+k)$ adalah bilangan bulat, maka jelas bahwa 5 adalah faktor dari $(k+1)^5-(k+1)$. Jadi $P(k+1)$ benar.
Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa n^5-n habis dibagi 5 untuk sebarang bilangan asli n.

8. $(n+1)^2<2n^2$ untuk sebarang bilangan asli $n\geq 3$.
Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $(n+1)^2<2n^2$. Perhatikan bahwa ketaksamaan salah untuk $n=1$ dan 2

Langkah dasar

Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 3$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(3)$.
Perhatikan bahwa $P(3)$ benar karena $(3+1)^2 = 4^2 = 16 < 2(3^2) = 2(9) = 18$. Langkah dasar selesai.

Langkah induktif

Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 3$, yaitu asumsikan bahwa $(k+1)^2 < 2k^2$ untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 3$. Pada hipotesis induktif harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Dalam hal ini harus ditunjukkan jika $(k+1)^2 < 2k^2$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 3$, maka $\left((k+1)+1\right)^2 < 2(k+1)^2$ juga benar.
Diperoleh

$$\begin{aligned}((k+1)+1)^2 &= (k+1)^2 + 2(k+1) + 1 \\ &< 2k^2 + 2k + 3 \\ &< 2k^2 + 2k + 3 + (2k-1) \\ &= 2k^2 + 4k + 2 \\ &= 2(k^2 + 2k + 1) \\ &= 2(k+1)^2\end{aligned}$$

Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 3$. Dengan demikian terbukti bahwa $(n+1)^2 < 2n^2$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 3$.

9. $n! > 2^n$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 4$.
   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $n! > 2^n$. Perhatikan bahwa ketaksamaan salah untuk $n = 1, 2,$ dan 3

   Langkah dasar

   Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 4$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(4)$.
   Perhatikan bahwa $P(4)$ benar karena $4! = 4.3.2.1 = 24 > 2^4 = 16$. Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif

   Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 4$, yaitu asumsikan bahwa $k! > 2^k$ untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 4$. Pada hipotesis induktif harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Dalam hal ini harus ditunjukkan jika $k! > 2^k$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 4$, maka $(k+1)! > 2^{(k+1)}$ juga benar.
   Diperoleh

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1) \times k! \\ &> 2^k \times (k+1) \\ &> 2^k \times 2 \quad \text{untuk } k \geq 4 \\ &= 2^{k+1}\end{aligned}$$

   Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 4$. Dengan demikian terbukti bahwa $n! > 2^n$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 4$.

10. $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 7$.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$. Perhatikan bahwa ketaksamaan salah untuk $n = 2, 3, 4, 5,$ dan 6

Langkah dasar

Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 7$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(7)$.

Perhatikan bahwa $P(7)$ benar karena $\left(\frac{4}{3}\right)^7 = 7{,}49 > 7$. Langkah dasar selesai.

Langkah induktif

Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 7$, yaitu asumsikan bahwa $\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$ untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 7$. Pada hipotesis induktif harus ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar. Dalam hal ini harus ditunjukkan jika $\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 7$, maka $\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > (k + 1)$ juga benar.

Diperoleh

$$\begin{aligned}
\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} &= \left(\frac{4}{3}\right)^k \times \frac{4}{3} \\
&> k \times \frac{4}{3} \\
&= k\left(1 + \frac{1}{3}\right) \\
&= k + \frac{1}{3}k \\
&> k + 1 \quad \text{untuk } k \geq 7
\end{aligned}$$

Telah ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 7$. Dengan demikian terbukti bahwa $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 7$.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda dapat menggunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis terkait jumlah barisan (deret)?	○	○
2	Apakah Anda dapat menggunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis terkait keterbagian bilangan bulat?	○	○
3	Apakah Anda dapat menggunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan matematis terkait ketaksamaan?	○	○
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

Gunakan induksi matematis untuk membuktikan kebenaran pernyataan berikut.

1. $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$ untuk sebarang bilangan asli n.
2. $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1) \cdot 2^n$ untuk sebarang bilangan asli n.
3. $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$ untuk sebarang bilangan asli n.
4. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ untuk sebarang bilangan asli n.
5. $n^3 - n + 3$ habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n.
6. $8^n - 3^n$ habis dibagi 5 untuk sebarang bilangan asli n.
7. $n^3 - n$ habis dibagi 6 untuk sebarang bilangan asli n.
8. $2n^2 > (n+1)^2$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 3$.
9. $2^n < (n+1)!$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$.
10. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$.

PEMBAHASAN SOAL EVALUASI

1. $2+6+18+\cdots+2\cdot 3^{n-1}=3^n-1$ untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

   $$P(n)=2+6+18+\cdots+2\cdot 3^{n-1}=3^n-1$$

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar, karena $3^1-1=3-1=2$

   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Untuk $n=k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

   $$P(k)=2+6+18+\cdots+2\cdot 3^{k-1}=3^k-1$$

   Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar

   $$P(k+1)=2+6+18+...+2.3^{k-1}+2.3^{(k+1)-1}=3^{(k+1)}-1$$

   Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh

   $$\begin{aligned}2+6+18+...+2.3^{k-1}+2.3^{(k+1)-1} &= \left(2+6+18+...+2.3^{k-1}\right)+2.3^{(k+1)-1}\\ &= 3^k-1+2.3^{(k+1)-1}\\ &= 3^k-1+2.3^k\\ &= 3.3^k-1\\ &= 3^{k+1}-1\end{aligned}$$

   Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
   Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa
   $2+6+18+\cdots+2\cdot 3^{n-1}=3^n-1$ untuk sebarang bilangan asli n.

2. $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)\cdot 2^n$ untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

   $$P(n)=1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)\cdot 2^n$$

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar, karena $1+(1-1).\,2^1=1+0=1$

   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Untuk $n=k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

   $$P(k)=1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+k\cdot 2^{k-1}=1+(k-1)\cdot 2^k$$

   Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar

   $$P(k+1)=1+2.2+3.2^2+...+k.2^{k-1}+(k+1).2^{(k+1)-1}=1+((k+1)-1).2^{k+1}$$

   Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh

   $$1+2.2+3.2^2+...+k.2^{k-1}+(k+1).2^{(k+1)-1} = \left(1+2.2+3.2^2+...+k.2^{k-1}\right)+(k+1).2^{(k+1)-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1+(k-1).2^k\right)+(k+1).2^{(k+1)-1}\\
&= (1+k.2^k-2^k)+(k+1).2^k\\
&= 1+k.2^k-2^k+k.2^k+2^k\\
&= 1+2k.2^k\\
&= 1+k.2^{k+1}\\
&= 1+((k+1)-1).2^{k+1}
\end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa
$1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}=1+(n-1)\cdot 2^n$ untuk sebarang bilangan asli n.

3. $3+3^2+3^3+\cdots+3^n=\frac{3}{2}(3^n-1)$ untuk sebarang bilangan asli n.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

$$P(n)=3+3^2+3^3+\cdots+3^n=\frac{3}{2}(3^n-1)$$

Langkah dasar.

$P(1)$ benar, karena $\frac{3}{2}(3^1-1)=\frac{3}{2}(2)=3$

Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k)=3+3^2+3^3+\cdots+3^k=\frac{3}{2}\left(3^k-1\right)$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1)=3+3^2+3^3+\cdots+3^k+3^{k+1}=\frac{3}{2}\left(3^{k+1}-1\right)$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
3+3^2+3^3+\ldots+3^k+3^{k+1} &= \left(3+3^2+3^3+\ldots+3^k\right)+3^{k+1}\\
&= \frac{3}{2}(3^k-1)+3^{k+1}\\
&= \frac{3}{2}.3^k-\frac{3}{2}+3.3^k\\
&= \frac{9}{2}.3^k-\frac{3}{2}\\
&= \frac{3}{2}(3.3^k-1)\\
&= \frac{3}{2}(3^{k+1}-1)
\end{aligned}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa
$3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$ untuk sebarang bilangan asli n.

4. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ untuk sebarang bilangan asli n.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa

$$P(n) = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Langkah dasar.

$P(1)$ benar, karena $\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{4}{4(2)(3)} = \frac{1}{1.2.3}$

Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Untuk $n = k$ dengan k adalah sebarang bilangan asli, $P(k)$ adalah pernyataan

$$P(k) = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$$

Asumsikan pernyataan $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga benar

$$P(k+1) = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}$$
$$= \frac{(k+1)((k+1)+3)}{4((k+1)+1)((k+1)+2)}$$

ekuivalen dengan

$$P(k+1) = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{k(k+3)(k+3)+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{k(k^2+6k+9)+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$= \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$

Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah induktif selesai).
Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika kita telah menunjukkan bahwa
$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ untuk sebarang bilangan asli n.

5. n^3-n+3 habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Untuk sebarang bilangan asli n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 3 adalah faktor dari n^3-n+3.

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar karena $n^3-n+3=1^3-1+3=3=3\cdot1$.
   Sehingga 3 adalah faktor dari n^3-n+3 untuk $n=1$.
   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 3 adalah faktor dari k^3-k+3 atau ekuivalen dengan $k^3-k+3=3c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$, yaitu pernyataan bahwa 3 adalah faktor dari $(k+1)^3-(k+1)+3$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 3 adalah faktor dari $(k+1)^3-(k+1)+3$.

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(k+1)^3-(k+1)+3 &= k^3+3k^2+3k+1-k-1+3\\ &= (k^3-k+3)+3k^2+3k\\ &= (k^3-k+3)+3(k^2+k)\\ &= 3c+3(k^2+k)\\ &= 3(c+k^2+k)\end{aligned}$$

   Dari baris terakhir, karena bentuk $(c+k^2+k)$ adalah bilangan bulat, maka jelas bahwa 3 adalah faktor dari $(k+1)^3-(k+1)+3$. Jadi $P(k+1)$ benar.
   Langkah induktif selesai.

   Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa n^3-n+3 habis dibagi 3 untuk sebarang bilangan asli n.

6. 8^n-3^n habis dibagi 5 untuk sebarang bilangan asli n.

   Alternatif Penyelesaian

   Untuk sebarang bilangan asli n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 5 adalah faktor dari 8^n-3^n.

   Langkah dasar.

   $P(1)$ benar karena $8^1-3^1=5=5\cdot1$.
   Sehingga 5 adalah faktor dari 8^n-3^n untuk $n=1$.
   Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif.

   Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 5 adalah faktor dari 8^k-3^k atau ekuivalen dengan 8^k-

$3^k = 5c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$, yaitu pernyataan bahwa 5 adalah faktor dari $8^{k+1} - 3^{k+1}$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 5 adalah faktor dari $8^{k+1} - 3^{k+1}$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= 8.8^k - 3.3^k \\ &= 3.8^k - 3.3^k + 5.8^k \\ &= 3(8^k - 3^k) + 5.8^k \\ &= 3(5c) + 5.8^k \\ &= 5(3c + 8^k) \end{aligned}$$

Dari baris terakhir, karena bentuk $(3c + 8^k)$ adalah bilangan bulat, maka jelas bahwa 5 adalah faktor dari $8^{k+1} - 3^{k+1}$. Jadi $P(k + 1)$ benar.
Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa $8^n - 3^n$ habis dibagi 5 untuk sebarang bilangan asli n.

7. $n^3 - n$ habis dibagi 6 untuk sebarang bilangan asli n.

Alternatif Penyelesaian

Untuk sebarang bilangan asli n, misalkan $P(n)$ adalah pernyataan 6 adalah faktor dari $n^3 - n$.

Langkah dasar.

$P(1)$ benar karena $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0 = 6 \cdot 0$.
Sehingga 6 adalah faktor dari $n^3 - n$ untuk $n = 1$.
Langkah dasar selesai.

Langkah induktif.

Sebagai hipotesis induktif, asumsikan bahwa $P(k)$ benar, yaitu dengan mengasumsikan bahwa 6 adalah faktor dari $k^3 - k$ atau ekuivalen dengan $k^3 - k = 6c$ untuk sebarang bilangan asli c. Selanjutnya dengan asumsi bahwa $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$, yaitu pernyataan bahwa 6 adalah faktor dari $(k+1)^3 - (k+1)$, juga benar. Harus ditunjukkan bahwa 6 adalah faktor dari $(k+1)^3 - (k+1)$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) \\ &= (k^3 - k) + 3k(k+1) \\ &= 6c + 3k(k+1) \end{aligned}$$

Baris terakhir terdiri dari dua suku. Suku pertama $6c$ habis dibagi 6. Suku kedua $3k(k + 1)$ juga habis dibagi 6, karena mengandung faktor 3 dan salah satu di antara k atau $(k + 1)$ merupakan bilangan genap sehingga mengandung faktor 2. Oleh karena kedua sukunya habis dibagi 6, berarti 6 adalah faktor dari (6c + $3k(k + 1)$).
Jadi $P(k + 1)$ benar.
Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah dapat diselesaikan, menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa $n^3 - n$ habis dibagi 6 untuk sebarang bilangan asli n.

8. $2n^2 > (n+1)^2$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 3$.

   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $2n^2 > (n+1)^2$. Perhatikan bahwa ketaksamaan salah untuk n = 1 dan 2.

   Langkah dasar

   Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 3$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(3)$.
   Perhatikan bahwa $P(3)$ benar karena $2(3)^2 = 18 > (3+1)^2 = 16$. Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif

   Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 3$, yaitu asumsikan bahwa $2k^2 > (k+1)^2$ untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 3$. Pada hipotesis induktif harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Dalam hal ini harus ditunjukkan jika $2k^2 > (k+1)^2$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 3$, maka $2(k+1)^2 > ((k+1)+1)^2 = (k+2)^2$ juga benar.

   Dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh

$$\begin{aligned} 2(k+1)^2 &= 2(k^2+2k+1) \\ &= 2k^2+4k+2 \\ &> (k+1)^2+4k+2 && \text{karena } 2k^2 > (k+1)^2 \\ &> (k+1)^2+2k+3 && \text{karena } 4k+2 > 2k+3, k \geq 1 \\ &= k^2+4k+4 \\ &= (k+2)^2 \end{aligned}$$

   Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

   Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 3$. Dengan demikian terbukti bahwa $2n^2 > (n+1)^2$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 3$.

9. $2^n < (n+1)!$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$.

   Alternatif Penyelesaian

   Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $2^n < (n+1)!$. Perhatikan bahwa ketaksamaan salah untuk $n = 1$

   Langkah dasar

   Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 2$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(2)$.
   Perhatikan bahwa $P(2)$ benar karena $2^2 = 4 < (2+1)! = 3! = 6$. Langkah dasar selesai.

   Langkah induktif

   Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 2$, yaitu asumsikan bahwa $2^k < (k+1)!$ untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 2$. Pada hipotesis induktif harus ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar. Dalam hal ini harus ditunjukkan jika $2^k < (k+1)!$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 2$, maka $2^{k+1} < ((k+1)+1)!$ juga benar.
   Dari ruas kiri $P(k+1)$ peroleh

$$2^{k+1} = 2^k.2$$

$$
\begin{aligned}
&< (k+1)!\,.2 && \text{karena } 2^k < (k+1)! \\
&< (k+1)!.\,(k+2) && \text{karena } 2 < (k+2), k \geq 1 \\
&= (k+2)! \\
&= \big((k+1)+1\big)!
\end{aligned}
$$

Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 2$. Dengan demikian terbukti bahwa $2^n < (n+1)!$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$.

10. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$.

Alternatif Penyelesaian

Langkah dasar

Untuk membuktikan bahwa ketaksamaan benar untuk $n \geq 2$ mensyaratkan bahwa langkah dasar adalah $P(2)$.

Perhatikan bahwa $P(2)$ benar karena $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1{,}707 > \sqrt{2} = 1{,}414$. Langkah dasar selesai.

Langkah induktif

Asumsikan $P(k)$ benar untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 2$, yaitu asumsikan bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$

untuk sebarang bilangan asli k dengan $k \geq 2$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ juga bernilai benar dengan menggunakan hipotesis induktif di atas. $P(k + 1)$ menyatakan:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

Dari ruas kiri $P(k + 1)$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\
&> \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\
&= \frac{\sqrt{k}.\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}} \\
&= \frac{\sqrt{k^2+k}+1}{\sqrt{k+1}} \\
&> \frac{\sqrt{k^2}+1}{\sqrt{k+1}} \\
&= \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} \\
&= \sqrt{k+1}
\end{aligned}
$$

Telah ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar. Langkah induktif selesai.

Karena langkah dasar dan langkah induktif sudah diselesaikan, maka menurut prinsip induksi matematika $P(n)$ benar untuk sebarang bilangan asli n dengan $n \geq 2$. Dengan demikian terbukti bahwa $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 2$.

DAFTAR PUSTAKA

Husein Tampomas, 2007. *Seribu Pena Matematika Jilid 3 untuk SMA/MA Kelas XII*. Jakarta: Erlangga.

Sudianto Manullang, dkk. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI*. Jakarta: Kemendikbud.

Susanna S., 2020, Discrete Mathematics with Applications, Boston, MA: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Wiworo, 2020. *Metode Pembuktian dengan Induksi Matematis.* Makalah Seri Webinar Guru Belajar, Direktorat Pendidikan Menengah dan Pendidikan Khusus, Direktorat Jenderal Guru dan Tenaga Kependidikan, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Kamis, 30 Juli 2020

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

BERANI JUJUR! HEBAT!

JUJUR ADALAH LANGKAH AWAL BERANTAS KORUPSI

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum

KELAS XI

PROGRAM LINIER
MATEMATIKA UMUM KELAS XI

PENYUSUN

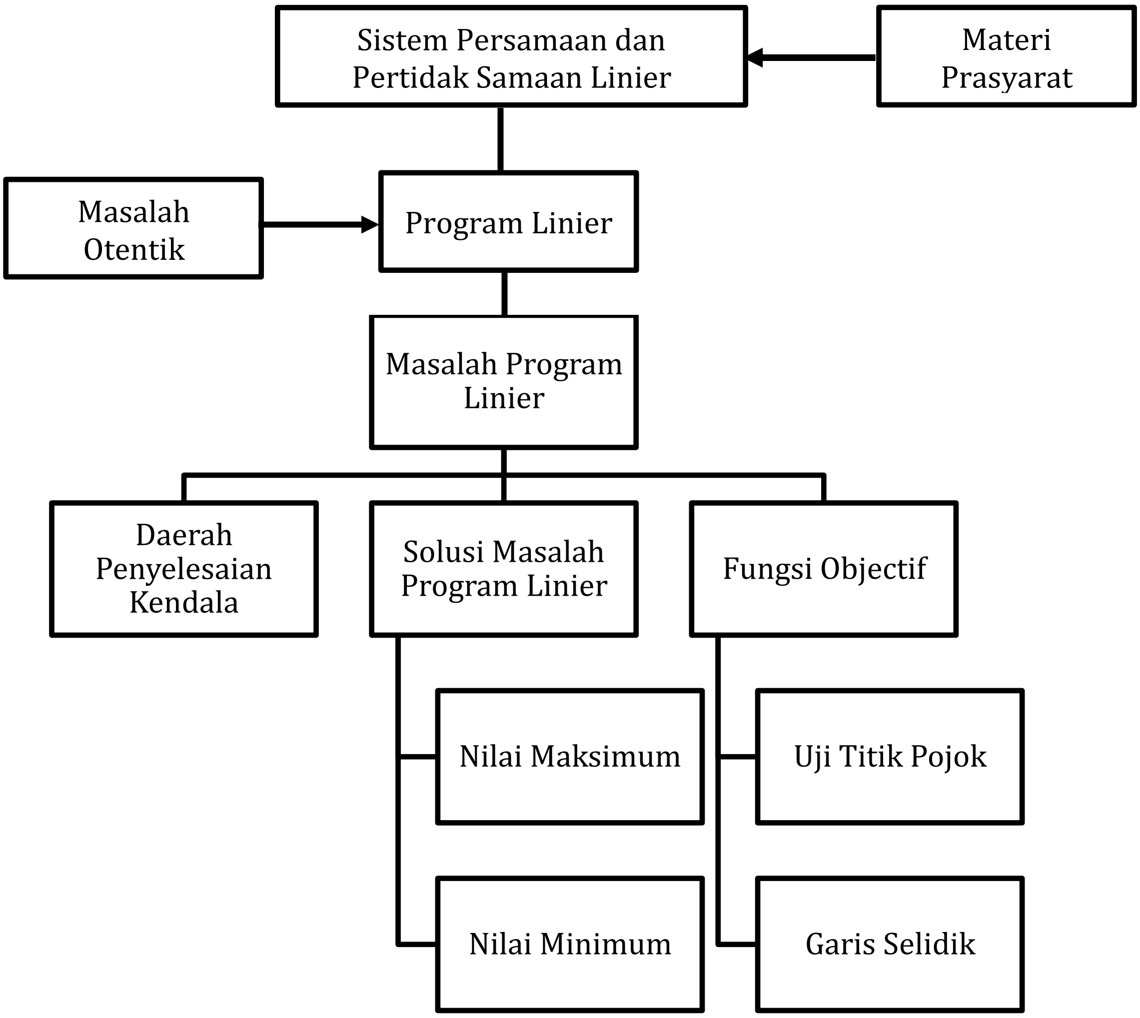
Yusdi Irfan, S.Pd, M.Pd
SMAN 1 Kramatwatu
Kabupaten Serang - Banten

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Sistem	:	Sekelompok komponen yang digabungkan menjadi satu untuk mencapai tujuan tertentu
Pertidaksamaan	:	Kalimat matematika yang menggunakan tanda "<, >, ≤, dan ≥"
Variabel	:	Simbol atau lambang matematika yang digunakan untuk memudahkan menyelesaikan suatu permasalahan nyata yang belum diketahui nilainya dengan jelas
Koefisien	:	Bilangan yang memuat variable
Konstanta	:	Bilangan yang tidak memuat variable
Program Linier	:	metode penentuan nilai optimum dari suatu persoalan Linier
Model matematika	:	suatu rumusan matematika yang diperoleh dari hasil penafsiran seseorang ketika menerjemahkan suatu masalah program Linier ke dalam Bahasa matematika
Fungsi Obyektif/Fungsi Tujuan	:	Fungsi yang akan dioptimumkan (maksimum atau minimum)
Syarat/Kendala	:	model matematika dari suatu permasalahan program Linier untuk memperoleh nilai optimum

PETA KONSEP


Sistem Persamaan dan Pertidak Samaan Linier
Materi Prasyarat
Masalah Otentik
Program Linier
Masalah Program Linier
Daerah Penyelesaian Kendala
Solusi Masalah Program Linier
Fungsi Objectif
Nilai Maksimum
Uji Titik Pojok
Nilai Minimum
Garis Selidik

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	8 JP
Judul Modul	:	Program Linier

B. Kompetensi Dasar

3.2 Menjelaskan program linier dua variabel dan metode penyelesaiannya dengan menggunakan masalah kontekstual

4.2 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan program linier dua variabel

C. Deskripsi Singkat Materi

Sumber : https://www.google.com/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Fwww.sentrarak.com

Pernahkan kita perhatikan saat kita jalan-jalan di toko sepatu kita lihat banyak sekali sepatu yang dipajang. Dilain sisi kita lihat bahwa pedagang sepatu mempunyai tempat yang terbatas dan juga rak yang jumlahnya terbatas. Bagaimana pedagang sepatu bisa mengoptimalkan lahan yang tersedia untuk memajang sepatu-sepatu dagangannya supaya semua lahan yang ada dapat digunakan secara optimal?

Pertanyaan sejenis ini dapat diselesaikan dengan salah satu materi yang ada di matematika yaitu dengan menggunakan Program Linier.

Program Linier merupakan suatu metode untuk memecahkan suatu permasalahan tertentu dimana model matematikanya terdiri atas beberapa pertidaksamaan linier yang mempunyai banyak penyelesaian. Program linier dapat digunakan dalam kehidupan sehari-hari, seperti menghitung keuntungan maksimum dari suatu usaha, pengeluaran minimum yang dibelanjakan atau dikeluarkan, dan sebagainya.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum peserta didik membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, marilah berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahamimateri ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Sebaiknya peserta didik mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, peserta didik mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.
4. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, peserta didik mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.
5. Peserta didik dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 70 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya. Jika peserta didik memperoleh nilai < 70 maka peserta didik harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Materi yang dipelajari pada modul ini, yaitu sebagai berikut:

Pertama : Daerah Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linier Dua Variabel

Kedua : Menyelesaian Masalah Program Linier

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Daerah Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linier Dua Variabel

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian mampu:
1. Mendeskripsikan konsep sistem persamaan dan pertidaksamaan linier dua variabel.
2. Menentukan daerah penyelesaian suatu system pertidaksamaan linier dua variabel.

B. Uraian Materi

1. Sistem Pertidaksamaan Linier

Saat kita kelas X semester 1 kita telah membahas tentang melukis sebuah Sistem Pertidaksamaan Linier Dua Variabel (SPtLDV) untuk menentukan Daerah Penyelesaian (DP). Dalam bahasan kita kali ini yaitu Program Linier, maka penentuan daerah penyelesaian merupakan syarat mutlah yang akan dipelajari dalam Program Linier.
Ingat kembali bahwa bentuk-bentuk $x \_ 2y > 6$ atau $x - y \leq 6$ dan sejenisnya adalah bentuk pertidaksamaan linier dua variabel. Gabungan dari dua atau lebih pertidaksamaan linier disebut sebagai **Sistem Pertidaksamaan Linier Dua Variabel (PtLDV).**

Himpunan penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linier dua peubah merupakan himpunan pasangan bilangan (x, y) yang memenuhi sistem pertidaksamaan linier tersebut. Himpunan penyelesaian PtLDV berupa suatu daerah yang dibatasi garis pada sistem koordinat Kartesius.

2. Menentukan Daerah Penyelesaian Suatu Sistem Pertidaksamaan Linier

Untuk menentukan system pertidaksaman dari suatu daerah himpunan penyelesaian maka gunakan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Menentukan persamaan garis
b. Menentukan pertidaksamaan yang sesuai dengan daerah penyelesaian.
c. Mengganti tanda pertidaksamaannya.
   Ketentuan yang bisa digunakan adalah sebagai berikut:
   1) Pastikan bahwa variabel x bertanda positif. Jika x bernilai negative maka kalikan dengan (-1)
   2) Jika daerah penyelesaian disebelah kiri maka tanda pertidaksamaan adalah $\leq$
   3) Jika daerah penyelesaian disebelah kanan maka tanda pertidaksamaannya adalah $\geq$

Untuk mencari daerah penyelesaian suatu PtLDV bisa digunakan cara sebagai berikut:

a. **Daerah himpunan penyelesaian suatu PtLDV dapat dicari menggunakan metode uji titik.**
   Berikut ini langkah-langkahnya.
   Misal diberikan : $ax + by \leq c$
   1) Gambarlah grafik garis $ax + by = c$.
      Jika tanda ketaksamaan berupa $\leq$ atau $\geq$ maka garis pembatas digambar penuh.

Jika tanda ketaksamaan berupa < atau > maka garis pembatas digambar putus putus.

2) Uji titik

Ambil suatu titik sembarang, misal (x_1, y_1) yang tidak terletak pada garis ax + by = c. Substitusikan titik tersebut ke dalam pertidaksamaan ax + by ≤ c. Ada dua kemungkinan sebagai berikut:

a) Apabila pertidaksamaan $ax_1 + by_1 \leq c$ bernilai **benar**, maka daerah himpunan penyelesaiannya adalah daerah yang memuat titik (x_1, y_1) dengan batas garis ax + by = c.

b) Apabila pertidaksamaan ax1 + by1 ≤ c bernilai **salah**, maka daerah himpunan penyelesaiannya adalah daerah yang tidak memuat titik (x_1, y_1) dengan batas garis ax + by = c.

b. Daerah himpunan penyelesaian suatu PtLDV juga dapat dicari menggunakan cara berikut.

Daerah himpunan penyelesaian PtLDV dapat ditentukan berada di kanan atau kiri garis pembatas dengan cara memperhatikan tanda ketaksamaan. Berikut ini Langkah-langkahnya.

1) Pastikan koefisien x dari PtLDV tersebut positif. Jika **tidak positif**, kalikan PtLDV dengan -1.
2) Jika koefisien x dari PtLDV sudah positif, perhatikan tanda ketaksamaan.
   Jika tanda ketaksamaan **≤** maka daerah penyelesaian terletak di **sebelah kiri** garis pembatas.
   Jika tanda ketaksamaan **≥** maka daerah penyelesaian terletak di **sebelah kanan** garis pembatas.

Untuk menentukan daerah himpunan penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan Linier dapat dipelajari pada beberapa contoh berikut.

<u>Contoh - Contoh</u>:

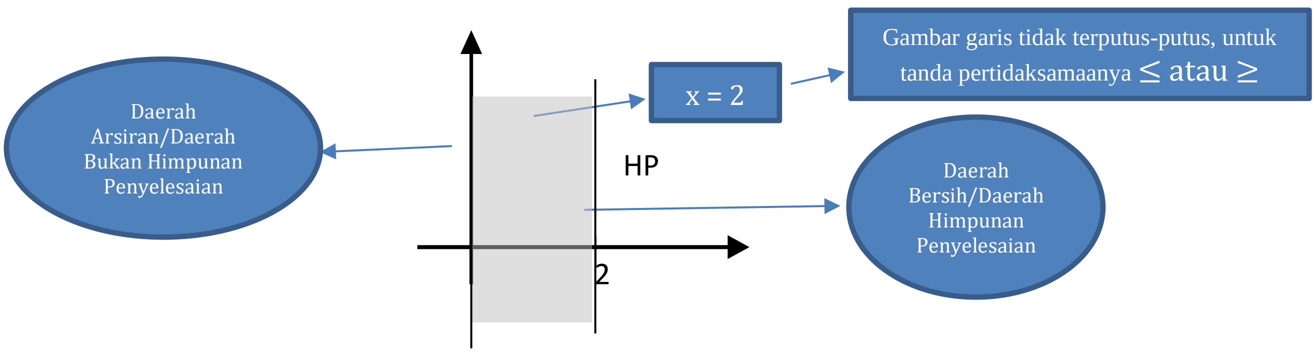
Gambarlah daerah himpunan penyelesaian pada bidang cartesius, dari pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut dengan mengarsir daerah yang bukan HP.

1). $x \geq 2, x \in R$

Jawaban:

Petunjuk:

a. Gambarkan garis x = 2 **kemudian** arsirlah daerah yang **bukan** merupakan Himpunan Penyelesaian, dengan kata lain daerah yang bersi atau tidak diarsir adalah daerah Himpunan **Penyelesaian.**

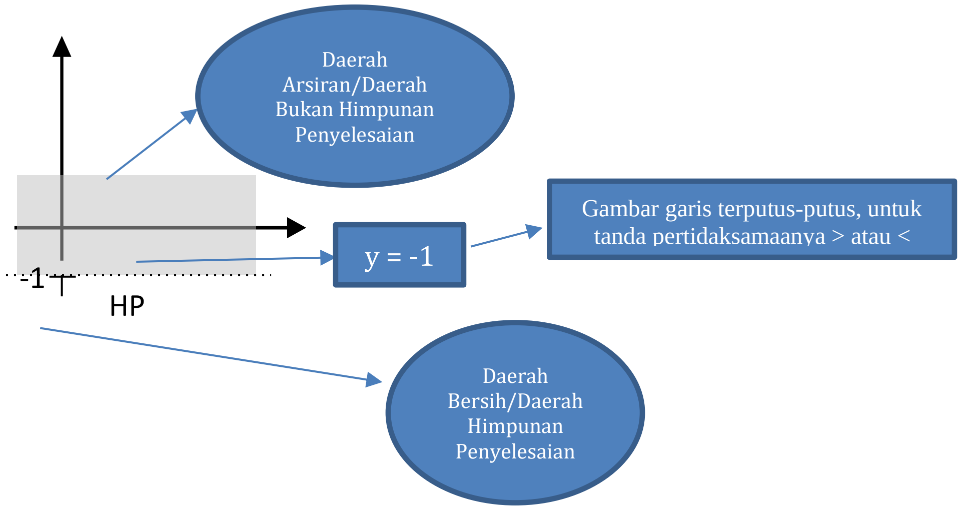


2). $y < -1, y \in R$

Jawaban:

Petunjuk:

Gambarkan garis y = -1 selanjutnya **arsirlah daerah yang bukan merupakan Himpunan Penyelesaian, dengan kata lain daerah yang bersi atau tidak diarsir adalah daerah Himpunan Penyelesaian.**



3). $x + 2y \leq 4, x, y \in R$

Jawaban:

Petunjuk: Untuk menggambarkan garis $x + 2y = 4$, buatlah dua titik bantu dengan mengambil nilai x = 0 maka y =... dan nilai y = 0 maka x =...

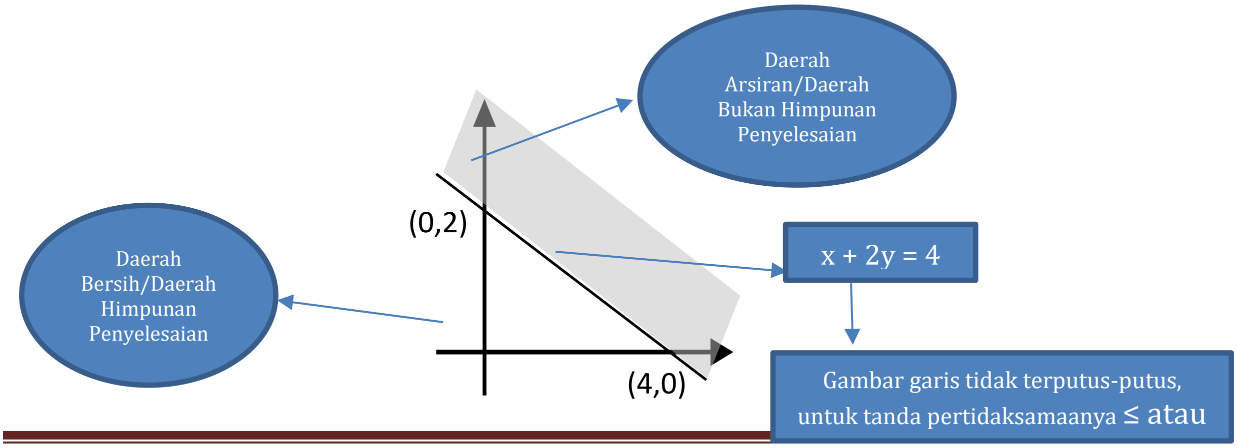
Lihat tabel berikut:

x	0	4
y	2	0

Jadi titik bantunya adalah (0 , 2) dan (4 , 0) selanjutnya gambarkan di bidang Cartesius Untuk menentukan daerah himpunan penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis $x + 2y = 4$.

Misal titik (0,0) berarti nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke persamaan $x + 2y \leq 4$ maka $0 + 2(0) \leq 4 \rightarrow 0 \leq 4$ (**Benar**), maka **daerah Himpunan Penyelesaiannya di bawah garis x + 2y = 4, dan arsirlah daerah yang bukan daerah penyelesaiannya.**

Gambar Grafik Cartesiusnya adalah:



4). $2x + y \leq 6$, x > 1, $y \geq 0$, untuk $x, y \in R$

Jawaban:

b. Petunjuk:

Untuk menggambarkan garis $2x + y \leq 6$, buatlah dua titik bantu dengan cara mengambil nilai x = 0 maka y =... dan nilai y = 0 maka x =...

Jadi titik bantunya adalah (0,6) dan (3,0) selanjutnya gambarkan di bidang Cartesius Untuk menentukan Daerah Himpunan Penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis $2x + y = 6$

Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $2x + y \leq 6$,
2(0) + (0) ≤ 6 → 0 ≤ 6 (**Benar**), maka **daerah Himpunan Penyelesaiannya di bawah garis** $2x + y = 6$**, dan arsirlah daerah yang bukan daerah penyelesaiannya**.

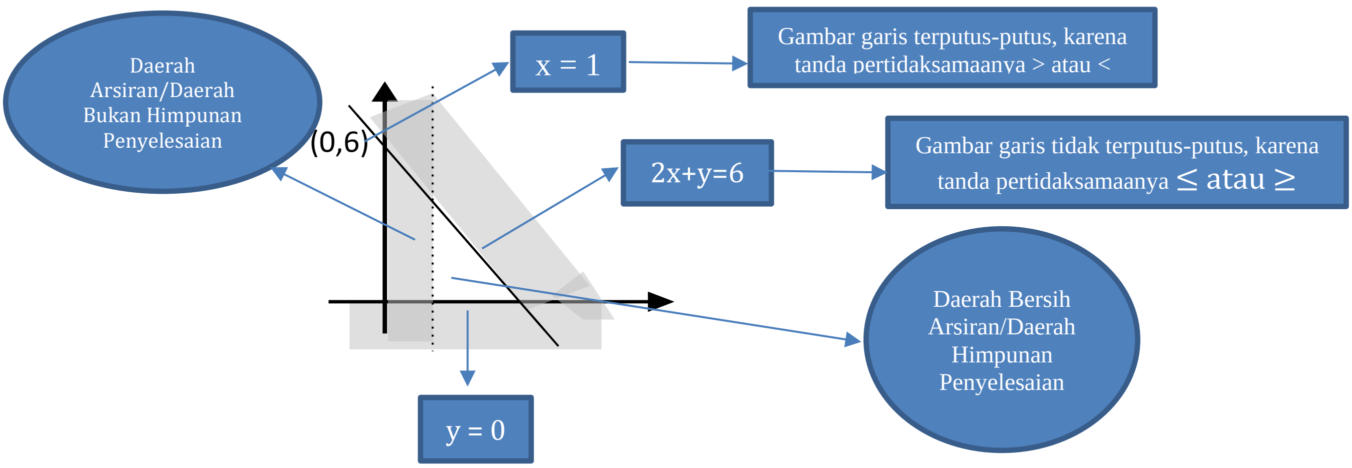
c. Gambar garis x = 1

Petunjuk: Buat garis lurus pada sumbu X di absix x = 1

d. Gambar garis y = 0

Petunjuk: Buat garis lurus pada sumbu Y di ordinat y = 0 (berimpit dengan sumbu X)

Gambar Grafik Cartesiusnya adalah:



C. Rangkuman

Pertidaksamaan Linier dua peubah x dan y adalah pertidaksamaan yang memuat dua peubah yang masing-masing berpangkat satu. Sistem pertidaksamaan Linier adalah gabungan dua atau lebih pertidaksamaan.

D. Penugasan Mandiri

1. Latihan Essay

Kerjakan semua soal di bawah ini di kertas millimeter block, kemudian cocokkan dengan alternatif penyelesaiannya!

1. Gunakan kertas millimeter block untuk menentukan daerah Himpunan Penyelesaian system pertidaksamaan $2x + 5y \geq 20$; $3x + 2y \geq 18$; $x \geq 0$; $y \geq 0$, $x, y \in R$

Jawaban Alternatif

a. Menggambar Garis 2x + 5y = 20

Petunjuk: Untuk menggambarkan garis 2x + 5y = 20, buatlah dua titik bantu dengan cara mengambil nilai x = 0 maka y =... dan nilai y = 0 maka x =...

Lihat tabel berikut:

x	0	10
y	4	0

Jadi titik bantunya adalah (0,4) dan (10,0)

Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis 2x + 5y = 20.

Misal (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $2x + 5y \geq 20 \rightarrow 2(0) + 5(0) \geq 20 \rightarrow 0 + 0 \geq 20 \rightarrow 0 \geq 20$ (**Salah**), maka **daerah Himpunan Penyelesaiannya di atas garis** 2x + 5y = 20**, dan arsirlah daerah yang bukan daerah penyelesaiannya**. (lihat gambar)

b. Menggambar garis 3x + 12 y = 18

Petunjuk: Untuk menggambarkan garis 3x + 12 y = 18, buatlah dua titik bantu dengan cara mengambil nilai x = 0 maka y =... dan nilai y = 0 maka x =...

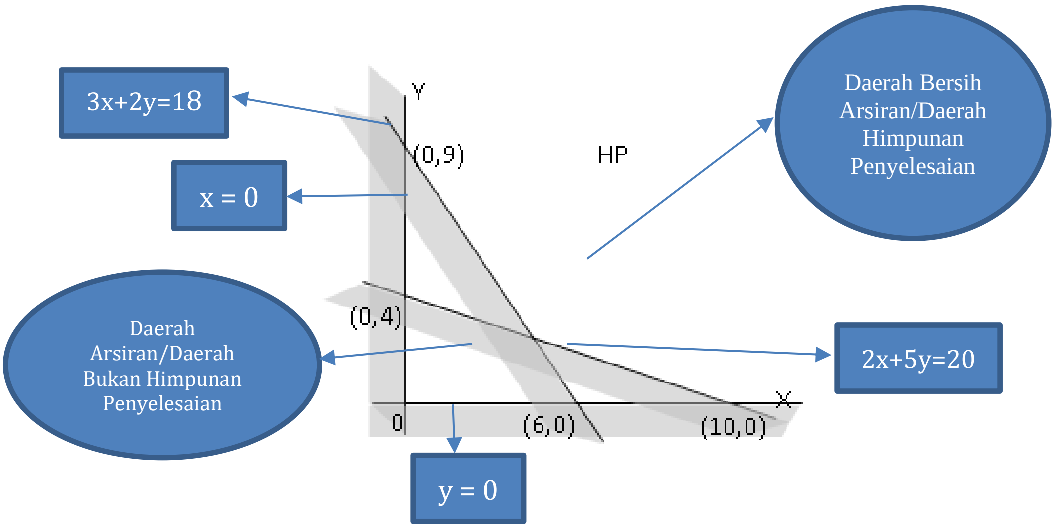
x	0	6
y	9	0

Jadi titik bantunya adalah (0,9) dan (6,0)

Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis 3x + 2y = 18.

Misal (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $3x + 2y \geq 18 \rightarrow 2(0) + 5(0) \geq 20 \rightarrow 0 + 0 \geq 20 \rightarrow 0 \geq 20$ (**Salah**), maka **daerah Himpunan Penyelesaiannya di atas garis** 2x + 5y = 20**, dan arsirlah daerah yang bukan daerah penyelesaiannya**. (lihat gambar).

Sehingga gambar grafiknya, adalah:



2. Gunakan kertas millimeter block untuk menentukan daerah Himpunan Penyelesaian 13ystem pertidaksamaan $2x + y \leq 4$; $x + 2y \geq 4$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ untuk $x, y \in R$

Jawaban Alternatif

Menggambar Garis

2x + y = 4

Petunjuk: untuk membuat garis 2x + y = 4, buatlah dua titik bantu dengan cara mengambil nilai x = 0 maka y =… dan nilai y = 0 maka x =…

Lihat table berikut:

X	0	4
Y	2	0

Jadi titik bantunya adalah (0,2) dan (4,0), selanjutnya gambarkan di bidang Cartesius. Untuk menentukan Daerah Himpunan Penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis 2x + y = 4, Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $2x + y \leq 4$ maka $2(0) + (0) \leq 4 \rightarrow 0 \leq 4$ (**Benar**), maka **daerah Himpunan Penyelesaiannya di bawah garis** $2x + y = 6$**, dan arsirlah daerah yang bukan daerah penyelesaiannya.**

a. Menggambar garis x + 2y = 4

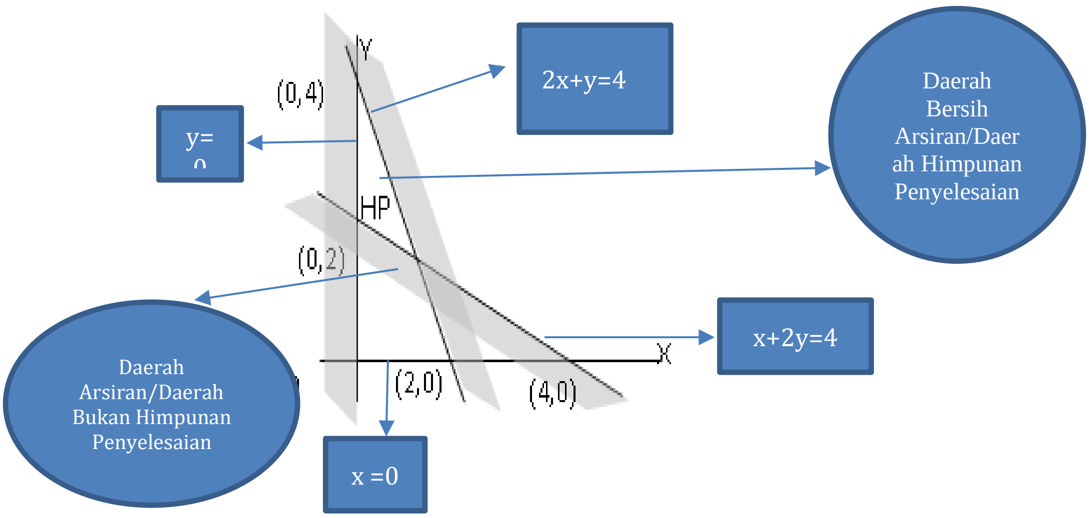
Petunjuk: untuk membuat garis x + 2y = 4, buatlah dua titik bantu dengan cara mengambil nilai x = 0 maka y =... dan nilai y = 0 maka x =…

Lihat table berikut:

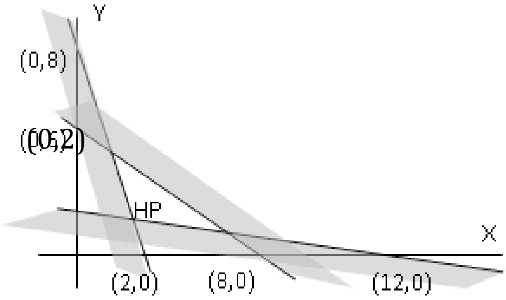
x	0	2
y	4	0

Jadi titik bantunya adalah (0,4) dan (2,0), selanjutnya gambarkan di bidang Cartesius. Untuk menentukan Daerah Himpunan Penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis x + 2y = 4, Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $x + 2y \geq 4$ maka $(0) + 2(0) \geq 4 \rightarrow 0 \geq 4$ (**Salah**), maka **daerah Himpunan Penyelesaiannya di atas garis** $x + 2y = 4$**, dan arsirlah daerah yang bukan daerah penyelesaiannya.**

Sehingga gambar grafiknya, yaitu:



3. Tentukan sistem pertidaksamaan dari daerah himpunan penyelesaian berikut: (daerah Himpunan Penyelesaian adalah daerah yang bersih).



Jawaban Alternatif

i. Pertidaksamaan untuk (2,0) dan (0,8)
$8x + 2y \geq 16$ (kedua ruas dibagi dengan 2)
$4x + y \geq 8$

ii. Pertidaksamaan untuk (8,0) dan (0,6)
$6x + 8 \leq 48$ (kedua ruas dibagi dengan 2)
$3x + 4 \leq 24$

iii. Pertidaksamaan untuk titik (12,0) dan (0,2)
$2x + 12y \geq 24$ (kedua ruas dibagi dengan 2)
$x + 6y \geq 12$

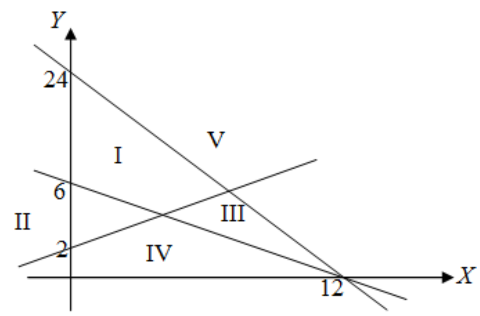
Petunjuk:
1. semua nilai yang terdapat di sumbu X yaitu 2, 8, dan 12 dikalikan dengan variable y, sehingga diperoleh 2y, 8y, dan 12y
2. semua nilai yang terdapat di sumbu Y yaitu 2, 6, dan 8 dikalikan dengan variable x, sehingga diperoleh 2x, 6x, dan 8x
3. kalikan nilai yang ada pada sumbu X dan sumbu Y tersebut sebagai konstanta, diperoleh 2x8=16, 8x6=48, dan 12x2=24

Sehingga pertidaksamaan pada grafik di atas adalah $4x + y \geq 8$; $3x + 4 \leq 24$; $x + 6y \geq 12$; $x \geq 0$, $y \geq 0$, Untuk $x, y \in R$.

E. Latihan Soal

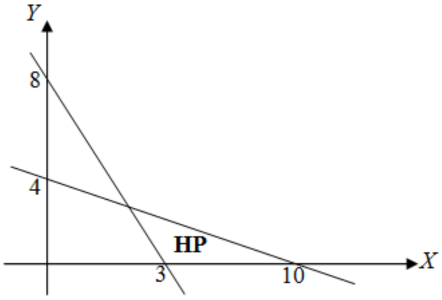
Pilihlah salah satu jawaban yang benar

1. Pada gambar berikut, yang merupakan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $2x + y \leq 24$; $x + 2y \geq 12$; $x - y \geq -2$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ adalah daerah … .



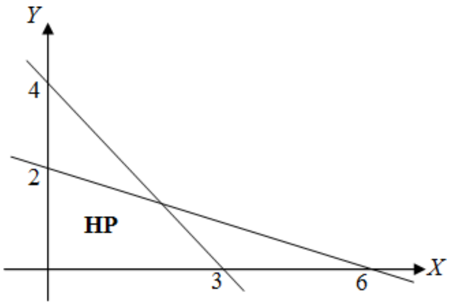
A. I
B. II
C. III
D. IV
E. V

2. Sistem pertidaksamaan Linier dua variabel yang memenuhi grafik berikut adalah … .



A. $3x + 8y \geq 24$; $4x + 10 < 40$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
B. $8x + 3y \geq 24$; $4x + 10 > 40$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
C. $3x + 8y \leq 24$; $4x + 10 > 40$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
D. $8x + 3y \geq 24$; $4x + 10 < 40$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
E. $8x + 3y \geq 24$; $4x + 10 \leq 40$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

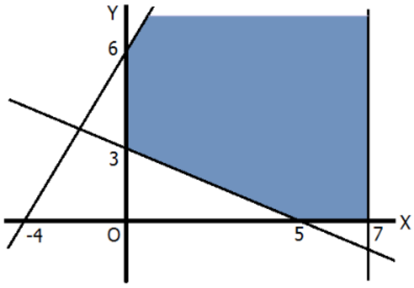
3. Perhatikan gambar berikut!



Bentuk sistem pertidaksamaan dari grafik tersebut adalah …

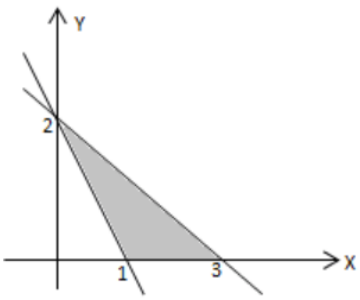
A. $4x + 3y \geq 12$; $x + 3y \leq 6$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
B. $4x + 3y \leq 12$; $x + 3y \geq 6$; ≥ 0; $y \geq 0$
C. $4x + 3y \leq 12$; $x + 3y \leq 6$; ≥ 0; $y \geq 0$
D. $4x + 3y \geq 12$; $x + 3y \geq 6$; ≥ 0; $y \geq 0$
E. $3x + 4y \leq 12$; $3x + y \leq 6$; ≥ 0; $y \geq 0$

4. Tentukan sistem pertidaksamaan dari daerah penyelesaian ypada gambar dibawah ini adalah ….



A. $3x-2y \geq -12$, $3x + 5y \geq 15$, $0 \leq x \leq 7$, dan $y \geq 0$.
B. $3x-2y \geq 12$, $3x + 5y \geq 15$, $0 \leq x \leq 7$, dan $y \geq 0$
C. $3x-2y \geq -12$, $3x + 5y \leq 15$, $0 \leq x \leq 7$, dan $y \geq 0$
D. $3x-2y \geq -12$, $5x + 3y \geq 15$, $0 < x < 7$, dan $y \geq 0$
E. $3x+2y \geq -12$, $3x + 5y \geq 15$, $0 \leq x \leq 7$, dan $y \geq 0$

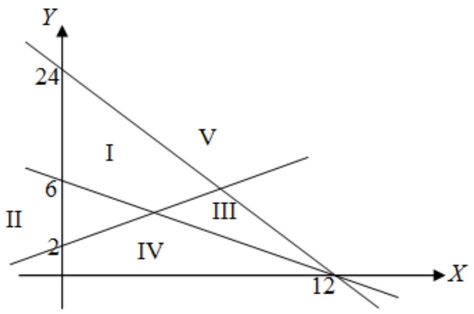
5. Daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini merupakangrafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan …..



A. $y \leq 0, 2x + y \geq 2, 2x + 3y \leq 6$
B. $y \geq 0, 2x + y \geq 2, 2x + 3y \geq 6$
C. $x \geq 0, 2x + y \geq 2, 2x + 3y \leq 6$
D. $x \geq 0, 2x + y \leq 2, 2x + 3y \leq 6$
E. $y \geq 0, 2x + y \leq 2, 2x + 3y \geq 6$

Kunci jawaban dan pembahasan

1. Kunci jawaban: C



Pembahasan:

Persamaan garis ke 1, Lihat tabel titik bantu berikut :

x	0	12
y	6	0

Persamaan garisnya adalah

12x + 6y = 72 (kedua ruas dibagi 6)

2x + y = 12, Untuk menentukan Daerah Himpunan Penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis $2x + y = 12$

Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $2x + y \geq 12$

2(0)+0≥12 atau 0≥12 (Salah), maka daerahHimpunan Penyelesaiannya Di atas garis 2x+y=12

Persamaan garis ke 2, Lihat tabel titik bantu berikut :

x	0	12
y	24	0

Persamaan garisnya adalah

24x + 12y = 288 (kedua ruas dibagi 12)

2x + y = 24, Untuk menentukan Daerah Himpunan Penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis $2x + y = 24$

Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $2x + y \leq 24$

2(0)+0≤ 24 atau 0≤ 24 (Benar), maka daerah Himpunan Penyelesaiannya Di bawah garis 2x+y=24

Persamaan garis ke 3 $x - y \geq -2$

Untuk menentukan Daerah Himpunan Penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis $x - y = -2$

Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $x - y \geq -2$

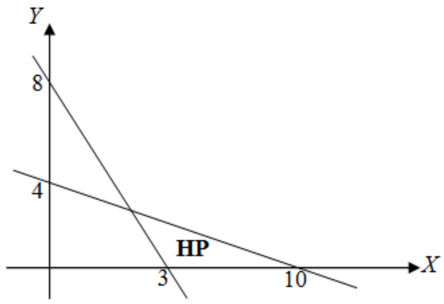
(0)+(0) ≥ -2 atau 0≥ -2 (Benar), maka daerah Himpunan Penyelesaiannya Di bawah garis x – y = -2

Persamaan garis ke 3 adalah $x \geq 0$

Persamaan garis ke 4 adalah y ≥ 0

Sehingga system pertidaksamaannya adalah $2x + y \leq 24$; $x + 2y \geq 12$; $x - y \geq -2$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

2. Kunci Jawaban: E



Pembahasan:

Persamaan garis ke 1, Lihat tabel titik bantu berikut :

x	0	10
y	4	0

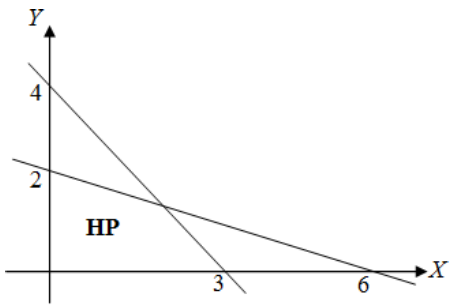
Persamaan garisnya adalah 4x + 10y = 40, Untuk menentukan Daerah Himpunan Penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis $4x + 10y = 40$
Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $4x + 10y \leq 40$
4(0)+10(0) ≤ 40 atau 0+0 ≤ 40 (Benar), maka daerah Himpunan Penyelesaiannya Di bawah garis 4x+ 10y=40

Persamaan garis ke 2, Lihat tabel titik bantu berikut :

x	0	3
y	8	0

Persamaan garisnya adalah 8x + 3y = 24 , Untuk menentukan Daerah Himpunan Penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis $8x + 3y = 24$
Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $8x + 3y \geq 24$
8(0)+ 3(0) ≥ 24 atau 0 +) ≥ 24 (Salah), maka daerah Himpunan Penyelesaiannya Di atas garis 2x+y=24
Persamaan garis ke 3 adalah $x \geq 0$
Persamaan garis ke 4 adalah y ≥ 0
Sehingga system pertidaksamaannya adalah $8x + 3y \geq 24$; $4x + 10 \leq 40$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

3. Kunci Jawaban: C $4x + 3y \leq 12$; $x + 3y \leq 6$; $x \geq 0$; $y \geq 0$
Pembahasan:



Persamaan garis ke 1, Lihat tabel titik bantu berikut :

x	0	6
y	2	0

Persamaan garisnya adalah 2x + 6y = 12 (Kedua ruas dibagi dengan 2) sehingga x + 3y = 6, Untuk menentukan Daerah Himpunan Penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis x + 3y = 6
Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $x + 3y \leq 6$, sehingga
0 + 3(0) ≤ 6 atau 0+0 ≤ 6 (Benar), maka daerah Himpunan Penyelesaiannya Di bawah garis x+ 3y = 6

Persamaan garis ke 2, Lihat tabel titik bantu berikut:

x	0	3
y	4	0

Persamaan garisnya adalah 4x + 3y = 12, Untuk menentukan Daerah Himpunan Penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis 4x + 3y = 12,
Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $4x + 3y \leq 12$, sehingga
4(0) +3(0) ≤ 12 atau 0+0 ≤ 12 (Benar), maka daerah Himpunan Penyelesaiannya Di bawah garis 4x + 3y = 12
Persamaan garis ke 3 adalah $x \geq 0$
Persamaan garis ke 4 adalah y ≥ 0
Sehingga system pertidaksamaannya adalah $4x + 3y \leq 12$; $x + 3y \leq 6$; ≥ 0; $y \geq 0$

4. Jawaban : A
   Pembahasan:
   Penyelesaian garis yang membatasi daerah penyelesaian di atas adalah:
   a. 6x – 4y = -24
   b. 3x + 5y = 15
   c. x = 0
   d. x = 7
   e. y = 0

   maka sistem pertidaksamaan dari daerah himpunan penyelesaian diatas adalah
   3x-2y ≥ -12, 3x + 5y ≥ 15, 0 ≤ x ≤ 7, dan y ≥ 0

5. Jawaban : C
   Pembahasan :
   Persamaan garis yang melalui titik (1, 0) dan (0, 2) adalah 2x + y = 2
   Persamaan garis yang melalui titik (0, 2) dan (3, 0) adalah 2x + 3y = 6
   Maka daerah yang siarsir adalah:
   a. Disebelah kanan sumbu y, berarti x ≥ 0
   b. Disebelah kiri garis 2x + 3y, berarti 2x + 3y ≤ 0
   c. Disebelah kanan garis 2x + y, berarti 2x + 3y ≥ 0

F. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggung jawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Anda telah mampu memahami sistem pertidaksamaan linier dua variabel?		
2.	Apakah Anda telah mampu membuat grafik dari beberapa pertidaksamaan linier dua variabel?		
3.	Apakah Anda telah mampu membuat sistem pertidaksamaan linier dari grafik yang diberikan?		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Program Linier dan Model Matematika

A. Tujuan Pembelajaran

Tujuan pada kegiatan pembelajaran 2 ini supaya siswa mampu:

1. Membuat model matematika soal yang berkaitan dengan program linier;
2. Menentukan daerah penyelesaian program linier;
3. Menentukan nilai optimum masalah program linier yang berkaitan dengan maslaha kontekstual sehari-hari.

B. Uraian Materi

Program Linier adalah suatu metode penentuan nilai optimum dari suatu persoalan Linier. Nilai optimum (maksimal atau minimum) diperoleh dari nilai dalam suatu himpunan penyelesaiaan persoalan Linier

Secara umum Program Linier terdiri dari dua bagian, yaitu : **fungsi kendala dan fungsi obyektif.**
Fungsi kendala adalah batasan-batasan yang harus dipenuhi, sedangkan **fungsi obyektif** adalah fungsi yang nilainya akan dioptimumkan (dimaksimumkan atau diminimumkan). Dalam program linier ini, batasan-batasan (kendala-kendala) yang terdapat dalam masalah program linier diterjemahkan terlebih dahulu ke dalam bentuk perumusan matematika, yang disebut model matematika.
Cara menyelesaikan permasalahan nyata dengan model program Linier dua variabel, yaitu harus mengetahui cara memodelkan matematika dan menenentukan nilai optimum bentuk objektif.

1) Model Matematika

Model matematika adalah adalah suatu hasil interpretasi manusia dalam menerjemahkan atau merumuskan persoalan sehari-hari ke dalam bentuk matematika, sehingga persoalan itu dapat diselesaikan secara sistematis.

Program Linier adalah suatu program yang dapat dipakai untuk menyelesaikan suatu masalah optimasi, misalnya dibidang ekonomi, industri, perdagangan, dan sebagainya.

Setiap manusia dalam mencapai tujuannya akan menemui kendala, seorang pengusaha roti yag ingin memperoleh keuntungan semaksimal mungkin, kendalanya mungkin dari harga bahan pokok, kendala pemasarannya, dan lain-lain. Masalah-masalah nyata yang sering dihadapi ini akan menjadi bahan kajian di dalam program Linier. Yaitu dengan cara menyelesaikan permasalahan nyata yang dihubungkan dengan program Linier dalam bentuk sistem persamaan Linier dua variabel, dengan kondisi awal kita harus mengetahui cara menterjemahkan bahasa sehari-hari tersebut ke dalam bahasa matematika atau dengan istilah model matematika dan selanjutnya akan kita tentukan nilai optimum bentuk objektif.

Model Matematika adalah suatu rumusan matematika (dapat berbentuk persamaan, pertidaksamaan, atau fungsi) yang diperoleh dari terjemahan suatu masalah ke dalam bahasa matematika.

Masalah-masalah yang hendak diselesaikan dengan program Linier, terlebih dahulu diterjemahkan menjadi model matematika (dengan variabel-variabel x dan y).

Contoh:

(1) Seorang siswa dapat memilih jurusan IPA, jika memenuhi syarat sebagai berikut:
i). Nilai matematika lebih dari 6
ii). Nilai fisika minimal 7
iii). Jumlah nilai matematika dan fisika tidak boleh kurang dari 13
Buat model matematika sebagai syarat seorang siswa bisa ke jurusan IPA
Jawaban :
Misal: Matematika = x dan Fisika = y
Maka Model Matematika adalah dijadikan sebagai Syarat atau Kendalanya, yaitu:
i). $x > 6$
ii). $y \geq 7$
iii). $x + y \geq 13$ dengan $x, y \in R$

(2) Seorang pemborong akan membangun rumah di atas tanah seluas 10.000 m^2. Rumah yang akan dibangun terdiri dari dua tipe yaitu RS dan RSS. Luas tanah tipe RS 100 m^2 dan luas tanah tipe RSS 80 m2. Sebuah rumah tipe RS dikerjakan oleh 5 orang dan sebuah rumah tipe RSS dikerjakan oleh 3 orang, sedangkan tenaga kerja yang tersedia 450 orang. Rumah itu akan dijual dengan keuntungan Rp 1.000.000 untuk satu unit RS dan Rp 750.000 untuk satu unit RSS.
Buat model matematika dan tulis labanya dalam x dan y!

Jawaban :
Misal:
Rumah Tipe RS = x
Rumah Tipe RSS = y
Syarat/Kendala
1. $100x + 80y \leq 10.000$ (Kedua ruas dibagi dengan 20)
   $5x + 4y \leq 500$
2. $5x + 3y \leq 450$
3. $x \geq 0$ (Karena tidak mungkin sebuah type rumah bernilai negatif)
4. $y \geq 0$ (Karena tidak mungkin sebuah type rumah bernilai negatif)
5. Labanya: 1.000.000 x + 750.000 y (dijadikan sebagai fungsi tujuan atau fungsi obyekti), sehingga $f(x,y) = 1.000.000x + 750.000y$

2) Nilai Optimum Bentuk Objektif

Bentuk objektif atau fungsi objektif atau fungsi tujuan adalah bagian dari model matematika yang menyatakan tujuan (fungsi sasaran) yang ingin dicapai dari suatu persoalan program Linier.

Bentuk objektif atau tujuan dinyatakan dalam $ax + by$ atau $f(x,y) = ax + by$.
Dari bentuk ini akan dicari nilai optimum (maksimum atau minimum).

a. Metode Uji Titik Pojok

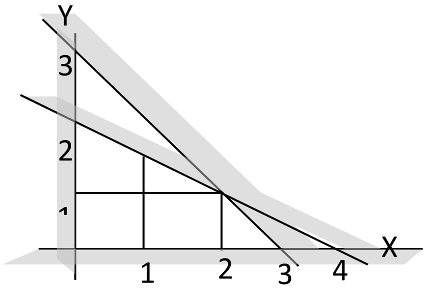
Nilai optimum bentuk objektif ax + by adalah nilai tertinggi (maksimum) atau nilai terendah (minimum) dari ax + by untuk (x, y) anggota himpunan penyelesaian.

Contoh 1

Tentukan nilai maksimum dari 2x + 3y, x , y ϵ C yang memenuhi sistem pertidaksamaan $x + y \le 3$; $x + 2y \le 4$, $x \ge 0$; $y \ge 0$

Jawaban :

Terlebih dahulu digambar daerah Himpunan Penyelesaian dari sistem pertidaksamaan di atas. Kemudian dihitung nilai 2x+3y pada setiap titik dalam daerah himpunan penyelesaian.



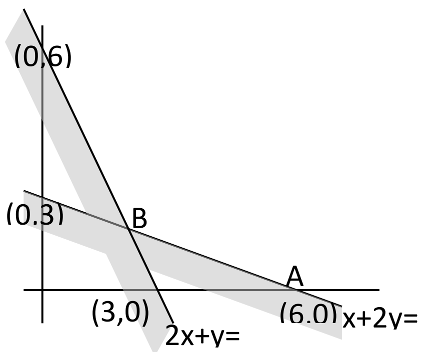
(x,y)	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(0,2)
2x+3y	0	2	4	6	3	3	7	6

Berdasarkan tabel di atas, maka nilai maksimum dari 2x + 3y adalah 7 untuk x = 2 dan y = 1.

Nilai maksimum diperoleh pada titik sudut daerah himpunan penyelesaian, berdasarkan nilai tersebut, maka untuk menentukan nilai optimum suatu bentuk objektif f(x,y) = ax + by, kalian cukup menghitung nilai pada tiap titik-titik sudut atau titik yang dekat dengan titik sudut pada daerah himpunan penyelesaian.

Contoh 2

Tentukan nilai minimum dari 3x + 2y dari sistem pertidaksamaan: $x + 2y \ge 6$; $2x + y \ge 6$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, untuk x ,y ∊ R



Titik-titik sudut daerah Himpunan Penyelesaiannya adalah:
Titik A (6,0), titik C (0,6) dan titik B yang diperoleh dari titik potong garis $x + 2y \ge 6$ dan $2x + y \ge 6$.

Untuk menentukan titik B kalian gunakan metode eleminasi dan substitusi

$$\begin{array}{l|ll} x + 2y = 6 & \times 1 & x + 2y = 6 \\ 2x + y = 6 \; - & \times 2 & 4x + 2y = 12 \; - \\ \hline & & 3x = 6 \\ & & x = 2 \end{array}$$

substitusi nilai x = 2 ke persamaan x + 2y = 6 sehingga diperoleh 2 + 2y = 6
dan 2y = 6-2
2y = 4
y = 2
jadi titik B adalah (2 , 2)

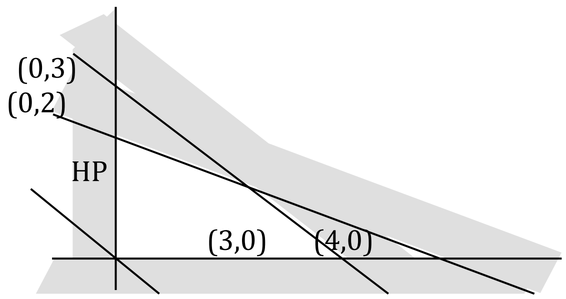
untuk memperoleh nilai minimum, harus kalian uji titik-titik sudut tersebut ke fungsi obyektif f(x,y) = 3x + 2y, sehingga diperoleh
titik A (6,0) nilai fungsi obyektif f(6,0)= 3(6)+2(0)= 18 + 0 = 18.
titik B (2,2) nilai fungsi obyektif f(220)= 3(2)+2(2)= 6 + 4 = 10.
titik C (0,6) nilai fungsi obyektif f(0,6)= 3(0)+2(6)= 0 + 12 = 12.
berdasarkan hasil uji titik tersebut maka kalian akan melihat nilai yang paling minimum adalah 10 yang diperoleh dari x = 2 dan y = 2

b. Metode Garis Selidik

Cara lain yang sering dipakai untuk menentukan nilai optimum suatu bentuk objektif adalah menggunakan garis selidik. Garis selidik adalah himpunan garis-garis sejajar yang dibuat melalui titik-titik sudut daerah himpunan penyelesaian dengan tijuan untuk menyelidiki dan menentukan nilai maksimum dan minimum.
Bentuk umum persamaan garis selidik dari bentuk objektif f(x,y) = ax + by adalah Z = ax + by = k untuk k, ϵ R.

<u>Contoh 1</u>
Tentukan nilai maximum dari 2x + 3y, x, y ϵ R. yang memenuhi sistem pertidaksamaan x + y ≤ 3, x + 2y ≤4, x ≥ 0, y ≥ 0 dengan garis selidik!

Jawaban :



Buat garis 2x + 3y = 0, kemudian dibuat garis-garis yang sejajar dengan garis 2x + 3y = 0 yang melalui setiap titik-titik sudut yaitu 2x + 3y = 6 dan 2x + 3y = 7. Titik sudut yang paling kanan (terakhir) disentuh oleh garis selidik adalah merupakan nilai optimum. Sehingga nilai maksimumnya = 7 untuk x = 2 dan y = 1.

Contoh 2

Gambar daerah HP dari sistem pertidaksamaan $x + y \geq 6$; $2x + y \geq 3$; $1 \leq x \leq 4$, $y \geq 0$; $x, y \in R$. Tentukan nilai optimum $2x + 4y$ dengan garis selidik!

Jawaban :

Garis $x + y = 6$

x	0	6
y	6	0

Garis $2x + 4y = 3$

x	0	3/2
y	3	0

Garis $2x + 4y = 0$

	0	2
y	0	-1

Titik titik sudut :

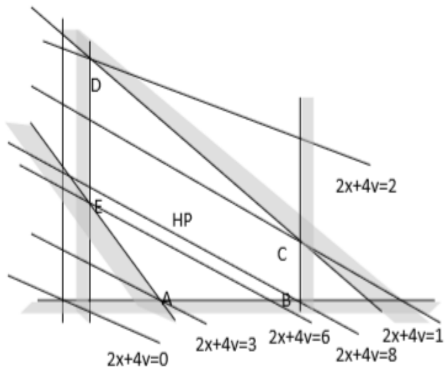
A. (3/2, 0)

B. (4,0)

C. (x,y) untuk x =4 dan y = 2
x + y = 6 maka C (4,2)

D. (x,y) untuk x = 1 dan y = 5
x + y = 6 maka D (1,5)

E. (x,y) untuk x = 1 dan y = 1
2x + y = 3 maka E (1,1)



c. Menyelesaikan Permasalahan Program Linier

Langkah-langkah untuk menyelesaikan soal program Linier adalah sebagai berikut:

a. Ubahlah soalnya ke dalam bahasa matematika dan buatlah model matematika yang terdiri atas sistem pertidaksamaan, dan fungsi objektif ax + by yang harus dimaksimumkan atau diminimumkan.

b. Gambar daerah himpunan penyelesaian pada diagram cartesius

c. Menetukan titik titik sudut daerah Himpunan Penyelesaian kemudian menentukan nilai optimumnya baik dengan tabel maupun dengan garis selidik.

Contoh

Seorang pedagang sepatu merencanakan akan menbeli tidak lebih dari 100 pasang sepatu wanita dan pria untuk di jual. Harga beli sepasang sepatu pria Rp 20.000 dan sepasang sepatu wanita Rp.30.000. Modal yang tersedia Rp.2.400.000. Keuntungan untuk sepasang sepatu pria Rp. 4.000 dan sepasang sepatu wanita Rp. 5.000.

a. Buatlah model matematikanya!

b. Gambar daerah himpunan penyelesaiannya!

c. Berapa pasang masing-masing jenis yang harus dibeli dan dijual agar diperoleh keuntungan maksimum?

d. Berapa keuntungan maksimumnya?

Jawab

a. Model Matematika

Misal:

Sepatu pria = x

Sepatu wanita = y

Model matematikanya

Bentuk objektif: $F(x,y) = 4.000x + 5.000y$

Kendala/Syarat :

$x + y \leq 100$ .... (i)

20.000x + 300.000y ≤ 2.400.000(kedua ruas dibagi dengan 10.000)

2x + 3y ≤ 240…………………………………………………………………………(ii)
x ≥ 0………………………………………………………………………………(iii)
y ≥ 0………………………………………………………………………………(iv)

b. Gambar daerah himpunan penyelesaiannya
Menggambar garis x + y = 100
Petunjuk: untuk membuat garis x + y = 100, buatlah dua titik bantu dengan cara mengambil nilai x = 0 maka y =... dan nilai y = 0 maka x =…
Lihat tabel berikut :

x	0	100
y	100	0

Jadi titik bantunya adalah (0,100) dan (100,0), selanjutnya gambarkan di bidang Cartesius

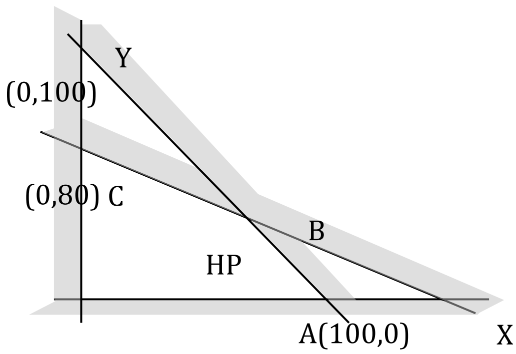
Untuk menentukan daerah himpunan penyelesaiannya uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis x + y = 100, Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $x + y \le 100$ maka (0) + (0) ≤ 100 → 0 ≤ 100 (**Benar**), maka **daerah himpunan penyelesaiannya di bawah garis $x + y = 100$, dan arsirlah daerah yang bukan daerah penyelesaiannya**

Menggambar garis 2x + 3y = 240
Petunjuk: untuk membuat garis x + y = 100, buatlah dua titik bantu dengan cara mengambil nilai x = 0 maka y =... dan nilai y = 0 maka x =…
Lihat table berikut:

x	0	120
y	80	0

Jadi titik bantunya adalah (0, 80) dan (120,0), selanjutnya gambarkan di bidang Cartesius

Untuk menentukan Daerah Himpunan Penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis 2x + 3y = 240, Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $2x + 3y \le 240$ maka 2(0) + 3(0) ≤ 240 → 0 ≤ 240 (**Benar**), maka **daerah Himpunan Penyelesaiannya di bawah garis $2x + 3y = 240$, dan arsirlah daerah yang bukan daerah penyelesaiannya**



c. Berapa pasang masing-masing jenis yang harus dibeli dan dijual agar diperoleh keuntungan maksimum

Berdasarkan gambar di atas, maka titik-titik sudut nya adalah :
Titik O(0,0), titik A (100,0), titik C (0,80) dan titik B yang diperoleh dari titik potong garis $x + y = 100$ dengan garis $2x + 3y = 240$, untuk mencari titik B gunakan oleh kalian metode elemninasi dan substitusi.

$$\begin{array}{r|l} x + y = 100 & \times 3 \\ 2x + 3y = 240 \; - & \times 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3x + 3y = 300 \\ 2x + 3y = 240 \; - \\ \hline x = 60 \end{array}$$

substitusi nilai $x = 60$ ke persamaan $x + y = 100$ sehingga diperoleh $60 + y = 100$, maka nilai $y = 100 - 60 = 40$, jadi titik B adalah (60,40)
untuk memperoleh nilai maksimum lakukan uji titik sudut terhadap fungsi obyektif $f(x,y) = 4.000x + 5.000y$

Titik O(0,0) maka $f(0,0) = 4.000(0) + 5.000(0) = 0 + 0 = 0$
Titik A(100,0) maka $f(100,0) = 4.000(100) + 5.000(0) = 400.000 + 0 = 400.000$
Titik B (60,40) maka $f(60,40) = 4.000(60) + 5.000(40) = 240.000 + 200.000= 440.000$
Titik C(0,80) maka $f(0,80) = 4.000(0) + 5.000(80) = 0 + 400.000 = 400.000$

Berdasarkan hasil uji titik tersebut, maka kalian dapat melihat nilai maksimumnya adalah Rp.440.000,00 yang diperoleh dari nilai $x = 60$ dan nilai $y = 40$.
Kesimpulannya adalah banyak sepatu pria (x) = 60, dan sepatu wanita (y) = 40

d. Berapakah keuntungan maksimum yang diperoleh keuntungan maksimumnya adalah Rp.440.000,00

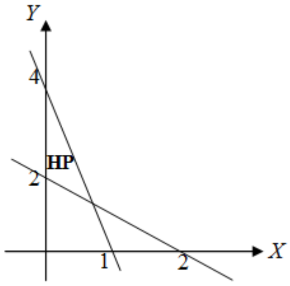
C. Rangkuman

1. Daerah himpunan penyelesaian PtLDV dapat ditentukan berada di kanan atau kiri garis pembatas dengan cara memperhatikan tanda ketaksamaan. Berikut ini langkah-langkahnya:
2. Program Linier adalah suatu program untuk menyelesaikan permasalahan yang batasanbatasannya berbentuk pertidaksamaan linier.
3. Model matematika adalah adalah suatu hasil interpretasi manusia dalam menerjemahkan atau merumuskan persoalan sehari-hari ke dalam bentuk matematika, sehingga persoalan itu dapat diselesaikan secara sistematis.
4. Langkah-langkah untuk menyelesaikan soal program Linier adalah sebagai berikut:
   a. Ubahlah soalnya ke dalam bahsa matematika dan buatlah model matematika untuk syarat/Kendal, yang terdiri atas sistem pertidaksamaan.
   b. Buatlah fungsi objektiff(x,y) = ax + by yang akan dioptimumkan (dimaksimumkan atau diminimumkan)
   c. Gambarkan Daerah Himpunan Penyelesaiannya dari masing-masing syarat/kendala.
   d. Tentukan titik titik sudut daerah Himpunan Penyelesaian,
   e. Tentukan nilai optimumnya baik dengan table (uji titik) maupun dengan garis selidik.
   f. Buatlah kesimpulan umumnya.

D. Latihan Soal

Kerjakan semua soal di bawah ini di kertas, kemudian cocokkan dengan alternatif penyelesaiannya!

1. Perhatikan gambar grafik di bawah ini:



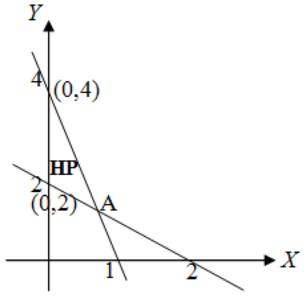
   Tentukanlah nilai minimum yang memenuhi fungsi obyektif f(x,y) = 5x + 3y

2. Seorang tukang las membuat dua jenis pagar. Tiap meter persegi jenis 1 memerlukan 4 meter besi pipa dan 6 meter besi beton. Adapun pagar jenis 2 memerlukan 8 meter besi pipa dan 4 meter besi beton. Tukang las tersebut mempunyai persediaan 640 meter besi pipa dan 480 meter besi beton. Harga jual per meter persegi jenis 1 Rp50.000,- dan harga jual per meter persegi pagar jenis 2 adalah Rp 75.000,-.
   Buatlah model matematika dari permasalahan Linier tersebut agar hasil penjualannya mencapai nilai maksimum!

3. Sebuah perusahaan bangunan merencanakan membangun rumah untuk disewakan kepada 540 orang. Banyak rumah yang akan dibangun tidak lebih dari 120 unit. Terdapat 2 jenis rumah yang akan disewakan. Rumah tipe I dengan jumlah penghuni 4 orang dan biaya sewa Rp 270.000/bulan. Rumah tipe Iidengan jumlah penghuni 6 orang dan biaya sewa Rp 360.000/bulan. Jika perusahaan membangun tipe rumah I sebanyak x buah dan tipe II y buah.
   Sedangkan pendapatan pembangunan tersebut adalah f, berapakah pendapatan maksimum yang akan diperoleh perusahaan tersebut?

Jawaban Alternatif Latihan Soal Essay

1. **Gambar Grafik Cartesiusnya (Skor = 15)**



Terlebih dahulu cari titik A:
$4x + \leq 4$ …………………. (1)
$x + y \geq 2$ ………………….. (2)
Titik A merupakan titik potong antara garis 4x + y = 4 dengan garis x = y = 2, dengan menggunakan metode gabungan, akan diperoleh:
Dengan metode eleminasi

$$\begin{array}{r} 4x + y = 4 \\ \underline{x + y = 2 \ -} \\ 3x = 2 \\ x = 2/3 \end{array}$$

substitusi nilai x = 2/3 ke persamaan 4x + y = 4, sehingga 4(2/3) + y = 4
8/3 + y = 4
y = 4 – 8/3
y = 12/3 – 8/3
y = 4/3
jadi titik potongnya (2/3 , 4/3)
selanjutnya kalian tentukan nilai minimum dari fungsi obyektif f(x,y) = 5x + 3y
titik (0,2) maka f(0,2) = 5(0) + 3(2) = 0 + 6 = 6
titik (2,0) maka f(2,0) = 5(2) + 3(0) = 10 + 0 = 10
titik (2/3 , 4/3) maka f(2/3 , 4/3)= 5(2/3) + 3(4/3) = 10/3 + 12/3 = 22/3
dari hasil uji titik di atas maka akan kalian lihat nilai minimumnya yaitu 6

2. **Jawaban (Skor = 15)**

Misalkan:
x = banyaknya pagar jenis 1
y = banyaknya pagar jenis 2
funsi Obyektif f(x,y) = 50.000x + 75.000y
Kendala/Syarat:

i. $4x + 8y \leq 640$ (kedua ruas dibagi dengan 4)
   $x + 2y \leq 160$
ii. $6x + 4y \leq 480$ (kedua ruas dibagi 2)
   $3x + 2y \leq 240$
iii. $x \geq 0$
iv. $y \geq 0$

3. **Jawaban (Sekor = 20)**
Misalkan:
x = banyaknya rumah tipe I
y = banyaknya rumah tipe II
Kendala/Syarat :
   i. $x + y \le 120$
   ii. $4x + 6y \le 540$ (kedua ruas dibagi dengan 2)
   $2x + 3y \le 270$
   iii. $x \ge 0$
   iv. $y \ge 0$
   a. Gambar garis $x+y=120$
   Petunjuk: untuk membuat garis x + y = 120, buatlah dua titik bantu dengan cara mengambil nilai x = 0 maka y =... dan nilai y = 0 maka x =…
   Lihat table berikut:

x	0	100
y	100	0

   Jadi titik bantunya adalah (0, 100) dan (100,0), selanjutnya gambarkan di bidang Cartesius
   Untuk menentukan Daerah Himpunan Penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis x + y = 100, Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $x + y \le 100$ maka $(0) + (0) \le 100 \rightarrow 0 \le 100$ (**Benar**), maka **daerah Himpunan Penyelesaiannya di bawah garis** $x + y = 100$**, dan arsirlah daerah yang bukan daerah penyelesaiannya**

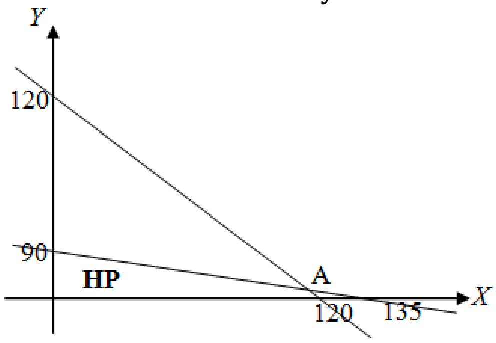
   b. Gambar garis $2x+3y=270$
   Petunjuk: untuk membuat garis 2x + 3y = 270, buatlah dua titik bantu dengan cara mengambil nilai x = 0 maka y =... dan nilai y = 0 maka x =…
   Lihat table berikut:

x	0	135
y	90	0

   jadi titik bantunya adalah (0, 90) dan (135,0), selanjutnya gambarkan di bidang Cartesius
   Untuk menentukan Daerah Himpunan Penyelesaiannya Uji salah satu titik yang tidak terletak pada garis 2x + 3y = 270, Misal titik (0,0) → artinya nilai x = 0 dan y = 0, substitusi ke $2x + 3y \le 270$ maka $2(0) + 3(0) \le 270 \rightarrow 0+0 \le 270$ (**Benar**), maka **daerah Himpunan Penyelesaiannya di bawah garis** $2x + 3y = 270$**, dan arsirlah daerah yang bukan daerah penyelesaiannya**

   c. Gambar garis $x \ge 0$
   d. Gambar garis $y \ge 0$

Gambar Garfik Cartesiusnya



Titik sudut daerah Himpunan Penyelesaian
Titik O(0,0)
Titik A(120,0)
Titik C (0,90)
Titik B adalah titik potong antara garis x + y = 120 dan garis 2x + 3y = 270, dengan menggunakan metode eleminasi dan substitusi, harus kalian cari titik potongnya
Metode eleminasi

x + y = 120	x 3	3x + 3y = 360
2x + 3y = 270 -	x 1	2x + 3y = 270 –
		x = 90

Substitusikan nilai x = 90 ke persamaan x + y = 120, sehingga diperoleh 90 + y = 120,
y = 120 – 90
y = 30
Jadi titik potongnya adalah (90,30)
Untuk memperoleh nilai maksimum selanjutnya kalian lakukan uji titik sudut ke funsi obyektif f(x,y) = 270.000x + 360.000y
Titik O (0,0) maka f(0,0)= 270.000(0) + 360.000(0) = 0 + 0 = 0
Titik A (120,0) maka f(120,0) = 270.000(120)+360.000(0) = 3.240.000+0 = 3.240.000
Titik B (90,30) maka f(90,30) = 270.000(90)+360.000(30) = 2.430.000+1.08.000= 3.510.000
Titik C(0,90) maka f(0,90) = 270.000(0)+360.000(90)= 0+3.240.000= 3.240.000
berdasarkan dari hasil uji titik tersebut, selanjutnya kalian tentukan nilai maksimumnya, dan diperoleh 3.520.000
Kesimpulannya keutungan maksimum yan diperoleh sebesar Rp. 3.520.000,- dengan menyewakan sebanyak 90 rumah type I (x) dan 30 rumah type II (y)

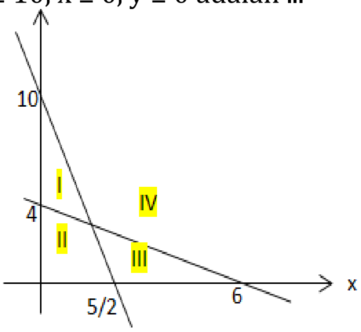
4. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggung jawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Anda telah mampu membuat model matematika dari permasalahan kontekstual?		
2.	Apakah Anda telah mampu mampu menentukan nilai optimum bentuk objektif?		
3.	Apakah Anda telah mampu menyelesaikan permasalah nyata dengan menggunakan program Linier?		

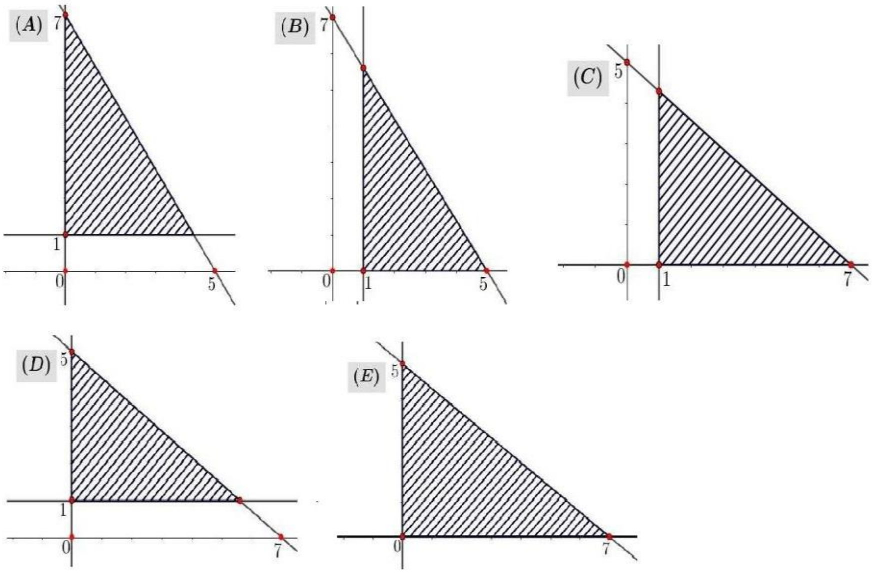
EVALUASI

1. Daerah yang merupakan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $2x + 3y \leq 12$, $4x + y \geq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ adalah ...

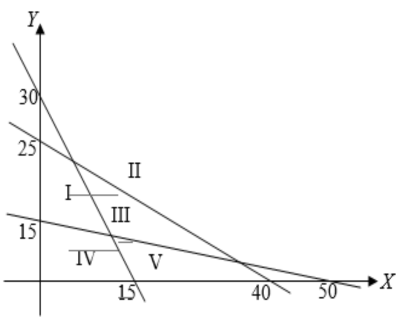


A. I
B. II
C. III
D. IV
E. V

2. Daerah penyelesaian yang sesuai dengan pertidaksamaan: $7x + 5y \leq 35$; $7x + 5y \leq 35$; $y\geq1y\geq1$; $x\leq0x\leq0$ adalah...



3. Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan
$2x + y \geq 30$; $3x + 10y \geq 150$; $5x + 8y \leq 200$ $x \geq 0$; $y \geq 0$; adalah ...



A. I
B. II
C. III
D. IV
E. V

4. Seorang praktikum membutuhkan dua jenis larutan, yaitu larutan A dan larutan B untuk eksperimennya. Larutn A mengandung 10 ml bahan I dan 20 ml bahan II. Sedangkan larutan B mengandung 15 ml bahan I dan 30 ml bahan II. Larutan A dan larutan b tersebut akan digunakan untuk membuat larutan C yang mengandung bahan I sedikitnya 40 ml dan bahan II sedikitnya 75 ml. Harga tiap ml larutan A adalah Rp 5.000,- dan tiap ml larutan B adalah

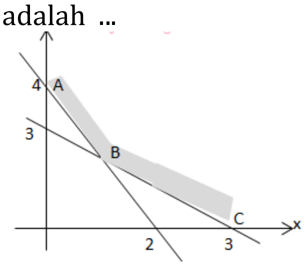
Rp 8.000,-. Model matematika agar biaya untuk membuat larutan C dapat ditekan sekecil-kecilnya adalah ... .

A. $2x + 3y \geq 8; 4x + 6y \geq 15; \geq 0; y \geq 0$
B. $2x + 3y \leq 8; 4x + 6y \geq 15; \geq 0; y \geq 0$
C. $3x + 2y \geq 8; 6x + 4y \leq 15; \geq 0; y \geq 0$
D. $2x + 3y \leq 8; 4x + 6y \leq 15; \geq 0; y \geq 0$
E. $3x + 2y \geq 8; 6x + 4y \geq 15; \geq 0; y \geq 0$

5. Seorang pedagang sepeda ingin membeli 25 sepeda untuk persediaan. Ia ingin membeli sepeda gunung dengan harga Rp 1.500.00,- per buah dan sepeda balap dengan harga Rp 2.000.000,- per buah. Ia ingin merencanakan tidak akan mengeluarkan uang lebih dari Rp 42.000.000,-. Jika keuntungan sebuah sepeda gunung Rp 500.000,- dan sebuah sepeda balap Rp 600.000,-, maka keuntungan maksimum yang diterima pedagang adalah…
A. Rp13.400.000,-
B. Rp12.600.000,-
C. Rp12.500.000,-
D. Rp10.400.000,-
E. Rp8.400.000,-

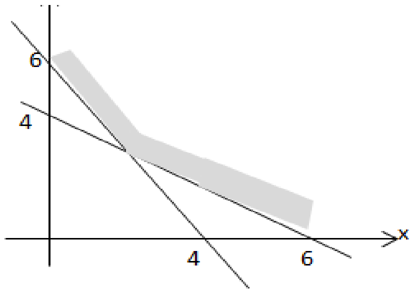
6. Biaya produksi satu buah payung jenis A adalah Rp20.000,00 per buah, sedangkan biaya satu buah produksi payung jenis B adalah Rp30.000,00. Seorang pengusaha akan membuat payung A dengan jumlah tidak kurang dari 40 buah. Sedangkan banyaknya payung jenis B yang akan diproduksi minimal adalah dari 50 buah. Jumlah maksimal produksi kedua payung tersebut adalah 100 buah. Biaya minimum yang dikeluarkan untuk melakukan produksi kedua payung sesuai ketentuan tersebut adalah ....
A. Rp2.000.000,00
B. Rp2.300.000,00
C. Rp2.200.000,00
D. Rp2.100.000,00
E. Rp2.000.000,00

7. Nilai minimum fungsi obyektif f(x, y) = 3x + 2y dari daerah yang diarsir pada gambar adalah ...



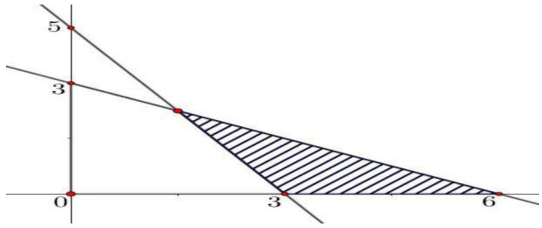
A. 4
B. 6
C. 7
D. 8
E. 9

8. Daerah mana yang diarsir di bawah ini adalah daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan. Nilai maksimum fungsi objektif (3x + 5y) pada daerah penyelesaian tersebut ...



A. 30
B. 26
C. 24
D. 21
E. 18

9. Daerah yang diarsir pada grafik berikut merupakan penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan adalah...

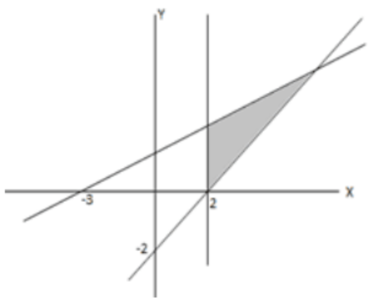


A. x+2y≤6; 5x+3y≤15; x≥0; y≥0
B. x+2y≤6; 5x+3y≥15; x≥0; y≥0
C. x+2y≥6; 5x+3y≤15; x≥0; y≥0
D. x+2y≥6; 5x+3y≥15; x≥0; y≥0
E. x+2y≤6; 3x+5y≥15; x≥0; y≥0

10. Nilai minimum dari 20−x−2y20−x−2y yang memenuhi y−2x≥0y−2x≥0; x+y≤8x+y≤8; dan x≥2x≥2 adalah...
A. 5
B. 6
C. 7
D. 8
E. 9

11. Nilai maksimum dari f(x, y) = 2x + 3y dengan fungsi kendala: 3x + y ≥ 9, 3x + 2y ≤ 12, x ≥ 0 dan y ≥ 0 adalah ....
A. 6
B. 12
C. 13
D. 18
E. 27

12. Perhatikan gambar berikut!



Jika daerah yang diarsir pada diagram di atas merupakan penyelesaian untuk fungsi objectif f(x, y) = x − y, maka nilai minimum f*x, y) adalah ....
A. $f(3,1)$
B. $f(4,1)$
C. $f\left(2,\frac{5}{3}\right)$
D. $f(3,2)$
E. $f\left(5,\frac{5}{2}\right)$

13. Suatu tempat parkir seluas 200 m² tidak dapat menampung lebih dari 12 mobil dan bus. Untuk memarkir sebuah mobil rata-rata diperlukan tempat seluas 10 m² dan untuk bus rata-rata 20 m². Jika tarif parkir motor Rp7.000/hari dan tarif mobil Rp15.000/hari. Agar Keuntungan maksimum banyaknya bus yang harus diparkir adalah…
A. 4
B. 6
C. 8
D. 10
E. 12

14. Tanah seluas 10.000 m^2 akan dibangun rumah tipe A dan tipe B. Untuk rumah tipe A diperlukan 100 m^2 dan tipe B diperlukan 75 m^2. Jumlah rumah yang dibangun paling banyak 125 unit. Keuntungan rumah tipe A adalah Rp6.000.000,00/unit dan tipe B adalah

Rp4.000.000,00/unit. Keuntungan maksimum yang dapat diperoleh dari penjualan rumah tersebut adalah…

A. Rp550.000.000,00
B. Rp600.000.000,00
C. Rp700.000.000,00
D. Rp800.000.000,00
E. Rp900.000.000,00

15. Seorang pedagang skuter ingin membeli 25 sepeda untuk persediaan. Ia ingin membeli skuter merk A dengan harga Rp1.500.000,00 per buah dan skuter merk B dengan harga Rp2.000.000,00 per buah. Ia merencanakan tidak akan mengeluarkan uang lebih dari Rp42.000.000,00. Jika keuntungan sebuah skuter merk A Rp500.000,00 dan sebuah skuter merk B Rp600.000,00, maka keuntungan maksimum yang diterima pedagang adalah…

A. Rp13.400.000,00
B. Rp12.600.000,00
C. Rp12.500.000,00
D. Rp10.400.000,00
E. Rp8.400.000,00

Kunci Jawaban:

1. C
2. A
3. C
4. A
5. A
6. B
7. C
8. E
9. B
10. B
11. E
12. A
13. D
14. B
15. A

DAFTAR PUSTAKA

Eksis.___________. *Modul Pembelajaran Matematika untuk SMA/MA/SMK Kelas XI Semester 1: Kurikulum 2013 Edisi Revisi*.

Kemendikbud._.*Buku Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Kurikulum 2103 Edisi Revisi 2017*

https://www.wardayacollege.com/matematika/geometri-koordinat/program-linier/aplikasi-program-linier/#section-r3, 2020

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

BERANI JUJUR HEBAT!

JUJUR ADALAH LANGKAH AWAL BERANTAS KORUPSI

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum

KELAS XI

MATRIKS
MATEMATIKA UMUM KELAS XI

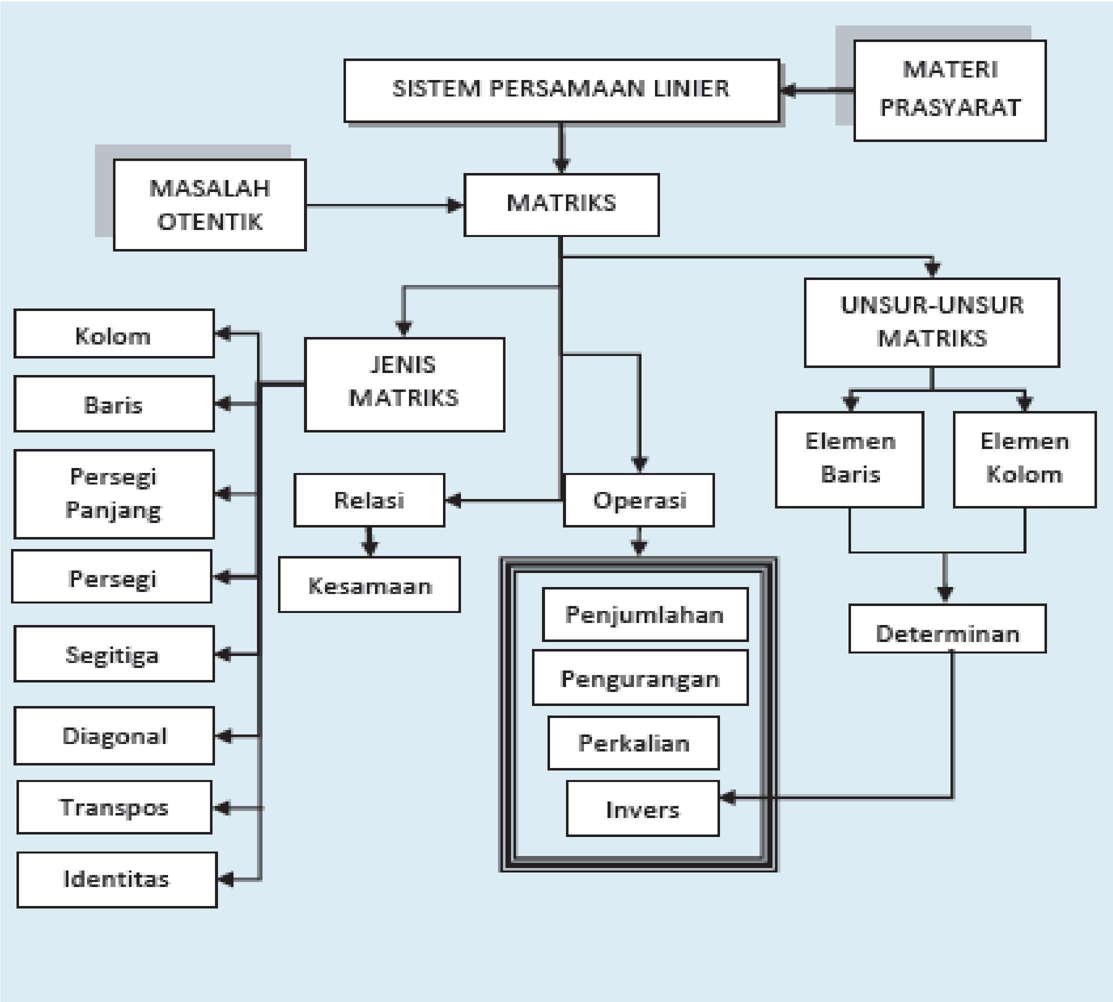
PENYUSUN
Yusdi Irfan, S.Pd, M.Pd
SMAN 1 Kramatwatu
Kabupaten Serang - Banten

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Matriks	:	susunan bilangan berbentuk persegi atau persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom, dan ditempatkan dalam tanda kurung biasa atau kurung siku
Elemen matriks	:	bilangan-bilangan yang ada di dalam matriks
Ordo	:	banyaknya baris dan banyaknya kolom
Matriks Baris	:	matriks yang hanya mempunyai satu baris saja
Matriks Kolom	:	matriks yang hanya mempunyai satu kolom saja
Matriks Persegi Panjang	:	matriks yang banyaknya baris tidak sama dengan banyaknya kolom
Matriks Persegi	:	matriks yang mempunyai banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom
Matriks Diagonal	:	matriks persegi dengan semua elemen di luar diagonal utamanya bernilai nol
Matriks Segitiga Atas	:	matriks persegi dan semua elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol
Matriks Segitiga Bawah	:	matriks persegi dan semua elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol
Matriks identitas	:	matriks diagonal dan semua elemen pada diagonal utamanya bernilai satu
Matriks Nol	:	matrik dengan semua elemennya bernilai nol
Transpose matriks	:	sebuah matriks baru yang diperoleh dengan cara menukar elemen- elemen baris menjadi elemen-elemen kolom dan sebaliknya
Kesamaan Dua Matriks	:	dua matriks yang mempunyai ordo yang sama semua elemen yang seletak pada kedua matriks tersebut nilainya sama
Operasi matriks	:	operasi hitung yang meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar dengan matriks, dan perkalian dua matriks

PETA KONSEP


SISTEM PERSAMAAN LINIER
MATERI PRASYARAT
MASALAH OTENTIK
MATRIKS
UNSUR-UNSUR MATRIKS
JENIS MATRIKS
Kolom
Baris
Persegi Panjang
Persegi
Segitiga
Diagonal
Transpos
Identitas
Relasi
Kesamaan
Operasi
Penjumlahan
Pengurangan
Perkalian
Invers
Elemen Baris
Elemen Kolom
Determinan

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	12 JP
Judul Modul	:	Matriks

B. Kompetensi Dasar

3.3 Menjelaskan matriks dan kesamaan matriks dengan menggunakan masalah kontekstual dan melakukan operasi pada matriks yang meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, dan perkalian, serta transpose.

4.3 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan matriks dan operasinya

C. Deskripsi Singkat Materi

Matriks adalah kumpulan bilangan, simbol, atau ekspresi, berbentuk persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan yang terdapat di suatu matriks disebut dengan elemen atau anggota matriks. Penemu matriks adalah Arthur Cayley.

Matriks banyak dimanfaatkan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan matematika misalnya dalam menemukan solusi masalah persamaan linear, transformasi linear yakni bentuk umum dari fungsi linear contohnya rotasi dalam 3 dimensi. Matriks juga seperti variabel biasa, sehingga matrikspun dapat dimanipulasi misalnya dikalikan, dijumlah, dikurangkan, serta didekomposisikan. Menggunakan representasi matriks, perhitungan dapat dilakukan dengan lebih terstruktur.

Banyak permasalahan dalam kehidupan yang penyelesaiannya terkait dengan konsep dan aturan-aturandalam matematika. Secara khusus keterkaitan konsep dan prinsip-prinsip matriks dengan permasalahan masalah nyata yang menyatu/ bersumber dari fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep matriks dapat dibangun/ ditemukan di dalam penyelesaian permasalahan yang kita hadapi. Untuk itu siswa diharapkan mampu menyelesaiakan permasalahan-permasalahan yang diberikan.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum peserta didik membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, marilah berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Bacalah uraian materi dan contoh dengan cermat secara berulang-ulang sehingga kalian benar-benar memahami dan menguasai materi, sebaiknya peserta didik mulai membaca dari peta konsep, pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.

3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, peserta didik mengerjakan latihan soal secara mandiri dengan jujur tanpa melihat uraian materi, jika dalam kasus tertentu kalian mengalami kesulitan dalam menjawab maka lihatlah rambu-rambu jawabannya, jika langkah tersebut masih belum berhasil maka mintalah bantuan guru atau orang lain yang lebih tahu dan memahami.
4. Peserta didik dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 70 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika peserta didik memperoleh nilai < 70 maka peserta didik harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **3** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Membangun Konsep Matriks, Jenis-jenis matriks

Kedua : Kesamaan dua matriks, dan transpose matrik

Ketiga : Operasi pada matriks

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
KONSEP DAN JENIS MATRIKS

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan:
1. Menuliskan permasalahan nyata dalam bentuk matriks;
2. Menjelaskan konsep matriks;
3. Menyebutkan jenis-jenis matriks dengan cermat.

B. Uraian Materi

1. Konsep Matriks

Coba kalian perhatikan susunan benda-benda di sekitar kamu! Sebagai contoh, susunan buku di meja, susunan buku di lemari, posisi siswa berbaris di lapangan, susunan keramik lantai, dan lain-lain.

Gambar 3.1. Susunan keramik/ubin di lantai

Tentu kalian dapat melihat susunan tersebut dapat berupa pola baris atau kolom, bukan? Bentuk susunan berupa baris dan kolom akan melahirkan konsep matriks yang akan kita pelajari.

Sebagai contoh lainnya adalah susunan angka dalam bentuk tabel. Pada tabel terdapat baris atau kolom, banyak baris atau kolom bergantung pada ukuran tabel tersebut. Ini sudah merupakan gambaran dari sebuah matriks.
Agar kita dapat segera menemukan konsepnya, perhatikan beberapa gambaran dan permasalahan berikut.

Sebagai gambaran awal mengenai matriks, sekarang kalian cermati uraian berikut.
Diketahui harga tiket masuk suatu museum dapat dinyatakan sebagai tabel berikut:

Tabel Harga Karcis

Golongan	Hari Minggu/Libur (Rp.)	Hari Biasa (Rp.)
Anak – anak	5.000	3.000
Dewasa	15.000	10.000

Data tersebut, dapat disajikan kembali tanpa harus di dalam tabel, dengan cara menghilangkan kepala baris dan kepala kolom seperti berikut ini:

kolom

$$\text{baris} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5.000 & 3.000 \\ 15.000 & 10.000 \end{bmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix} 5.000 & 3.000 \\ 15.000 & 10.000 \end{bmatrix}$$

Bentuk penulisan tersebut, menunjukkan terdapat 2 baris dan 2 kolom.

Berdasarkan permasalahan nyata di atas, maka dapat kita simpulkan bahwa:

<u>Matriks</u> adalah susunan bilangan berbentuk persegi atau persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom, dan ditempatkan dalam tanda kurung biasa atau kurung siku.
Matriks diberi nama dengan menggunakan huruf kapital, seperti A, B, dan C.

Bentuk umum Matriks

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{baris ke-1} \\ \rightarrow \text{baris ke-2} \\ \rightarrow \text{baris ke-3} \\ \\ \rightarrow \text{baris ke-m} \end{array}$$

kolom ke-n
kolom ke-3
kolom ke-2
kolom ke-1

Pada bentuk matriks tersebut, terlihat hal-hal sebagai berikut.

1. Banyaknya baris dan kolom matriks A berturut-turut adalah m dan n buah.
2. a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{mn} = disebut dengan elemen-elemen matriks A,
   a_{mn} = elemen A pada baris ke-m, kolom ke-n.

Matriks dalam matematika adalah berkas bilangan, logo atau potongan yang berbentuk empat persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan yang ditemukan pada suatu matriks dikenal dengan keadaan atau dikenal dengan juga bagian dari suatu matriks
Matriks besar biasanya dimanfaatkan di dalam menyelesaikan bermacam-macam permasalahan matematika, misalnya: untuk menemukan pemecahan masalah pertemuan (pendapat) linear, transformasi linear yaitu bentuk sudah tidak asing lagi tranpose matriks dari fungsi linear

Ordo atau ukuran suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom.

Secara umum berlaku:
Jika matriks A mempunyai m baris dan n kolom maka matriks A berordo m × n atau ordo matriks A adalah m × n, ditulis:
$\mathbf{A_{m\times n}}$(dibaca: ”A m kali n”).

Contoh:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ disebut Matriks berordo 2x2, yang menunjukkan banyaknya baris 2 dan banyaknya kolom 2, dan ditulis A_{2x2}
2. B = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ disebut Matriks berordo 1x3, yang berarti menunjukkan banyaknya baris 1 dan banyaknya kolom 3, dan ditulis B_{1x3}
3. C = $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 5 & 5 & 10 \\ -6 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ disebut Matriks berordo 3x3, yang berarti menunjukkan banyaknya baris 3 dan banyaknya kolom 3, dan ditulis C_{3x3}

2. Jenis-jenis Matriks

1) **Matriks Baris**, yaitu matriks yang hanya mempunyai satu baris saja dan banyaknya kolom n, mempunyai ordo 1 x n
   Contoh : P_{1x3} = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
2) **Matriks Kolom**, yaitu matriks yang hanya mempunyai satu kolom saja dan banyaknya baris m, mempunyai ordo m x 1
   Contoh : Q_{4x1}=$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$
3) **Matriks Persegi Panjang**, yaitu matriks yang banyaknya baris tidak sama dengan banyaknya kolom, mempunyai ordo m x n
   Contoh : R_{2x3} = $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ atau R_{3x2} = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 7 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$
4) **Matriks Persegi atau Matriks Bujur sangkar**, yaitu matriks yang mempunyai banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom, mempunyai ordo n x n
   Contoh : S_{3x3} = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 8 \\ -5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ atau S_{2x2} = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

   $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ → **matriks persegi berordo 2x2**

   Diagonal Utama

5) Matriks Diagonal, yaitu matriks persegi berordo n x n, dengan semua elemen di luar diagonal utamanya bernilai nol
   Contoh :

   A_{3x3}=$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ → Diagonal Utama

6) Matriks Segitiga Atas, yaitu matriks persegi n x n, dan semua elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol
Contoh :

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7) Matriks Segitiga Bawah, yaitu matriks persegi n x n, dan semua elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol
Contoh :

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

8) Matriks identitas (matriks satuan), yaitu matriks diagonal dengan ordo n x n, dan semua elemen pada diagonal utamanya bernilai satu, dinotasikan dengan huruf "I"
Contoh :

$$I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Elemen diagonal utamanya bernilai 1

9) Matriks Nol, yaitu matrik berordo m x n dengan semua elemennya bernilai nol

Contoh : $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

C. Rangkuman

Setelah selesai membahas dan mempelajari uraian materi di atas, beberapa hal penting yang dapat disimpulkan dalam rangkuman ini adalah sebagai berikut:

1. Matriks adalah susunan bilangan berbentuk persegi atau persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom, dan ditempatkan dalam tanda kurung biasa atau kurung siku. Matriks diberi nama dengan menggunakan huruf kapital, seperti A, B, dan C.
2. Ordo atau ukuran suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom.
3. Jenis-jenis Matriks meliputi matriks baris, matriks kolom, matrik persegi panjang, matriks persegi (matriks bujur sangkar), matriks diagonal, matriks segi tiga bawah, matriks segi tiga atas, matriks identitas, dan matriks nol.

D. Penugasan Mandiri

Untuk lebih meningkatkan pemahaman tentang matriks, kalian diberikan tugas mandiri sebagai berikut:
Carilah 3 permasalahan nyata dalam sehari-hari kalian, kemudian buatlah:

1. Bentuk matriks nya
2. Ordo atau ukuran matriks

E. Latihan Soal

I. Latihan Soal Essay

Diketahui permasalahan sebagai berikut:
Seorang wisatawan lokal hendak berlibur ke beberapa tempat wisata yang ada di Pulau Jawa. Untuk memaksimalkan waktu liburan, dia mencatat jarak antara kota-kota tersebut sebagai berikut.
Bandung–Semarang 324 km
Semarang – Yogyakarta 225 km
Bandung – Yogyakarta 484km
Dapatkah kamu membuat susunan jarak antar kota tujuan wisata tersebut, jika wisatawan tersebut memulai perjalanannya dari Bandung! Kemudian berikan makna setiap angka dalam susunan tersebut.
Dari permasalahan di atas, jawablah soal di bawah ini dengan jelas dan benar!

1. Buatlah dalam matriks nya!
2. Berapakah banyaknya baris, banyaknya kolom, sebutkan ordo atau ukuran matriks nya?
3. Sebutkan elemen-elemen matrik baris ke 1, elemen matrik kolom ke 2, elemen matrik baris ke 2 kolom ke 1?
4. Sebutkan jenis matriksnya dan berikan alasannya?

II. Latihan Soal Pilihan Ganda

Pilihlah salah satu jawaban yang paling benar
Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$
Data di atas untuk menjawab soal nomor 1-5.

1. Ordo dari matriks A adalah…
   A. 2 x 2
   B. 3 x 2
   C. m x n
   D. 2 x 3
   E. n x m

2. Elemen baris kedua matriks A adalah…
   A. 3, 1, -2
   B. 0, -5, 3
   C. 3, 0
   D. 1, 5
   E. -2, 3

3. Elemen kolom ketiga matriks A adalah…
   A. 3, 1, -2
   B. 0, -5, 3
   C. 3, 0
   D. 1, 5
   E. -2, 3

4. Elemen baris kedua kolom pertama matriks A adalah…
   A. -2
   B. 0
   C. 1
   D. 3
   E. 5

5. Elemen baris ketiga kolom ketiga matriks A adalah…
   A. – 5
   B. – 2
   C. 0
   D. 1
   E. 3

Kunci Jawaban, Pembahasan dan Pedoman Penskoran.

<table>
<tr><th>No.</th><th>Kunci Jawaban dan Pembahasan</th><th>Skor</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Wisatawan akan memulai perjalanannya dari Bandung ke kota-kota wisata di Pulau Jawa. Jarak antarkota tujuan wisata dituliskan sebagai berikut.
Tabel 3.2: Jarak Antarkota
<table><tr><th></th><th>Bandung</th><th>Semarang</th><th>Yogyakarta</th></tr><tr><td>Bandung</td><td>0</td><td>324</td><td>484</td></tr><tr><td>Semarang</td><td>324</td><td>0</td><td>225</td></tr><tr><td>Yogyakarta</td><td>484</td><td>225</td><td>0</td></tr></table>
Matriks nya adalah
$W = \begin{bmatrix} 0 & 324 & 484 \\ 324 & 0 & 225 \\ 484 & 225 & 0 \end{bmatrix}$</td><td>5

3</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Banyaknya baris 3
Banyaknya kolom 3
Ordo nya 3 x 3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Elemen matriks baris ke 1 adalah : 0, 324, 484
Elemen matriks kolom ke adalaj : 324, 0, 225
Elemen matriks baris ke 2 kolom ke 1 adalah : 324</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Jenis matriks nya adalah Matriks Persegi (Bujur Sangkar) karena matriks tersebut mempunya banyak nya baris dan kolom yang sama</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Jumlah Skor Maksimum</td><td>20</td></tr>
</table>

Kunci Jawab dan Pembahasan Soal Pilihan Ganda:

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

1. D. 2 x 3 karena banyaknya baris 2 dan banyaknya kolom 3
2. B. 0, -5 dan 3 elemen baris kedua
3. E. -2 dan 3 elemen kolom ketiga
4. B. 0 elemen baris kedua kolom pertama
5. E 3 elemen baris ketiga kolom ketiga

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan= $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum}\ x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

F. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom "Ya" jika kalian mampu dan "Tidak" jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	**Tidak**
1	Apakah kalian sudah menuliskan permasalahan nyata dalam bentuk matriks?		
2	Apakah kalian telah mampu memahami konsep tentang matriks?		
3	Apakah kalian telah mampu menyebutkan jenis-jenis matriks?		
4	Apakah kalian sudah mampu mampu menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan Matriks?		
5	Apakah dalam mengerjakan soal-soal kalian bekerja secara mandiri dan jujur tanpa melihat dulu kunci jawaban dan pembahasan atau bertanya kepada orang lain?		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
KESAMAAN DUA MATRIKS DAN TRANSPOSE MATRIK

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan kalian mampu:
1. Menjelaskan transspose matriks, kesamaan dua matriks
2. Menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengam matriks.

B. Uraian Materi

1. *Transpose* Matriks (Matriks *Transpose*)

Transpose dari suatu matriks A berordo m x n adalah sebuah matriks baru yang berordo n x m yang diperoleh dengan cara menukar elemen-elemen baris menjadi elemen-elemen kolom dan sebaliknya.
Transpose suatu matriks dinotasikan dengan A^t

Agar lebih jelasnya, perhatikan gambar di bawah ini:

$A_{3x2}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ Transpose matriks A dinotasikan dengan $A^T_{2x3}=\begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$

Contoh :
1. Jika Matriks $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ maka matriks transposenya adalah A^t_{3x2} =[ ]
2. Jika Matriks $B_{2x2} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ maka matriks transposenya adalah $B^t_{2x2} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
3. Jika Matriks $C_{1x3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ maka matriks transposenya adalah $C^t_{3x1}=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

2. Kesamaan Dua Matriks

Matriks A dan matriks B dikatakan sama, jika dan hanya jika:
a. ordo matriks A **sama** dengan ordo matriks B;
b. semua elemen yang **seletak** pada matriks A dan matriks B nilainya sama.

Perhatikan untuk matriks berikut ini.

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 & 4+1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{9} & 5 \\ 7 & 3^2 \end{bmatrix}$

3 seletak dengan $\sqrt{9}$
$4+1$seletak dengan 5
9 seletak dengan 3^2

c. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2m & 7 \\ 8 & 3n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$

maka 2m = 6   3n = -6
m = 3   n = - 2

Contoh soal

1. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 4a & 8 & 4 \\ 6 & -1 & -3b \\ 5 & 3c & 9 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 6 & -1 & -3a \\ 5 & b & 9 \end{bmatrix}$
   Jika A = B, maka a + b + c = …

   Jawaban:

4a = 12	- 3b = - 3a	3c = b
a = 3	- 3b = - 3(3)	3c = 3
	- 3b = - 9	c = 1
	b = 3	

   maka nilai a + b + c = 3 + 3 + 1 = 7

2. Diketahui persamaan matriks A = B^T (B^T adalah transpose matriks B), dengan
   A = $\begin{bmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 2c-3b & 2a+2 \\ a & b+7 \end{bmatrix}$ Nilai a + b + c = …
   Jawaban:

   Matriks B = $\begin{bmatrix} 2c-3b & 2a+1 \\ a & b+7 \end{bmatrix}$ maka B^T = $\begin{bmatrix} 2c-3b & a \\ 2a+2 & b+7 \end{bmatrix}$.

   Karena A = $2B^T$ maka $\begin{bmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c-3b & a \\ 2a+2 & b+7 \end{bmatrix}$

4 = a	2b = 2a + 2	3c = b + 7
a = 2c – 3b	2b = 2(4) + 2	3c = 5 + 7
4 = 2c – 3b	2b = 8 + 2	3c = 12
	2b = 10	c = 4
	b = 5	

   Maka nilai a + b + = 4 + 5 + 4 = 13

C. Rangkuman

1. **Transpose Matriks (Matriks Transpose)** : Transpose dari suatu matriks A berordo m x n adalah sebuah matriks baru yang berordo n x m yang diperoleh dengan cara menukar elemen-elemen baris menjadi elemen-elemen kolom dan sebaliknya, dan dinotasikan dengan A^t.

2. **Kesamaan Dua Matriks** : Matriks A dan matriks B dikatakan sama, jika dan hanya jika:
   a. ordo matriks A sama dengan ordo matriks B;
   b. semua elemen yang seletak pada matriks A dan matriks B nilainya sama.

D. Penugasan Mandiri

Carilah 3 permasalahan nyata dalam sehari-hari kalian, kemudian buatlah:

1. Transpose matriks nya
2. Apakah dari ketiga bentuk matriks yang kalian buat ada dua buah matriks yang sama? Jelaskan!

E. Latihan Soal

I. Latihan Soal Essay

Diketahui permasalahan sebagai berikut:
Seorang wisatawan lokal hendak berlibur ke beberapa tempat wisata yang ada di Pulau Jawa. Untuk memaksimalkan waktu liburan, dia mencatat jarak antara kota-kota tersebut sebagai berikut.
Bandung–Semarang 324 km
Semarang – Yogyakarta 225 km
Bandung – Yogyakarta 484 km

Dapatkah kamu membuat susunan jarak antar kota tujuan wisata tersebut, jika wisatawan tersebut memulai perjalanannya dari Bandung! Kemudian berikan makna setiap angka dalam susunan tersebut.
Dari permasalahan di atas, jawablah soal di bawah ini dengan jelas dan benar!

1. Transpose matriks nya
2. Buatlah matriks yang lain agar terjadi kesamaan dua matriks

II. Latihan Soal Pilihan Ganda

Pilihlah salah satu jawaban yang benar

1. Jika diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ Tranpose matriks A adalah…

   A. $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

   B. $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

   C. $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

   D. $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

   E. $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Diketahui matriks P= $\begin{bmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2 & 2c \\ 4 & 4-d \end{bmatrix}$ dan matriks Q= $\begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & e \end{bmatrix}$

   Jika P^T = Q, maka nilai dari a + b + c +d = ….

   A. -2
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. 2

3. Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 2+p \\ q & 5 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 2.p \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ dan A = B maka niai p adalah ….

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

4. Misalkan A^T adalah matriks transpose matriks A yang memenuhi persamaan $\begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} b & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, maka nilai $a^2 - b^2 = \ldots.$
A. -9
B. -3
C. -1
D. 3
E. 9

5. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix}$ dan matriks B = $\begin{bmatrix} 2c - 3b & 2a + 1 \\ a & b + 7 \end{bmatrix}$. Jika B^T menyatakan transpose matriks B, maka $A = 2B^T$ dipenuhi untuk nilai c = ….
A. 2
B. 3
C. 5
D. 8
E. 10

Kunci Jawaban, Pembahasan dan Pedoman Penskoran:

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
1	Matriks W = $\begin{bmatrix} 0 & 324 & 484 \\ 324 & 0 & 225 \\ 484 & 225 & 0 \end{bmatrix}$ maka transpose matriks W adalah $W^t = \begin{bmatrix} 0 & 324 & 484 \\ 324 & 0 & 225 \\ 484 & 225 & 0 \end{bmatrix}$	5
2	Matriks yang sama W = $\begin{bmatrix} 0 & 18^2 & 22^2 \\ 325-1 & 0 & 15^2 \\ 450+34 & \sqrt{50625} & 0 \end{bmatrix}$	5
	Jumlah Skor Maksimum	**10**

Pembahasan Pilihan Ganda:

1. Jawaban. D
   Pembahasan:
   Karena A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ maka A^T = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Jawaban. B
   Pembahasan :
   Karena P merupakan matriks berordo 3 x 2, maka P^T merupakan matriks baru yang berordo 2 x 3, sedangkan matriks Q merupakan matriks yang berordo 2 x 3, oleh karena itu berlaku kesamaan dua matriks P^T = Q
   Dengan P^T= $\begin{bmatrix} 2a-4 & d+2 & 4 \\ 3b & 2c & 4-d \end{bmatrix}$ akibatnya kesamaan P^T = Q dapat dituliskan
   $\begin{bmatrix} 2a-4 & d+2 & 4 \\ 3b & 2c & 4-d \end{bmatrix}$= $\begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & e \end{bmatrix}$
   Maka diperoleh kesamaan, bahwa :
   3b = 3 maka b = 1
   2c = 6 maka c = 3
   2a - 4 = b – 5 maka 2a = b – 1 = 1-1 = 0. Maka diperoleh a = 0
   d + 2 = 3a – c maka d = 3(0) – 3 – 2 = 0 – 5 = - 5. Maka d = -5.
   Sehingga nilai a + b + c + d = 0 + 1 + 3 + (-5) = -1

3. Jawaban. D
   Pembahasan:
   Karena matriks A = B maka berlaku bahwa 2 + p = 2q, maka q = 3
   Lakukan substitusi q = 3 maka diperoleh 2 + p = 6 sehingga diperoleh p = 4

4. Jawaban. D
   Pembahasan:
   $\begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} b & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$,
   $\begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b & 2a \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$,

Maka diperoleh bahwa:
a + 2b = 4 persamaan (1)
2a + b = 5 persamaan (2)
Dengan menggunakan eliminasi bahwa b = 1 dan a = 2.
Sehingga nilai nilai $a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$

5. Jawaban. D
Pembahasan:
$A = 2B^T$
$\begin{bmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2c-3b & 2a+1 \\ a & b+7 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2c-3b & a \\ 2a+1 & b+7 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4c-6b & 2a \\ 4a+2 & 2b+14 \end{bmatrix}$

Maka diperoleh dari baris 1 kolom 2 bahwa 4 = 2a atau a = 2
Dari baris 2 kolom 1 maka diperoleh bahwa 2b = 4a + 2 atau b = 5
Sedangkan dari baris 2 kolom 2 diperoleh 3c = 2(5) + 14 atau c = 8.

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan=$\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum} x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

F. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom “Ya” jika kalian mampu dan “Tidak” jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	**Tidak**
1	Apakah kalian sudah menuliskan permasalahan nyata dalam bentuk matriks?		
2	Apakah kalian telah mampu memahami konsep tentang matriks?		
3	Apakah kalian sudah mampu menentukan Transpose Matriks?		
4	Apakah kalian sudah mampu menentukan Kesamaan dua matriks?		

No	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
5	Apakah kalian sudah mampu mampu menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan Matriks?		
6	Apakah dalam mengerjakan soal-soal kalian bekerja secara mandiri dan jujur tanpa melihat dulu kunci jawaban dan pembahasan atau bertanya kepada orang lain?		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
OPERASI PADA MATRIKS

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini kalian diharapkan mampu:
1. Menentukan operasi penjumlahan dan pengurangan dua matrik atau lebih, dan perkalian suatu bilangan real dengan matriks;
2. Menyelesaikan perkalian dua matriks
3. Menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan matriks.

B. Uraian Materi

1. Operasi pada Matriks

a. Penjumlahan Matriks

Toko kue berkonsep waralaba ingin mengembangkan usaha didua kota yang berbeda. Manajer produksi ingin mendapatkan data biaya yang akan diperlukan. Biaya untuk masing-masing kue seperti pada tabel berikut.

Tabel Biaya Toko di Kota A (dalam Rupiah)

	Brownies	**Bika Ambon**
Bahan kue	1.000.000	1.200.000
Juru masak/*Chef*	2.000.000	3.000.000

Tabel Biaya Toko di Kota B (dalam Rp)

	Brownies	**Bika Ambon**
Bahan kue	1.500.000	1.700.000
Juru masak/*Chef*	3.000.000	3.500.000

Berapa total biaya yang diperlukan oleh kedua toko kue?
Alternative penyelesaian
Jika kita misalkan matriks biaya di Kota A, sebagai matriks A dan matriks biaya di Kota B sebagai matriks B, maka matriks biaya kedua toko disajikan sebagaiberikut.

$$A = \begin{bmatrix} 1.000.000 & 1.200.000 \\ 2.000.000 & 3.000.000 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1.500.000 & 1.700.000 \\ 3.000.000 & 3.500.000 \end{bmatrix}$$

Total biaya yang dikeluarkan oleh kedua Toko tersebut dapat diperoleh sebagai berikut:

a. Total biaya bahan untuk brownies = 1.000.000 + 1.500.000 = 2.700.000
b. Total biaya bahan untuk bika Ambon = 1.200.000 + 1.700.000 = 2.900.000
c. Total biaya chef untuk brownies = 2.000.000 + 3.000.000 = 5.000.000
d. Total biaya chef untuk bika Ambon = 3.000.000 + 3.500.000 = 6.500.000

Keempat total biaya tersebut dinyatakan dalam matriks adalah sebagai berikut :
Total Biaya Untuk Kedua Toko (dalam Rupiah)

	Brownies	**Bika Ambon**
Bahan	2.500.000	2.900.000
Chef	5.000.000	6.500.000

Total biaya pada tabel di atas dapat ditentukan dengan menjumlahkan matriks Adan B

$$A + B = \begin{bmatrix} 1.000.000 & 1.200.000 \\ 2.000.000 & 3.000.000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.500.000 & 1.700.000 \\ 3.000.000 & 3.500.000 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1.000.000 + 1.500.00 & 1.200.000 + 1.700.000 \\ 2.000.000 + 3.000.000 & 3.000.000 + 3.500.000 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2.500.000 & 2.900.000 \\ 5.000.000 & 6.500.000 \end{bmatrix}$$

Penjumlahan kedua matriks biaya di atas dapat dioperasikan diakibatkan kedua matriks biaya memiliki ordo yang sama, yaitu 2 × 2. Seandainya ordo kedua matriks biaya tersebut berbeda, kita tidak dapat melakukan operasi penjumlahan terhadap kedua matriks.

Apabila dua buah matriks memiliki **ordo yang sama**, penjumlahan dua matriks itu adalah **penjumlahan elemen-elemen yang seletak** pada kedua matriks itu.

Contoh :

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

maka A + B = $\begin{bmatrix} 2+3 & 3+(-1) \\ 6+4 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$

b. Pengurangan Matriks

Pengurangan dua matriks secara prinsip sama dengan penjumlahan antara dua matriks, apabila dua buah matriks memiliki **ordo yang sama**, pengurangan dua matriks itu adalah **pengurangan elemen-elemen yang seletak** pada kedua matriks itu. Atau penjumlahan dua matriks dengan lawannya.

Contoh :

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

maka A – B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 & 3-(-1) \\ 6-4 & 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

atau A - B = A + (-B) = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 & 3-(-1) \\ 6-4 & 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

c. Perkalian Skalar Matriks

Perkalian bilangan real (skalar) k dengan matriks A ditulis kA adalah sebuah matriks baru yang didapat dengan mengalikan setiap elemen matriks A dengan k

Jika $A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$$maka\ kA_{mxn} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \dots & ka_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{m3} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika matriks A dan B berordo sama, dan k, m ∈ R (bilangan Real), maka berlaku sifat-sifat:

1. kA= Ak
2. (k + m)A = kA + mA
3. k(A + B) = kA + kB
4. k(mA) = (km)A

Contoh :

1. Jika $P = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ tentukanlah:
   a. 2P
   b. – 4P

Jawaban:

a. 2P = $2\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(5) & 2(-1) \\ 2(4) & 2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

b. – 4P = $-4\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4(5) & -4(-1) \\ -4(4) & -4(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 4 \\ -16 & -8 \end{bmatrix}$

2. Diketahui A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ tentukanlah:
   a. 3A
   b. 4A + B

Jawaban:

a. 3A = $3\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(4) & 3(0) \\ 3(1) & 3(-5) \\ 3(-2) & 3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 3 & -15 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$

b. 4A + B = $4\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(4) & 4(0) \\ 4(1) & 4(-5) \\ 4(-2) & 4(3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 4 & -20 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -6 \\ 7 & -12 \\ -6 & 19 \end{bmatrix}$

d. Perkalian Dua Matriks

Perhatikan ilustrasi masalah sebagai berikut:
Suatu perusahaan yang bergerak pada bidang jasa akan membuka tiga cabang besar dipulau Sumatera, yaitu cabang pertama di kota Palembang, cabang kedua di kota Padang, dan cabang ketiga di kota Pekanbaru.

Untuk itu, diperlukan beberapa peralatan untuk membantu kelancaran usaha jasa tersebut, yaitu *handphone*, komputer, dan sepeda motor. Di sisi lain, pihak perusahaan mempertimbangkan harga per satuan peralatan tersebut.

Rincian data tersebut disajikan dapat disajikan sebagai berikut:

	***Handphone* (unit)**	**Komputer (unit)**	**Sepeda Motor (unit)**
Cabang 1	7	8	3
Cabang 2	5	6	2
Cabang 3	4	5	2

Perusahaan ingin mengetahui total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang.
Jawaban:
Kita akan menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan konsep matriks.

Harga *Handphone* (juta)	2
Harga Komputer (juta)	5
Harga Sepeda Motor (juta)	15

Kita misalkan matriks $A_{3x2} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ yang merepresentasikan jumlah unit setiap perusahaan yang dibutuhkan di setiap cabang, dan matriks $B_{3x1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$ yang merepresentasikan harga per unit setiap peralatan.

Untuk menentukan total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang, kita peroleh sebagai berikut.

a. Cabang pertama
   Total biaya = (7 unit *handphone* × 2 juta) + (8 unit komputer × 5 juta) + (3 unit sepeda motor 15 juta).
   = Rp 99.000.000,00

b. Cabang kedua
   Total biaya = (5 unit handphone × 2 juta) + (6 unit komputer × 5 juta) + (2 unit sepeda motor × 15 juta)
   = Rp70.000.000,00

c. Cabang ketiga
   Total biaya = (4 unit handphone × 2 juta) + (5 unit komputer × 5 juta) + (2 unit sepeda motor × 15 juta)
   = Rp63.000.000,00

Jadi total biaya pengadaan peralatan di setiap unit dinyatakan dalam matriks berikut.

$$C_{3x2} = \begin{bmatrix} Rp\ 99.000.000,00 \\ Rp\ 70.000.000,00 \\ Rp\ 63.000.000 \end{bmatrix}$$

Jadi, dapat disimpulkan perasi perkalian terhadap dua matriks dapat dilakukan jika banyak baris pada matriks A sama dengan banyak kolom pada matriks B. Banyak perkalian akan berhenti jika setiap elemen baris ke-n pada matriks A sudah dikalikan dengan setiap elemen kolom ke-n pada matriks B.

Sehingga jika kita misalkan Matriks A_{mxn} dan Matriks B_{nxp} , matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika **banyaknya kolom pada matrik A sama dengan banyaknya baris** pada matriks B.

Hasil perkalian dua matriks A x B adalah sebuah matrik baru yang elemen-elemennya diperoleh dari penjumlahan hasil perkalian antara elemen baris pada matriks A dengan elemen kolom pada matriks B.

Jika A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$

Maka secara umum berlaku

A_{2x2} x B_{2x1} = C_{2x1} → matriks hasil kali

banyaknya kolom Harus sama denganbanyaknya baris

Ordo hasil kali (2 x 1)

Sehingga

A x B = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ae + bf \\ ce + df \end{bmatrix}$

Contoh 1:

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ tentukalah AB!

Penyelesaian:

A x B = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 4(2) + 5(1) & 4(3) + 5(0) & 4(4) + 5(2) \\ 2(2) + 1(1) & 2(3) + 1(0) & 2(4) + 1(2) \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 8 + 5 & 12 + 0 & 16 + 10 \\ 4 + 1 & 6 + 0 & 8 + 2 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 13 & 12 & 26 \\ 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

C. Rangkuman

1. **Penjumlahan matriks**
   Jika A + B = C, maka elemen-elemen C diperoleh dari penjumlahan elemen-elemen A dan B yang seletak, yaitu cij = aij + bij untuk elemen C pada baris ke-i dan kolom ke-j.
   Penjumlahan sebarang matriks dengan matriks identitas penjumlahan hasilnya matriks itu sendiri. Matriks identitas penjumlahan adalah matriks nol.

2. **Pengurangan matriks.**
   Jika A–B = C, maka elemen-elemen C diperoleh dari pengurangan elemen-elemen A dan B yang seletak, yaitu cij = aij –bij atau pengurangan dua matriks dapat dipandang sebagai penjumlahan matriks lawannya, yaitu A + (-B)

3. **Perkalian suatu Bilangan real dengan Matriks.**
   Hasil kali sebuah matriks dengan suatu skalar atau suatu bilangan real k akan menghasilkan sebuah matriks baru yang berordo sama dan memiliki elemen-elemen k kali elemen-elemen matriks semula.
   Misalkan A adalah suatu Matriks berordo m x n dengan elemen-elemen a_{ij} dan k adalah suatu bilangan Real. Matriks C adalah hasil perkalian bilangan real K terhadap matriks A, dan di notasikan: C = k., bila matriks C berordo m x n dengan elemen-elemennya di tentukan oleh : $C_{ij} = k.a_{ij}$ untuk semua i dan j

4. **Perkalian dua Matriks**
   Secara sistematis, kita dapat menyatakan perkalian dua matriks sebagai berikut:
   Misalkan matriks A_{nxm} dan matriks B_{nxp}, matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika banyak matriks A sama dengan matriks B berordo p x n adalah suatu matriks berordo m x p. Prosesnya sbb :

$$A_{ixj} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots & a_{ij} \end{bmatrix} \text{dan} B_{nxp} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

   Hasil kali dua buah matriks menghasilkan sebuah matriks baru, yang elemen-elemen nya merupakan hasil kali elemen baris matriks A dan elemen kolom matriks$B$. Misal jika $A_{p\times q}$ dan $B_{q\times r}$ adalah dua matriks, maka berlaku $A_{p\times q} \times B_{q\times r} = C_{p\times r}$.
   Dua buah matriks hanya dapat dikalikan apabila banyaknya kolom matriks yang dikali sama dengan banyaknya baris matriks pengalinya.
   Hasil perkalian matriks Adengan matriks identitas perkalian, hasilnya adalah matriks$A$.

D. Penugasan Mandiri

Buatlah 4 buah matriks yang mempunyai ordo 2 x 2 (2 matriks), 2 x 3 dan 3 x 1, kemudian kerjakanlah hasil dari :
1. Dua penjumlahan matriks
2. Dua pengurangan matriks
3. Perkalian matriks yang berordo 2 x 3 dengan skalarnya (k) = 2 dan matriks yang berordo 3 x 1 dengan skalarnya (k) = -2
4. Perkalian dua matriks mana saja yang dapat dilakukan, sesuai dengan syarat perkalian dua buah matriks?

E. Latihan Soal

I. Latihan Soal Essay

Jawablah soal-soal di bawah ini dengan benar!

1. Diberikan matriks sebagai berikut :
   $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$
   Tentukan :
   a. A + B
   b. A - B
   c. 5A
   d. A x B
   e. 3A+B
   f. Ax2B

2. Hasil penjumlahan matriks
   Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} p+2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} p & 6 \\ 6 & q+3 \end{bmatrix}$
   Jika 3A = B maka tentukan nilai p dan q!

II. Latihan Soal Pilihan Ganda

Pilihlah salah satu jawaban yang paling benar

1. Jika $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$maka A + B = …
   A. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$
   E. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$
   F.
2. Jika $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$maka A - B = …
   A. $\begin{bmatrix} 5 & -12 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$
   E. $\begin{bmatrix} 15 & -2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

3. Jika $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$maka 5A = …
   A. $\begin{bmatrix} -15 & -20 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} -15 & -2 \\ 19 & 1 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} -15 & -12 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} -15 & 10 \\ 20 & -5 \end{bmatrix}$
   E. $\begin{bmatrix} -15 & -12 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}$

4. Jika $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$maka A x B = …
   A. $\begin{bmatrix} -14 & 16 \\ 27 & -18 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} 15 & -12 \\ 29 & 18 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} -14 & -16 \\ 27 & -18 \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 19 & 18 \end{bmatrix}$
   E. $\begin{bmatrix} 15 & -22 \\ 19 & 18 \end{bmatrix}$
5. Jika $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$maka 3A + B = …
   A. $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 19 & -1 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$
   E. $\begin{bmatrix} 15 & -2 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$

6. Jika $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$maka A x 2B = …
   A. $\begin{bmatrix} 54 & -12 \\ 49 & 16 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} 54 & -21 \\ 19 & 11 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} -28 & 16 \\ 54 & -36 \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} 54 & 16 \\ 19 & 36 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 54 & 16 \\ -19 & 36 \end{bmatrix}$

7. Jika $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & a \\ 2a+b & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$ maka nilai a = …
   A. -11
   B. -12
   C. -13
   D. -5
   E. -4

8. Jika $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & \mathrm{a} \\ 2\mathrm{a}+\mathrm{b} & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 20 \end{bmatrix}$, maka b = ….
   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4
   E. 5

9. Jika untuk matriks P = $\begin{bmatrix} 2 & \mathrm{a} \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ dan Q = $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ berlaku PQ = QP, maka a = …
   A. 12
   B. 9
   C. 4
   D. – 3
   E. – 12

10. Diketahui A = $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & b+1 \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} -2 & b \\ -a & b^2 \end{bmatrix}$ Jika A B^T – C = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

    Dengan B^T adalah transpose dari matriks B, maka nilai a dan b masing-masing adalah…
   A. – 1 dan 2
   B. 1 dan – 2
   C. – 1 dan – 2
   D. 2 dan – 1
   E. – 2 dan 1

Kunci Jawaban , Pembahasan dan Pedoman Penskoran

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
1a.	$A + B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -3+8 & 2+(-4) \\ 4+5 & -1+2 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$	**2**
1b.	A – B = $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -3-8 & 2-(-4) \\ 4-5 & -1-2 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$	**2**
1c.	5A = $5\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 5(-3) & 5(2) \\ 5(4) & 5(-1) \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -15 & 10 \\ 20 & -5 \end{bmatrix}$	**2**
1d.	A x B = $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -3(8)+2(5) & -3(-4)+2(2) \\ 4(8)+(-1)(5) & 4(-4)+(-1)(2) \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -24+10 & 12+4 \\ 32-5 & -16+(-2) \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -14 & 16 \\ 27 & -18 \end{bmatrix}$	**4**
1e.	3A + B = $3\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -9 & 6 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -9+8 & 6+(-4) \\ 12+5 & -3+2 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$	**3**
1f.	A x 2B = $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ x $2\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ x $\begin{bmatrix} 16 & -8 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -3(16)+2(10) & -3(-8)+2(-4) \\ 4(16)+(-1)(10) & 4(-8)+(-1)(-4) \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -48+20 & 24-8 \\ 64-10 & -32-4 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -28 & 16 \\ 54 & -36 \end{bmatrix}$	**3**
2.	A = $\begin{bmatrix} p+2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} p & 6 \\ 6 & q+3 \end{bmatrix}$ jika 3A = B	

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
	maka : $3\begin{bmatrix} p+2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 6 \\ 6 & q+3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3p+6 & 6 \\ 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 6 \\ 6 & q+3 \end{bmatrix}$ Sehingga 3p+6 = p 15 = q+3 3p-p = - 6 1 5 – 3 = q 2p = - 6 12 = q p = - 3	**4**
	Jumlah Skor Maksimum	**20**

Kunci Jawaban dan Pembahasan Soal Pilihan Ganda

1. B

$$A + B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+8 & 2+(-4) \\ 4+5 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

2. C

$$A - B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-8 & 2-(-4) \\ 4-5 & -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

3. D

$$5A = 5\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(-3) & 5(2) \\ 5(4) & 5(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 10 \\ 20 & -5 \end{bmatrix}$$

4. A

$$A \text{ x } B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(8)+2(5) & -3(-4)+2(2) \\ 4(8)+(-1)(5) & 4(-4)+(-1)(2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -24+10 & 12+4 \\ 32-5 & -16+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 16 \\ 27 & -18 \end{bmatrix}$$

5. D

$$3A + B = 3\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 6 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -9+8 & 6+(-4) \\ 12+5 & -3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 17 & -1 \end{bmatrix}$$

6. C

$$A \text{ x } 2B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \text{x } 2\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \text{x } \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -3(16)+2(10) & -3(-8)+2(-4) \\ 4(16)+(-1)(10) & 4(-8)+(-1)(-4) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -48+20 & 24-8 \\ 64-10 & -32-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 & 16 \\ 54 & -36 \end{bmatrix}$$

7. E.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & a \\ 2a+b & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-(-1) & 1-a \\ 3-(2a+b) & 1-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 1-a \\ 3-(2a+b) & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$$

Sehingga 1 – a = 5
-a = 5-1 → - a = 4 → a = - 4

8. D

Dari pembahasan no 7
3 – (2a+b) = 7 karena nilai a = 7

maka 3 – (2(-4)+b) = 7
3 – (-8 + b) = 7
3 + 8 – b = 7
11 – b = 7
– b = 7 – 11
- b = -4-→b = 4

9. E

PQ = QP→ $\begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 2(5)+a(0) & 2(6)+a(4) \\ 0(5)+4(0) & 0(6)+4(4) \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 5(2)+6(0) & 5(a)+6(4) \\ 0(2)+4(0) & 0(a)+4(4) \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 10+0 & 12+4a \\ 0+0 & 0+16 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 10+0 & 5a+24 \\ 0+0 & 0+16 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 10 & 12+4a \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 10 & 5a+24 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$ sehingga

12 + 4a = 5a + 24
4a – 5a = 24 -12-→ - a = 12→ a = - 12

10. A

A B^T – C = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & b+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & b \\ -a & b^2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & b+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & b \\ -a & b^2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a(4)+2(1) & a(2)+2(b+1) \\ 1(4)+b(1) & 1(2)+b(b+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & b \\ -a & b^2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4a+2 & 2a+2b+2 \\ 4+b & 2+ b^2+b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & b \\ -a & b^2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4a+2-(-2) & 2a+2b+2-(b) \\ 4+b-(-a) & 2+ b^2+b- (b^2) \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4a+4 & 2a+b+2 \\ 4+b+a & 2+b \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

sehingga:
4a + 4 = 0 b + 2 = 4
4a = - 4 b = 4 - 2
a = - 1 b = 2
Jadi Nilai a dan b masing-masing adalah – 1 dan 2

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan= $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum}\ x\ 100\%$

Kriteria

90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

F. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom "Ya" jika kalian mampu dan "Tidak" jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Apakah kalian sudah dapat menentukan operasi penjumlahan dua matriks?		
2	Apakah kalian sudah dapat menentukan operasi pengurangan dua matriks?		
3	Apakah kalian sudah dapat menentukan operasi perkalian sklar dengan matriks?		
4	Apakah kalian sudah dapat menentukan operasi perkalian dua matriks?		
5	Apakah kalian sudah mampu menyelesaikan operasi kombinasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dari persamaan matriks?		
6	Apakah kalian sudah mampu mampu menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan Matriks?		
7	Apakah dalam mengerjakan soal-soal kalian bekerja secara mandiri dan jujur tanpa melihat dulu kunci jawaban dan pembahasan atau bertanya kepada orang lain?		

EVALUASI

Pilihlah salah satu jawaban yang benar.

1. Dua buah matriks A dan B masing-masing berturut-turut sebagai berikut:
   $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
   Maka A + B = …
   A. $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} 17 & 9 \\ 11 & 23 \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}$
   E. $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}$

2. Nilai x yang memenuhi persamaan $\begin{bmatrix} 4 & x-2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ adalah ….
   A. 0
   B. 10
   C. 13
   D. 14
   E. 25

3. Diberikan $A = \begin{bmatrix} -1 & 2a+b \\ a & 7 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ dan $(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 7 & 20 \end{bmatrix}$, maka a + b = ….
   A. 5
   B. 4
   C. 3
   D. 2
   E. 1

4. Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka nilai $(A+B)(A-B)-(A-B)(A+B) = \ldots$
   A. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
   B. $8\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   D. $16\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   E. $4\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Jika Diketahui sebuah Matrik memiliki persamaan sebagai berikut :
$\begin{bmatrix} a & 4 \\ -1 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & b \\ d & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Maka tentukan nilai dari a + b + c + d = ….
A. – 7
B. – 5
C. – 1
D. 3
E. 7

6. Jika diketahui persamaan matriks
$\begin{bmatrix} 2x+3 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & y+4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ maka nilai x + y = …
A. 4
B. 5
C. 7
D. 9
E. 13

7. Jika diketahui persamaan matrik a, b, dan c sebagai berkiut :
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & -1 \\ y & 1 \end{bmatrix}\ dan\ C \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}$$
Bila A^t ialah Transpose dari matriks A dan A^t x B = C, maka tentukan nilai dari 2x + y = ….

A. -4
B. -1
C. 1
D. 5
E. 7

8. Diketahui matrik A, B, dan C sebagai berikut:
A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} x+2 & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
Jika B – A = Ct dan Ct merupakan transpose dari matriks C, maka nilai xy = …
A. 10
B. 15
C. 20
D. 25
E. 30

9. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 4a & 8 & 4 \\ 6 & -1 & -3b \\ 5 & 3c & 9 \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 6 & -1 & -3a \\ 5 & b & 9 \end{bmatrix}$

Jika A = B, maka nilai a + b + c =....

A. – 7
B. – 5
C. – 1
D. 5
E. 7

10. Diketahui persamaan matriks sebagai berikut : jika :
$\begin{bmatrix} 2y & 2x \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4 & -10 \\ -8 & z \end{bmatrix}$

Maka nilai x, y, dan z berturut-turut adalah :

A. 2, 1, 1
B. 3, 1, 1
C. 1, 1, 2
D. 1, 1, 3
E. 1, 2, 1

11. Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 2x & -2 \\ x & 3y+2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & 3x \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$. Jika memenuhi A + B = C^t dengan C^t adalah transpose dari matriks C, maka nilai 2x + 3y = ….

A. 3
B. 4
C. 5
D. 6
E. 7

12. Matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ mempunyai hubungan dengan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Jika matriks $C = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ mempunyai hubungan dengan matriks D serupa dengan matriks A dan B, maka matriks C + D = …..

A. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$
B. $\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$
C. $\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$
D. $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$
E. $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} x-y & 2 \\ 4 & x \end{bmatrix}$ dan $R = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Jika P + Q = R^t, dengan R^t adalah transpose dari matriks R, maka nilai x + y = …

A. -13
B. -11
C. -9
D. 9
E. 11

14. Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 2+p \\ q & 5 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 2q \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ dan A = B, maka nilai p = ….

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

15. Matriks $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, maka matriks A – B = …..

A. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
B. $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$
C. $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$
D. $\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$
E. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. B
2. D
3. C
4. A
5. D
6. A
7. C
8. C
9. E
10. A
11. C
12. D
13. B
14. D
15. B

DAFTAR PUSTAKA

https://www.wardayacollege.com/matematika/matriks/operasi-pada-matriks/operasi-matriks/, 2020

https://tanya-tanya.com/rangkuman-contoh-soal-pembahasan-matriks/, 2020

Kemendikbud RI.______. *Buku Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Kurikulum 2103*

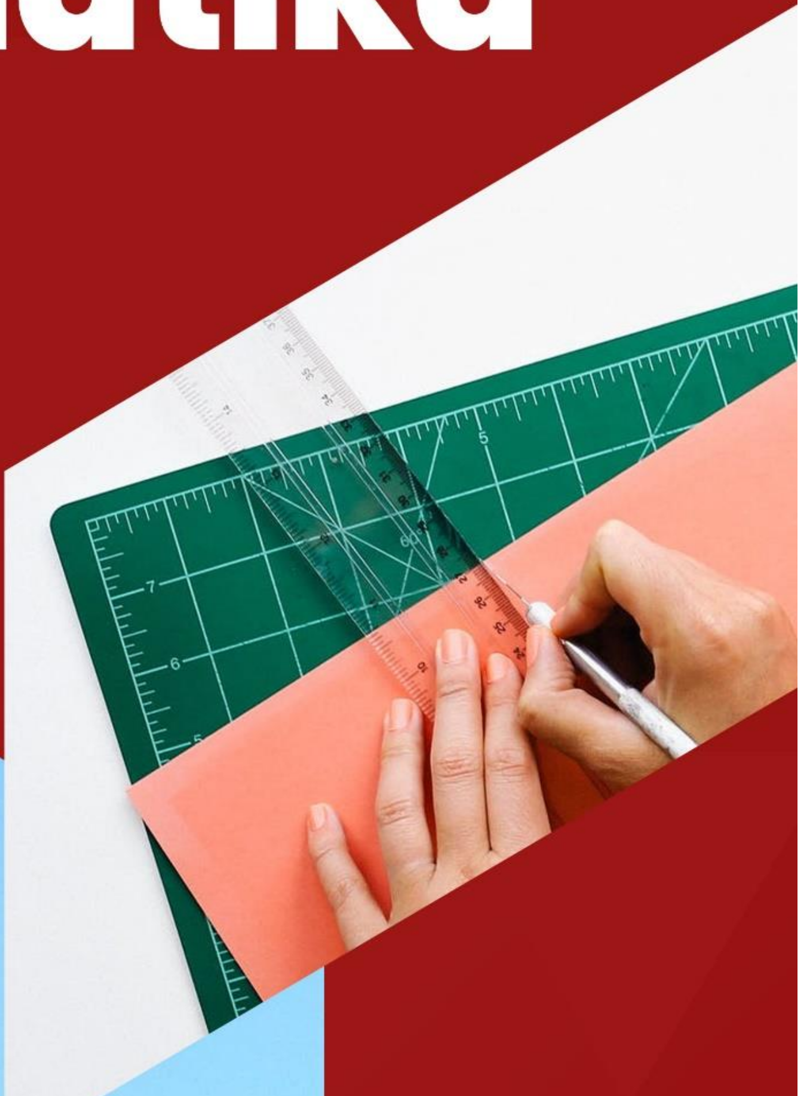
Kemendikbud RI.______. *Buku Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Kurikulum 2103 Edisi Revisi 2015*

Kemendikbud RI.______.*Buku Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Kurikulum 2103 Edisi Revisi 2017*

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI, PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS XI

DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS

PENYUSUN

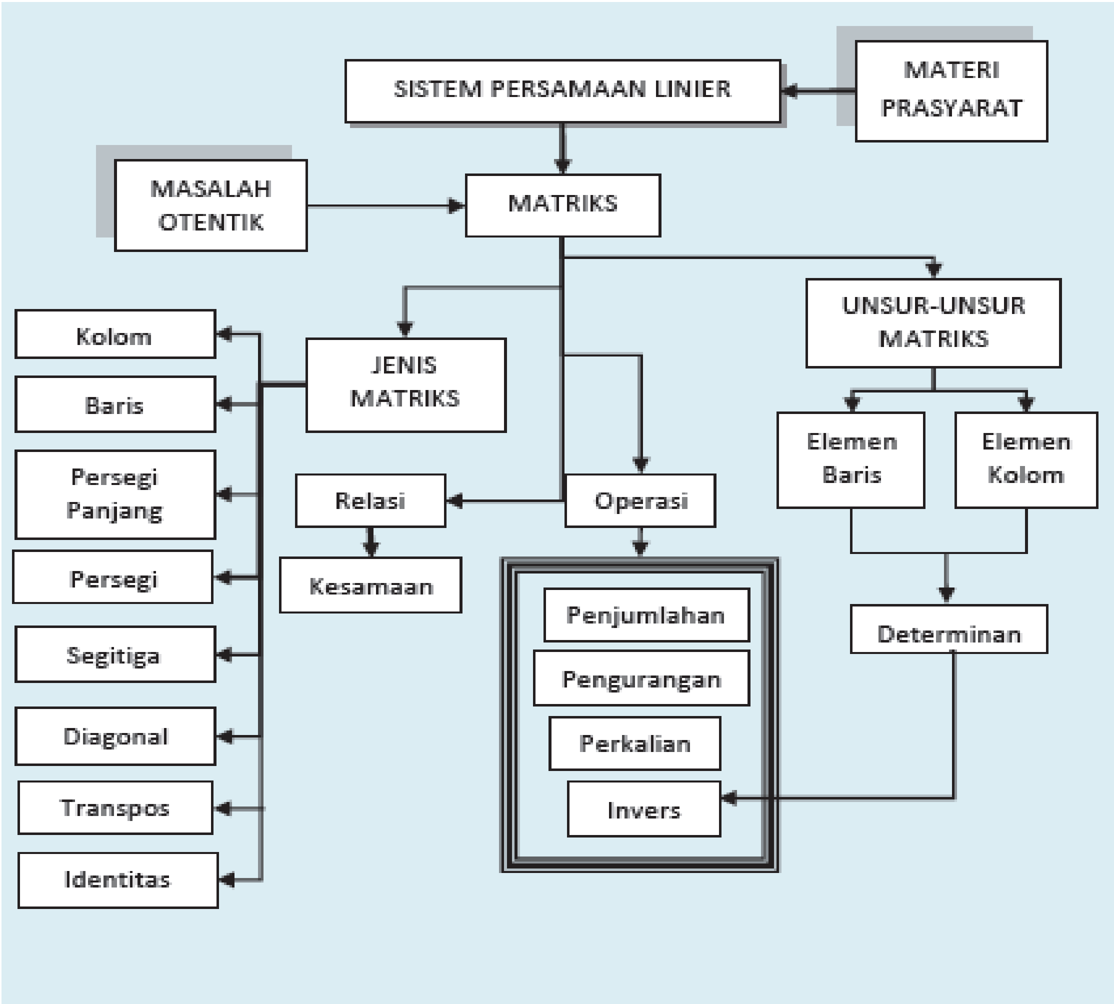
Yusdi Irfan, S.Pd, M.Pd
SMAN 1 Kramatwatu
Kabupaten Serang - Banten

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Determinan Matriks	:	Nilai yang dapat dihitung dari elemen suatu matriks
Invers Matriks	:	Matriks baru yang merupakan sebuah kebalikan dari matriks asal
Metode Sarrus	:	Sebuah cara (metode) yang digunakan untuk menentukan determinan sebuah matriks dengan cara mengalikan, menjumlahkan dan mengurangkan elemen-elemen matriks tertentu
Metode Kofaktor	:	Sebuah cara (metode) yang digunakan untuk menentukan determinan sebuah matriks dengan cara mengekspansi elemen-elemen baris dan kolomnya
Matriks Singular	:	Matriks yang nilai determinannya sama dengan nol dan tidak mempunyai invers
Matriks Non Singular	:	Matriks yang nilai determinannya tidak sama dengan nol dan mempunyai invers
Minor Matriks	:	Determinan matriks bagian dari matriks yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen pada baris tertentu dan kolom tertentu
Adjoint Matriks	:	Transpose dari suatu matriks yang elemen-elemennya merupakan kofaktor dari elemen-elemen matriks

PETA KONSEP


SISTEM PERSAMAAN LINIER
MATERI PRASYARAT
MASALAH OTENTIK
MATRIKS
UNSUR-UNSUR MATRIKS
JENIS MATRIKS
Kolom
Baris
Persegi Panjang
Persegi
Segitiga
Diagonal
Transpos
Identitas
Relasi
Kesamaan
Operasi
Penjumlahan
Pengurangan
Perkalian
Invers
Elemen Baris
Elemen Kolom
Determinan

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran : Matematika Umum
Kelas : XI
Alokasi Waktu : 12 JP
Judul Modul : Determinan dan Invers Matriks

B. Kompetensi Dasar

3.4 Menganalisis sifat-sifat determinan dan invers matriks berordo 2x2 dan 3x3
4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan dan invers matriks berordo 2x2 dan 3x3

C. Deskripsi Singkat Materi

Banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang menuntut penyelesaiannya terkait dengan konsep dan aturan-aturan dalam matematika. Secara khusus banyak keterkaitan konsep dan prinsip-prinsip matriks dengan permasalahan masalah nyata yang menyatu/bersumber dari fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep matriks dapat dibangun/ditemukan di dalam penyelesaian nya permasalahan yang kita hadapi.
Untuk itu siswa diharapkan mampu menyelesaiakan permasalahan-permasalahan yang dihadapi dalam kehidupan sehari-hari yang diberikan.
Permasalahan-permasalahan tersebut dibuat dalam bentuk matriks untuk dicari penyelesaiannya dengan menggunakan determinan dan Invers Matriks.

D. PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL

Sebelum peserta didik membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, marilah berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupansehari-hari.
2. Bacalah uraian materi dan contoh dengan cermat secara berulang-ulang sehingga benar-benar memahami dan menguasai materi, sebaiknya peserta didik mulai membaca dari peta konsep, pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secaraberurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, peserta didik mengerjakan latihan soal secara mandiri dengan jujur tanpa melihat uraianmateri, jika dalam kasus tertentu mengalami kesulitan dalam menjawab maka lihatlah rambu-rambu jawabannya, jika langkah tersebut masih belum berhasil maka mintalah bantuan guru atau orang lain yang lebih tahu dan memahami.
4. Peserta didik dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika peserta didik memperoleh nilai < 75 maka peserta didik harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **3** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Modul siswa tentang matriks ini terdiri atas 3 kompetensi dasar yang meliputi Kompetensi dasar 3.4 dan kompetensi dasar 4.4 dengan pembagian kegiatan pembelajaran sebagai berikut:

1. **Kegiatan Pembelajaran 1** mempelajari tentang metode (cara) menentukan determinan matriks ordo 2x2, dan menggunakannya dalam permasalahan kehidupan sehari-hari.
2. **Kegiatan Pembelajaran 2** mempelajari tentang metode (cara) menentukan determinan matriks ordo 3x3, dan menggunakannya dalam permasalahan kehidupan sehari-hari
3. **Kegiatan Pembelajaran 3** mempelajari tentang cara menetukan invers matriks ordo 2 x 2 dan 3x3, serta pemakaian matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier (SPL).

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
DETERMINAN MATRIKS ORDO 2 X 2

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan siswa mampu:
1. Menentukan determinan matriks ordo 2x2, sifat-sifat determinan matriks ordo 2x2,
2. Menggunakan determinan matriks dalam pemecahan masalah kehidupan sehari-hari dengan cermat.

B. Uraian Materi

1. Determinan Matriks berordo 2 x 2

Cermati permasalahan berikut ini:
Siti dan teman-temannya makan di kantin sekolah. Mereka memesan 3 ayam penyet dan 2 gelas es jeruk. Tak lama kemudian, Beni dan teman-temannya datang memesan 5 porsi ayam penyet dan 3 gelas es jeruk. Siti menantang Amir menentukan harga satu porsi ayam penyet dan harga es jeruk pergelas, jika Siti harus membayar Rp70.000,00 untuk semua pesanannya dan Beni harus membayar Rp115.000,00 untuk semua pesanannya

Alternatif Penyelesaian:
Cara I
Petunjuk: Ingat kembali materi sistem persamaan linear yang sudah kamu pelajari. Buatlah sistem persamaan linear dari masalah tersebut, lalu selesaikan dengan matriks.
Misalkan x = harga ayam penyet per porsi
y = harga es jeruk per gelas

Sistem persamaan linearnya: $3x + 2y = 70.000$
$5x + 3y = 115.000$
Dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut.
$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix}$

Ingat kembali bentuk umum Sistem Persamaan Linear Dua Variabel
$$ax + by = p$$
$$cx + dy = q$$

Apabila disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ solusi persamaan tersebut adalah :

$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}$ dan $y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$, $ad \neq bc$

Cara II
Dalam konsep matriks ad – bc disebut dengan determinan matriks berordo 2 x 2.
Apabila matriks A berordo 2 x 2, yaitu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A didefinisikan sebagai:

$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc

Determinan dari suatu matriks persegi A dinotasikan dengan **det A atau |A|,** oleh karena itu nilai x dan y pada persamaan di atas dapat ditulis menjadi :

$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ dan y = $\frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ dengan syarat $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Sehingga apabila kita kembalikan ke permasalahan awal, maka nilai x = harga ayam penyet per porsi dan nilai y = harga es jeruk per gelas dapat ditentukan dengan mempergunakan rumus di atas, yaitu :

$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 70.000 & 2 \\ 115.000 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{70.000(3)-115.000(2)}{3(3)-2(5)} = \frac{210.000-230.000}{9-10} = \frac{-20.000}{-1}$ = 20.000 dan

y = $\frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 70.000 \\ 5 & 115.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(3)115.000-(5)70.000}{3(3)-2(5)} = \frac{345.000-350.000}{9-10} = \frac{-5.000}{-1}$ = 5.000

jadi harga ayam penyet satu porsinya (x) adalah Rp. 20.000,00 dan harga es jeruk per gelasnya (y) adalah Rp. 5.000,00.

2. Sifat-sifat determinan matriks

Misalkan matriks A dan B berordo m x n dengan m,n ∈ N
1. Jika det A = $|A|$ dan det B = $|B|$, maka det A. det B = det AB atau $|A||B|$= $|AB|$
2. Jika det A = $|A|$ dan det A^t= $|A^t|$, maka det A = det A^t atau $|A|$= $|A^t|$
3. Jika det A = $|A|$ dan det A^{-1}= $|A^{-1}|$, maka $|A^{-1}|$ = $\frac{-1}{|A|}$

Contoh soal
1. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ tentukanlah det A !
2. Diketahuai matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ dab matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ tentukanlah :
   a. det A
   b. det B
   c. det A det B
   d. det A^t

Jawaban:
1. Det A = $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ = 2(3) – (-7)(4) = 6 – (-28) = **34**
2. Diketahuai matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ dan matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
   maka :
   a. det A = $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ = 4(6) – 2(5) = 24 – 10 = **14**
   b. det B = $|B|$ = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = 1(4) – 3(2) = 4 – 6 = - 2
   c. det A. det B = $|A||B|$ = 14 (-2) = **- 28**
      atau kita tentukan dulu hasil perkalian AxB
      AxB = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 4(1)+5(3) & 4(2)+5(4) \\ 2(1)+6(3) & 2(2)+6(4) \end{bmatrix}$= $\begin{bmatrix} 4+15 & 8+20 \\ 2+18 & 4+24 \end{bmatrix}$
      = $\begin{bmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{bmatrix}$

Jadi det AB=$|AB| = \begin{vmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{vmatrix}$= 19(28) – 20(28) = 532 – 560 = **- 28 (sifat ke 1)**

d. A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ maka A^t= $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

Sehingga det A^t= $|A^t|$= $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$=4(6) – 5(2)= 24 – 10 = **14 (sifat ke 2)**

C. Rangkuman

1. Apabila matriks A berordo 2 x 2, yaitu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A berordo 2 x 2 didefinisikan sebagai: $|A|$ = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc
2. Sifat-sifat determinan matriks
   Misalkan matriks A dan B berordo m x n dengan m,n ∈ N
   a. Jika det A = $|A|$ dan det B = $|B|$, maka det A. det B = det AB atau $|A||B|$= $|AB|$
   b. Jika det A = $|A|$ dan det A^t= $|A^t|$, maka det A = det A^t atau $|A|$= $|A^t|$
   c. Jika det A = $|A|$ dan det A^{-1}= $|A^{-1}|$, maka $|A^{-1}|$ = $\frac{-1}{|A|}$

D. Latihan Soal

I. Latihan Soal Essay

Jawablah soal di bawah ini

1. Diketahui A = $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$
   a. Tentukan determinan matriks A
   b. Tentukan invers matriks A

2. Ahmad, Budi dan Catur bersama-sama pergi ke toko buku. Ahmad membeli 2 buku dan 1 pensil dengan membayar Rp 8.000,00. Budi membeli 1 buku dan 3 pensil dengan membayar Rp 9000,00. Berapa yang harus dibayar oleh Catur bila ia membeli sebuah buku dan sebuah pensil ? (*Petunjuk*: selesaikan dengan menggunakan determinan)

Kunci Jawaban, Pembahasan dan Pedoman Penskoran

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
1.	Diketahui A = $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ a. $\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$ = ad – bc = 3(-5) – (-3)(4) = - 15 + 12 = - 3 b. $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det\ A}}$ **Adj A** $= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} \frac{-5}{-3} & \frac{3}{-3} \\ \frac{-4}{-3} & \frac{3}{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}$	2 2 1 2 3
2.	Mengidentifikasi masalah : <table><tr><td></td><td>Buku</td><td>Pensil</td><td>Harga</td></tr><tr><td>Ahmad</td><td>3</td><td>2</td><td>15000</td></tr><tr><td>Budi</td><td>1</td><td>2</td><td>7000</td></tr><tr><td>Catur</td><td>1</td><td>1</td><td>?</td></tr></table>Membuat model matematika sebagai berikut: Misal buku = x dan pensil = y Diperoleh sistem persamaan linear : $\begin{cases} 3x + 2y = 15000 \\ x + 2y = 7000 \end{cases}$ Ditanyakan nilai x + y Dibuat persamaan matriks $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15000 \\ 7000 \end{bmatrix}$ A.X = B Menggunakan determinan $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 2.1 = 4$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 15000 & 2 \\ 7000 & 2 \end{vmatrix} = 15000.2 - 2.7000 = 16000$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 15000 \\ 1 & 7000 \end{vmatrix} = 3.7000 - 15000.1 = 6000$ Diperoleh $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{16000}{4} = 4000$ $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{6000}{4} = 1500$ Jadi bila Catur membeli 1 buku dan 1 pensil, dia harus membayar Rp. 4.000,00 + Rp. 1.500,00 = Rp 5.500,00.	2 2 2 1 1 1 1
	Jumlah Skor maksimum	**20**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan=$\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum}\ x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan cukup atau kurang, maka harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom “Ya” jika mampu dan “Tidak” jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Apakah sudah bisa menuliskan permasalahan nyata dalam kehidupan sehari-hari kedalam bentuk matriks?		
2	Apakah telah mampumemahami konsep tentang determinan matriks berorodo 2x2?		
3	Apakah sudah mampu menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan Matriks Dengan menggunakan metode determinan?		
4	Apakah mengerjakan soal-soal bekerja secara mandiri dan jujur tanpa melihat dulu kunci jawaban dan pembahasan atau bertanya kepada orang lain?		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
DETERMINAN MATRIKS ORDO 3 X 3

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan siswa mampu:

1. menentukan determinan matriks ordo 3x3 dengan menggunakan Metode Sarrus dan metode kofaktor
2. Menyimpulkan sifat-sifat yang berlaku pada determinan matriks.

B. Uraian Materi

1. Determinan Matriks berordo 3 x 3

Cermati permasalahan berikut:
Sebuah perusahaan penerbangan menawarkan perjalanan wisata ke negara A, perusahaan tersebut mempunyai tiga jenispesawat yaitu Airbus 100, Airbus 200, dan Airbus 300. Setiap pesawat dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas turis, ekonomi, dan VIP. Jumlah kursi penumpang dari tiga jenis pesawat tersebut disajikan pada tabel berikut.

Kategori	Airbus 100	Airbus 200	Airbus 300
Kelas Turis	50	75	40
Kelas Ekonomi	30	45	25
Kelas VIP	32	50	30

Perusahaan telah mendaftar jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara A seperti pada tabel berikut

Kategori	Jumlah Penumpang
Kelas Turis	305
Kelas Ekonomi	185
Kelas VIP	206

Berapa banyak pesawat masing-masing yang harus dipersiapkan untuk perjalanan tersebut?

Penyelesaian:

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, kita misalkan:
x = banyaknya pesawat Airbus100
y = banyaknya pesawat Airbus 200
z = banyaknya pesawat Airbus 300

Sistem persamaan yang terbentuk adalah:
$50x + 75y + 40z = 305$
$30x + 45y + 25z = 185$
$32x + 50y + 30z = 206$

Apabila kita tuliskan dalam bentuk matriks, maka persamaan matriks nya adalah:

$$\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$$

Sebelum ditentukan penyelesaian masalah di atas, terlebih dahulu kita harus periksa apakah matriks A adalah matriks tak singular (Non singular).

- **Matriks Singular adalah Matriks yang determinannya sama dengan Nol dan tidak mempunyai matriks Inversnya**
- **Matriks Nonsingular adalah matriks yang determinannya tidak sama dengan Nol, dan mempunyai matriks Inversnya.**

Pada pembahasan sebelumnya kita sudah membahas tentang cara mencari determinan matriks yang berordo 2 x 2. Sekarang pembahasannya kita lanjutkan tentang bagaimanakah mencari determinan suatu matriks yang berordo 3 x 3?

2. Mencari determinan ordo 3x3 dengan Metode Sarrus

Sebenarnya ada beberapa cara untuk mencari determinan matriks, tetapi untuk pembahasan kita kali ini kita hanya akan membahas tentang menghitung determinan matriks yang berordo 3 x 3 dengan memakai metode **Sarrus**.

Baik sebelum kita lanjut ke materi pokoknya, kita berkenalan dulu dengan struktur matriks berordo 3 x 3. Apa sih yang dimaksud dengan matriks yang berordo 3 x 3?. Matriks 3 x 3 artinya matriks yang jumlah barisnya sebanyak tiga dan jumlah kolomnya juga sebanyak tiga. Secara lengkap matriks 3 x 3 bisa dilihat di bawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Atau jika ditulis sesuai dengan identitas baris dan kolomnya, maka penulisan matriks A diatas dapat ditulis dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dan untuk mencari determinannya maka matriks di atas kita keluarkan dua kolom pertama yaitu kolom pertama dan kolom kedua kita keluarkan menjadi

$$\begin{array}{cccccc} & & & - & - & - \\ |A| = & \left| \begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right| & & \begin{array}{cc} a & b \\ d & e \\ g & h \end{array} & & \\ & & & + & + & + \end{array}$$

$$\boxed{\textbf{Det A} = |A| = \textbf{(aef + bfg + cdh) − (ceg + afh + bdi)}}$$

Setelah dua kolom pertama tadi kita keluarkan, kemudian kita tarik garis diagonal yang menghubungkan tiap tiga elemen seperti gambar. Garis yang rebah dari kiri atas ke kanan bawah kita berikan tanda "+" plus, dan sebaliknya garis diagonal yang rebah dari kanan atas ke kiri bawah kita berikan tanda "-" minus.

Selanjutnya determinan dihitung dengan mengalikan tiap garis yang segaris - maksudnya berada dalam satu garis diagonal – dan memberikan tanda sesuai dengan tanda dibawah garis.

Kelihatannya abstrak sekali kalau kita melihat rumus – rumusnya saja. Baiklah kita langsung saja sekarang kita lihat dan selesaikan soal permasalahan di atas dengan persamaan matriksnya:

$$\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 50 & 75 & 40 & 50 & 75 \\ 30 & 45 & 25 & 30 & 45 \\ 32 & 50 & 30 & 32 & 50 \end{array}\right.$$

= ((50x45x30)+(75x25x32)+(40x30x50)) – ((40x45x32)+(50x25x50)+(75x30x30))
= (67.500+60.000+60.000) – (57.600+62.500+67.500)
= 187.500 - 187.600
= **- 100**

Untuk menentukan nilai x, y, dan z kita akan menggunakan determinan matriks sebagai cara menyelesaikan permasalahan tersebut

$$\Delta\mathrm{X} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 305 & 75 & 40 & 305 & 75 \\ 185 & 45 & 25 & 185 & 45 \\ 206 & 50 & 30 & 206 & 50 \end{array}\right.$$

=((305x45x30)+(75x25x206)+(40x185x50))–((40x45x206)+(305x25x50)+(75x185x30))
= (411.750+386.250+370.000) + (370.800+381.250+416.250)
= 1.168.000 - 1.168.300
= **- 300**

$$\Delta Y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 50 & 305 & 40 & 50 & 305 \\ 30 & 185 & 25 & 30 & 185 \\ 32 & 206 & 30 & 32 & 206 \end{array}\right.$$

=((50x185x30)+(305x25x32)+(40x30x206))-((40x185x32)+(50x25x206)+(305x30x30))
= (277.500+244.000+247.200) – (236.800+257.500+274.500)
= 768.700 - 768.800
= **- 100**

$$\Delta Z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 50 & 75 & 305 & 50 & 75 \\ 30 & 45 & 185 & 30 & 45 \\ 32 & 50 & 206 & 32 & 50 \end{array}\right.$$

=((50x45x206)+(75x185x32)+(305x30x50))-((305x45x32)+(50x185x50)+(75x30x206))
= (463.500+444.000+457.500) – (439.200+462.500+463.500)
= 1.365.000 - 1.365.200
= **- 200**

$$x = \frac{\Delta X}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 305 & 75 & 40 \\ 185 & 45 & 25 \\ 206 & 50 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-300}{-100} = 3 \qquad y = \frac{\Delta Y}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 305 & 40 \\ 30 & 185 & 25 \\ 32 & 206 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-100}{-100} = 1$$

$$x = \frac{\Delta X}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 305 \\ 30 & 45 & 185 \\ 32 & 50 & 206 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-200}{-100} = 2$$

Sehingga dari hasil perhitungan dengan menggunakan determinan, diperoleh kesimpulan, banyaknya pesawat Airbus 100 yang disediakan sebanyak 3 unit, banyaknya pesawat Airbus 200 yang disediakan sebanyak 1 unit, dan banyaknya pesawat Airbus 300 yang disediakan sebanyak 2 unit.

3. **Metode (Cara) Kofaktor**

Setelah kita membahas tentang mencari determinan menggunakan **Metode Sarrus**, berikutnya kita akan membahas tentang mencari determinan dengan menggunakan **Metode Kofaktor** suatu matriks yang berordo 3x3.

Baiklah kita langsung saja ke pokok bahasannya. Yang pertama kita bahas tentang kofaktor suatu matriks.
Kofaktor suatu matriks dirumuskan sebagai −1 pangkat baris ditambah kolom elemen minor dari matriks bersangkutan. Secara matematis dirumuskan sebagai :
K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij}

Keterangan :
K_{ij} maksudnya kofaktor dari suatu matriks baris ke – i dan kolom ke – j.
i menyatakan baris
j menyatakan kolom.
M_{ij} merupakan minor baris ke – i kolom ke – j dari suatu matriks.

Contoh :
Tentukanlah kofaktor dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Jawab :
Terlebih dulu kita cari minor dari matriks A tersebut. Disini minor dari matriks A di dapat :

$$M_A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Kemudian kita cari kofaktor tiap elemen dari minor tersebut :
Kofaktor Matriks A baris pertama kolom pertama, berarti i = 1 dan j = 1.
K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij}
K_{11} = (-1) M^{1+1}. M_{11}
K_{11} = $(-1)^2$. 5
K_{11} = (1) 5 = 5
Kofaktor matriks A baris pertama kolom kedua, berarti i = 1 dan j = 2.
K_{12} = (-1) M^{1+2}. M_{12}
K_{12} = $(-1)^3$. M_{12}
K_{12} = (-1) . 3 = 3

Kofaktor matriks A baris kedua kolom pertama, berarti i = 2 dan j = 1
K_{21} = $(-1)^{2+1}.\,M_{21}$
K_{21} = $(-1)^{3}$. 4 = (- 1) 4 = - 4

Kofaktor matriks A baris kedua kolom kedua, berarti i = 2 dan j = 2
K_{22} = $(-1)^{2+2}.\,M_{22}$
K_{22} = $(-1)^{4}2$ = 1. 2 = 2
Jadi, kofaktor dari matriks A adalah $K_A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

Sekarang bagaimana dengan Adjoinnya? Kita langsung mencari adjoin matriks A di atas. Tetapi terlebih dulu kita bahas secara singkat apa sih yang dimaksud dengan adjoin?

Adjoin merupakan transfose dari kofaktor matriks A. secara matematis dirumuskan sebagai :

$$Adj = K_A^T$$

Dimana :
K_A^T= Transpose kofaktor dari matriks A
Adj A = adjoin matriks A

Jika kita mau mencari adjoin sebuah matriks, maka terlebih dulu kita cari minornya dulu, setelah itu dari minor ini kita akan mendapatkan matriks kofaktor. Kemudian kofaktor ini kita transfuskan itulah adjoin sebuah matriks, dalam kalimat tadi ada kata transfose, apa yang dimaksud dengan matriks transfose?
Matriks transfose adalah matriks yang urutan baris diubah menjadi kolom dan kolom menjadi baris.
Dari soal di atas , maka kita bisa menentukan adjoinnya adalah sebagai berikut :

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Sekarang bagaimana kalau matriksnya berordo 3 x 3?
Kita perhatikan contoh di bawah ini !

Contoh :
Tentukanlah Kofaktor dan Adjoin dari matriks berikut :
A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :
Terlebih dahulu kita cari minor matriks A, disini didapat bahwa minor matriks A adalah :
M_{11}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3
$M_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 3(2) – 2(1) = 6 – 2 = 4

$M_{12} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

$M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ = 1(2) – 2(0) = 2 – 0 = 2

M_{13}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

$M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1(1) – 3(0) = 1 – 0 = 1

M_{21} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 4(2) – 6(1) = 8 – 6 = 2

M_{22} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

$M_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ = 2(2) – 6(0) = 4 – 0 = 4

M_{23} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

$M_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 2(1) – 4(0) = 2 – 0 = 2

M_{31} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

$M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 4(2) – 6(3) = 8 – 18 = - 10

M_{32} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

$M_{32} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 2(2) – 6(1) = 4 – 6 = -2

M_{33} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

$M_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ = 2(3) – 4(1) = 6 – 4 = 2

Jadi Minor Matriks A = $\begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

Sehingga kofaktor matriks A adalah:
Kofaktor Matriks A baris pertama kolom pertama, berarti i = 1 dan j = 1.
K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij}
K_{11} = (-1) M^{1+1}. M_{11}
K_{11} = $(-1)^2$. 4
K_{11} = (1) 4 = **4**
Kofaktor matriks A baris pertama kolom kedua, berarti i = 1 dan j = 2.

K_{12} = (-1) M^{1+2}. M_{12}
K_{12} = (-1)³ . M_{12}
K_{12} = (-1) . 0 = **0**
Kofaktor matriks A baris pertama kolom ketiga, berarti i = 1 dan j = 3.
K_{13} = (-1) M^{1+3}. M_{13}
K_{13} = (-1)⁴ . M_{13}
K_{13} = (1) . 1 = **1**
Kofaktor matriks A baris kedua kolom pertama, berarti i = 2 dan j = 1
$K_{21} = (-1)^{2+1}. M_{21}$
$K_{21} = (-1)^3. 4$ = (- 1) 2 = **- 2**
Kofaktor matriks A baris kedua kolom kedua, berarti i = 2 dan j = 2
$K_{22} = (-1)^{2+2}. M_{22}$
$K_{22} = (-1)^4 2 = 1. 4 =$ **4**
Kofaktor matriks A baris kedua kolom ketiga, berarti i = 2 dan j = 3
$K_{23} = (-1)^{2+3}. M_{23}$
$K_{23} = (-1)^5 2$ = -1. 2 = **- 2**
Kofaktor matriks A baris ketiga kolom pertama, berarti i = 3 dan j = 1
$K_{31} = (-1)^{3+1}. M_{31}$
$K_{31} = (-1)^4 2 = 1. 10 =$ **10**
Kofaktor matriks A baris ketiga kolom kedua, berarti i = 3 dan j = 2
$K_{32} = (-1)^{3+2}. M_{32}$
$K_{22} = (-1)^5$(-2) = -1(-2) = **2**
Kofaktor matriks A baris ketiga kolom ketiga, berarti i = 3 dan j = 3
$K_{33} = (-1)^{3+3}. M_{33}$
$K_{23} = (-1)^6(2) = 1(2) =$ **2**

Jadi Kofaktor Matriks A = $\begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{10} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

Adjoin matriks A dicari dengan mencari transpose dari kofaktor matriks A, sehingga :

$$Adj\ A = A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

C. Rangkuman

1. **Matriks Singular** adalah Matrisk yang determinannya sama dengan Nol dan tidak mempunyai matriks Inversnya.
2. **Matriks Nonsingular** adalah matriks yang determinannya tidak sama dengan Nol, dan mempunyai matriks Inversnya.
3. **Determinan matriks berordo 3 x 3 dengan metode (cara) Sarrus**

   Apabila matriks A berordo 3 x 3, yaitu A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$maka determinan dari matriks A berordo 3 x 3 didefinisikan sebagai:

$$\begin{matrix} & & & & - & - & - \\ |A| = & \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} & \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \\ & & & & + & + & + \end{matrix}$$

det A = $|A|$ = (aef + bfg + cdh) – (ceg + afh + bdi)

4. Metode (cara) Kofaktor

a. Dalam determinan, minor-kofaktor yang dihitung hanya terbatas pada baris atau kolom tertentu saja dan biasa disebut ekspansi baris dan ekspansi kolom.
b. Sedangkan dalam invers, kita harus menghitung sembilan elemen minor dan kofaktor sampai diperoleh matriks baru yaitu matriks minor dan matriks kofaktor
c. Minor adalah determinan submatriks persegi setelah salah satu baris dan kolomnya dihilangkan.
d. Minor dilambangkan dengan "M_{ij}" dimana "i" sebagai baris dan "j" sebagai kolom matriks yang dihilangkan.
e. Baris dan kolom dihilangkan bukan berarti dibuang, akan tetapi baris dan kolom tersebut hanya tidak diikutsertakan dalam submatriks yang baru.
f. Submatriks artinya bagian kecil dari matriks, sedangkan matriks persegi adalah matriks yang mempunyai jumlah baris sama dengan jumlah kolom atau sebut saja berordo nxn. Misalnya matriks persegi 3×3 maka submatriksnya berordo 2×2.
g. Jadi, menghitung minor matriks 3×3 adalah menghitung determinan submatriks 2×2
h. Kofaktor suatu matriks dirumuskan sebagai −1 pangkat baris ditambah kolom elemen minor dari matriks bersangkutan. Secara matematis dirumuskan sebagai:

$$K_{ij} = (\text{-}1)\ M^{i+j}.\ M_{ij}$$

Keterangan:
i. K_{ij} maksudnya kofaktor dari suatu matriks baris ke – i dan kolom ke – j.
ii. i menyatakan baris
iii. j menyatakan kolom.
iv. M_{ij} merupakan minor baris ke – i kolom ke – j dari suatu matriks.

D. Latihan Soal

Latihan Soal Essay

1. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$, tentukan:
   a. Determinan matriks A dengan Metode Sarrus
   b. Adjoint matriks A dengan Metode Kofaktor

Kunci Jawaban, Pembahasan, dan Psedoman Penskoran

Alternatif Penyelesaian

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
1a.	Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ **Determinannya dengan metode Sarrus** $\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{matrix}\Bigg\rvert$ **=((1)(-4)(-1)+(2)(2)(5)+(0)(3)(6))–((0)(-4)(5)+(1)(2)(6)+(2)(3)(-1))** = (4 + 20 + 0) – (0 + 12 + (-6)) = 24 – 6 = 18	**2** **4** **3**

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
1b.	**Metode Kofaktor** i) Minor $M_{11} = \begin{vmatrix} 9 & -10 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 9 \cdot 7 - (-10) \cdot (-2) = 63 - 20$ $= 43$ $M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & -10 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 6 \cdot 7 - (-10) \cdot (-3) = 42 - 30$ $= 12$ $M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot -2 - 9 \cdot (-3) = -12 + 27 = 15$ $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-2) \cdot (-2) = 7 - 4 = 3$ $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-2) \cdot (-3) = 7 - 6 = 1$ $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot -2 - 1 \cdot (-3) = -2 + 3 = 1$ $M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-10) - (-2) \cdot 9 = -10 + 18 = 8$ $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-10) - (-2) \cdot 6 = -10 + 12 = 2$ $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 1 \cdot 6 = 9 - 6 = 3$	**9**
	ii) Kofaktor $K_{11} = (-1)^2 \cdot 43 = 1 \cdot 43 = 43$ $K_{12} = (-1)^3 \cdot 12 = -1 \cdot 12 = -12$ $K_{13} = (-1)^4 \cdot 15 = 1 \cdot 15 = 15$ $K_{21} = (-1)^3 \cdot 3 = -1 \cdot 3 = -3$ $K_{22} = (-1)^4 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$ $K_{23} = (-1)^5 \cdot 1 = -1 \cdot 1 = -1$ $K_{31} = (-1)^4 \cdot 8 = 1 \cdot 8 = 8$ $K_{32} = (-1)^5 \cdot 43 = -1 \cdot 2 = -2$ $K_{33} = (-1)^6 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$	**9**
	Adj (A)= $\begin{bmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ***Alternatif lain mencari adjoin matriks A:*** $Adj(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ \square & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ \square & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} d & e \\ g & \square \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & \square \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$	**3**
	Jumlah Skor Maksimum	**30**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan= $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum}\ x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan cukup atau kurang, maka harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom "Ya" jika mampu dan "Tidak" jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Apakah sudah bisa menuliskan permasalahan nyata dalam bentuk matriks?		
2	Apakah telah mampu memahami konsep dan menetukan determinan matriks berorodo 3x3 dengan metode Sarrus?		
3	Apakah telah mampu memahami dan menentukan konsep metode Kofaktor?		
4	Apakah sudah mampu mampu menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang mempunyai 3 variabel dihubungkan dengan Matriks dengan menggunakan metode determinan?		
5	Apakah dalam mengerjakan soal-soal bekerja secara mandiri dan jujur tanpa melihat dulu kunci jawaban dan pembahasan atau bertanya kepada orang lain?		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
INVERS MATRIKS

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan siswa mampu:
1. Menentukan invers matriks ordo 2x2 dan ordo 3x3
2. Membuat kesimpulan mengenai cara menyelesaikan operasi matriks dengan menggunakan sifat-siftanya, serta pemanfaatan nilai determinan atau invers matriks dalam pemecahan masalah nyata.

B. Uraian Materi

Invers Matriks
Perhatikan masalah bentuk matriks berordo 2x2 di atas. Selain dengan menggunakan metode determinan, kita bisa menentukan nilai x dan y permasalahan di atas dengan metode Invers Matriks.

Apakah Invers Matriks itu?
Invers matriks A adalah sebuah matriks baru yang merupakan kebalikan dari matriks A dan apabila dikalikan antara matriks A dengan kebalikannya akan menghasilkan matriks Identitas. **Invers matriks A dinotasikan dengan $\boldsymbol{A^{-1}}$**

- Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 2x2 A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 3x3 A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ adalah

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}\,\textbf{Adj A}$$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix} \longrightarrow$ A.X = B $\leftrightarrow$ X = $\boldsymbol{A^{-1}}$ **B**

Karena matriks A adalah matriks Nonsingular (matriks yang determinannya sama dengan Nol, dan mempunyai kebalikan/Invers), oleh karena itu, akan kita coba menentukan nilai x dan y dengan menggunakan metode Invers, sebagai berikut:

$$X = A^{-1}B \longrightarrow \boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{ad-bc}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3(3)-2(5)}}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9-10}}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-1}}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{A^{-1}} \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (-3)70.000 + 2(115.00) \\ 5(70.000) + (-3)(115.000) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -210.000 + 230.000 \\ 350.000 + (-345.000) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 20.000 \\ 5.000 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.000 \\ 5.000 \end{bmatrix}$ sehingga nilai x = 20.000 dan y = 5.000

Dengan demikian jawaban untuk permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan dua metode (cara) yaitu dengan metode (cara) determinan dan dengan metode (cara) invers yang menghasilkan nilai atau jawaban yang sama.

Untuk melengkapi contoh selanjutnya, akan kita bahas permasalahan pada matriks yang berordo 3x3.
Perhatikan permasalahan yang sudah dibahas sebelumnya dengan menggunakan metode determinan, sekarang permasalahan tersebut akan kita selesaikan dengan metode invers.

$\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$

Terlebih dahulu kita cari minor matriks A, disini didapat bahwa minor matriks A adalah :
M_{11}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

$M_{11} = \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 45 & 25 \\ 50 & 30 \end{vmatrix}$ = 45(30) – 25(50) = 1350 – 1.250 = **100**

$M_{12} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

$M_{12} = \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 25 \\ 32 & 30 \end{vmatrix}$ = 30(30) – 25(32) = 900 – 800 = **100**

M_{13}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

$M_{13} = \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 45 \\ 32 & 50 \end{vmatrix}$ = 30(50) – 45(32) = 1.500 – 1.440 = **60**

$M_{21} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

$M_{21} = \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 75 & 40 \\ 50 & 30 \end{vmatrix}$ = 75(30) – 40(50) = 2.250 – 2.000 = **250**

$M_{22} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

M_{22}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 50 & 40 \\ 32 & 30 \end{vmatrix}$ = 50(30) – 40(32) = 1.500 – 1.280 = **220**

M_{23} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

M_{23}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 50 & 75 \\ 32 & 50 \end{vmatrix}$ = 50(50) – 75(32) = 2.500 – 2.400 = **100**

M_{31} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

M_{31}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 75 & 40 \\ 45 & 25 \end{vmatrix}$ = 75(25) – 40(45) = 1.875 – 1.800 = **75**

M_{32} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

M_{32}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 50 & 40 \\ 30 & 25 \end{vmatrix}$ = 50(25) – 40(30) = 1.250 – 1.200 = **50**

M_{33} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

M_{33}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 50 & 75 \\ 30 & 45 \end{vmatrix}$ = 50(45) – 75(30) = 2.250 - 2.250 = **0**

Jadi Minor Matriks A = $\begin{bmatrix} \mathbf{100} & \mathbf{100} & \mathbf{60} \\ \mathbf{250} & \mathbf{220} & \mathbf{100} \\ \mathbf{75} & \mathbf{50} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Sehingga kofaktor matriks A adalah:

Kofaktor Matriks A baris pertama kolom pertama, berarti i = 1 dan j = 1.

K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij}

K_{11} = (-1) M^{1+1}. M_{11}

K_{11} = $(-1)^2$. 100

K_{11} = (1) 100 = **100**

Kofaktor matriks A baris pertama kolom kedua, berarti i = 1 dan j = 2.

K_{12} = (-1) M^{1+2}. M_{12}

K_{12} = $(-1)^3$. M_{12}

K_{12} = (-1) . 100 = **-100**

Kofaktor matriks A baris pertama kolom ketiga, berarti i = 1 dan j = 3.

K_{13} = (-1) M^{1+3}. M_{13}

K_{13} = $(-1)^4$. M_{13}

K_{13} = (1) . 60 = **60**

Kofaktor matriks A baris kedua kolom pertama, berarti i = 2 dan j = 1

K_{21} = $(-1)^{2+1}$. M_{21}

K_{21} = $(-1)^3$. 250 = (- 1) 250 = **- 250**

Kofaktor matriks A baris kedua kolom kedua, berarti i = 2 dan j = 2

K_{22} = $(-1)^{2+2}$. M_{22}

K_{22} = $(-1)^4$ 220 = (1) 220= **220**

Kofaktor matriks A baris kedua kolom ketiga, berarti i = 2 dan j = 3
$K_{23} = (-1)^{2+3}. M_{23}$
K_{23} = $(-1)^5$100 = (-1) 100 = **- 100**

Kofaktor matriks A baris ketiga kolom pertama, berarti i = 3 dan j = 1
$K_{31} = (-1)^{3+1}. M_{31}$
K_{31} = $(-1)^{4\cdot}$75 = 1. 75 = **75**

Kofaktor matriks A baris ketiga kolom kedua, berarti i = 3 dan j = 2
$K_{32} = (-1)^{3+2}. M_{32}$
K_{22} = $(-1)^5$(50) = -1(50) = **- 50**

Kofaktor matriks A baris ketiga kolom ketiga, berarti i = 3 dan j = 3
$K_{33} = (-1)^{3+3}. M_{33}$
K_{33} = $(-1)^6$(0) = 1(0) = **50**

Jadi Kofaktor Matriks A = $\begin{bmatrix} \mathbf{100} & \mathbf{-100} & \mathbf{60} \\ \mathbf{-250} & \mathbf{220} & \mathbf{-100} \\ \mathbf{75} & \mathbf{-50} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Adjoin matriks A dicari dengan mencari transpose dari kofaktor matriks A, sehingga :

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 100 & -250 & 75 \\ -100 & 220 & -50 \\ 60 & -100 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas, diperoleh invers dari matriks A adalah:

$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}$ **Adj A**

Sehingga :

$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}$ **Adj A=** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-100}}\begin{bmatrix} 100 & -250 & 75 \\ -100 & 220 & -50 \\ 60 & -100 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2,5 & -0,75 \\ 1 & -2,2 & 0,5 \\ -0,6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Bentuk matriks permaslahan di atas adalah:

$\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$

Bentuk tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan AX=B, untuk memperoleh matriks X, yang elemen-elemennya merupakan banyaknya pesawat Airbus100 (x), banyaknya pesawat Airbus 200 (y), dan banyaknya pesawat Airbus 300 (z), kita kalikan dengan matriks $\boldsymbol{A^{-1}}$ke ruas kiri dan ruas kanan persamaan AX=B, sehingga diperoleh:

$\boldsymbol{A^{-1}}$AX=$\boldsymbol{A^{-1}}$B
X = $\boldsymbol{A^{-1}}\mathbf{B}$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 2,5 & -0,75 \\ 1 & -2,2 & 0,5 \\ -0,6 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)(305) + (2,5)(185) + (-0,75)(206) \\ (1)(305) + (-2,2)(185) + (0,5)(206) \\ (-0,6)(305) + (1)(185) + (0)(206) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -305 + 462,5 + (-154,5) \\ 305 + (-407) + 103 \\ (-183) + 185 + 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hasil yang diperoleh dengan menerapkan metode (cara) Invers dan metode (cara) determinan, diperoleh hasil yang sama, yaitu banyaknya pesawat Airbus 100 yang disediakan sebanyak 3 unit, banyaknya pesawat Airbus 200 yang disediakan sebanyak 1 unit, dan banyaknya pesawat Airbus 300 yang disediakan sebanyak 2 unit.

Sifat-sifat Invers matriks

1. **Misalkan matriks A berordo n x n dengan n ∈ N, dan determinan A tidak sama dengan nol, jika A^{-1} adalah invers dari A, maka $(A^{-1})^{-1}$ = A**
2. **Misalkan matriks A dan B berordo n x n dengan n ∈ N, dan determinan A dan B tidak sama dengan nol, jika A^{-1} dan B^{-1}adalah invers dari matriks A dan B, maka $(AB)^{-1}$ = $B^{-1}A^{-1}$**

C. Rangkuman

1. Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 2x2 A **=** $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2. Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 3x3 A **=** $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ adalah

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}} \textbf{Adj A}$$

3. Mencari matriks X dalam bentuk persamaan Matriks:
   - A.X = B ↔ X = $\boldsymbol{A^{-1}}$ **B**
   - X.A = B ↔ X = **B** $\boldsymbol{A^{-1}}$

D. Latihan Soal

1. Diketahui matriks berordo 2x2 A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Carilah invers matirksnya (A^{-1})
2. Diketahui A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, tentukan invers matriksnya (A^{-1})

Kunci Jawaban, Pembahasan dan Pedoman Penskoran

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
1.	Matriks koefisien A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, Determinan matriks A adalah det A = $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 3(2) – 2(1) = 6 – 2 = 4 Invers matriks koefisien A $A^{-1} = \frac{1}{\lvert A \rvert} Adj.A$ $= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$	**3** **2** **2**
2.	Diketahui A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ det A = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \\ -3 & -2 \end{matrix}$ = **((1)(9)(7)+(1)(-10)(-3)+(-2)(6)(-2))-((-2)(9)(-3)+(1)(-10)(-2)+(1)(6)(7))** = (63+30+24) – (54+20+42) = 117 – 116 = 1 Minor Matriks M_{11}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3 $M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -10 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$ = 9(7) – (-10)(-2) = 63 – 20 = 43 M_{12} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3 $M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -10 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$ = 6(7) – (-10)(-3) = 42 – 30 = **12** M_{13}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3 $M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$ = 6(-2) – 9(-3) = - 12 – (-27) = **15** M_{21} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3	**3** **4** **9**

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
	M_{21}= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$ = 1(7) – (-2)(-2) = 7 – 4 = **3** M_{22} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3 M_{22}= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$ = 1(7) – (-2)(-3) = 7 – 6 = **1** M_{23} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3 M_{23}= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$ = 1(-2) – 1(-3) = (- 2) – (-3) = **1** M_{31} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3 M_{31}= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -10 \end{vmatrix}$ = 1(-10) – (-2)(9) = - 10 – (-18) = **8** M_{32} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3 M_{32}= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$ = 1(-10) – (-2)(6) = - 10 – (-12) = **2** M_{33} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3 M_{33}= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$ = 1(9) – 1(6) = 9 - 6 = **3** Jadi Minor Matriks A = $\begin{pmatrix} \mathbf{43} & \mathbf{12} & \mathbf{15} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ Sehingga kofaktor matriks A adalah: Kofaktor Matriks A baris pertama kolom pertama, berarti i = 1 dan j = 1.	**1** **9**

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
	K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij} K_{11} = (-1) M^{1+1}. M_{11} K_{11} = (-1)^2. 43 K_{11} = (1) 43 = **43** Kofaktor matriks A baris pertama kolom kedua, berarti i = 1 dan j = 2. K_{12} = (-1) M^{1+2}. M_{12} K_{12} = (-1)^3 . M_{12} K_{12} = (-1) . 2 = **-12** Kofaktor matriks A baris pertama kolom ketiga, berarti i = 1 dan j = 3. K_{13} = (-1) M^{1+3}. M_{13} K_{13} = (-1)^4 . M_{13} K_{13} = (1) . 15 = **15** Kofaktor matriks A baris kedua kolom pertama, berarti i = 2 dan j = 1 $K_{21} = (-1)^{2+1}. M_{21}$ $K_{21} = (-1)^3. 3$ = (- 1) 3 = **- 3** Kofaktor matriks A baris kedua kolom kedua, berarti i = 2 dan j = 2 $K_{22} = (-1)^{2+2}. M_{22}$ $K_{22} = (-1)^4$ 1 = (1)(1)= **1** Kofaktor matriks A baris kedua kolom ketiga, berarti i = 2 dan j = 3 $K_{23} = (-1)^{2+3}. M_{23}$ $K_{23} = (-1)^5 1$ = (-1) (1) = **- 1**	1
	Kofaktor matriks A baris ketiga kolom pertama, berarti i = 3 dan j = 1 $K_{31} = (-1)^{3+1}. M_{31}$ $K_{31} = (-1)^{4.}(8)$ = 1. (8) = **8**	2
	Kofaktor matriks A baris ketiga kolom kedua, berarti i = 3 dan j = 2 $K_{32} = (-1)^{3+2}. M_{32}$ $K_{22} = (-1)^5(2)$ = -1(2) = **- 2**	2
	Kofaktor matriks A baris ketiga kolom ketiga, berarti i = 3 dan j = 3 $K_{33} = (-1)^{3+3}. M_{33}$ $K_{33} = (-1)^6(3)$ = 1(3) = **3**	2
	Jadi Kofaktor Matriks A = $\begin{pmatrix} \mathbf{43} & \mathbf{-12} & \mathbf{15} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ Adjoin matriks A dicari dengan mencari transpose dari kofaktor matriks A, sehingga : $$Adj\ A = \begin{pmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$ $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det\ A}}$ **Adj A**	

No.	Kunci Jawaban dan Pembahasan	Skor
	$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}\begin{pmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & -3 & 8 \\ -12 & 1 & -2 \\ 15 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	
	Jumlah Skor Maksimum	**40**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan=$\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum}\ x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

E. Penilaian Diri

F. Berilah tanda V pada kolom “Ya” jika mampu dan “Tidak” jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1	Apakah sudah bisa menuliskan permasalahan nyata dalam bentuk matriks?		
2	Apakah telah mampu memahami konsep dan mampu menentukan invers matriks berordo 2x2?		
3	Apakah telah mampu memahami konsep dan mampu menentukan invers matriks berordo 3x3?		
4	Apakah sudah mampu menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang berhubungan dengan Matriks Dengan menggunakan Invers Matriks?		
5	Apakah dalam mengerjakan soal-soal bekerja secara mandiri dan jujur tanpa melihat dulu kunci jawaban dan pembahasan atau bertanya kepada orang lain?		

EVALUASI

Pilihlah salah satu jawaban yang benar!

1. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix}3 & -2\\4 & -2\end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix}4 & 4\\-2 & -1\end{bmatrix}$ dan C = $\begin{bmatrix}9 & 10\\9 & 12\end{bmatrix}$. Nilai determinan dari matriks (AB – C) adalah ...
   A. – 7
   B. – 5
   C. 2
   D. 3
   E. 12
2. Determinan dari matriks A = $\begin{bmatrix}5 & 1\\-3 & 2\end{bmatrix}$ adalah…
   A. 13
   B. 14
   C. 15
   D. 16
   E. 17
3. Matriks X yang memenuhi persamaan $\begin{bmatrix}2 & 7\\5 & 3\end{bmatrix}.X = \begin{bmatrix}-3 & 8\\7 & -9\end{bmatrix}$ adalah…
   A. $\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 2\end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & -3\end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & -2\end{bmatrix}$
   E. $\begin{bmatrix}-1 & 2\\3 & -2\end{bmatrix}$
   F.
4. Himpunan penyelesaian dari:
   $$\begin{cases}3x - 2y = 13\\ x + 4y = -5\end{cases}$$
   Adalah…
   A. x = 2 dan y = -2
   B. x = - 2 dan y = 2
   C. x = -2 dan y = 3
   D. x = 3 dan y = -2
   E. x = -1 dan y = 2
5. Diketahui matriks P = $\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}$ dan Q = $\begin{pmatrix}5 & 4\\1 & 1\end{pmatrix}$. Jika P^{-1} adalah invers matriks P dan Q^{-1} adalah invers matriks Q, maka determinan matriks $Q^{-1}\,P^{-1}$ adalah …
   A. 209
   B. 10
   C. 1
   D. – 1
   E. - 209
6. Invers dari matriks P = $\begin{bmatrix}7 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}$ adalah…
   A. $\begin{bmatrix}\frac{11}{9} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{7}{9} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix}-\frac{11}{9} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{7}{9} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix}\frac{11}{9} & \frac{2}{3}\\ \frac{7}{9} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix}-\frac{11}{9} & \frac{2}{3}\\ \frac{7}{9} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$
   E. $\begin{bmatrix}\frac{11}{9} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{7}{9} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$
7. Diketahui persamaan matriks $\begin{pmatrix}5 & -2\\9 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\x & x+y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.
   Nilai x – y = …
   A. $\frac{5}{2}$
   B. $\frac{22}{2}$
   C. $\frac{15}{2}$
   D. $\frac{23}{2}$
   E. $\frac{19}{2}$
   F.

8. Bu Ani seorang pengusaha makanan kecil yang menyetorkan dagangannya ke tiga kantin sekolah. Tabel banyaknya makan yang disetorkan setiap harinya sebagai berikut :

	Kacang	Keripik	Permen
Kantin A	10	10	5
Kantin B	20	15	8
Kantin C	15	20	10

Harga sebungkus kacang adalah Rp. 2.000,00, keripik adalah Rp. 3.000,00, dan permen adalah Rp. 1.000,00. Pemasukan total harian yang diterima ibu Ani adalah…
A. Rp. 235.000,00.
B. Rp. 248.000,00.
C. Rp. 254.000,00.
D. Rp. 256.000,00.
E. Rp. 325.000,00.

9. Diketahui matriks A = = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{bmatrix}$ Jika determinan matriks A = -8, maka determinan matriks B adalah…
A. 96
B. -96
C. -64
D. 48
E. -48

10. Diketahui $\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 35$, maka nilai x adalah…
A. – 2
B. – 1
C. 0
D. 2
E. 3

11. Diberikan matriks $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B + C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Jika matriks A berordo 2 x 2 sehingga AB + AC = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, maka determinan matriks AB adalah ….
A. 4
B. 2
C. 1
D. -1
E. -2

12. Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Jika A^t adalah transpose dari matriks A dan AX = B + A^t. Maka determinan matriks A adalah ….
A. -46
B. -33
C. 27
D. 22
E. 46

13. Jika A adalah matriks berordo 2x2 yang memenuhi persamaan matriks $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $A\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Maka hasil kali $A\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ adalah ….
A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
E. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

14. Jika matriks $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $2P^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ -z & z \end{pmatrix}$. Jika P^{-1} menyatakan invers dari matriks P, maka nilai x + y = ….
A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

15. Diketahui matriks $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Jika P^{-1} dan Q^{-1} masing-masing adalah invers dari matriks P dan Q, maka determinan dari $P^{-1}Q^{-1}$ adalah ….
A. 223
B. 1
C. -1
D. -10
E. -223

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. D
2. A
3. A
4. D
5. C
6. B
7. D
8. B
9. A
10. E
11. B
12. B
13. C
14. C
15. B

DAFTAR PUSTAKA

https://www.wardayacollege.com/matematika/matriks/operasi-pada-matriks/operasi-matriks/, 2020

https://tanya-tanya.com/rangkuman-contoh-soal-pembahasan-matriks/, 2020

Kemendikbud RI.______. *Buku Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Kurikulum 2103*

Kemendikbud RI.______. *Buku Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Kurikulum 2103 Edisi Revisi 2015*

Kemendikbud RI.______.*Buku Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Kurikulum 2103 Edisi Revisi 2016*

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum

KELAS XI

TRANSFORMASI GEOMETRI

MATEMATIKA UMUM KELAS XI

PENYUSUN
Istiqomah, S.Pd

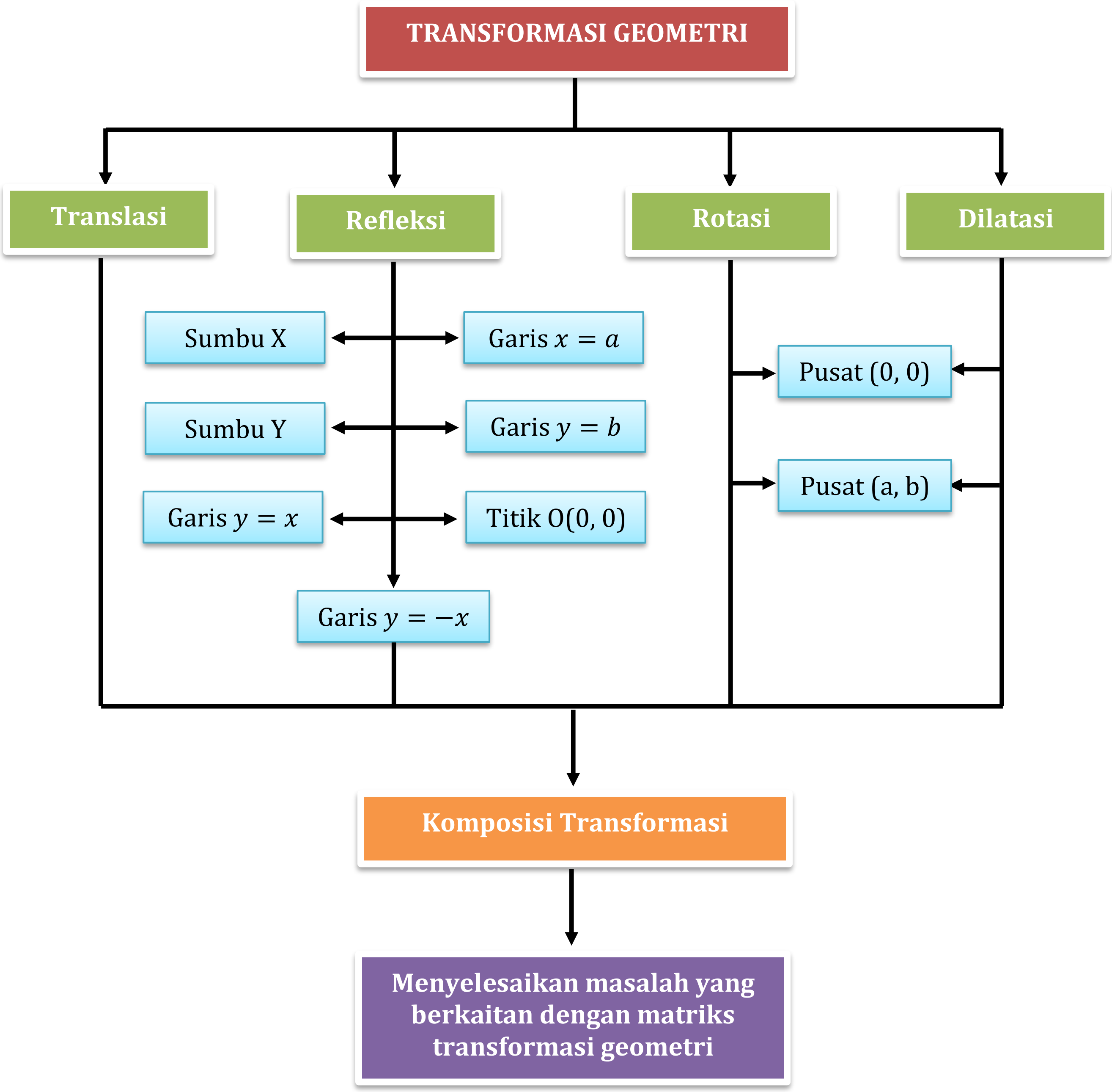
SMAN 5 Mataram

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Dilatasi	:	Transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu.
Geometri	:	Cabang matematika yang menerangkan sifat-sifat garis, sudut, bidang, dan ruang
Komposisi Transformasi	:	Transformasi majemuk yang memuat lebih dari satu transformasi
Matriks	:	Susunan sekelompok bilangan dalam suatu jajaran berbentuk persegi panjang yang diatur berdasarkan baris dan kolom dan diapit oleh tanda kurung
Refleksi	:	Transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin
Rotasi	:	Transformasi yang memindahkan titik-titik dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh α terhadap suatu titik tertentu.
Transformasi	:	Perubahan posisi dan ukuran dari suatu objek (titik, garis, kurva, bidang)
Transformasi Geometri	:	Perubahan posisi dan ukuran dari suatu objek (titik, garis, kurva, bidang) dan dapat dinyatakan dalam gambar dan matriks
Translasi	:	Transformasi yang memindahkan titik-titik pada bidang dengan arah dan jarak tertentu.

PETA KONSEP


TRANSFORMASI GEOMETRI
Translasi
Refleksi
Rotasi
Dilatasi
Sumbu X
Garis $x = a$
Sumbu Y
Garis $y = b$
Garis $y = x$
Titik O(0, 0)
Garis $y = -x$
Pusat (0, 0)
Pusat (a, b)
Komposisi Transformasi
Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks transformasi geometri

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	10×45 menit (10 JP)
Judul Modul	:	Transformasi Geometri

B. Kompetensi Dasar

3. 5 Menganalisis dan membandingkan transformasi dan komposisi transformasi dengan menggunakan matriks.

4.5 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks transformasi geometri (translasi, refleksi, dilatasi dan rotasi)

C. Deskripsi Singkat Materi

Anak-anak, banyak kegiatan atau kejadian dalam kehidupan sehari-hari yang terkait dengan transformasi geometri. Transformasi geometri merupakan perubahan posisi dan ukuran dari suatu objek (titik, garis, kurva, bidang) dan dapat dinyatakan dalam gambar dan matriks. Coba perhatikan gambar berikut, tentunya kalian pernah atau sering melakukan kegiatan ini bahkan setiap hari.

Gambar 1. Gambar seseorang sedang bercermin
Sumber : febrinaayunurmayasari.wordpress.com

Pada saat bercermin kalian dapat melihat bayangan kalian sendiri. Bagaimana hasil bayangan yang terbentuk ketika sedang bercermin? Ternyata hasil bayangan mempunyai bentuk dan ukuran yang sama. Bercermin merupakan salah satu kegiatan yang menerapkan konsep transformasi geometri yaitu refleksi (pencerminan). **Refleksi** merupakan transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan cermin dari titik-titik yang akan dipindahkan. Bidang pencerminan dalam geometri terdiri atas sumbu X, sumbu Y, garis $y = x$, garis $y = -x$, garis $x = a$, garis $y = b$ dan terhadap titik pusat yaitu titik O (0,0). Selain refleksi, pada modul ini kita akan mempelajari transformasi geometri yang lainnya yaitu translasi, rotasi, dan dilatasi. **Translasi** merupakan transformasi yang memindahkan titik-titik pada bidang dengan arah dan jarak yang sama. **Rotasi** merupakan transformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang ke titik lainnya dengan cara memutar pada titik tertentu. Rotasi ditentukan oleh besar sudut dan pusat rotasi. Jika rotasi searah dengan jarum jam maka besar sudut negatif. Jika rotasi berlawanan dengan arah jarum jam maka besar sudut positif. Pusat rotasi terdiri atas titik asal yaitu O(0,0) dan titik tertentu yaitu P(a,b). **Dilatasi** merupakan transformasi ukuran atau skala suatu bangun geometri (pengecilan/pembesaran) tetapi tidak mengubah bentuk bangun tersebut. Dilatasi ditentukan oleh pusat dan faktor skala.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Anak-anakku sekalian, modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh soal yang disediakan dan jika memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada modul ini.
5. Jika kalian menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **5** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Translasi

Kedua : Refleksi

Ketiga : Rotasi

Keempat : Dilatasi

Kelima : Komposisi Transformasi

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
TRANSLASI (PERGESERAN)

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 1 ini kalian diharapkan dapat :

1. Memahami pengertian translasi
2. Menentukan translasi pada titik
3. Menentukan translasi pada kurva

B. Uraian Materi

Pengertian Translasi

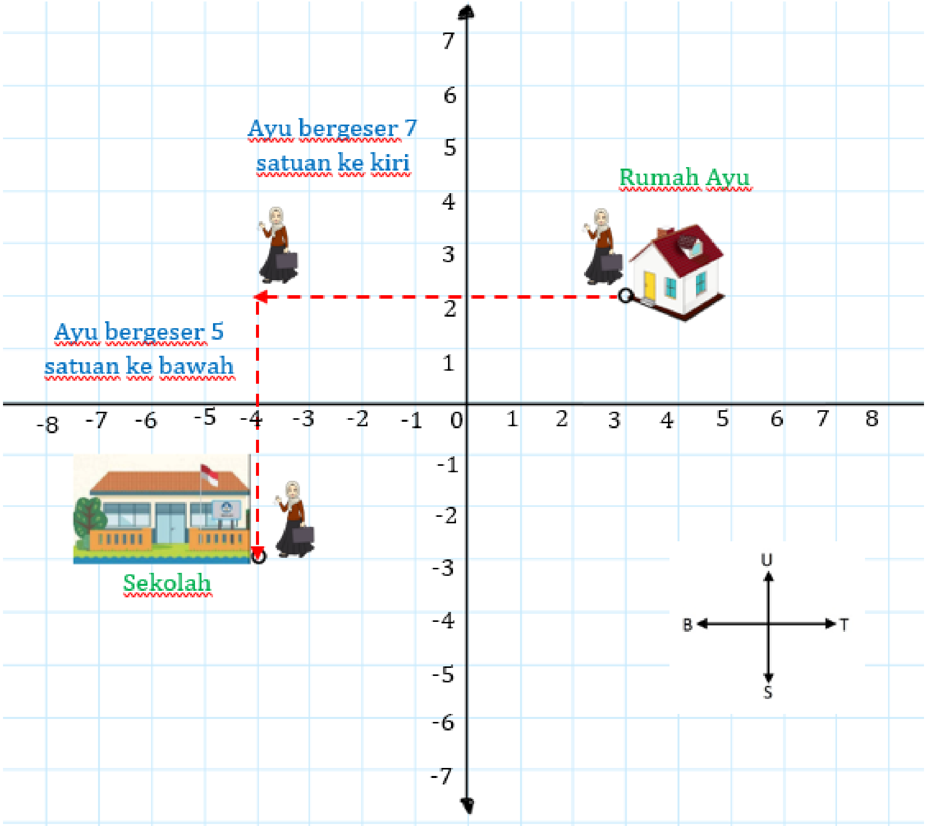
Anak-anak, pernahkan kalian mengamati objek atau benda-benda yang bergerak di sekitar kalian ? seperti kendaraaan yang berjalan di jalan raya, pesawat yang melintas di udara, eskalator yang bergerak atau diri kita sendiri yang bergerak kemana saja. Kegiatan tersebut menyebabkan benda atau objek mengalami perubahan posisi tanpa mengubah bentuk dan ukuran. Yuk kita memahami konsep translasi dengan menyelesaikan Masalah 1.1 dan Masalah 1.2

Masalah 1.1

Ayu ingin berangkat ke sekolah. Jika Ayu berangkat dari rumah maka untuk sampai ke sekolah ayu harus berjalan 7 satuan ke arah barat dan berjalan 5 satuan ke arah selatan. Coba kamu sketsa pergerakan Ayu pada bidang cartesius. Dapatkah kamu menemukan proses pergerakan Ayu dari rumah menuju sekolah?

Anak-anakku, untuk mempermudah memahami konsep translasi kita bisa menggunakan pendekatan bidang Cartesius. Kita dapat mengasumsikan untuk pergeseran ke **kanan** pada bidang cartesius merupakan sumbu **X positif**, pergeseran ke **kiri** merupakan sumbu **X negatif**, pergeseran ke **atas** merupakan sumbu **Y positif** dan pergeseran ke **bawah** merupakan sumbu **Y negatif**.

Jika Masalah 1.1 kita sajikan dalam bidang Cartesius maka diperoleh gambar 2. Yuk kita perhatikan gambar 2 !



Gambar 2. Pergerakan Ayu dari Rumah ke Sekolah pada bidang Cartesius
Sumber : Koleksi Pribadi

Jika kita melihat posisi rumah Ayu pada bidang Cartesius berada pada koordinat (3,2). Untuk menuju ke sekolah Ayu harus berjalan ke arah barat 7 satuan artinya posisi Ayu bergeser 7 satuan ke kiri dari posisi rumah pada bidang Cartesius. Selanjutnya Ayu harus berjalan lagi ke arah selatan 5 satuan artinya posisi Ayu bergeser 5 satuan ke bawah. Jika kita melihat pada bidang Cartesius pada saat tiba di sekolah posisi Ayu berada pada koordinat$(-4,-3)$. Hal ini berarti

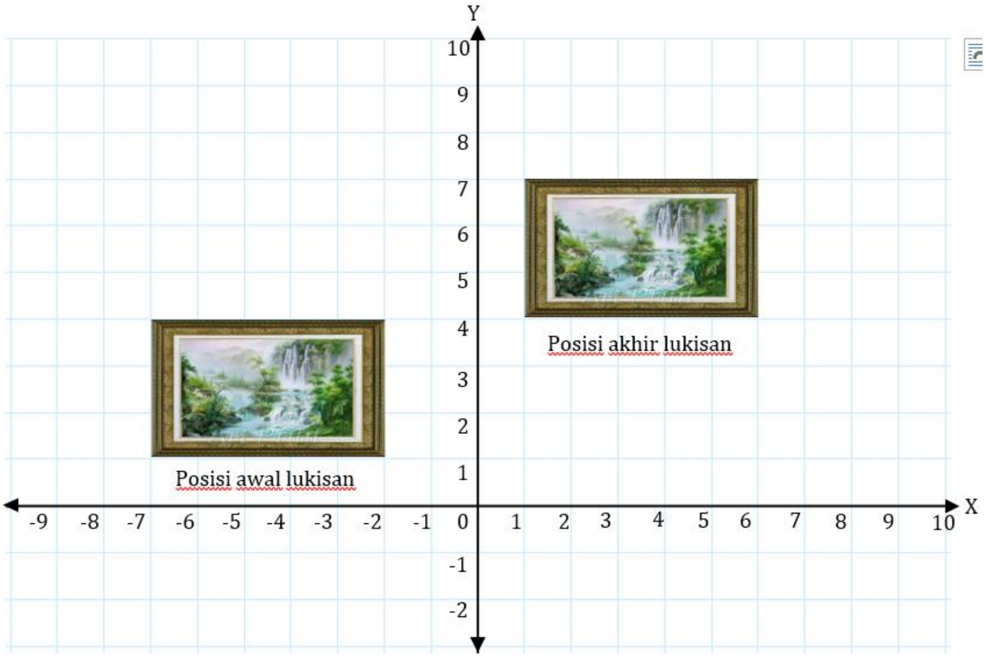
$$\binom{3}{2}+\binom{-7}{-5}=\binom{-4}{-3}$$

Jadi, posisi Ayu di sekolah terletak pada koordinat $(-4,-3)$

Masalah 1.2

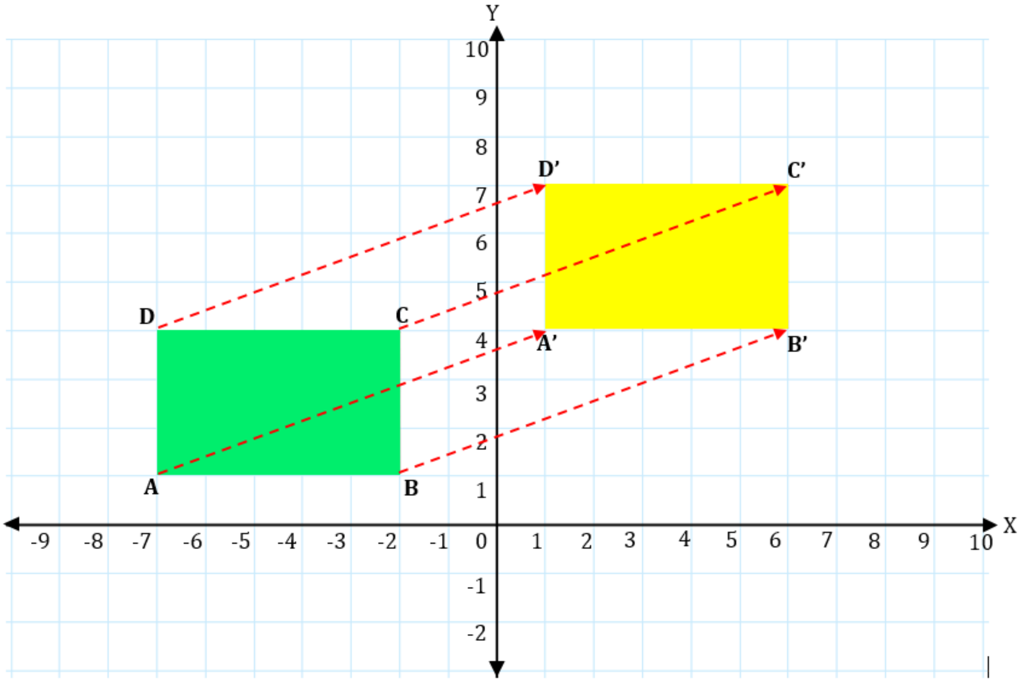
Bimo akan memindahkan lukisan pada dinding dengan menggeser ke kanan sejauh 4 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan. Coba kamu sketsa pergerakan lukisan pada bidang Cartesius. Dapatkah kamu menemukan proses pergerakan lukisan dari posisi awal ke posisi akhir?

Anak-anak, jika perpindahan lukisan diilustrasikan dalam bidang Cartesius maka akan terlihat seperti gambar di bawah ini. Yuk kita perhatikan gambar 3.



Gambar 3. Perpindahan lukisan pada bidang Cartesius
Sumber : Koleksi Pribadi

Anak-anakku, untuk mempermudah kita memahami perpindahan lukisan yang terjadi, kita bisa memisalkan lukisan tersebut sebagai persegi panjang ABCD dan hasil perpindahan lukisan kita misalkan sebagai persegi panjang A'B'C'D'. Agar mudah memahami yuk kita perhatikan gambar 4.



Gambar 4. Contoh translasi bidang
Sumber : Koleksi Pribadi

Anak-anakku, jika kita perhatikan persegi panjang A'B'C'D' merupakan bayangan dari persegi panjang ABCD setelah ditranslasi. Dari hasil translasi tersebut diperoleh $AA' = BB' = CC' = DD'$

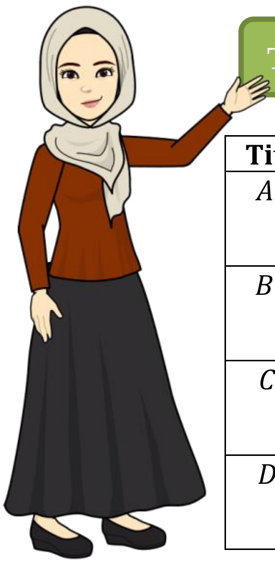
Pergeseran 1 :
Posisi awal titik A adalah $A(-7, 1)$, kemudian bergerak ke kanan sejauh 8 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan sehingga posisi berubah di koordinat $A'(1, 4)$
Hal ini berarti :
$\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

Pergeseran 2 :
Posisi awal titik B adalah $B(-2, 1)$, kemudian bergerak ke kanan sejauh 8 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan sehingga posisi berubah di koordinat $B'(6, 4)$
Hal ini berarti :
$\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$

Pergeseran 3 :
Posisi awal titik C adalah $C(-2, 4)$, kemudian bergerak ke kanan sejauh 8 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan sehingga posisi berubah di koordinat $C'(6, 7)$
Hal ini berarti :
$\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$

Pergeseran 4 :
Posisi awal titik D adalah $D(-2, 4)$, kemudian bergerak ke kanan sejauh 8 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan sehingga posisi berubah di koordinat $D'(1, 7)$
Hal ini berarti :
$\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$

Pergeseran setiap titik pada uraian di atas dapat disajikan secara lebih sederhana dalam Tabel 1.



Tabel 1.Translasi titik

Titik awal	Titik Akhir	Proses	Translasi
$A\,(-7, 1)$	$A'(1, 4)$	$\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$
$B(\,-2, 1)$	$B'(6, 4)$	$\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$
$C(-2, 4)$	$C'(6, 7)$	$\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$
$D(-7, 4)$	$D'(1, 7)$	$\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$

Berdasarkan pengamatan pada Tabel 1, secara umum diperoleh konsep :

Translasi (pergeseran) adalah transformasi yang memindahkan titik-titik pada bidang dengan arah dan jarak tertentu.

Titik $A(x, y)$ ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Catatan : Titik A' disebut bayangan titik A oleh translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Anak-anak, untuk lebih memahami konsep translasi, mari kita simak contoh soal 1 dan contoh soal 2

Contoh Soal 1:

Jika titik $A(2, 3)$ ditranslasikan oleh $T(-3, 4)$ maka bayangan titik A adalah ...

Pembahasan :

Pada soal diketahui koordinat titik $A(2, 3)$ artinya $x = 2$ dan $y = 3$ akan ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ artinya $a = -3$ dan $b = 4$ sehingga dapat dituliskan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Substitusi nilai x, y, a dan b

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-3) \\ 3 + 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lakukan proses penjumlahan pada matriks dengan menjumlahkan elemen-elemen matriks yang seletak

Contoh Soal 2:

Tentukan persamaan bayangan garis $3x + 5y - 7 = 0$ oleh $T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$!

Pembahasan :

Pada soal diketahui persamaan garis $3x + 5y - 7 = 0$ akan ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ artinya $a = 2$ dan $b = -1$

Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $3x + 5y - 7 = 0$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Substitusi nilai$a$ dan b

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lakukan proses penjumlahan pada matriks dengan menjumlahkan elemen-elemen matriks yang seletak

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh
$x' = x + 2 \rightarrow x = x' - 2$
$y' = y - 1 \rightarrow y = y' + 1$
Substitusi $x = x' - 2$ dan $y = y' + 1$ ke persamaan garis $3x + 5y - 7 = 0$
$3(x' - 2) + 5(y' + 1) - 7 = 0$
$3x' - 6 + 5y' + 5 - 7 = 0$
$3x' + 5y' - 8 = 0$
Jadi persamaan bayangan garis adalah $3x + 5y - 8 = 0$

C. Rangkuman

1. **Translasi (pergeseran)** adalah transformasi yang memindahkan titik-titik pada bidang dengan arah dan jarak tertentu.
2. Titik $A(x,y)$ ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan $A'(x',y')$ ditulis dengan

$$A(x,y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'(x',y')$$

3. Bentuk persamaan matriks translasi : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
4. $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ disebut komponen translasi, a merupakan pergeseran secara horizontal dan b merupakan pergeseran secara vertikal.
5. Titik A' disebut bayangan titik A yang telah ditranforması.

D. Latihan Soal

Anak- anak untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap translasi kerjakan soal latihan berikut:

Soal Pilihan Ganda :

1. Tentukan hasil bayangan titik $A(3,5)$ oleh translasi $T\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$!
   a. A' (5, 1)
   b. A' (3, 7)
   c. A' (7, -1)
   d. A'(7, 3)
   e. A' (1, 9)

2. Diketahui titik $P'(4,-12)$ adalah bayangan titik P oleh translasi $T=\begin{pmatrix}-9\\8\end{pmatrix}$. Koordinat titik P adalah ...
   a. $(13,-20)$
   b. $(13,-4)$
   c. $(4,20)$
   d. $(-5,-4)$
   e. $(-5,-20)$

3. Titik A ditranslasikan oleh $T=\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ menghasilkan titik $A'(4,-2)$. Koordinat titik A adalah ...
   a. $(10,-5)$
   b. $(10,1)$
   c. $(2,-1)$
   d. $(-2,1)$
   e. $(-2,-1)$

4. Diketahui translasi T memetakan titik $C(-4,2)$ ke titik $C'(-1,6)$. Translasi T akan memetkan titik $D(3,-2)$ ke titik ...
   a. $D'(0,4)$
   b. $D'(0,2)$
   c. $D'(0,-6)$
   d. $D'(6,-6)$
   e. $D'(6,2)$

5. Segitig PQR mempunyai kordinat $P(-3,4), Q(-1,0)$, dan $R(0,2)$. Segitiga PQR ditranslasikan oleh T menghasilkan bayangan segitiga $P'Q'R'$. Jika koordinat titik $P'(1,-2)$, koordinat titik Q' dan R' berturut-turut adalah ...
   a. $(3,-6)$ dan $(4,-4)$
   b. $(3,-6)$ dan $(-4,4)$
   c. $(-3,6)$ dan $(4,-4)$
   d. $(-3,6)$ dan $(-4,4)$
   e. $(-3,-6)$dan $(4,-4)$

Soal Essay

6. Garis $l : 2x-3y+12=0$ ditranslasikan oleh $T=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Persamaan hasil translasi garis l adalah ...

7. Garis g ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ menghasilkan garis $g': 3x - 2y - 6 = 0$. Persamaan garis g adalah …
8. Garis $m: 3x - 2y + 6 = 0$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, bayangan garis m adalah …
9. Diketahui translasi kurva oleh $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan $y - x^2 - 1 = 0$. Tentukan persamaan kurva awal.
10. Garis $g: 2x - 3y + 6 = 0$ ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ diperoleh garis g'. Persamaan garis g' adalah …

Pembahasan:

	Pembahasan Soal PG	Skor
1.	Koordinat titik $A(3,5)$ akan ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+(-2)\\5+4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}$ Jadi, koordinat bayangan titik A adalah A'(1, 9) **Jawaban : e**	**10**
2.	Diketahui titik $P'(4,-12)$ dan translasi $T=\begin{pmatrix}-9\\8\end{pmatrix}$ Untuk mencari koordinat titik P kita gunakan konsep translasi $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9\\8\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-9\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4-(-9)\\-12-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4+9\\-12-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}13\\-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\\mathrm{y}\end{pmatrix}$ Jadi, koordinat titik $P(13,-20)$ **Jawaban : a**	**10**
3.	Diketahui titik $A'(4,-2)$ dan translasi $T=\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ Untuk mencari koordinat titik P kita gunakan konsep translasi $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4-6\\-2-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4-6\\-2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\\mathrm{y}\end{pmatrix}$ Jadi, koordinat titik $A(-2,1)$ **Jawaban : d**	**10**
4.	Diketahui : Titik $C(-4,2)\xrightarrow{\mathrm{T}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}C'(-1,6)$	**10**

	Titik $D(3,-2) \xrightarrow{T\binom{a}{b}} D'(x',y')$ Langkah pertama kita cari dulu translasi $T\binom{a}{b}$ dari pemetaan titik $C(-4,2)$ ke $C'(-1,6)$ sebagai berikut $\binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + \binom{a}{b}$ $\binom{-1}{6} = \binom{-4}{2} + \binom{a}{b}$ $\binom{-1}{6} - \binom{-4}{2} = \binom{a}{b}$ $\binom{-1-(-4)}{6-2} = \binom{a}{b}$ $\binom{-1+4}{6-2} = \binom{a}{b}$ $\binom{3}{4} = \binom{a}{b}$ Diperoleh translasi T adalah $\binom{3}{4}$ Selanjutnya kita akan mencari bayangan titik $D(3,-2)$yaitu $D'(x',y')$ dengan konsep translasi $\binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + \binom{a}{b}$ $\binom{x'}{y'} = \binom{3}{-2} + \binom{3}{4}$ $\binom{x'}{y'} = \binom{3+3}{-2+4}$ $\binom{x'}{y'} = \binom{6}{2}$ Jadi, koordinat titik D adalah $(6,2)$ **Jawaban : e**	
5.	Titik $P(-3,4) \xrightarrow{T\binom{a}{b}} P'(1,-2)$ Titik $Q(-1,0) \xrightarrow{T\binom{a}{b}} Q'(x',y')$ Titik $R(0,2) \xrightarrow{T\binom{a}{b}} R'(x',y')$ Langkah pertama kita cari dulu translasi $T\binom{a}{b}$ dari pemetaan titik $P(-3,4)$ ke $P'(1,-2)$ sebagai berikut $\binom{x'}{y'} = \binom{x}{y} + \binom{a}{b}$ $\binom{1}{-2} = \binom{-3}{4} + \binom{a}{b}$ $\binom{1}{-2} - \binom{-3}{4} = \binom{a}{b}$ $\binom{1-(-3)}{-2-4} = \binom{a}{b}$ $\binom{1+3}{-2-4} = \binom{a}{b}$ $\binom{4}{-6} = \binom{a}{b}$	**10**

	Diperoleh translasi T adalah $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ Selanjutnya kita akan mencari bayangan titik $Q(-1,0)$ yaitu $Q'(x',y')$ dengan konsep translasi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 \\ 0+(-6) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ koordinat titik Q adalah $(3,-6)$ Selanjutnya kita akan mencari bayangan titik $R(0,2)$ yaitu $R'(x',y')$ dengan konsep translasi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+4 \\ 2+(-6) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ koordinat titik R adalah $(4,-4)$ Jadi koordinat titik Q dan titik R adalah $(3,-6)$ dan $(4,-4)$ **Jawaban : a**	
	Pembahasan Soal Uraian	**Skor**
6.	Diketahui persamaan garis $l: 2x - 3y + 12 = 0$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Misal titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan $2x - 3y + 12 = 0$ sehingga $A(x,y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}} A'(x',y')$	2
	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$	3
	Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh $x' = x + 1 \rightarrow x = x' - 1$ $y' = y - 2 \rightarrow y = y' + 2$	2
	Substitusi $x = x' - 1$ dan $y = y' + 2$ ke persamaan garis $2x - 3y + 12 = 0$ sehingga diperoleh $2(x'-1) - 3(y'+2) + 12 = 0$ $2x' - 2 - 3y' - 6 + 12 = 0$ $2x' - 3y' - 2 - 6 + 12 = 0$ $2x' - 3y' + 4 = 0$ $2x - 3y + 4 = 0$ Jadi persamaan bayangan garis l adalah $2x - 3y + 4 = 0$	3

7.	Diketahui persamaan garis $g': 3x - 2y - 6 = 0$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Misal titik $A'(x', y')$ memenuhi persamaan $g': 3x - 2y - 6 = 0$ sehingga $A(x, y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}} A'(x', y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (-1) \\ y + 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1) \\ y + 2 \end{pmatrix}$ Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh $x' = x - 1$ $y' = y + 2$ Substitusi $x' = x - 1$ dan $y' = y + 2$ ke persamaan garis $3x - 2y - 6 = 0$ sehingga diperoleh $3(x - 1) - 2(y + 2) - 6 = 0$ $3x - 3 + 2y - 4 - 6 = 0$ $3x + 2y - 3 - 4 - 6 = 0$ $3x + 3y - 13 = 0$ Jadi persamaan garis g adalah $3x + 3y - 13 = 0$	**2** **3** **2** **3**
8.	Diketahui persamaan garis $m : 3x - 2y + 6 = 0$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y + 6 = 0$ sehingga $A(x, y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}} A'(x', y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (-2) \\ y + 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 3 \end{pmatrix}$ Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh $x' = x - 2 \rightarrow x = x' + 2$ $y' = y + 3 \rightarrow y = y' - 3$ Substitusi $x = x' + 2$ dan $y = y' - 3$ ke persamaan garis $3x - 2y + 6 = 0$ sehingga diperoleh $3(x' + 2) - 2(y' - 3) + 6 = 0$ $3x' + 6 - 2y' + 6 + 6 = 0$ $3x' - 2y' + 6 + 6 + 6 = 0$ $3x' - 2y' + 18 = 0$ $3x - 2y + 18 = 0$ Jadi persamaan bayangan garis m adalah $3x - 2y + 18 = 0$	**2** **3** **2** **3**

9.	Diketahui translasi kurva oleh $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan $y - x^2 - 1 = 0$, ditanyakan persamaan kurva awal. Karena kurva $y - x^2 - 1 = 0$ adalah bayangan dari kurva awal, maka kita bisa menuliskan persamaannya dengan: $y' - (x')^2 - 1 = 0$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Maka berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh: $x' = x - 1$ $y' = y + 2$ Substitusi $x' = x - 1$ dan $y' = y + 2$ kepersamaan kurva $y' - (x')^2 - 1 = 0$ sehingga diperoleh: $y + 2 - (x - 1)^2 - 1 = 0$ $y + 2 - (x^2 - 2x + 1) - 1 = 0$ $y + 2 - x^2 + 2x - 1 - 1 = 0$ $y - x^2 + 2x = 0$ Jadi persamaan kurva awalnya adalah $y - x^2 + 2x = 0$	**2** **3** **2** **3**
10.	Diketahui garis g : $2x - 3y + 6 = 0$ ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan : $2x - 3y + 6 = 0$ sehingga $A(x, y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}} A'(x', y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3 \\ y - 2 \end{pmatrix}$ Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh $x' = x + 3 \rightarrow x = x' - 3$ $y' = y - 2 \rightarrow y = y' + 2$ Substitusi $x = x' - 3$ dan $y = y' + 2$ ke persamaan garis $2x - 3y + 6 = 0$ sehingga diperoleh $2(x' - 3) - 3(y' + 2) + 6 = 0$ $2x' - 6 - 3y' - 6 + 6 = 0$ $2x' - 3y' - 6 - 6 + 6 = 0$ $2x' - 3y' - 6 = 0$ $2x - 3y - 6 = 0$ Jadi persamaan bayangan garis g adalah $2x - 3y - 6 = 0$	**2** **3** **2** **3**
	Skor Total	**100**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan$=\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ total}\ x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Anak-anak, isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami pengertian translasi?		
2.	Apakah kalian dapat menentukan translasi dari suatu titik?		
3.	Apakah kalian dapat menentukan translasi dari suatu kurva?		

Catatan:

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
REFLEKSI (PENCERMINAN)

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 2 ini kalian diharapkan dapat
1. Memahami pengertian refleksi (pencerminan)
2. Memahami sifat-sifat refleksi
3. Menentukan refleksi terhadap sumbu X
4. Menentukan refleksi terhadap sumbu Y
5. Menentukan refleksi terhadap titik O(0, 0)
6. Menentukan refleksi terhadap garis $y = x$
7. Menentukan refleksi terhadap garis $y = -x$
8. Menentukan refleksi terhadap garis $x = h$
9. Menentukan refleksi terhadap garis $y = k$

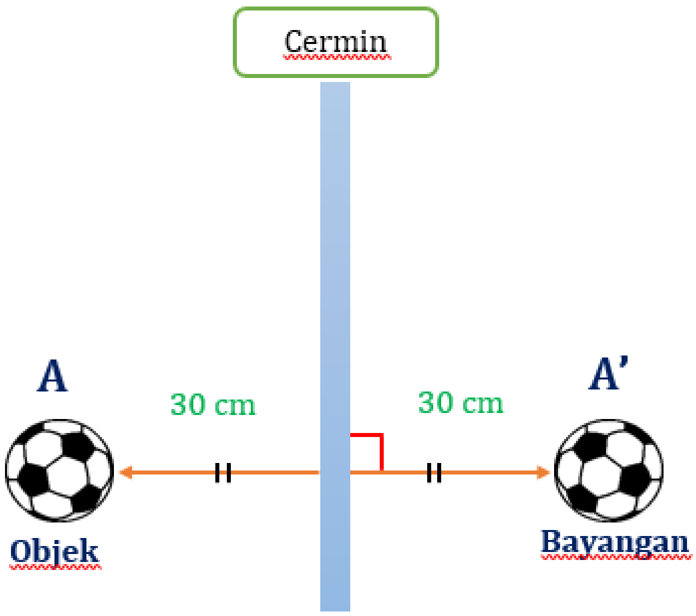
B. Uraian Materi

Pengertian dan Sifat-sifat Refleksi (Pencerminan)

Bercermin merupakan kegiatan yang sering kita lakukan dalam kehidupan sehari-hari. Tetapi pernahkan kita berpikir bagaimana bentuk bayangan yang dihasilkan pada cermin? Bagaimana jarak bayangan yang dihasilkan terhadap cermin? untuk menjawab pertanyaan tersebut, yuk kita simak ilustrasi 1 dan ilustrasi 2

Ilustrasi 1

Terdapat sebuah bola yang diletakkan dihadapan cermin dengan jarak 30 cm. Bagaimana hasil refleksi bola terhadap cermin? Bagaimana jarak bayangan bola terhadap cermin ?

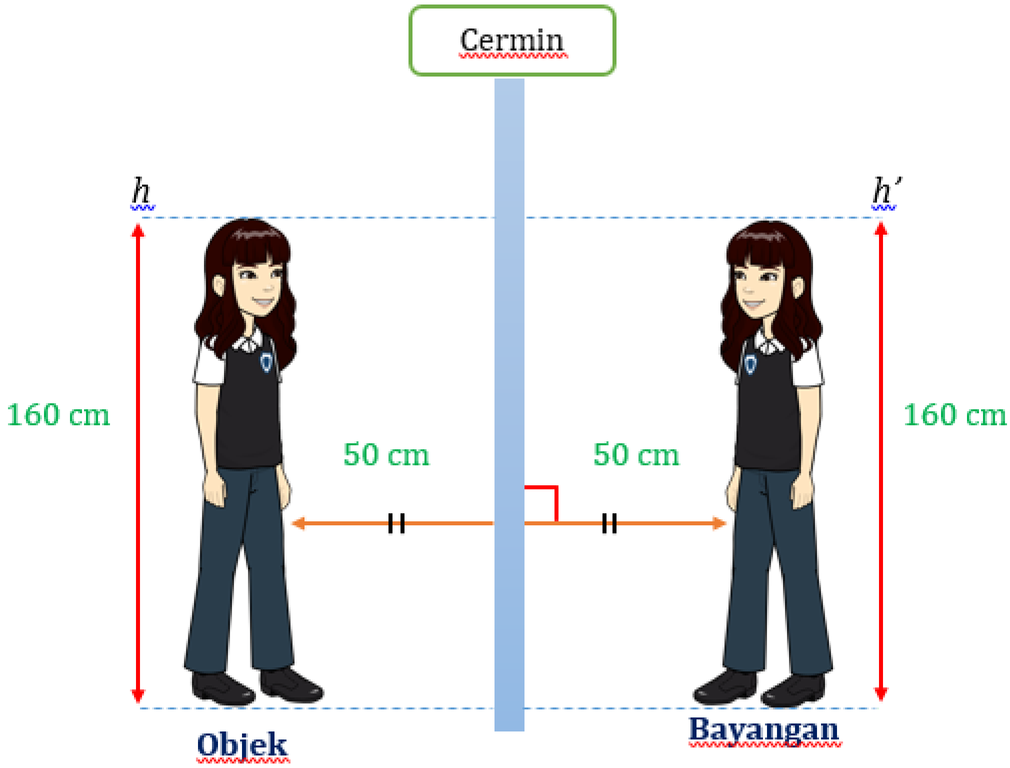


Gambar 5. Bola dihadapan cermin dengan jarak 30 cm
Sumber : Koleksi Pribadi

Seperti telihat pada Gambar 5 hasil bayangan bola terhadap cermin berupa bola. Jika kita misalkan bola sebagai titik A dan bayangan bola sebagai A', maka jarak titik A ke cermin sama dengan jarak titik A' ke cermin yaitu 30 cm. Selain itu, jika titik A dan titik A' kita hubungkan maka garis AA' akan tegak lurus dengan cermin dan menghasilkan titik yang sama dengan jarak yang sama.

Ilustrasi 2

Rani berdiri di depan cermin dengan jarak 50 cm dan tinggi Rani adalah 160 cm. Bagaimana hasil refleksi Rani terhadap cermin? Bagaimana jarak bayangan Rani terhadap cermin ?



Gambar 6. Rani berdiri dihadapan cermin
Sumber : Koleksi Pribadi

Anak-anakku, jika kita lihat pada cermin hasil bayangan Rani berupa sosok Rani dengan tinggi yang sama dan jarak bayangan Rani terhadap cermin sama dengan jarak Rani terhadap cermin yaitu 50 cm. Jika kita misalkan tinggi Rani sebagai garis h maka hasil refleksi berupa garis h'. Jika ujung-ujung garis h dan garis h' dihubungkan maka akan menghasilkan garis yang sejajar.

Berdasarkan ilustrasi 1 dan ilustrasi 2, kita dapat memahami konsep refleksi secara umum dan sifat-sifatnya.

Refleksi (pencerminan) adalah suatu transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin. Refleksi disimbolkan dengan M_a dengan a merupakan sumbu cermin.

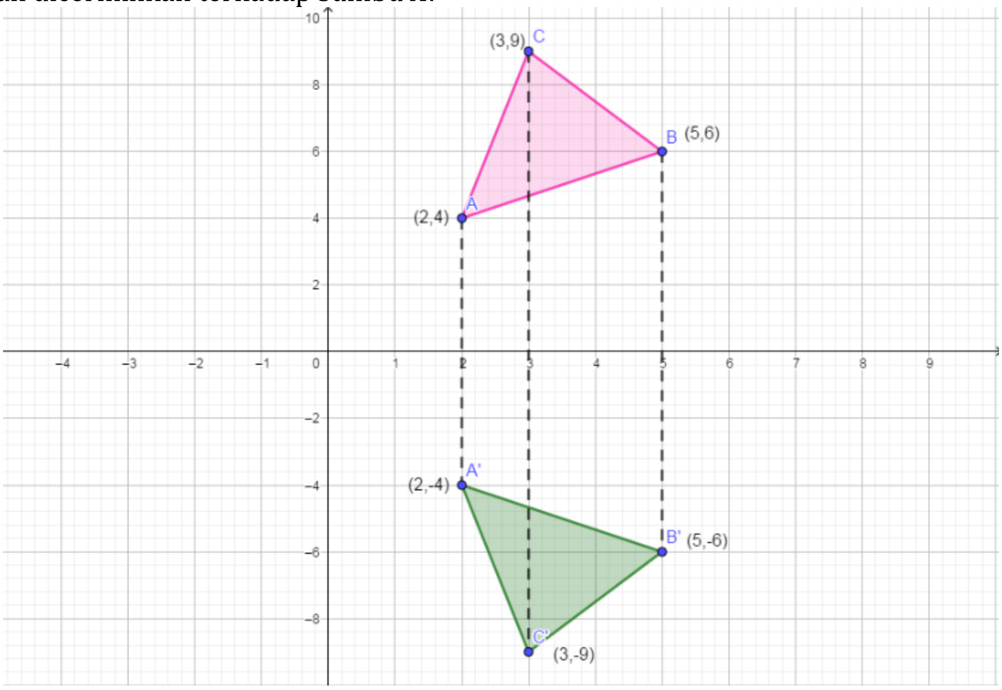
Sifat-sifat Refleksi:

1. Jarak dari titik asal ke cermin sama dengan jarak cermin ke titik bayangan
2. Garis yang menghubungkan titik asal dengan titik bayangan tegak lurus terhadap cermin
3. Garis-garis yang terbentuk antara titik-titik asal dengan titik-titik bayangan akan saling sejajar

Jenis-Jenis Refleksi

1. Refleksi terhadap sumbu x

Anak-anakku, kita akan menemukan konsep pencerminan terhadap sumbu x dengan mengamati pencerminan segitiga ABC pada gambar 7. Bagaimana bayangan segitiga ABC setelah dicerminkan terhadap sumbu X?



Gambar 7. Segitiga ABC direfleksikan terhadap sumbu x
Sumber : http://panduangeogebra.blogspot.com/

Pada gambar 7, kita dapat melihat bahwa segitiga A'B'C' merupakan hasil bayangan segitiga ABC setelah dicermikan terhadap sumbu x pada koordinat cartesius. Agar mudah memahami perubahan koordinat setiap titik pada segitiga, kita dapat melihat pada tabel 2 berikut.

Tabel 2. Koordinat pencerminan titik pada segitiga terhadap sumbu x

Titik	Koordinat Bayangan
A (2, 4)	A'(2, -4)
B (5, 6)	B'(5, -6)
C (3, 9)	C'(3, -9)

Berdasarkan pengamatan pada gambar 7 dan tabel 2, secara umum diperoleh

Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu x, maka akan menghasilkan bayangan $A'(x, -y)$

Anak-anakku, mari kita mencari matriks pencerminan terhadap sumbu x
Kita misalkan matriks transformasinya adalah $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow{M_x} A'(x, -y)$$
$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan dua matriks diperoleh:
$x = ax + by$ agar ruas kiri dan kanan bernilai sama maka $a = 1$ dan $b = 0$
Cek :
Substitusi $a = 1$ dan $b = 0$ ke persamaan $x = ax + by$

$$x = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$
$$x = x$$

$-y = cx + dy$ agar rus kiri dan kanan bernilai sama maka $c = 0$ dan $d = -1$
Cek :
Substitusi $c = 0$ dan $d = -1$ ke persamaan $-y = cx + dy$

$$-y = 0 \cdot x + (-1) \cdot y$$
$$-y = -y$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh matriks pencerminan terhadap sumbu x adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu x menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_x} A'(x', y')$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep pencerminan terhadap sumbu x perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $B(2,5)$ dicerminkan terhadap sumbu x maka bayangan titik B adalah ...

Pembahasan:

$$B(2,5) \xrightarrow{M_x} B'(x',y')$$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow$ Lakukan perkalian matriks

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Jadi bayangan titik B adalah $B'(2,-5)$

Contoh Soal 2

Jika garis $l: 3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu x maka hasil bayangan garis l adalah ...

Pembahasan;

Misal titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{M_x} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$x' = x \rightarrow x = x'$

$y' = -y \rightarrow y = -y'$

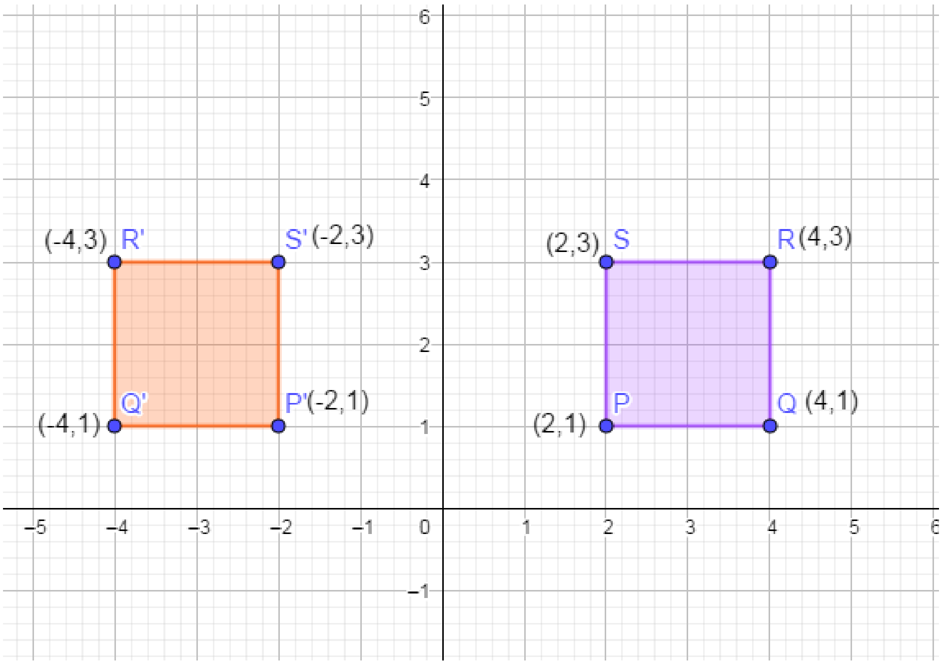
Substitusi $x = x'$ dan $y = -y'$ ke persamaan garis l

$$3x - 2y - 5 = 0$$
$$3(x') - 2(-y') - 5 = 0$$
$$3x' + 2y' - 5 = 0$$

Jadi, persamaan bayangan garis l adalah $3x + 2y - 5 = 0$

2. Refleksi terhadap sumbu y

Anak-anakku, untuk memahami konsep refleksi terhadap sumbu y mari kita amati pencerminan persegi PQRS. Bagaimana perubahan setiap titik P, Q, R, dan S pada persegi PQRS setelah dicerminkan terhadap sumbu y?



Gambar 8. Persegi PQRS direfleksikan terhadap sumbu y
Sumber : http://panduangeogebra.blogspot.com/

Pada gambar di atas, kita dapat melihat bahwa persegi P'Q'R'S' merupakan hasil bayangan persegi PQRS setelah dicermikan terhadap sumbu y pada koordinat cartesius. Agar mudah memahami perubahan koordinat setiap titik pada persegi dapat dilihat pada tabel 3 berikut.

Tabel 3. Koordinat pencerminan titik pada persegi terhadap sumbu y

Titik	Koordinat Bayangan
P (2, 1)	P'(-2, 1)
Q (4, 1)	Q'(-4, 1)
R (4, 3)	C'(-4, 3)
S (2, 3)	S'(-2, 3)

Berdasarkan pengamatan pada gambar 8 dan tabel 3, secara umum diperoleh

> Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu y, maka akan menghasilkan bayangan $A'(-x, y)$

Anak-anakku, mari kita mencari matriks pencerminan terhadap sumbu y
Kita misalkan matriks transformasinya adalah $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh

$$A(x, y) \xrightarrow{M_y} A'(-x, y)$$
$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

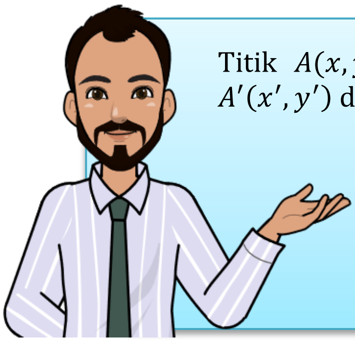
Dengan kesamaan dua matriks diperoleh:
$-x = ax + by$ agar ruas kiri dan kanan bernilai sama maka $a = -1$ dan $b = 0$
Cek :
Substitusi $a = -1$ dan $b = 0$ ke persamaan $-x = ax + by$

$$-x = (-1) \cdot x + 0 \cdot y$$
$$-x = -x$$

$y = cx + dy$ agar rus kiri dan kanan bernilai sama maka $c = 0$ dan $d = 1$
Cek :
Substitusi $c = 0$ dan $d = 1$ ke persamaan $y = cx + dy$

$$y = 0 \cdot x + 1 \cdot y$$
$$y = y$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh matriks pencerminan terhadap sumbu y adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu y menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_y} A'(x', y')$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep refleksi terhadap sumbu y perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $A(-4, -3)$ dicerminkan terhadap sumbu y maka bayangan titik A adalah ...

Pembahasan:

$$A(-4, -3) \xrightarrow{M_y} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\text{Lakukan perkalian matriks}}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(4, -3)$

Contoh Soal 2:

Jika garis $l: 3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu y maka hasil bayangan garis l adalah ...

Pembahasan;
Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow{M_y} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$x' = -x \rightarrow x = -x'$

$y' = y \rightarrow y = y'$

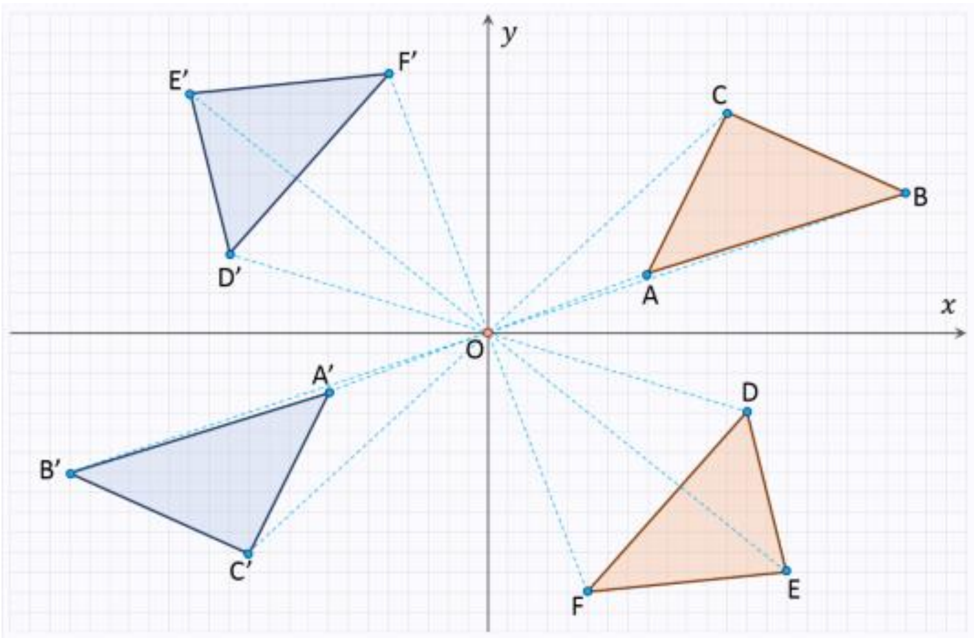
Substitusi $x = -x'$ dan $y = y'$ ke persamaan garis l

$$3x - 2y - 5 = 0$$
$$3(-x') - 2(y') - 5 = 0$$
$$-3x' - 2y' - 5 = 0$$
$$3x + 2y + 5 = 0$$

Jadi, persamaan bayangan garis l adalah $3x + 2y + 5 = 0$

3. Refleksi terhadap titik asal O(0, 0)

Anak-anakku, untuk memahami konsep refleksi terhadap titik asal O(0, 0) mari kita amati pencerminan segitiga ABC dan segitiga DEF. Bagaimana perubahan setiap titik A, B, C pada segitiga ABC dan titik D, E, F pada segitiga DEF setelah dicerminkan terhadap titik asal yaitu titik O(0, 0)?



Gambar 9. Segitiga ABC dan segitiga PQRS direfleksikan terhadap titik asal O(0, 0)
Sumber : e-modul Matematika kelas XI

Pada gambar 9, kita dapat melihat bahwa segitiga A'B'C' merupakan bayangan dari segitiga ABC setelah dicerminkan terhadap titik asal O(0,0). Segitiga D'E'F' merupakan hasil bayangan segitiga DEF setelah dicerminkan terhadap titik asal O(0,0). Anak-anak untuk mudah memahami perubahan koordinat setiap titik yang terjadi pada segitiga ABC dan segitiga DEF dapat dilihat pada tabel 4.

Tabel 4. Koordinat pencerminan titik
pada segitiga terhadap titik asal O(0, 0)

Titik	Koordinat Bayangan
A (8, 3)	A'(-8, -3)
B (14, 7)	B'(-14, -7)
C (12,11)	C'(-12, -11)
D (13, -4)	D'(-13, 4)
E (15, -12)	E'(-15, 12)
F (5, -13)	F' (-5, 13)

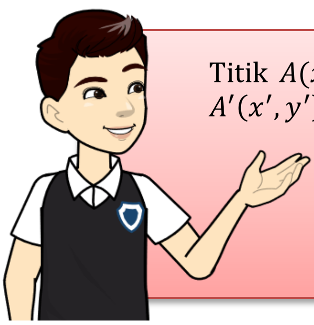
Berdasarkan pengamatan pada gambar 9 dan tabel 4, secara umum diperoleh

Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap titik asal O(0, 0), maka akan menghasilkan bayangan $A'(-x, -y)$

Anak-anakku, mari kita mencari matriks pencerminan terhadap titik asal O(0, 0)
Kita misalkan matriks transformasinya adalah $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{O(0,0)}} A'(-x, y)$$
$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan dua matriks diperoleh:
$-x = ax + by$ agar ruas kiri dan kanan bernilai sama maka $a = -1$ dan $b = 0$
Cek :
Substitusi $a = -1$ dan $b = 0$ ke persamaan $-x = ax + by$
$$-x = (-1) \cdot x + 0 \cdot y$$
$$-x = -x$$
$-y = cx + dy$ agar rus kiri dan kanan bernilai sama maka $c = 0$ dan $d = -1$
Cek :
Substitusi $c = 0$ dan $d = 1$ ke persamaan $y = cx + dy$
$$-y = 0 \cdot x + (-1) \cdot y$$
$$-y = -y$$
Berdasarkan uraian di atas diperoleh matriks pencerminan terhadap titik asal O(0, 0) adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap titik asal O(0,0) menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{O(0,0)}} A'(x', y')$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep refleksi terhadap titik asal O(0,0) perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $A(-4,-3)$ dicerminkan terhadap titik asal O(0, 0) maka bayangan titik A adalah ...

Pembahasan:

$$A(-4,-3) \xrightarrow{M_{O(0,0)}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(4,3)$

Contoh Soal 2:

Jika garis $l: 3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap titik asal O(0, 0) maka hasil bayangan garis l adalah ...

Pembahasan:

Misal titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{M_{O(0,0)}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -x \rightarrow x = -x'$$
$$y' = -y \rightarrow y = -y'$$

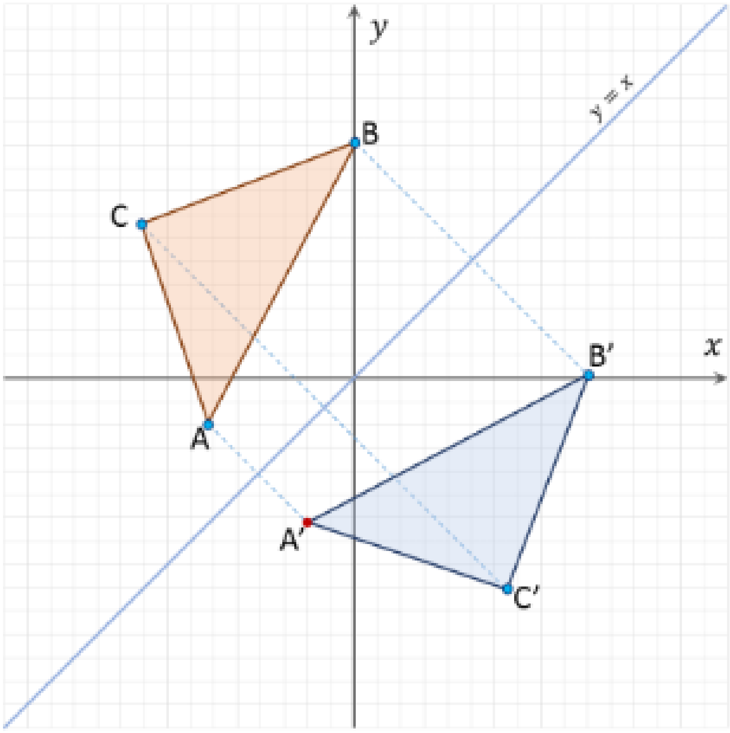
Substitusi $x = -x'$ dan $y = -y'$ ke persamaan garis l

$$3x - 2y - 5 = 0$$
$$3(-x') - 2(-y') - 5 = 0$$
$$-3x' + 2y' - 5 = 0$$

Jadi persamaan bayangan garis l adalah $-3x' + 2y' - 5 = 0$

4. Refleksi terhadap garis $y = x$

Anak-anakku, untuk memahami konsep refleksi terhadap garis $y = x$ mari kita amati pencerminan segitiga ABC. Bagaimana perubahan setiap titik A, B, C pada segitiga ABC setelah dicerminkan terhadap garis $y = x$?



Gambar 10. Segitiga ABC direfleksikan terhadap garis $y = x$
Sumber : e-modul Matematika kelas XI

Pada gambar 10, kita dapat melihat bahwa segitiga A'B'C' merupakan bayangan dari segitiga ABC setelah dicerminkan terhadap garis $y = x$. Anak-anak, untuk mudah memahami peurbahan koordinat setiap titik A, B dan C yang terjadi pada segitiga ABC dapat dilihat pada tabel 5.

Tabel 5. Koordinat pencerminan titik pada segitiga terhadap garis $y = x$

Titik	Koordinat Bayangan
A (-6, -2)	A'(-2, -6)
B (0, 10)	B'(10, 0)
C (-9,7)	C'(7, -9)

Berdasarkan pengamatan pada gambar 10 dan tabel 5, secara umum diperoleh

Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$, maka akan menghasilkan bayangan $A'(y, x)$

Anak-anakku, mari kita mencari matriks pencerminan terhadap garis $y = x$
Kita misalkan matriks transformasinya adalah $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{y=x}} A'(y, x)$$
$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan dua matriks diperoleh:

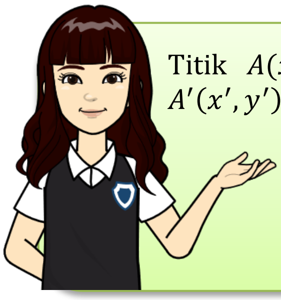
$y = ax + by$ agar ruas kiri dan kanan bernilai sama maka $a = 0$ dan $b = 1$
Cek :
Substitusi $a = 0$ dan $b = 1$ ke persamaan $y = ax + by$

$$y = 0 \cdot x + 1 \cdot y$$
$$y = y$$

$x = cx + dy$ agar rus kiri dan kanan bernilai sama maka $c = 1$ dan $d = 0$
Cek :
Substitusi $c = 1$ dan $d = 0$ ke persamaan $x = cx + dy$

$$x = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$
$$x = x$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh matriks pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{y=x}} A'(x', y')$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep refleksi terhadap garis $y = -x$ perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $P(-5, 4)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ maka bayangan titik P adalah ...

Pembahasan:

$$P(-5, 4) \xrightarrow{M_{y=x}} P'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik P adalah $P'(4, -5)$

Contoh Soal 2:

Jika garis l: $3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = x$maka hasil bayangan garis l adalah ...

Pembahasan:
Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{y=x}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = y \rightarrow y = x'$$
$$y' = x \rightarrow x = y'$$

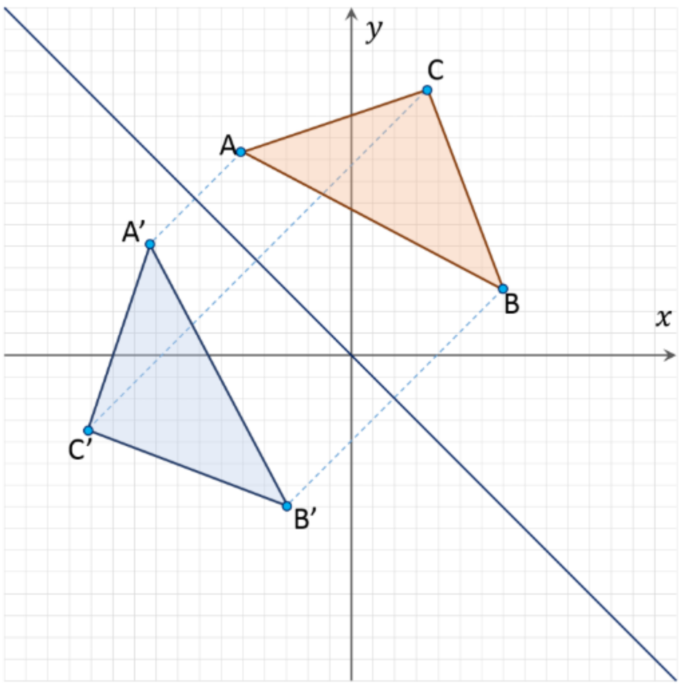
Substitusi $x = y'$ dan$y = x'$ ke persamaan garis l

$$3x - 2y - 5 = 0$$
$$3(y') - 2(x') - 5 = 0$$
$$3y' - 2x' - 5 = 0$$
$$-2x' + 3y' - 5 = 0$$
$$-2x + 3y - 5 = 0$$

Jadi persamaan bayangan garis l adalah $-2x + 3y - 5 = 0$

5. Refleksi terhadap garis $y = -x$

Anak-anakku, untuk memahami konsep refleksi terhadap garis $y = -x$ mari kita amati pencerminan segitiga ABC pada gambar 11. Bagaimana perubahan setiap titik A, B, C pada segitiga ABC setelah dicerminkan terhadap garis $y = -x$?



Gambar 11. Segitiga ABC direfleksikan terhadap garis $y = x$
Sumber : e-modul Matematika kelas XI

Pada gambar 11, kita dapat melihat bahwa segitiga A'B'C' merupakan bayangan dari segitiga ABC setelah dicerminkan terhadap garis $y = -x$. Anak-anak, untuk mudah memahami perubahan koordinat setiap titik A, B dan C yang terjadi pada segitiga ABC dapat dilihat pada tabel 6.

Tabel 6. Koordinat pencerminan titik pada segitiga terhadap garis $y = -x$

Titik	Koordinat Bayangan
A (-5,9)	A'(5, -9)
B (7,3)	B'(-3, -7)
C (4,12)	C'(-12, -4)

Berdasarkan pengamatan pada gambar 11 dan tabel 6, secara umum diperoleh

> Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$, maka akan menghasilkan bayangan $A'(-y, -x)$

Anak-anakku, mari kita mencari matriks pencerminan terhadap garis $y = -x$

Kita misalkan matriks transformasinya adalah $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh

$$A(x, y) \overset{M_{y=-x}}{\rightarrow} A'(y, x)$$
$$\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan dua matriks diperoleh:

$-y = ax + by$ agar ruas kiri dan kanan bernilai sama maka $a = 0$ dan $b = -1$

Cek :

Substitusi $a = 0$ dan $b = -1$ ke persamaan $-y = ax + by$

$$-y = 0 \cdot x + (-1) \cdot y$$
$$-y = -y$$

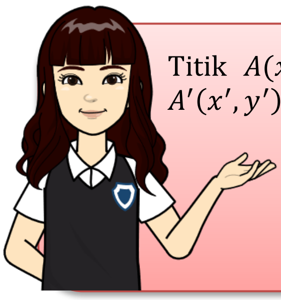
$-x = cx + dy$ agar rus kiri dan kanan bernilai sama maka $c = -1$ dan $d = 0$

Cek :

Substitusi $c = -1$ dan $d = 0$ ke persamaan $-x = cx + dy$

$$-x = (-1) \cdot x + 0 \cdot y$$
$$-x = -x$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh matriks pencerminan terhadap garis $y = -x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$



Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{y=-x}} A'(x', y')$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep refleksi terhadap garis $y = -x$ perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $P(-5, 4)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ maka bayangan titik P adalah

$$P(-5,4) \xrightarrow{M_{y=-x}} P'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik P adalah $P'(-4, 5)$

Contoh Soal 2:

Jika garis $g: 4x - 3y + 11 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$maka hasil bayangan garis l adalah ...

Pembahasan:

Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $4x - 3y + 11 = 0$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{M_{y=-x}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -y \rightarrow y = -x'$$
$$y' = -x \rightarrow x = -y'$$

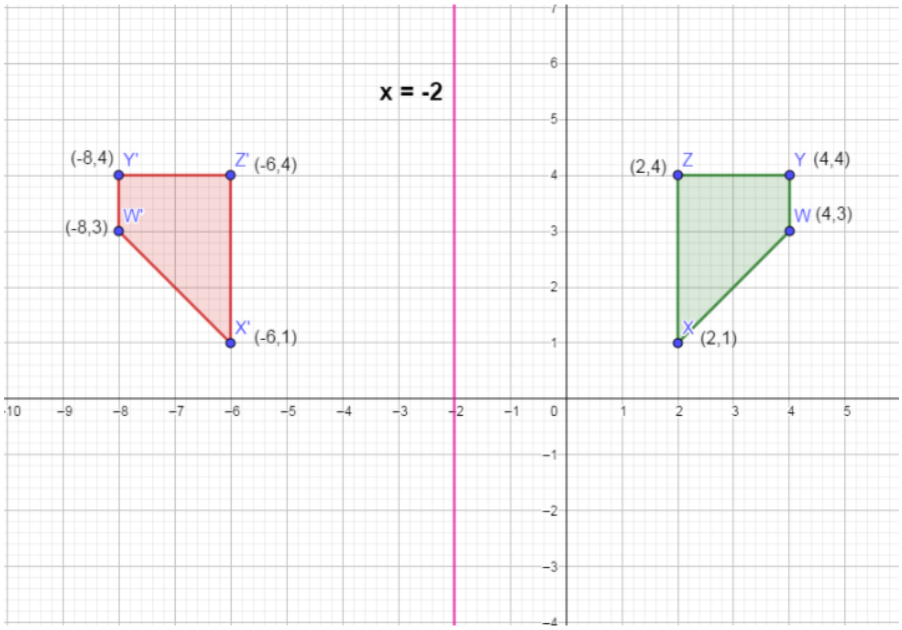
Substitusi $x = -y'$dan$y = -x'$ ke persamaan garis l

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 11 &= 0 \\ 4(-y') - 3(-x') + 11 &= 0 \\ -4y' + 3x' + 11 &= 0 \\ 3x' - 4y' + 11 &= 0 \\ 3x - 4y + 11 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi persamaan bayangan garis g adalah $3x - 4y + 11 = 0$

6. Refleksi terhadap garis $x = h$

Anak-anakku, untuk memahami konsep refleksi terhadap garis $x = h$ mari kita amati pencerminan segi empat XWYZpada gambar 12. Bagaimana perubahan setiap titik X, W, Y, dan Z pada segi empat XWYZ setelah dicerminkan terhadap garis $x = h$?



Gambar 12. Segi empat XWYZ direfleksikan terhadap garis $x = h$
Sumber : http://panduangeogebra.blogspot.com/

Pada gambar 12, kita dapat melihat bahwa segiempat X'W'Y'Z' merupakan hasil pencerminan dari segiempat XWYZ setelah direfleksikan terhadap garis $x = h$. Anak-anak, untuk mudah memahami perubahan koordinat setiap titik X, Y, W dan Z yang terjadi pada segiempat XWYZ dapat dilihat pada tabel 7.

Tabel 7. Koordinat pencerminan titik pada segi empat terhadap garis $x = h$

Titik	Koordinat Bayangan
X (2, 1)	X'(-6, 1)
Y (4,4)	Y'(-8, 4)
W (4, 3)	W'(-8, 3)
Z (2, 4)	Z'(-6, 4)

Berdasarkan pengamatan pada gambar 12 dan tabel 7, terlihat perubahan titik terjadi pada koordinat x sedangkan untuk koordinat y tetap, sehingga secara umum diperoleh

Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $x = h$, maka akan menghasilkan bayangan $A'(2h - x, y)$

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $x = h$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{x=h}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep refleksi terhadap garis $x = h$ perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $P(5, 2)$ dicerminkan terhadap garis $x = 2$ maka bayangan titik P adalah ...

Pembahasan:

$$P(5,2) \xrightarrow{M_{x=2}} P'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 4 \\ 2 + 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik P adalah $P'(-1, 2)$

Contoh Soal 2:

Jika kurva $y = x^2 + 3x - 5$ dicerminkan terhadap garis $x = 2$ maka hasil bayangan kurva adalah ...

Pembahasan:

Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $y = x^2 + 3x - 5$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{M_{x=2}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 4 \\ y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -x + 4 \rightarrow x = 4 - x'$$
$$y' = y \rightarrow y = y'$$

Substitusi $x = 4 - x'$dan $y = y'$ ke persamaan kurva $y = x^2 + 3x - 5$

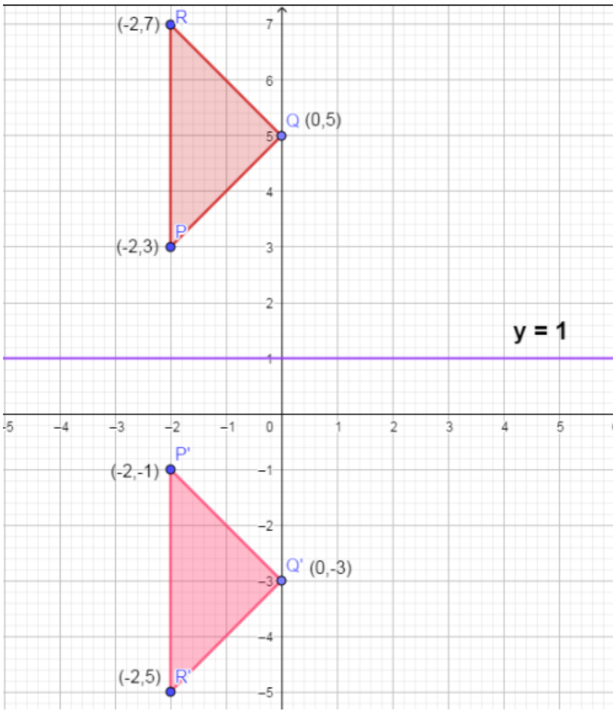
$$y' = (4 - x')^2 + 3(4 - x') - 5$$
$$y' = (4 - x')(4 - x') + 3(4 - x') - 5$$
$$y' = 16 - 4x' - 4x' + x'^2 + 12 - 3x' - 5$$
$$y' = x'^2 - 4x' - 4x' - 3x' + 16 + 12 - 5$$
$$y' = x'^2 - 11x' + 23$$

$$y = x^2 - 11x + 23$$

Jadi persamaan bayangan garis g adalah $y = x^2 - 11x + 23$

7. Refleksi terhadap garis $y = k$

Anak-anakku, untuk memahami konsep refleksi terhadap garis $y = k$ mari kita amati pencerminan segitiga PQR pada gambar 13. Bagaimana perubahan setiap titik P, Q, dan R pada segitiga PQR setelah dicerminkan terhadap garis $y = k$?



Gambar 13. Segitigs PQR direfleksikan terhadap garis $y = k$
Sumber : http://panduangeogebra.blogspot.com/

Pada gambar 13, kita dapat melihat bahwa segitiga P'Q'R' merupakan hasil pencerminan dari segitiga PQR setelah direfleksikan terhadap garis $y = k$. Anak-anak, untuk mudah memahami perubahan koordinat setiap titik P, Q dan R yang terjadi pada segitiga PQR dapat dilihat pada tabel 8.

Tabel 8. Koordinat pencerminan titik pada segitiga terhadap garis $y = k$

Titik	Koordinat Bayangan
P (-2, 3)	P'(-2, -1)
Q (0, 5)	Q'(0, -3)
R (-2, 7)	R'(-2, 5)

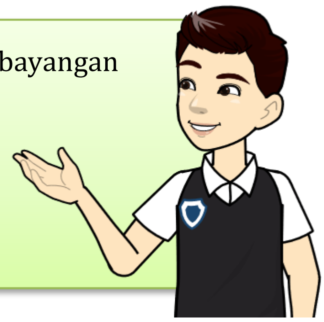
Berdasarkan pengamatan pada gambar 13 dan tabel 8, terlihat perubahan titik terjadi pada koordinat x sedangkan untuk koordinat y tetap, sehingga secara umum diperoleh

Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = k$, maka akan menghasilkan bayangan $A'(x, 2k - y)$

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = k$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x,y) \xrightarrow{M_{y=k}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$



Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep refleksi terhadap garis $y = k$ perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $P(5, 2)$ dicerminkan terhadap garis $y = 2$ maka bayangan titik P adalah ...

Pembahasan:

$$P(5,2) \xrightarrow{M_{y=2}} P'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 0 \\ -2 + 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik P adalah $P'(5, 2)$

Contoh Soal 2:

Jika kurva $y = x^2 + 3x - 5$ dicerminkan terhadap garis $y = 2$ maka hasil bayangan kurva adalah ...

Pembahasan:

Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $y = x^2 + 3x - 5$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{M_{y=2}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y+4 \end{pmatrix}$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = x \rightarrow x = x'$$
$$y' = -y + 4 \rightarrow y = 4 - y'$$

Substitusi $x = x'$ dan $y = 4 - y'$ ke persamaan kurva $y = x^2 + 3x - 5$

$$(4 - y') = (x')^2 + 3(x') - 5$$
$$-y' = x'^2 + 3x' - 5 - 4$$
$$-y' = x'^2 + 3x' - 9$$
$$y' = -x'^2 + 3x' - 9$$
$$y = -x^2 + 3x - 9$$

Jadi persamaan bayangan garis g adalah $y = -x^2 + 3x - 9$

C. Rangkuman

1. **Refleksi (pencerminan)** adalah suatu transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin. Refleksi disimbolkan dengan M_a dengan a merupakan sumbu cermin.
2. **Sifat-sifat Refleksi:**
   1. Jarak dari titik asal ke cermin sama dengan jarak cermin ke titik bayangan
   2. Garis yang menghubungkan titik asal dengan titik bayangan tegak lurus terhadap cermin
   3. Garis-garis yang terbentuk antara titik-titik asal dengan titik-titik bayangan akan saling sejajar
3. **Jenis-jenis refleksi**

   Misalkan koordinat titik asal A(x, y) akan direfleksikan tehadap sumbu X, sumbu Y, titik asal O (0,0), garis $y = x$, garis $y = -x$, garis $x = h$, garis $y = k$, dan garis $y = x \tan \alpha$ akan menghasilkan bayangan sebagai berikut

efleksi	Titik Bayangan	Persamaan Matriks Transformasi
Sumbu X	$A'(x, -y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Sumbu Y	$A'(-x, y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Titik asal O (0,0)	$A'(-x, -y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Garis $y = x$	$A'(y, x)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Garis $y = -x$	$A'(-y, -x)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Garis $x = h$	$A'(2h - x, y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$
Garis $y = k$	$A'(x, 2k - y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$

D. Latihan Soal

Anak- anak, untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap translasi kerjakan soal latihan berikut:

Soal Essay

1. Titik $A(3,-5)$ dicerminkan terhadap titik asal $(0,0)$. Koordinat bayangan titik A adalah …
2. Titik $P(5,-4)$ dicerminkan terhadap garis $y=x$. Koordinat bayangan titik P adalah …
3. Titik $Q(-3,7)$ dicerminkan terhadap garis $y=-x$. Koordinat bayangan titik Q adalah …
4. Titik $S(4,7)$ dicerminkan terhadap garis $y=2$. Koordinat bayangan titik S adalah …
5. Tentukan koordinat titik asal pada titik $B'(5,2)$ setelah direfleksi terhadap garis $x=3$
6. Tentukan bayangan bangun segitiga ABC dengan $A(1,2)$, $B(3,-2)$ dan $C(4,1)$ akan direfleksikan oleh M_y
7. Jika garis $2y-3x+6=0$ direfleksikan terhadap sumbu x, maka persamaan bayangan garis adalah …
8. Jika garis $x-2y-3=0$ dicerminkan terhadap sumbu Y, maka persamaan bayangannya adalah …
9. Parabola $y=x^2-3x+2$ dicerminkan terhadap sumbu y. Tentukan persamaan bayangan parabola
10. Lingkaran $x^2+y^2-3x+5y-3=0$ dicerminkan terhadap garis $y=-x$. Persamaan bayangan lingkaran adalah …

Pembahasan :

No	Pembahasan Soal Uraian	Skor
1.	Titik $A(3,-5)$dicerminkan terhadap titik asal $(0,0)$ $A(3,-5) \xrightarrow{M_{(0,0)}} A'(x',y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \rightarrow$ Lakukan perkalian matriks $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ Jadi bayangan titik A adalah $A'(-3,5)$	**5** **5**
2.	Titik $P(5,-4)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ $P(5,-4) \xrightarrow{M_{y=x}} P'(x',y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ Jadi, bayangan titik P adalah $P'(-4,5)$	**5** **5**
3.	Titik $Q(-3,7)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ **Pembahasan:** $Q(-3,7) \xrightarrow{M_{y=-x}} P'(x',y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ Jadi, bayangan titik Q adalah $Q'(-7,3)$	**5** **5**
4.	Titik $S(4,7)$ dicerminkan terhadap garis $y = 2$ $S(5,2) \xrightarrow{M_{y=2}} S'(x',y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 \\ -7+4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ Jadi, bayangan titik S adalah $S'(4,-3)$	**2** **3** **5**
5.	Titik $B(x,y)$ direfleksikan terhadap garis $x = 2$ menghasilkan bayangan titik $B'(5,2)$	

	Dengan menggunakan konsep refleksi pada garis $x = 2$ diperoleh $B(x, y) \xrightarrow{M_{x=2}} B'(5, 2)$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 4 \\ y + 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 4 \\ y \end{pmatrix}$ Dengan kesamaan dua matriks diperoleh $5 = -x + 4$ dan $y = 2$ $x = 4 - 5$ $x = -1$ Jadi, Koordinat titik asal B adalah $(-1, 2)$	**2** **3** **3** **2**
6.	Diketahui segitiga ABC dengan $A(1, 2)$, $B(3, -2)$ dan $C(4,1)$ akan direfleksikan oleh M_y Kita gunakan konsep refleksi oleh M_y sebagai berikut $A(1, 2) \xrightarrow{M_y} A'(x', y')$ $B(3, -2) \xrightarrow{M_y} B'(x', y')$ $C(4, 1) \xrightarrow{M_y} C'(x', y')$ Selanjutnya, koordinat titik A, B, dan C pada segitiga kita tuliskan dalam bentuk sebuah matriks. Karena terdapat 3 titik sehingga matriks yang akan dibuat berordo 2×3 dengan ketentuan sebagai berikut : 1. Baris pertama matrik diisi oleh komponen x 2. Baris kedua matriks diisi oleh komponen y 3. Kolom pertama diisi koordinat titik A 4. Kolom kedua diisi koordinat titik B 5. Kolom ketiga diisi koordinat titik C Sehingga matriks yang terbentuk adalah $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Matriks berikut akan dikalikan dengan bentuk matriks untuk refleksi M_y seperti berikut ini $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ Jadi, bayangan titik A, B, dan C berturut-turut adalah $A'(-1, 2), B'(-3, -2)$ dan $C'(-4, 1)$	**2** **3** **5**
7	Garis $2y - 3x + 6 = 0$ direfleksikan terhadap sumbu x Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $2y - 3x + 6 = 0$ sehingga $A(x, y) \xrightarrow{M_x} A'(x', y')$	

	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh $x' = x \rightarrow x = x'$ $y' = -y \rightarrow y = -y'$ Substitusi $x = x'$ dan $y = -y'$ ke persamaan garis $2y - 3x + 6 = 0$ $2(-y') - 3(x') + 6 = 0$ $-2y' - 3x' + 6 = 0$ $-3x' - 2y' + 6 = 0$ kalikan dengan -1 sehingga tanda menjadi berubah $3x' + 2y' - 6 = 0$ $3x' + 2y' - 6 = 0$ $3x + 2y - 6 = 0$ Jadi, persamaan bayangan garis l adalah $3x + 2y - 6 = 0$	**3** **2** **5**
8	Garis $x - 2y - 3 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu y Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $x - 2y - 3 = 0$ sehingga $A(x, y) \xrightarrow{M_y} A'(x', y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh $x' = -x \rightarrow x = -x'$ $y' = y \rightarrow y = y'$ Substitusi $x = -x'$ dan $y = y'$ ke persamaan garis $x - 2y - 3 = 0$ $-x' - 2(y') - 3 = 0$ $-x' - 2y' - 3 = 0$ Kalikan persamaan $-x' - 2y' - 3 = 0$ dengan -1 sehingga diperoleh $x' + 2y' + 3 = 0$ $x + 2y + 3 = 0$ Jadi, persamaan bayangan garis $x - 2y - 3 = 0$ adalah $x + 2y + 3 = 0$	**3** **2** **5**
9	Parabola $y = x^2 - 3x + 2$ dicerminkan terhadap sumbu y Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan parabola $y = x^2 - 3x + 2$ sehingga $A(x, y) \xrightarrow{M_y} A'(x', y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh $x' = -x \rightarrow x = -x'$ $y' = y \rightarrow y = y'$ Substitusi $x = -x'$ dan $y = y'$ ke persamaan parabola $y = x^2 - 3x + 2$ $y' = (-x')^2 - 3(-x') + 2$ $y' = x'^2 + 3x' + 2$	**3** **2** **5**

	$$y = x^2 + 3x + 2$$ Jadi, persamaan bayangan parabola $y = x^2 - 3x + 2$ adalah $y = x^2 + 3x + 2$	
10	Lingkaran $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 3 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 3 = 0$ sehingga $$A(x,y) \xrightarrow{M_{y=-x}} A'(x',y')$$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$ Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh $$x' = -y \rightarrow y = -x'$$ $$y' = -x \rightarrow x = -y'$$ Substitusi $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{y}'$ dan $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}'$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 3 = 0$ $$(-y')^2 + (-x')^2 - 3(-y') + 5(-x') - 3 = 0$$ $$y'^2 + x'^2 + 3y - 5x' - 3 = 0$$ $$x'^2 + y'^2 - 5x' + 3y' - 3 = 0$$ $$x^2 + y^2 - 5x + 3y - 3 = 0$$ Jadi persamaan bayangan lingkaran $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 3 = 0$ adalah $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 3 = 0$	**3** **2** **5**
	Skor Total	**100**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan=$\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ total}\ x\ 100\%$

Kriteria

90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Anak-anak, isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami pengertian dari refleksi?		
2.	Apakah kalian memahami sifat-sifat refleksi ?		
3.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap sumbu X dari suatu titik?		
4.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap sumbu Y dari suatu titik?		
5.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap garis $y = x$ dari suatu titik?		
6.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap garis $y = -x$ dari suatu titik?		
7.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap titik O(0,0) dari suatu titik?		
8.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap garis $x = a$ dari suatu titik?		
9.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap garis $y = b$ dari suatu titik?		
10.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap sumbu X dari suatu kurva?		
11.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap sumbu Y dari suatu kurva?		
12.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap garis $y = x$ dari suatu kurva?		
13.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap garis $y = -x$ dari suatu kurva?		
14.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap titik O(0,0) dari suatu kurva?		
15.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap garis $x = a$ dari suatu kurva?		
16.	Apakah kalian dapat menentukan refleksi terhadap garis $y = b$ dari suatu kurva?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
ROTASI (PERPUTARAN)

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 3 ini kalian diharapkan dapat :
1. Memahami tentang pengertian rotasi.
2. Menentukan rotasi titik terhadap pusat $(0, 0)$
3. Menentukan rotasi kurva terhadap pusat $(0, 0)$
4. Menentukan rotasi titik terhadap pusat (a, b)
5. Menentukan rotasi kurva terhadap pusat (a, b)

B. Uraian Materi

Pengertian Rotasi

Pada kegiatan pembelajaran 3 ini kita akan membahas gerak berputar atau dalam transformasi geometri disebut rotasi. Komedi putar, gangsing, kipas angin, dan jarum jam merupakan beberapa contoh objek yang bergerak dengan berputar. Gambar 14 menunjukkan anak-anak yang sedang bermain gangsing. Ketika bermain, gangsing dapat diputar serah jarum jam ataupun berlawanan arah jarum jam dengan pusat tertentu. Dalam matematika proses memutar gangsing termasuk dalam rotasi.

Gambar 14 Anak-anak bermain gangsing
Sumber : https://lembagakebudayaanbetawi.org/gangsing-gasing/

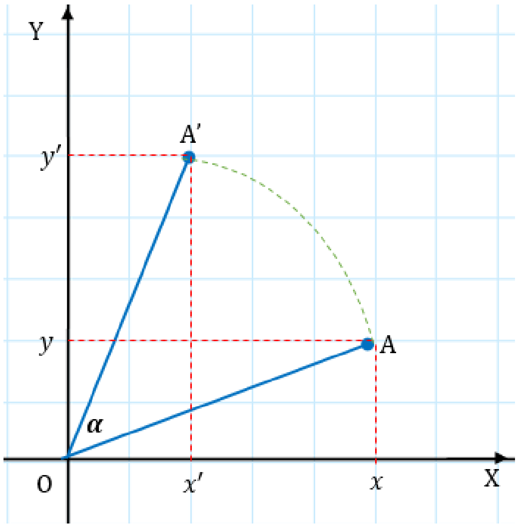
Rotasi adalah transformasi yang memindahkan titik-titik dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh α terhadap suatu titik tertentu.
Rotasi pada bidang datar ditentukan oleh :
1. Titik pusat rotasi
2. Besar sudut rotasi
3. Arah sudut rotasi

Sudut rotasi merupakan sudut antara garis yang menghubungkan titik asal dan pusat rotasi yang menghubungkan titik bayangan dan pusat rotasi.
Jika **arah rotasi** diputar **searah jarum jam** maka besar sudut rotasi negatif $(-\boldsymbol{\alpha})$
Jika **arah rotasi** diputar **berlawanan jarum jam** maka besar sudut rotasi poitif $(\boldsymbol{\alpha})$

Rotasi dinotasikan dengan $\boldsymbol{R(P,\alpha)}$ dimana P merupakan pusat rotasi dan α besar sudut rotasi.

Rotasi terhadap titik pusat $(0, 0)$

Anak-anakku, untuk memahami bentuk rotasi pada titik pusat (0, 0), kita bisa amati perpindahan titik A pada gambar 15.



Gambar 15 Rotasi titik A terhadap titik puat O(0, 0)
Sumber : Koleksi pribadi

Misalkan terdapat sebuah titik $A(x, y)$ akan dirotasikan sebesar α dengan pusat $(0, 0)$ dan akan menghasilkan titik $A'(x', y')$ dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[O(0,0),\alpha]}} A'(x', y')$$

Titik (x, y) dirotasikan sebesar α terhadap titik pusat $(0, 0)$ menghasilkan bayangan titik (x', y') dengan aturan

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep rotasi terhadap titik pusat (0, 0) perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Tentukan bayangan titik $C(3, 1)$ jika dirotasikan berlawanan arah jarum jam sebesar $90°$ dan berpusat $(0, 0)$!

Pembahasan :
Koordinat titik $C(3, 1)$ akan dirotasikan $R_{[O(0,0),90°]}$

$$C(3, 1) \xrightarrow{R_{[O(0,0),90°]}} C'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, hasil bayangan titik C adalah $C'(-1, 3)$

Contoh Soal 2:

Garis $3x - 4y + 12 = 0$ dirotasikan sebesar $180°$ terhadap titik pusat $(0, 0)$. Persamaan garis hasil rotasi adalah ...

Pembahasan :

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[O(0,0),180^\circ]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -x \to x = -x'$$
$$y' = -y \to y = -y'$$

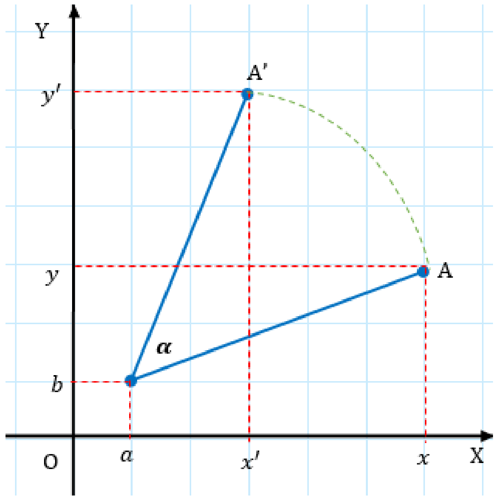
Substitusi $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}'$dan $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y}'$ ke persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ diperoleh

$$3(-x') - 4(-y') + 12 = 0$$
$$-3x' + 4y' + 12 = 0$$
$$-3x + 4y + 12 = 0$$

Jadi, persamaan garis hasil rotasi adalah $-3x + 4y + 12 = 0$

Rotasi terhadap titik pusat $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Anak-anakku, untuk memahami bentuk rotasi pada titik pusat (a, b), kita bisa amati perpindahan titik A pada gambar 16.



Gambar 16 Rotasi titik A terhadap titik puat O(a, b)
Sumber : Koleksi pribadi

Misalkan terdapat sebuah titik $A(x, y)$ akan dirotasikan sebesar α dengan pusat (a, b) dan akan menghasilkan titik $A'(x', y')$ dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[(a,b),\alpha]}} A'(x', y')$$

Titik (x, y) dirotasikan sebesar α terhadap titik pusat (a, b) menghasilkan bayangan titik (x', y') dengan aturan

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep rotasi terhadap titik pusat (a, b) perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Tentukan bayangan titik $C(3, 1)$ jika dirotasikan berlawanan arah jarum jam sebesar 90° dan berpusat $(2, 4)$!

Pembahasan :
Koordinat titik $C(3, 1)$ akan dirotasikan $R_{[(2,4),90°]}$

$$C(3, 1) \xrightarrow{R_{[(2,4),90°]}} C'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 1+4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, hasil bayangan titik C adalah $C'(4,5)$

Contoh Soal 2:

Garis $3x - 4y + 12 = 0$ dirotasikan sebesar 180° terhadap titik pusat $(1,2)$. Persamaan garis hasil rotasi adalah ...

Pembahasan :

Misalkan titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{R_{[(1,2),180^\circ]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(x-1) \\ -1(y-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+1 \\ -y+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+1+2 \\ -y+2+2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3 \\ -y+4 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -x + 3 \rightarrow x = 3 - x'$$
$$y' = -y + 4 \rightarrow y = 4 - y'$$

Substitusi $\boldsymbol{x = 3 - x'}$dan $\boldsymbol{y = 4 - y'}$ ke persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ diperoleh

$$3(3 - x') - 4(4 - y') + 12 = 0$$
$$9 - 3x' - 16 + 4y' + 12 = 0$$
$$-3x' + 4y' + 9 - 16 + 12 = 0$$
$$-3x' + 4y' + 5 = 0$$
$$-3x + 4y + 5 = 0$$

Jadi, persamaan garis hasil rotasi adalah $-3x + 4y + 5 = 0$

C. Rangkuman

1. **Rotasi** adalah transformasi yang memindahkan titik-titik dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh α terhadap suatu titik tertentu.
2. Rotasi pada bidang datar ditentukan oleh :
   1. Titik pusat rotasi
   2. Besar sudut rotasi
   3. Arah sudut rotasi
      a. Jika **arah rotasi** diputar **searah jarum jam** maka besar sudut rotasi negatif $(-\boldsymbol{\alpha})$
      b. Jika **arah rotasi** diputar **berlawanan jarum jam** maka besar sudut rotasi poitif $(\boldsymbol{\alpha})$
3. Rotasi dinotasikan dengan $\boldsymbol{R(P,\alpha)}$ dimana P merupakan pusat rotasi dan α besar sudut rotasi.
4. **Jenis-jenis rotasi berdasarkan titik pusat**

   Misalkan koordinat titik asal A(x, y) akan dirotasikan dengan besar sudut α terhadap pusat $(0, 0)$ dan pusat (a, b)akan menghasilkan bayangan sebagai berikut

Titik Pusat	Persamaan Matriks Transformasi
$(0, 0)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
(a, b)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

D. Latihan Soal

Anak- anak, untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap rotasi kerjakan soal latihan berikut:

Soal Essay:

1. Titik $A(-2, 3)$ dirotasikan sebesar $90°$ terhadap titik pusat $(0, 0)$. Hasil rotasi titik A adalah …
2. Titik $D(6\ 3)$ dirotasikan sebesar $270°$ terhadap titik pusat $(2, 4)$. Hasil rotasi titik D adalah …
3. Titik B dirotasikan sebsar $90°$ terhadap titik pusat $(2, 1)$ menghasilkan bayangan $B'(-2, 4)$. Koordinat titik B adalah …
4. Titik C dirotasikan sebsar $180°$ terhadap titik pusat $(2, 3)$ menghasilkan bayangan $C'(4, -1)$. Koordinat titik C adalah …
5. Bayangan titik $(4, -5)$ oleh rotasi $R[P, 90°]$ adalah $(10, 5)$. Titik pusat rotasi tersebut adalah …
6. Diketahui segitiga PQR dengan koordinat titik sudut $P(3, 2), Q(4, -1)$ dan $R(5, 3)$. Segitiga PQR diputar sebesar 180° terhadap titik pusat (0,0) diperoleh bayangan segitiga P'Q'R'. Koordinat P', Q' dan R' berturut-turut adalah …
7. Diketahui segitiga ABC dengan koordinat titik sudut $A(-3, 2), B(2, 4)$ dan $C(-1, -1)$. Segitiga ABC diputar sebesar $-\pi$ terhadap titik pusat (5,1) diperoleh bayangan segitiga A'B'C'. Koordinat A', B' dan C' berturut-turut adalah …
8. Persamaan garis $2x + y + 3 = 0$ dirotasikan dengan pusat $(0, 0)$ sebesar $90°$ berlawanan arah jarum jam. Tentukan persamaan bayangannya
9. Lingkaran $L: x^2 + y^2 = 9$ dirotasikan sebesar $90°$ terhadap titik $P(2, -1)$. Persamaan lingkaran hasil rotasi tersebut adalah …
10. Bayangan garis g oleh rotasi terhadap titik pusat $P(-4, 1)$ sebesar $\frac{3}{2}\pi$ adalah $3y + 2x + 24 = 0$. Persamaan garis g adalah …

Pembahasan:

No	Pembahasan	Skor
1.	Titik $A(-2,3)$ dirotasikan $R_{[O(0,0),90°]}$ $A(-2,3) \xrightarrow{R_{[O(0,0),90°]}} A'(x',y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ Jadi, hasil bayangan titik A adalah $A'(-3,-2)$	**5** **5**
2.	Titik $D(6\ 3)$ dirotasikan $R_{[(2,4),270°]}$ $D(6,3) \xrightarrow{R_{[(2,4),270°]}} D'(x',y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 270° & -\sin 270° \\ \sin 270° & \cos 270° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6-2 \\ 3-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 \\ -4+4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Jadi, hasil bayangan titik D adalah $D'(1,0)$	**2** **3** **5**
3.	Titik B dirotasikan sebsar $90°$ terhadap titik pusat $(2,1)$ menghasilkan bayangan $B'(-2,4)$. $B(x,y) \xrightarrow{R_{[(2,1),90°]}} B'(-2,4)$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y-1) \\ x-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+1 \\ x-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+1+2 \\ x-2+1 \end{pmatrix}$	**2** **3** **3**

	$\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y+3\\x-1\end{pmatrix}$ Dengan menggunakan kesamaan dua matriks diperoleh $-2=-y+3$ $y=3+2$ $\boldsymbol{y=5}$ $4=x-1$ $4+1=x$ $5=x$ $\boldsymbol{x=5}$ Jadi, koordinat titik asal B adalah $(5,5)$	**2**
4.	Titik C dirotasikan sebsar $180°$ terhadap titik pusat $(2,3)$ menghasilkan bayangan $C'(4,-1)$. $C(x,y)\xrightarrow{R_{[(2,3),180°]}}C'(4,-1)$ $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 180° & -\sin 180°\\ \sin 180° & \cos 180°\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(x-2)\\-(y-3)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2\\-y+3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2+2\\-y+3+3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+4\\-y+6\end{pmatrix}$ Dengan menggunakan kesamaan dua matriks diperoleh $4=-x+4$ $x=4-4$ $\boldsymbol{x=0}$ $-1=-y+6$ $y=6+1$ $\boldsymbol{y=7}$ Jadi, koordinat titik asal C adalah $(0,7)$	**2** **3** **3** **2**
5.	Bayangan titik $(4,-5)$ oleh rotasi $R[P,90°]$ adalah $(10,5)$. Ditanyakan titik pusat rotasi $P(a,b)$ $(4,5)\xrightarrow{R_{[(a,b),90°]}}(10,5)$ $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 90° & -\sin 90°\\ \sin 90° & \cos 90°\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4-a\\-5-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4-a\\-5-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(-5-b)\\4-a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+b\\4-a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$	**1** **2**

	$\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5+b+a\\4-a+b\end{pmatrix}$ Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh $10 = 5 + b + a$ $10 - 5 = a + b$ $5 = a + b$ $\boldsymbol{a + b = 5}$ $a + b = 5$ merupakan persamaan 1) $5 = 4 - a + b$ $5 - 4 = -a + b$ $1 = -a + b$ $\boldsymbol{-a + b = 1}$ $-a + b = 1$ merupakan persamaan 2) Langkah selanjutnya eliminasi persamaan 1) dan persamaan 2) untuk mencari nilai a dan b $a + b = 5$ $\underline{-a + b = 1 +}$ $2b = 6$ $b = \frac{6}{2}$ $b = 3$ Substitusi nilai $b = 3$ ke persamaan 1) sehingga diperoleh $a + b = 5$ $a + 3 = 5$ $a = 5 - 3$ $a = 2$ Jadi, titik pusat rotasi adalah $P(a, b) = P(2, 3)$	**3** **2** **2**
6.	Diketahui segitiga PQR dengan koordinat titik sudut $P(3,2), Q(4,-1)$ dan $R(5,3)$. Segitiga PQR diputar sebesar 180° terhadap titik pusat (0,0) Kita gunakan konsep rotasi terhadap pusat (0, 0) sebagai berikut $P(3,2) \xrightarrow{R_{[O,90°]}} P'(x', y')$ $Q(4,-1) \xrightarrow{R_{[O,90°]}} P'(x', y')$ $R(5,3) \xrightarrow{R_{[O,90°]}} R'(x', y')$ Selanjutnya, koordinat titik P, Q, dan R pada segitiga kita tuliskan dalam bentuk sebuah matriks. Karena terdapat 3 titik sehingga matriks yang akan dibuat berordo 2×3 dengan ketentuan sebagai berikut : 1. Baris pertama matrik diisi oleh komponen x 2. Baris kedua matriks diisi oleh komponen y 3. Kolom pertama diisi koordinat titik P 4. Kolom kedua diisi koordinat titik Q 5. Kolom ketiga diisi koordinat titik R Sehingga matriks yang terbentuk adalah $\begin{pmatrix}x_P & x_Q & x_R\\ y_P & y_Q & y_R\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$	**2** **2** **1**

	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P & x_Q & x_R \\ y_P & y_Q & y_R \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ Jadi, bayangan titik P, Q, dan R berturut-turut adalah $P'(-2,3), Q'(1,2)$ dan $R'(-3,5)$	**2** **3**
7.	Diketahui segitiga ABC dengan koordinat titik sudut $A(-3,2), B(2,4)$ dan $C(-1,-1)$. Segitiga ABC diputar sebesar $-\pi$ terhadap titik pusat (5,1) Kita gunakan konsep rotasi terhadap pusat (a,b) pada masing-masing titik sebagai berikut. Titik $A(-3,2)$ $A(-3,2) \xrightarrow{R_{[(5,1),-180]}} A'(x',y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-180^\circ) & -\sin(-180^\circ) \\ \sin(-180^\circ) & \cos(-180^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3-5 \\ 2-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+5 \\ -1+1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ Jadi, hasil bayangan titik A adalah $A'(13,0)$ Titik $B(2,4)$ $B(2,4) \xrightarrow{R_{[(5,1),-180]}} B'(x',y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-180^\circ) & -\sin(-180^\circ) \\ \sin(-180^\circ) & \cos(-180^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-5 \\ 4-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+5 \\ -3+1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ Jadi, hasil bayangan titik B adalah $B'(8,-2)$ Titik $C(-1,-1)$	**1** **3** **3**

	$C(-1,-1) \xrightarrow{R_{[(5,1),-180]}} C'(x',y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-180°) & -\sin(-180°) \\ \sin(-180°) & \cos(-180°) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-5 \\ -1-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+5 \\ 2+1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ Jadi, hasil bayangan titik B adalah $B'(8,-2)$	**3**
8.	Persamaan garis $2x + y + 3 = 0$ dirotasikan dengan $R_{[O,90°]}$ Misalkan titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan garis $2x + y + 3 = 0$ sehingga $A(x,y) \xrightarrow{R_{[O(0,0),90°]}} A'(x',y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh $x' = -y \rightarrow y = -x'$ $y' = x \rightarrow x = y'$ Substitusi $\boldsymbol{y = -x'}$ dan $\boldsymbol{x = y'}$ ke persamaan garis $2x + y + 3 = 0$ diperoleh $2(y') + (-x') + 3 = 0$ $2y' - x' + 3 = 0$ $2y - x + 3 = 0$ Jadi, persamaan garis hasil rotasi adalah $2y - x + 3 = 0$	**2** **3** **2** **3**
9.	Lingkaran $L: x^2 + y^2 = 9$ dirotasikan sebesar $90°$ terhadap titik $P(2,-1)$ Misalkan titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan lingkaran $L : x^2 + y^2 = 9$ sehingga diperoleh $A(x,y) \xrightarrow{R_{[(2,-1)),90°]}} A'(x',y')$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	**2**

<table>
<tr><td></td><td>

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(y+1) \\ x-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-1 \\ x-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-1+2 \\ x-2-2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+1 \\ x-4 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -y + 1 \rightarrow y = 1 - x'$$
$$y' = x + 4 \rightarrow x = y' - 4$$

Substitusi $\boldsymbol{x = y' - 4}$ dan $\boldsymbol{y = 1 - x'}$ ke persamaan lingkaran $L : x^2 + y^2 = 9$ diperoleh

$x^2 + y^2 = 9$

$$(y' - 4)^2 + (1 - x')^2 = 9$$
$$(1 - x')^2 + (y' - 4)^2 = 9$$

Ingat : $(1 - x')^2 = (x^2 - 1) = x^2 - 2x + 1$

$$(x' - 1)^2 + (y' - 4)^2 = 9$$
$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 0$$

Jadi, persamaan lingkaran hasil rotasi adalah $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 0$

</td><td>

3

2

3

</td></tr>
<tr><td>

10.

</td><td>

Bayangan garis g oleh rotasi terhadap titik pusat $P(-4, 1)$ sebesar $\frac{3}{2}\pi$ adalah $3y + 2x + 24 = 0$. Persamaan garis g adalah ...

Misalkan titik $A'(x', y')$ memenuhi persamaan $g' : 3y' + 2x' + 24 = 0$

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[(-4,1)),\frac{3}{2}\pi]}} A'(x', y')$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) & -\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) & \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-(-4) \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ingat : $\boldsymbol{\pi = 180^\circ}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+4 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+4 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ -(x+4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ -x-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1+(-4) \\ -x-4+1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1-4 \\ -x-4+1 \end{pmatrix}$$

</td><td>

2

3

</td></tr>
</table>

	$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-3 \\ -x-3 \end{pmatrix}$$ Dengan kesamaan dua matriks diperoleh $$x' = y - 3$$ $$y' = -x - 3 \rightarrow$$ Substitusi $x' = y - 3$ dan $y' = -x - 3$ ke persamaan g': $3y' + 2x' + 24 = 0$ diperoleh	**2**
	$$3y' + 2x' + 24 = 0$$ $$3(-x-3) + 2(y-3) + 24 = 0$$ $$-3x - 9 + 2y - 6 + 24 = 0$$ $$-3x + 2y - 9 - 6 + 24 = 0$$ $$-3x + 2y + 9 = 0$$ Jadi, persamaan garis g adalah $-3x + 2y + 9 = 0$	**3**
	Skor Total	**100**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan=$\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ total}\ x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami pengertian rotasi?		
2.	Apakah kalian dapat menentukan rotasi titik terhadap pusat $(0, 0)$?		
3.	Apakah kalian dapat menentukan rotasi kurva terhadap pusat $(0, 0)$?		
4.	Apakah kalian dapat menentukan rotasi titik terhadap pusat (a, b)?		
5.	Apakah kalian dapat menentukan rotasi kurva terhadap pusat (a, b)?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 4
DILATASI

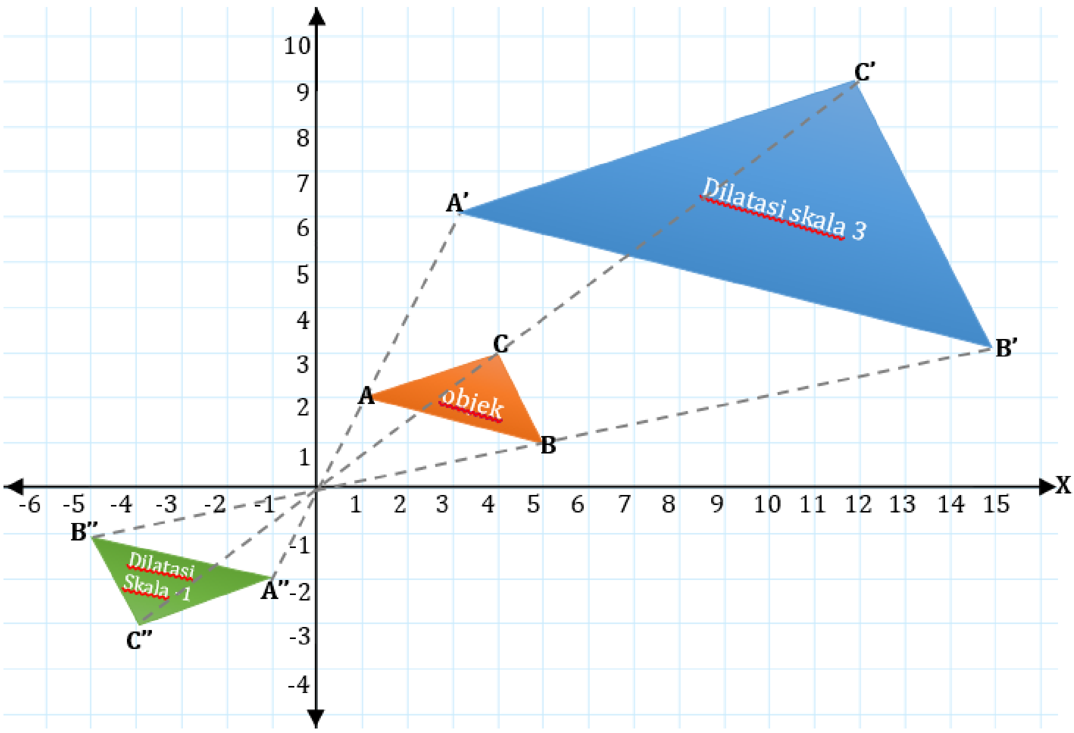
A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 4 ini kalian diharapkan dapat :
1. Memahami pengertian dilatasi
2. Menentukan dilatasi titik pada pusat $(0, 0)$
3. Menentukan dilatasi kurva pada pusat $(0, 0)$
4. Menentukan dilatasi titik pada pusat (a, b)
5. Menentukan dilatasi kurva pada pusat (a, b)

B. Uraian Materi

Pengertian Dilatasi

Pernahkan kalian mencetak foto atau pasfoto? Bisaanya ketika mencetak pasfoto kita diminta menyebutkan ukuran seperti 2×3, 3×4 ataupun 4×6. Mencetak pasfoto dalam berbagai ukuran yaitu memperbesar atau memperkecil merupakan salah satu contoh dilatasi dalam kehidupan sehari-hari. Anak-anakku, untuk lebih memahami apa itu dilatasi, coba amati gambar 17 berikut. Apa yang dapat kalian ceritakan mengenai transformasi segitiga ABC ? Bagaimana transformasi yang terjadi ?



Gambar 17 Dilatasi segitiga ABC pada pusat $(0, 0)$
Sumber : Koleksi pribadi

Anak-anakku, jika kita amati segitiga ABC pada gambar 17, segitiga ABC akan semakin besar dengan perkalian skala 3. Kemudian, jarak OA' adalah tiga kali jarak OA, jarak OB' adalah tiga kali jarak OB, jarak OC' adalah tiga kali jarak OC. Tetapi ketika segitiga ABC dikalikan dengan faktor skala -1 menghasilkan besar dan ukuran yang sama tetapi

mempunyai arah yang berlawanan. Perhatikan juga jarak OA'' sama dengan jarak OA, jarak OB'' sama dengan jarak OB, dan jarak OC'' sama dengan jarak OC.
Berdasarkan uraian diatas, dapat disimpulkan :

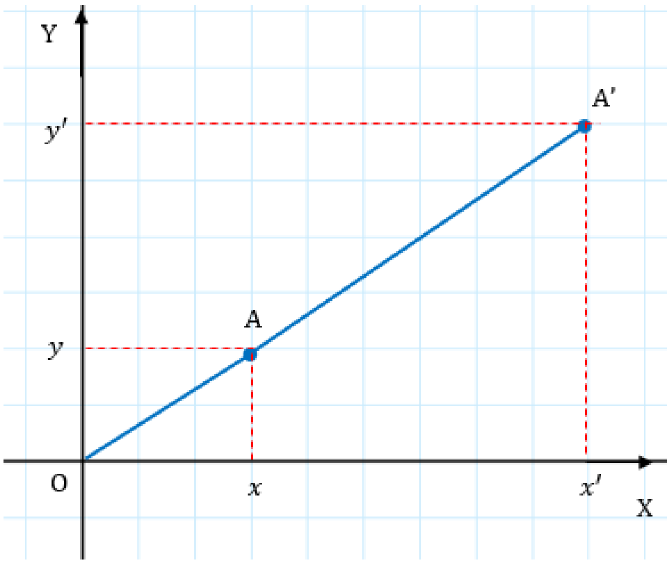
Dilatasi adalah transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu. Faktor pengali tertentu disebut faktor dilatasi atau faktor skala dan titik tertentu disebut pusat dilatasi

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk.

- Jika $k > 1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak searah terhadap sudat dilatasi dengan bangun semula
- Jika $k = 1$ maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran dan letak
- Jika $0 < k < 1$ maka bangun akan diperkecil dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $-1 < k < 0$ maka bangun akan diperkecil dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula
- Jika $k = -1$ maka bangun tidak akan mengalami perubahan bentuk dan ukuran dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $k < -1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

Dilatasi terhadap Titik Pusat $(0, 0)$

Bentuk dilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dapat diamati pada gambar 18. Titik $A(x, y)$ didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat $O(0, 0)$ menghasilkan titik $A'(x', y')$.



Gambar 18 Dilatasi titik A pada pusat (0, 0)
Sumber : Koleksi pribadi

Dilatasi titik A pada gambar 18 dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A(x,y) \xrightarrow{D_{[O,k]}} A'(x',y')$$

Titik (x,y) didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat $(0,0)$ menghasilkan bayangan titik (x',y') dalam persamaan matriks dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep dilatasi terhadap titik pusat $O(0,0)$ yuk kita simak contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Tentukan bayangan titik $A(2,4)$ setelah didilatasikan terhadap pusat $O(0,0)$ dan faktor skala 3 !

Pembahasan

Titik $A(2,4)$ akan didilatasikan oleh $D_{[O,3]}$ dapat ditulis

$$A(2,4) \xrightarrow{D_{[O,3]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A setelah didilatasi oleh $D_{[O,3]}$ adalah $A'(6,12)$

Contoh Soal 2:

Garis $g : 2x + 4y - 3 = 0$ didilatasikan dengan faktor skala -2 terhadap titik pusat $(0,0)$. Persamaan garis g setelah didilatasi adalah ...

Pembahasan

Misalkan titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan garis $g: 2x + 4y - 3 = 0$

$$A(x,y) \xrightarrow{D_{[O,-2]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -2x \rightarrow x = -\frac{1}{2}x'$$

$y' = -2y' \rightarrow y = -\frac{1}{2}y'$

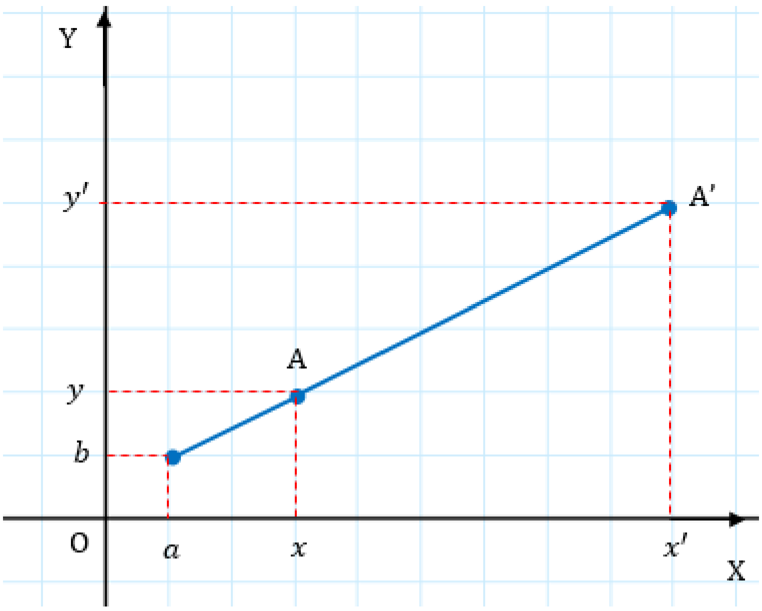
Substitusi $x = -\frac{1}{2}x'$ dan $y = -\frac{1}{2}y'$ ke persamaan garis $g: 2x + 4y - 3 = 0$ sehingga diperoleh

$$2x + 4y - 3 = 0$$
$$2\left(-\frac{1}{2}x'\right) + 4\left(-\frac{1}{2}y'\right) - 3 = 0$$
$$-x' - 2y' - 3 = 0$$
$$x' + 2y' + 3 = 0$$
$$x + 2y + 3 = 0$$

Jadi, persamaan garis g setelah didilatasi adalah $g': x + 2y + 3 = 0$

Dilatasi terhadap Titik Pusat (a, b)

Bentuk dilatasi terhadap titik pusat $P(a, b)$ dapat diamati pada gambar 19. Titik $A(x, y)$ didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat $P(a, b)$menghasilkan titik $A'(x', y')$.



Gambar 19 Dilatasi titik A pada pusat (a, b)
Sumber : Koleksi pribadi

Dilatasi titik A pada gambar 19 dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A(x, y) \xrightarrow{D_{[(a,b),k]}} A'(x', y')$$

Titik (x, y) didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat (a, b) menghasilkan bayangan titik (x', y') dalam persamaan matriks dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep dilatasi terhadap titik pusat $P(a, b)$ yuk kita simak contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Tentukan bayangan titik $A(-5, 2)$ setelah didilatasikan terhadap pusat $(3, 4)$ dan faktor skala -3 !

Pembahasan:

Titik $A(-5, 2)$ akan didilatasikan oleh $D_{[(3,4),-3]}$ dapat ditulis

$$A(-5, 2) \xrightarrow{D_{[(3,4),-3]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5-3 \\ 2-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+3 \\ 6+4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A setelah didilatasi oleh $D_{[(3,4),-3]}$ adalah $A'(27, 10)$

Contoh Soal 2:

Garis $g : 2x + 4y - 3 = 0$ didilatasikan dengan faktor skala -2 terhadap titik pusat $(2, -4)$. Persamaan garis g setelah didilatasi adalah ...

Pembahasan

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan garis $g: 2x + 4y - 3 = 0$

$$A(x, y) \xrightarrow{D_{[(2,-4),-2]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(x-2) \\ -2(y+4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+4 \\ -2y-8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+4+2 \\ -2y-8+(-4) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+6 \\ -2y-12 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$x' = -2x + 6$

$2x = 6 - x'$

$x = \frac{6 - x'}{2}$

$y' = -2y - 12$

$2y = -y' - 12$

$y = \frac{-y - 12}{2}$

Substitusi$x = \frac{6-x'}{2}$ dan $y = \frac{-y-12}{2}$ ke persamaan garis $g: 2x + 4y - 3 = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 3 &= 0 \\ 2\left(\frac{6 - x'}{2}\right) + 4\left(\frac{-y - 12}{2}\right) - 3 &= 0 \\ 6 - x' + 2(-y' - 12) - 3 &= 0 \\ 6 - x' - 2y' - 24 - 3 &= 0 \\ -x' - 2y' - 21 &= 0 \\ x' + 2y' + 21 &= 0 \\ x + 2y + 21 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis g setelah didilatasi adalah $g': x + 2y + 21 = 0$

C. Rangkuman

1. **Dilatasi** adalah transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu. Faktor pengali tertentu disebut faktor dilatasi atau faktor skala dan titik tertentu disebut pusat ilatasi
2. Dilatasi dinotasikan dengan $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{k})$ dimana P merupakan pusat dilatasi dan k merupakan faktor skala
3. **Jenis-jenis dilatasi berdasarkan titik pusat**

   Misalkan koordinat titik asal A(x, y) akan didilatasikan dengan faktor skala k terhadap pusat $(0, 0)$ dan pusat (a, b)akan menghasilkan bayangan sebagai berikut

Titik Pusat	Persamaan Matriks Transformasi
$(0, 0)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
(a, b)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

D. Latihan Soal

Anak- anak untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap dilatasi kerjakan soal latihan berikut:

Soal Essay:

1. Titik $A(-2, -5)$ didilatasikan dengan faktor skala -2 terhadap titik pusat $(0, 0)$. Hasil dilatasi titik A adalah …
2. Titik B didilatasikan dengan faktor skala -2 terhadap titik pusat $(0, 0)$ menghasilkan titik $B'(-4, 6)$. Koordinat titik B adalah …

3. Titik $A(2, -3)$ didilatasikan dengan faktor skala 3 terhadap titik pusat $(1, -2)$. Hasil dilatasi titik A adalah …
4. Bayangan titik $Q(2, -1)$ oleh dilatasi terhadap titik pusat $(3, 4)$ dengan faktor skala -3 adalah …
5. Titik D didilatasikan dengan faktor skala 2 terhadap titik pusat $(2, -3)$ menghasilkan titik $D'(3, 6)$. Koordinat titik D adalah …
6. Titik $C(-2, -1)$ didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat $(0, -3)$ menghasilkan titik $C'(4, -7)$. Nilai k yang memenuhi adalah …
7. Titik $R(-4, -2)$ didilatasikan dengan faktor skala $\frac{1}{3}$ dilanjutkan dengan dilatasi faktor skala -2 terhadap titik pusat $(-1, 1)$. Hasil dilatasi titik R adalah …
8. Persamaan bayangan garis $4x - y + 6 = 0$ oleh dilatasi $[O, -2]$ adalah …
9. Garis $g : x + 2y - 4 = 0$ didilatasikan dengan faktor skala 2 terhadap titik pusat $(0, 0)$. Hasil dilatasi garis g adalah …
10. Lingkaran $L : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$ didilatasikan dengan faktor skala $\frac{1}{3}$ terhadap titik pusat $(1, 2)$. Hasil dilatasi lingkran L adalah …

Pembahasan :

No.	Pembahasan	Skor
1.	Titik $A(-2,-5)$ didilatasikan oleh $D_{[O,-2]}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ Jadi, bayangan titik A setelah didilatasi oleh $D_{[O,-2]}$ adalah $A'(4,10)$	**5** **5**
2.	Titik B didilatasikan dengan faktor skala -2 terhadap titik pusat $(0,0)$ menghasilkan titik $B'(-4,6)$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$ Dengan kesamaan dua matriks diperoleh $-4 = -2x$ $6 = -2y$ $2x = 4$ $2y = -6$ $x = \frac{4}{2}$ $y = -\frac{6}{2}$ $x = 2$ $y = -3$ Jadi, koordinat titik B adalah $B(2,-3)$	**2** **3** **5**
3.	Titik $A(2,-3)$ didilatasikan dengan faktor skala 3 terhadap titik pusat $(1,-2)$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-1 \\ -3-(-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-1 \\ -3+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+1 \\ -3+(-2) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ Jadi, koordinat titik A setelah didilatasi oleh $D_{[(1,-2),3]}$ adalah $A'(7,-5)$	**5** **5**
4.	Bayangan titik $Q(2,-1)$ oleh dilatasi terhadap titik pusat $(3,4)$ dengan faktor skala -3 adalah … $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-3 \\ -1-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	**5**

	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3 \\ 15+4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 19 \end{pmatrix}$ Jadi, koordinat titik Q setelah didilatasi oleh $D_{[(3,4),-3]}$ adalah $Q'(6, 19)$	**5**
5.	Titik D didilatasikan dengan faktor skala 2 terhadap titik pusat $(2, -3)$ menghasilkan titik $D'(3, 6)$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y+3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4 \\ 2y+6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4+2 \\ 2y+6-3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y+3 \end{pmatrix}$ Dengan kesamaan dua matriks diperoleh $3 = 2x - 2$ $6 = 2y + 3$ $3 + 2 = 2x$ $6 - 3 = 2y$ $5 = 2x$ $3 = 2y$ $2x = 5$ $2y = 3$ $x = \frac{5}{2}$ $y = \frac{3}{2}$ Jadi, koordinat titik D adalah $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$	**3** **5** **2**
6.	Titik $C(-2, -1)$ didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat $(0, -3)$ menghasilkan titik $C'(4, -7)$. Nilai k yang memenuhi adalah … $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2-0 \\ -1-(-3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1+3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k \\ 2k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k \\ 2k \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4-0 \\ -7-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k \\ 2k \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4-0 \\ -7+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k \\ 2k \end{pmatrix}$	**3** **5**

	$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k \\ 2k \end{pmatrix}$ Dengan kesamaan dua matriks diperoleh $4 = -2k$ atau $-4 = 2k$ kita gunakan salah satu untuk menentukan nilai k $4 = -2k$ $-2k = 4$ $-k = \frac{4}{2}$ $-k = 2$ $k = -2$ Jadi, nilai k yang memenuhi Dilatasi adalah $k = -2$	**2**
7.	Titik $R(-4, -2)$ didilatasikan dengan faktor skala $\frac{1}{3}$ dilanjutkan dengan dilatasi faktor skala -2 terhadap titik pusat $(-1, 1)$. Hasil dilatasi titik R adalah … Karena dilatasi dilakukan 2 kali yaitu $k_1 = \frac{1}{3}$ dan $k_2 = -2$, maka faktor skala bisa dikalikan sebagai berikut : $k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{3} \cdot (-2)$ $= -\frac{2}{3}$ Selanjutnya kita mencari bayangan titik R dengan konsep dilatasi pada umumnya, yaitu: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4-(-1) \\ -2-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4+1 \\ -2-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot -3 \\ \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-1) \\ 2+1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	**3** **2** **5**

<table>
<tr><td></td><td>Jadi, koordinat titik R setelah didilatasi oleh $D_{[(-1,1),\frac{1}{3}]}$ dilanjutkan oleh $D_{[(-1,1),-2]}$ adalah $R''(1,3)$</td><td></td></tr>
<tr><td>8.</td><td>Persamaan bayangan garis $4x - y + 6 = 0$ oleh dilatasi $[O,-2]$ adalah …
Misalkan titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan garis $4x - y + 6 = 0$
$A(x,y) \xrightarrow{D_{[O,-2]}} A'(x',y')$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$
Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh
$x' = -2x \to x = -\frac{1}{2}x'$
$y' = -2y' \to y = -\frac{1}{2}y'$
Substitusi $x = -\frac{1}{2}x'$ dan $y = -\frac{1}{2}y'$ ke persamaan garis $g: 2x + 4y - 3 = 0$ sehingga diperoleh
$4x - y + 6 = 0$
$4\left(-\frac{1}{2}x'\right) - \left(-\frac{1}{2}y'\right) + 6 = 0$
$-2x' + \frac{1}{2}y' + 6 = 0$
$-2x + \frac{1}{2}y + 6 = 0$
Kalikan persamaan $-2x + \frac{1}{2}y + 6 = 0$ dengan -2 sehingga diperoleh :
$4x - y - 12 = 0$
Jadi, persamaan garis setelah didilatasi adalah $4x - y - 12 = 0$</td><td>5

2

3</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>Garis $g : x + 2y - 4 = 0$ didilatasikan dengan faktor skala 2 terhadap titik pusat $(0,0)$. Hasil dilatasi garis g adalah …
Misalkan titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan garis $g : x + 2y - 4 = 0$
$A(x,y) \xrightarrow{D_{[O,2]}} A'(x',y')$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$
Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh
$x' = 2x \to x = \frac{1}{2}x'$
$y' = 2y' \to y = \frac{1}{2}y'$
Substitusi $x = \frac{1}{2}x'$ dan $y = \frac{1}{2}y'$ ke persamaan garis $g: x + 2y - 4 = 0$</td><td>5

2</td></tr>
</table>

sehingga diperoleh

$$x + 2y - 4 = 0$$
$$\left(\frac{1}{2}x'\right) + 2\left(\frac{1}{2}y'\right) - 4 = 0$$
$$\frac{1}{2}x' + y' - 4 = 0$$
$$\frac{1}{2}x + y - 4 = 0$$

3

Agar koefisen persamaan dalam bentuk bilangan bulat, kalikan persamaan $\frac{1}{2}x + y - 4 = 0$ dengan 2, sehingga diperoleh:

$$2 \times \left(\frac{1}{2}x + y - 4\right) = 2 \times 0$$
$$x + 2y - 8 = 0$$

Jadi, hasil dilatasi garis g adalah $g' : x + 2y - 8 = 0$

10. Lingkaran $L : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ didilatasikan dengan faktor skala $\frac{1}{3}$ terhadap titik pusat $(1, 2)$. Hasil dilatasi lingkran L adalah …

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan lingkaran $L : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$

$$A(x, y) \xrightarrow{D\left[(1,2), \frac{1}{3}\right]} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-1) \\ \frac{1}{3}(y-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-1) + 1 \\ \frac{1}{3}(y-2) + 2 \end{pmatrix}$$

5

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}(x-1) + 1 \\ x' - 1 &= \frac{1}{3}(x-1) \\ 3(x'-1) &= x - 1 \\ 3x' - 3 &= x - 1 \\ 3x' - 3 + 1 &= x \\ 3x' - 2 &= x \\ \boldsymbol{x} &\boldsymbol{= 3x' - 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3}(y-2) + 2 \\ y' - 2 &= \frac{1}{3}(y-2) \\ 3(y'-2) &= y - 2 \\ 3y' - 6 &= y - 2 \\ 3y' - 6 + 2 &= y \\ 3y' - 4 &= y \\ \boldsymbol{y} &\boldsymbol{= 3y' - 4} \end{aligned}$$

3

Selanjutnya, substitusi $x = 3x' - 2$ dan $y = 3y' - 4$ ke persamaan lingkaran $L : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ sehingga diperoleh :

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$$

	$\left((3x'-2)-1\right)^2+\left((3y'-4)+1\right)^2=9$ $(3x'-2-1)^2+(3y'-4+1)^2=9$ $(3x'-3)^2+(3y'-3)^2=9$ $\left(3(x'-1)\right)^2+\left(3(y'-1)\right)^2=9$ $9(x'-1)^2+9(y'-1)^2=9$ $9(x-1)^2+9(y-1)^2=9$ Persamaan $9(x-1)^2+9(y-1)^2=9$ bisa disederhanakan dengan cara membagi 9 ruas kiri dan kanan sehingga diperoleh : $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ Jadi, persamaan lingkaran setelah didilatasi oleh $D_{\left[(1,2),\frac{1}{3}\right]}$ adalah $(x-1)^2+(y-1)^2=1$	**2**
	Skor Total	**100**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan=$\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ total}\ x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami pengertian dilatasi?		
2.	Apakah kalian dapat menentukan dilatasi titik terhadap pusat (0, 0) ?		
3.	Apakah kalian dapat menentukan dilatasi kurva terhadap pusat (0, 0) ?		
4.	Apakah kalian dapat menentukan dilatasi titik terhadap pusat (a, b) ?		
5.	Apakah kalian dapat menentukan dilatasi kurva terhadap pusat (a, b) ?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutny

KEGIATAN PEMBELAJARAN 5
KOMPOSISI TRANSFORMASI

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 5 ini kalian diharapkan dapat :
1. Memahami pengertian komposisi transformasi
2. Menentukan komposisi transformasi pada titik
3. Menentukan komposisi transformasi pada kurva
4. Menentukan luas bayangan kurva setelah ditansformasi
5. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan transformasi geometri

B. Uraian Materi

Komposisi Transformasi

Anak-anakku, pada kegiatan pembelajaran sebelumnya kita sudah mempelajari beberapa macam transformasi geometri seperti translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi. Pernahkan kalian berpikir bagaimanaa bayangan sebuah titik jika ditransformasikan lebih dari sekali? Misalnya sebuah titik direfleksikan terhadap sumbu X kemudian dirotasikan sejauh 90° berlawanan arah jarum jam. Untuk mencari bayangan titik tersebut kita bisa menggunakan komposisi transformasi. **Komposisi transformasi** adalah transformasi majemuk yang memuat lebih dari satu transformasi yang dilakukan secara berurutan.

Diketahui T_1 merupakan transformasi yang memetakan titik $A(x, y)$ ke titik $A'(x', y')$ dan T_2 merupakan transformasi yang memetakan titik $A'(x', y')$ ke titik $A''(x'', y'')$. Transformasi yang memetakan titik $A(x, y)$ ke titik $A''(x'', y'')$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\boldsymbol{A(x, y) \overset{T_2 \circ T_1}{\rightarrow} A''(x'', y'')}$$

Bentuk $T_2 \circ T_1$ disebut komposisi transformasi dan dibaca "T_2 komposisi T_1" artinya transformasi T_1 dilanjutkan oleh transformasi T_2 dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{A(x, y) \overset{T_1}{\rightarrow} A'(x', y') \overset{T_2}{\rightarrow} A''(x'', y'')}$$

Catatan

Komposisi transformasi bisa berupa komposisi translasi, komposisi refleksi, komposisi rotasi, komposisi dilatasi, komposisi matriks tertentu atau komposisi dari translasi, refleksi, rotasi, dilatasi dan matriks tertentu.

Anak-anakku, untuk lebih memahami komposisi transformasi, yuk kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal 1:

Dikeatahui segi empat ABCD dengan $A(-1,4)$, $B(-4,3)$, $C(5,0)$ dan $D(1,-1)$. Bayangan segi empat tersebut setelah dicerminkan terhadap garis $y = -x$, kemudian diputar 90° dengan pusat $O(0,0)$ adalah ...

Pembahasan :
Transformasi geometri yang dialami segi empat ABCD adalah sebagai berikut

$$(x, y) \xrightarrow{M_{y=-x}} (x', y') \xrightarrow{R_{[O,90°]}} (x'', y'')$$

Bentuk matriks untuk Refleksi $M_{y=-x}$ adalah $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Bentuk matriks untuk Rotasi $R_{[O,90°]}$ adalah $T_2 = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Langkah selanjutnya kita cari komposisi matriks transformasinya sebagai berikut

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya kita cari persamaan transformasinya sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Bayangan titik $A(-1,4)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $B''(-1,-4)$

Bayangan titik $B(-4,3)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik B adalah $B''(-4,-3)$

Bayangan titik $C(5,0)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik C adalah $C''(5,0)$

Bayangan titik $D(1,-1)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik D adalah $D''(1,1)$

Contoh Soal 2:

Persamaan bayangan garis $3y + 6x - 1 = 0$ jika didilatasikan menggunakan faktor skala 2 dengan titik pusat $(0,0)$ dilanjutkan rotasi sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dengan titik pusat $O(0,0)$ adalah ...

Pembahasan :
Persamaan garis $g : 3y + 6x - 1 = 0$
T_1 adalah matriks transformasi dari dilatasi $D_{[O,2]}$
$T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
T_2 adalah matriks transformasi untuk rotasi $R_{[O,90°]}$
$T_2 = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Langkah selanjutnya kita cari komposisi matriks transformasinya sebagai berikut
$T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
Selanjutnya kita cari persamaan transformasinya sebagai berikut
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ 2x \end{pmatrix}$
Dengan kesamaan dua matriks diperoleh
$x' = -2y \rightarrow y = -\frac{1}{2}x'$
$y' = 2x \rightarrow x = \frac{1}{2}y'$
Selanjutnya substitusi $x = \frac{1}{2}y'$ dan $y = -\frac{1}{2}x'$ ke persamaan garis $3y + 6x - 1 = 0$ diperoleh

$$3y + 6x - 1 = 0$$
$$3\left(-\frac{1}{2}x'\right) + 6\left(\frac{1}{2}y'\right) - 1 = 0$$
$$-\frac{3}{2}x' + 3y' - 1 = 0 \rightarrow$$

Kalikan persamaan dengan -2

$$3x' - 6y' + 2 = 0$$
$$3x - 6y + 2 = 0$$

Jadi, bayangan garis g adalah $g' : 3x - 6y + 2 = 0$

Luas Daerah Bangun Hasil Transformasi

Misalkan matriks transformasi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mentransformasikan bangun B menjadi bangun B', maka

$$\boldsymbol{Luas\ bangun\ B' = |\det A| \times Luas\ bangun\ B}$$

$|\det A|$ merupakan nilai mutlak dari determinan matriks A dan merupakan faktor perbesaran luas

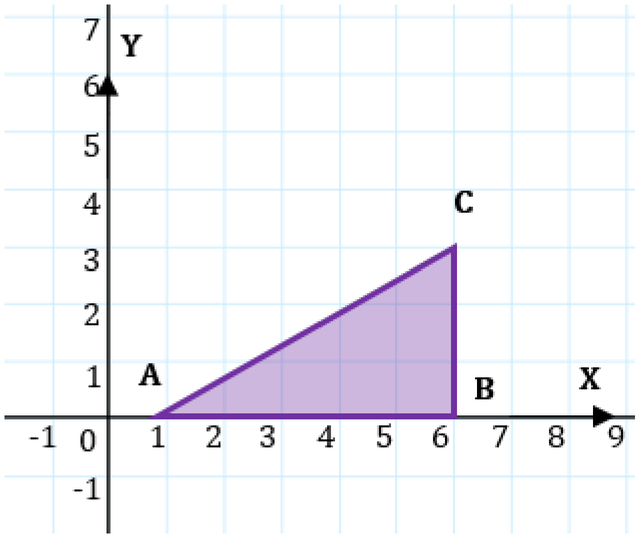
$$\det A = ad - bc$$

Untuk memahami konsep luas daerah bangun hasil transformasi, mari kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal 1:

Diketahui segitiga ABC dengan $A(1,0)$, $B(6,0)$ dan $C(6,3)$. Luas bayangan segitiga ABC oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ adalah ...

Pembahasan :
Untuk menentukan luas segitiga ABC, perhatikan gambar berikut.



Pada gambar terlihat AB merupakan alas segitiga dengan panjang $AB = 5$ satuan dan BC merupakan tinggi segitiga dengan panjang $BC = 3$ satuan sehingga luas segitiga ABC adalah

$$\begin{aligned} Luas\ \Delta ABC &= \frac{1}{2} \times AB \times BC \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \\ &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Selanjutnya kita cari determinan dari matriks transformasi yang bersesuaian yaitu

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= ad - bc \\ &= 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 \\ &= -12 - 2 \\ &= -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Luas\ bayangan\ \Delta ABC &= |\det A| \times Luas\ \Delta ABC \\ &= |-14| \times \frac{15}{2} \\ &= 14 \times \frac{15}{2} \\ &= 105 \end{aligned}$$

Jadi, luas bayangan segitiga ABC adalah 105 satuan

C. Rangkuman

1. Komposisi transformasi bisa berupa komposisi translasi, komposisi refleksi, komposisi rotasi, komposisi dilatasi, komposisi matriks tertentu atau komposisi dari translasi, refleksi, rotasi, dilatasi dan matriks tertentu.
2. Komposisi transformasi $T_2 \circ T_1$ artinya transformasi terhadap T_1 dilanjutkan T_2. Bentuk $T_2 \circ T_1$ bersesuaian dengan perkalian matriks
$$T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
3. Komposisi transformasi $T_1 \circ T_2$ artinya transformasi terhadap T_2 dilanjutkan T_1. Bentuk $T_1 \circ T_2$ bersesuaian dengan perkalian matriks
$$T_1 \circ T_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$
4. $Luas\ bangun\ B' = |\det A| \times Luas\ bangun\ B$, dengan $\det A = ad - bc$

D. Latihan Soal

Anak- anak, untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap komposisi transformasi kerjakan soal latihan berikut:

Soal Essay:

1. Jika titik $(3, 4)$ dirotasikan berlawanan arah jarum jam sejauh $45°$ dengan pusat titik asal, kemudian hasilnya dicerminkan terhadap garis $y = x$, maka koordinat bayangannya adalah …
2. Bayangan garis $3x + y = 4$ oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ dilanjutkan oleh rotasi dengan pusat $O(0,0)$ sejauh $270°$ adalah …
3. Persamaan bayangan garis $y = x + 1$ ditransformasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu X adalah...
4. Persamaan bayangan parabola $y = x^2 - 3$ ditransformasi oleh refleksi terhadap sumbu X dilanjutkan oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ adalah...
5. Segitiga KLM mempunyai koordinat $K(-1, -2), L(4, -2)$, dan $M(4, 0)$. Segitiga KLM ditransformasikan terhadap matriks $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Luas segitiga hasil transformasi adalah …
6. Diketahui dua buah rumah dengan letaknya masing-masing di $A(8, 2)$ dan $B(4, 5)$. Sebuah tiang listrik akan dipasang sepanjang jalan pada sumbu Y. Carilah letak tiang listrik agar kawat yang digunakan untuk menghubungkan rumah A dan B adalah minimum.

Pembahasan:

No.	Pembahasan	Skor
1.	Jika titik $(3, 4)$ dirotasikan berlawanan arah jarum jam sejauh $45°$ dengan pusat titik asal, kemudian hasilnya dicerminkan terhadap garis $y = x$. Misalkan : T_1 merupakan matriks transformasi rotasi terhadap titik asal (0, 0) dengan besar sudut 45° $$T_1 = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix}$$ $$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$	**2**
	T_2 merupakan matriks transformasi refleksi terhadap garis $y = x$ $$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$	**2**
	Titik $(3, 4)$ ditransformasikan oleh T_1 dilanjutkan T_2 diperoleh $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_2 \cdot T_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$ $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$ $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{2}\sqrt{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{4}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ Jadi, koordinat bayangan adalah $\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	**6**
2.	Bayangan garis $3x + y = 4$ oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ dilanjutkan oleh rotasi dengan pusat $O(0,0)$ sejauh $270°$ Misalkan : T_1 merupakan matrik transformasi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$	**2**
	T_2 merupakan matriks transformasi rotasi terhadap pusat $O(0, 0)$ dengan besar sudut $\alpha = 270°$ $$T_2 = \begin{pmatrix} \cos 270° & -\sin 270° \\ \sin 270° & \cos 270° \end{pmatrix}$$ $$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$	**2**

	Garis $3x + y = 4$ ditransformasikan oleh T_1 dilanjutkan T_2 diperoleh $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_2 \cdot T_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 3y \\ -y \end{pmatrix}$ Dengan kesamaan dua matriks diperoleh $x' = -x + 3y$ dan $y' = -y$ Dari persamaan $y' = y$ dapat kita ubah menjadi $y = -y'$ Selanjutnya persamaan $y = -y'$ kita substitusi ke persamaan $x' = -x + 3y$ diperoleh $x' = -x + 3(-y')$ $x' = -x - 3y'$ $x = -x' - 3y'$ Substitusi $x = -x' - 3y'$ dan $y = -y'$ ke persamaan $3x + y = 4$ diperoleh $3x + y = 4$ $3(-x' - 3y') + (-y') = 4$ $-3x' - 9y' - y' = 4$ $-3x' - 10y' - 4 = 0$ $3x' + 10y' + 4 = 0$ $3x + 10y + 4 = 0$ Jadi, bayangan garis adalah $3x + 10y + 4 = 0$	**3** **3**
3.	Garis $y = x + 1$ ditransformasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu X Misalkan : T_1 merupakan matriks transormasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ T_2merupakan matriks transformasi pencerminan terhadap sumbu X $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Garis $y = x + 1$ ditransformasikan oleh T_1 dilanjutkan T_2 diperoleh $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_2 \cdot T_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -y \end{pmatrix}$ Dengan kesamaan dua matriks diperoleh $x' = x + 2y$ dan $y' = -y$ $y' = -y$ kita ubah menjadi $y = -y'$ Selanjutnya $y = -y'$ kita substitusi ke persamaan $x' = x + 2y$ diperoleh $x' = x + 2y$ $x' = x + 2(-y')$ $x' = x - 2y'$ $x = x' + 2y'$	**2** **2** **3**

<table>
<tr><td></td><td>Substitusi $x = x' + 2y'$ dan $y = -y'$ ke persamaan $y = x + 1$ diperoleh
$y = x + 1$
$-y' = (x' + 2y') + 1$
$-y' = x' + 2y' + 1$
$x' + 2y' + 1 = -y'$
$x' + 2y' + y' + 1 = 0$
$x' + 3y' + 1 = 0$
$x + 3y + 1 = 0$
Jadi, bayangan garis adalah $x + 3y + 1 = 0$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Parabola $y = x^2 - 3$ ditransformasi oleh refleksi terhadap sumbu X dilanjutkan oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Misalkan :
T_1 merupakan matriks transformasi refleksi terhadap sumbu X
$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
T_2 merupakan matriks transformasi $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Parabola $y = x^2 - 3$ ditransformasikan oleh T_1 dilanjutkan T_2 diperoleh
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_2 \cdot T_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

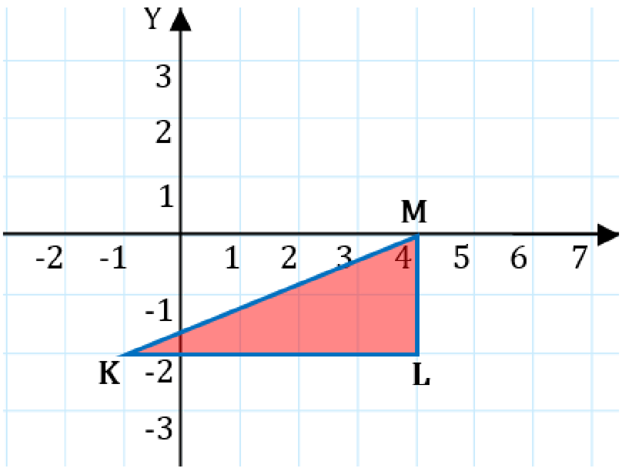
Selanjutnya gunakan persamaan matriks untuk mencari x dan y
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
jika terdapat persamaan matriks bentuk $AX = B \rightarrow x = A^{-1}B$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ Invers matriks $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot Adj\ A$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{(2 \cdot (-1)) - ((-1) \cdot 1)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-2 - (-1)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-2 + 1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - y' \\ x' - 2y' \end{pmatrix}$

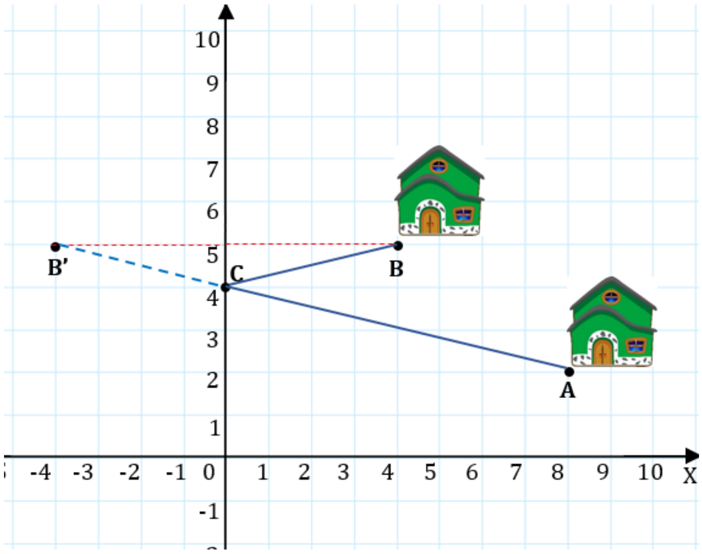
Dengan kesamaan dua matriks diperoleh
$x = x' - y'$
$y = x' - 2y'$</td><td>2

2

2

2</td></tr>
</table>

	Substitusi $x = x' - y'$ dan $y = x' - 2y'$ ke persamaan parabola $y = x^2 - 3$ $y = x^2 - 3$ $x' - 2y' = (x' - y')^2 - 3$ $x' - 2y' = (x' - y')(x' - y') - 3$ $x' - 2y' = x'^2 - x'y' - x'y' + y'^2 - 3$ $x'^2 - 2x'y' + y^2 - 3 = x' - 2y'$ $x'^2 + y'^2 - 2x'y' - 3 - x' + 2y' = 0$ $x'^2 + y'^2 - 2x'y' - x' + 2y' - 3 = 0$ $x^2 + y^2 - 2xy - x + 2y - 3 = 0$ Jadi, bayangan parabola adalah $x^2 + y^2 - 2xy - x + 2y - 3 = 0$	**2**
5.	Untuk menentukan luas segitiga KLM, perhatikan gambar berikut.  	**2**
	Pada gambar terlihat KL merupakan alas segitiga dengan panjang $KL = 5$ satuan dan LM merupakan tinggi segitiga dengan panjang $LM = 2$ satuan sehingga luas segitiga KLM adalah $Luas\ \Delta KLM = \frac{1}{2} \times KL \times LM$ $= \frac{1}{2} \times 5 \times 2$ $= 5$	**3**
	Selanjutnya kita cari determinan dari matriks transformasi yang bersesuaian yaitu $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\det A = ad - bc$ $= (-5) \cdot 2 - (-4) \cdot 3$ $= -10 + 12$ $= 2$ $Luas\ bayangan\ \Delta KLM = \lvert\det A\rvert \times Luas\ \Delta KLM$ $= \lvert 2 \rvert \times \frac{15}{2}$ $= 2 \times 5$ $= 10$ Jadi, luas bayangan segitiga KLM adalah 10 satuan	**5**

6.	Diketahui dua buah rumah dengan letaknya masing-masing di $A(8, 2)$ dan $B(4, 5)$. Sebuah tiang listrik akan dipasang sepanjang jalan pada sumbu Y. Perhatikan gambar berikut.  	**2**
	Misalnya letak tiang listrik itu di titik C. Panjang kawat yang akan digunakan adalah $AC + BC$. Panjang kawat $BC = B'C$, dengan B'(-4, 5) adalah hasil refleksi titik $B(4, 5)$ terhadap sumbu Y. Jadi panjang kawat yang digunakan adalah AB' yang melalui titik C. Kawat ini akan minimum jika AB' merupakan garis lurus. Selanjutnya kita cari persamaan garis AB' dengan koordinat titik $A(8, 2)$ dan $B'(-4, 5)$ seperti berikut.	**2**
	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ $\frac{y - 2}{5 - 2} = \frac{x - 8}{-4 - 8}$ $\frac{y - 2}{3} = \frac{x - 8}{-12}$ $-12(y - 2) = 3(x - 8)$ $-12y + 24 = 3x - 24$ $3x - 24 = -12y + 24$ $3x + 12y - 24 - 24 = 0$ $3x + 12y - 48 = 0$	**3**
	Persamaan garis AB' adalah $3x + 12y - 48 = 0$ Selanjutnya kita cari titik potong garis AB terhadap sumbu Y Misalkan $x = 0$ substitusi ke persamaan $3x + 12y - 48 = 0$ $3 \cdot 0 + 12y - 48 = 0$ $12y = 48$ $y = \frac{48}{12}$ $y = 4$ Koordinat titik C adalah $C(0, 4)$ Dengan demikian letak tiang listrik agar kawat yang digunakan untuk menghubungkan rumah A dan B minimum adalah $C(0, 4)$	**3**
	Skor Total	**60**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan$=\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ total}\ x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Anak-anak, isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami pengertian komposisi transformasi ?		
2.	Apakah kalian dapat menentukan komposisi transformasi pada titik?		
3.	Apakah kalian dapat menentukan komposisi transformasi pada kurva?		
4.	Apakah kalian dapat menentukan luas bayangan kurva setelah ditansformasi ?		
5.	Apakah kalian dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan transformasi geometri?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

1. Bayangan titik $(3,-7)$ oleh translasi $T = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah …
   a. $(5,-3)$
   b. $(-1,-9)$
   c. $(7,-5)$
   d. $(1,9)$
   e. $(12,-14)$

2. Diketahui koordinat titik $P(4,-1)$ ditranslasikan oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$ diperoleh bayangan $P'(-2a_1 - 4)$. Nilai a adalah …
   a. -3
   b. -1
   c. 0
   d. 2
   e. 3

3. Jika $P'(2,-4)$ adalah bayangan titik $P(3,5)$ oleh translasi T, maka translasi T adalah …
   a. $\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$
   d. $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
   e. $\begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix}$

4. Jika garis $y = x + 5$ ditranslasikan oleh $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, maka persamaan bayangan adalah …
   a. $y = 2x + 8$
   b. $y = x + 10$
   c. $y = x + 6$
   d. $y = 2x + 5$
   e. $y = x + 8$

5. Garis 2x + 3y = 6 ditranslasikan dengan matriks $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan dilanjutkan dengan $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bayangannya adalah …
   a. 3x + 2y + 5 = 0
   b. 3x + 2y – 5 = 0
   c. 2x – 3y + 5 = 0
   d. 2x + 3y – 5 = 0
   e. 2x + 3y + 5 = 0

6. Titik M(-2,6) direfleksikan terhadap garis x = 3 bayangan titik M adalah . . .
   a. (4,6)
   b. (-4,6)
   c. (-8,6)
   d. (6,6)
   e. (8,6)

7. Bayangan titik P(a,b) setelah dicerminkan terhadap garis y = -5 menjadi $P'(6,-5)$ Nilai b – a = ...
   a. 11
   b. 8
   c. 4
   d. -4
   e. -11

8. Jika jajargenjang ABCD dengan A(-3,5); B(4,1); dan C(6,8), dicerminkan terhadap garis y = $-x$, bayangan titik D adalah . . . .
   a. (1,-12)
   b. (-12,1)
   c. (12,-1)
   d. (12,-5)
   e. (-5,12)

9. Jika garis $x-2y-2=0$ dicerminkan terhadap sumbu Y, maka persamaan bayangan garis adalah …
   a. $x+2y-3=0$
   b. $-x-2y+3=0$
   c. $-x+2y+3=0$
   d. $x-2y-3=0$
   e. $-x-2y-3=0$

10. Bayangan garis $y = 2x + 2$ yang dicerminkan terhadap garis $y=x$ adalah …
    a. $y=x+1$
    b. $y=x-1$
    c. $y=\frac{1}{2}x-1$
    d. $y=\frac{1}{2}x+1$
    e. $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

11. Titik R(5,-3) dirotasikan oleh [O,180°]. Bayangan titik R adalah . . . .
    a. (-5,3)
    b. (3,-5)
    c. (-3,5)
    d. (-5,-3)
    e. (-3,-5)

12. Segitiga ABC dengan koordinat titik sudut $A(2,-1), B(6,-2)$ dan $C(5,2)$ dirotasi sejauh 180° dengan pusat $(3,1)$. Bayangan koordinat titik sudut segitiga ABC adalah …
    a. $A(4,3), B(0,4), C(1,0)$
    b. $A(3,4), B(4,0), C(0,1)$
    c. $A(-4,3), B(0,-4), C(-1,0)$
    d. $A(-4,-3), B(0,-4), C(-1,0)$
    e. $A(-4,-3), B(0,4), C(1,1)$

13. Titik $B(5,-1)$ dirotasikan terhadap titik $P(2,3)$ sejauh 90° searah putaran jarum jam. Bayangan titik B adalah …
    a. $B'(-4,-3)$
    b. $B'(-5,1)$
    c. $B'(-5,-1)$
    d. $B'(-2,0)$
    e. $B'(0,-2)$

14. Persamaan bayangan garis y = 5x – 3 karena rotasi dengan pusat O(0,0) bersudut –90° adalah …
    a. 5x – y + 3 = 0
    b. x – 5y – 3 = 0
    c. x + 5y – 3 = 0
    d. x + 5y + 3 = 0
    e. 5x + y – 3 = 0

15. Jika garis $x-2y=5$ diputar sejauh 90° terhadap titik $(2,4)$ berlawanan arah putaran jam, maka persamaan bayangannya adalah …
    a. $2x+y=-19$
    b. $2x+y=19$
    c. $x-y=19$
    d. $y-x=19$
    e. $-x-y=19$

16. Setelah dilatasi [O,-3], bayangan titik S(5,-2) adalah . . . .
    a. (6,15)
    b. (6,-15)
    c. (-15,6)
    d. (12,-5)
    e. (-5,12)

17. Jika titik A(2, -6) didilatasikan pada titik pusat dilatasi O(0,0) dengan faktor dilatasi k = 2, maka koordinat bayangannya adalah. .
    a. A'(-4, -12)
    b. A'(-2, -6)
    c. A'(-4, 12)
    d. A'(4, -12)
    e. A'(1, -3)

18. Sebuah transformasi dilatasi dengan faktor dilatasi $-\frac{1}{2}$, memetakan titik A(4, 3) menjadi A'(10, 6). Koordinat titik pusat dilantasinya adalah . . . . . .
   a. P(1, -2)
   b. P(8, 5)
   c. P(-2, 3)
   d. P(5, 2)
   e. P(6, 3)

19. Pada ΔABC dengan A(4, 1), B(8, 1), dan C(5, 8) didilatasi dengan pusat O dan faktor skala 3 menghasilkan bayangan ΔA'B'C'. Perbandingan luas ΔABC dengan luas ΔA'B'C' adalah . . . .
   a. 1 : 3
   b. 1 : 4
   c. 1 : 6
   d. 1 : 8
   e. 1 : 9

20. Dikethui segitiga ABC dan titik – titik ujung A(2, 3), B(8, 2), dan C(4, 6). Segitiga ini dilatasikan pada titik pusat dilatasi O(0, 0) dan faktor dilatasi k = 3. Luas segitiga bayangannya adalah . . . .
   a. 10 satuan luas
   b. 30 satuan luas
   c. 90 satuan luas
   d. 120 satuan luas
   e. 270 satuan luas

21. T1 adalah transformasi rotasi dengan pusat O dan sudut putar 90º. T2 adalah transformasi pencerminan terhadap garis y = –x. Bila koordinat peta titik A oleh transformasi T1 ◦ T2 adalah A’(8, –6), maka koordinat titik A adalah …
   a. (–6, –8)
   b. (–6, 8)
   c. (6, 8)
   d. (8, 6)
   e. (10, 8)

22. Transformasi $\begin{pmatrix} a & a+1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ yang dilanjutkan dengan transformasi $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ terhadap titik A(2, 3) dan B(4, 1) menghasilkan bayangan A’(22, –1) dan B’(24, –17). Oleh komposisi transformasi yang sama, bayangan titik C adalah C’(70, 35). Koordinat titik C adalah …
   a. (2, 15)
   b. (2, –15)
   c. (–2, 15)
   d. (15, –2)
   e. (15, 2)

23. Sebuah garis 3x + 2y = 6 ditranslasikan dengan matriks $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dilatasi dengan pusat di O dan faktor 2. Hasil transformasinya adalah …
    a. 3x + 2y = 14
    b. 3x + 2y = 7
    c. 3x + y = 14
    d. 3x + y = 7
    e. x + 3y = 14

24. Bayangan kurva y = x^2 – x + 3 yang ditransformasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dilanjutkan oleh matriks $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah …
    a. $y = x^2 + x + 3$
    b. $y = -x^2 + x + 3$
    c. $x = y^2 - y + 3$
    d. $x = y^2 + y + 3$
    e. $x = -y^2 + y + 3$

25. Persamaan bayangan garis 3x + 5y – 7 = 0 oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ dilanjutkan dengan $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ adalah …
    a. 2x + 3y + 7 = 0
    b. 2x + 3y – 7 = 0
    c. 3x + 2y – 7 = 0
    d. 5x – 2y – 7 = 0
    e. 5x + 2y – 7 = 0

KUNCI JAWABAN :

1. C
2. A
3. E
4. C
5. D
6. E
7. E
8. B
9. E
10. C
11. A
12. A
13. B
14. D
15. B
16. C
17. D
18. B
19. E
20. C
21. D
22. A
23. A
24. C
25. D

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. 2018. Transformasi Geometri Menggunakan Aplikasi Geogebra. Dalam: http://panduangeogebra.blogspot.com/2018/11/cara-menggunakan-aplikasi-geogebra.html diakses 14 September 2020

Cunayah, Cucun dan Etsa Indra Irawan. 2013. 1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika untuk SMA/Ma. Bandung : Yrama Widya

Defantri. 2015. Bank Soal dan Pembahasan Matematika Dasar Transformasi Geometri. Dalam:https://www.defantri.com/2015/10/matematika-dasar-transformasi-geometri.html diakse 14 September 2020

Ginting, Rodeestalita BR. E-Modul Matematika Kelas XI. Jakarta : Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan

Manullang, Sudianto. dkk. 2017. Matematika SMA/MA Kelas XI. Jakarta : Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan

Ngapiningsih.dkk. 2019. Matematika untuk SMA/MA kelas XI. Yogyakarta : Intan Pariwara

Tampomas, Husein. 2017. Matematika. Bekasi : MGMP Kota Bekasi

Tim Progresif. 2019. Erlangga X-Press UN SMA/MA 2020 Matenatika IPA. Jakarta: Erlangga

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI, PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum

KELAS XI

Barisan dan Deret

Matematika Umum Kelas XI

PENYUSUN

Istiqomah, S.Pd

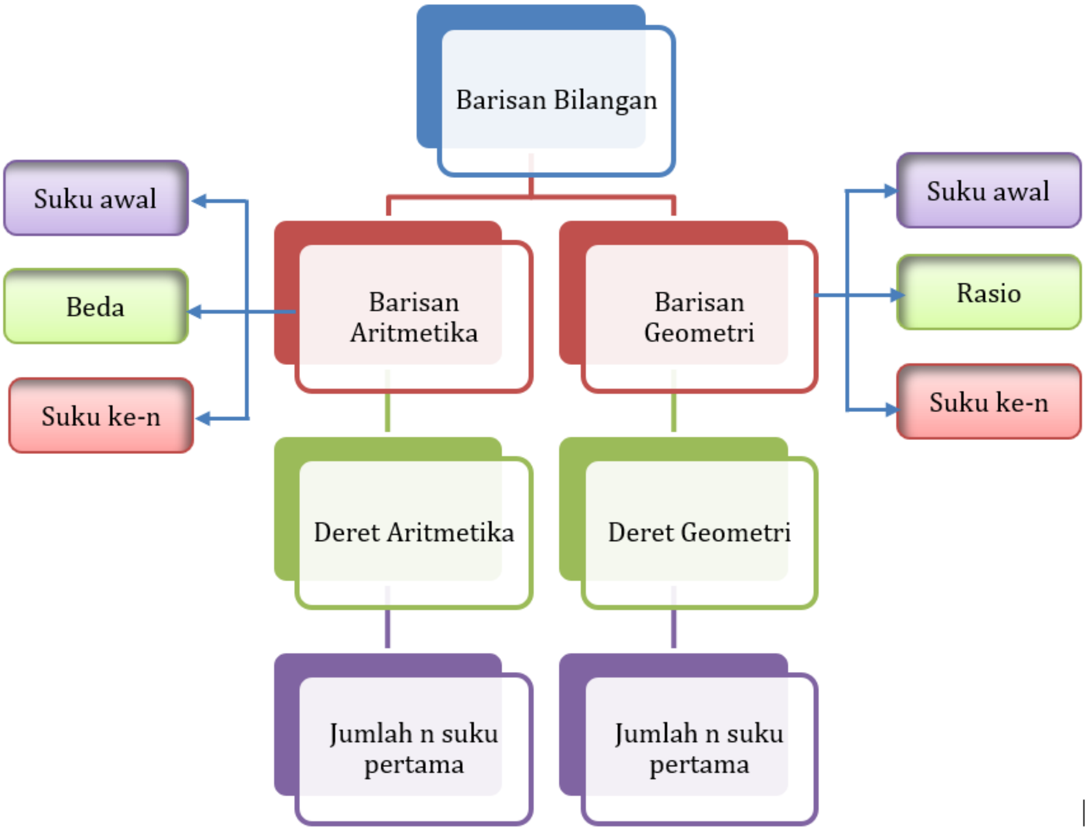
SMA Negeri 5 Mataram

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Barisan bilangan	:	urutan bilangan-bilangan dengan aturan tertentu.
Pola Bilangan	:	aturan yang dimiliki oleh sebuah deretan bilangan.
Deret	:	jumlah seluruh suku-suku dalam barisan dan dilambangkan dengan $S_{n.}$
Barisan Aritmetika	:	barisan bilangan yang selisih antara dua suku yang berurutan sama atau tetap. Selisih dua suku yang berurutan disebut **beda (b)**
Deret Aritmetika	:	jumlah dari seluruh suku-suku pada barisan aritmetika. Jika barisan aritmetikanya adalah U_1, U_2, U_3, …., Un maka deret aritmetikanya U_1+ U_2+ U_3+ ….+ U_n dan dilambangkan dengan $\mathbf{S_n}$
Barisan geometri	:	suatu barisan bilangan yang hasil bagi dua suku yang berurutan selalu tetap (sama).
Deret geometri	:	jumlah dari semua suku-suku pada barisan geometri dan dilambangkan dengan $\mathbf{S_n}$
Deret geometri takhingga	:	deret geometri dengan banyak suku takberhingga. Deret geometri takhingga dengan rasio $\|r\|$ >1 tidak dapat dihitung. Sedangkan deret geometri dengan rasio antara –1 dan 1 tetapi bukan 0 dapat dihitung sebab nilai sukunya semakin kecil mendekati nol (0) jika n semakin besar.
Deret Divergen:	:	deret geometri takhingga yang tidak mempunyai nilai
Deret Konvergen	:	deret geometri takhingga yang mempunyai nilai
Bunga Tunggal	:	metode pemberian imbalan jasa bunga simpanan yang dihitung berdasarkan modal pokok pinjaman atau modal awal simpanan saja.
Bunga Majemuk	:	metoda pemberian imbalan jasa bunga simpanan yang dihitung berdasarkan besar modal atau simpanan pada periode bunga berjalan
Anuitas	:	rangkaian pembayaran atau penerimaan yang sama jumlahnya dan harus dibayarkan atau yang harus diterima pada tiap akhir periode atas sebuah pinjaman atau kredit.

PETA KONSEP


Barisan Bilangan
Barisan Aritmetika
Barisan Geometri
Suku awal
Beda
Suku ke-n
Suku awal
Rasio
Suku ke-n
Deret Aritmetika
Deret Geometri
Jumlah n suku pertama
Jumlah n suku pertama

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	12 x 45 menit (12 JP)
Judul Modul	:	Barisan dan Deret

B. Kompetensi Dasar

3.6 Menggeneralisasi pola bilangan dan jumlah pada barisan Aritmetika dan Geometri.

4.6 Menggunakan pola barisan aritmetika atau geometri untuk menyajikan dan menyelesaikan masalah kontekstual (termasuk pertumbuhan, peluruhan, bunga majemuk, dan anuitas).

C. Deskripsi Singkat Materi

Barisan adalah daftar urutan bilangan dari kiri ke kanan yang mempunyai karakteristik atau pola tertentu. Setiap bilangan dalam barisan merupakan suku dalam barisan. Jika beda antara suatu suku apa saja dalam suatu barisan dengan suku sebelumnya adalah suatu bilangan tetap b maka barisan ini adalah **barisan aritmatika**. Bilangan tetap b itu dinamakan beda dari barisan. Sedangkan **deret aritmatika** adalah jumlah dari seluruh suku-suku pada barisan aritmetika.

Jika rasio antara suku apa saja dalam suatu barisan dengan suku sebelumnya merupakan suatu bilangan tetap r maka barisan tersebut adalah barisan geometri bilangan tetap r disebut rasio dari barisan. Sedangkan deret geometri adalah jumlah dari seluruh suku-suku pada barisan geometri.

Dalam modul ini, kalian akan mempelajari pola bilangan, barisan, dan deret diidentifikasi berdasarkan ciri-cirinya. Barisan dan deret aritmatika diidentifikasikan berdasarkan ciri-cirinya, nilai unsur ke n suatu barisan aritmatika ditentukan dengan menggunakan rumus $U_n = a + (n-1) \cdot b$, jumlah n suku pertama suatu deret aritmatika ditentukan dengan menggunakan rumus $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1) \cdot b$. Barisan dan deret geometri diidentifikasikan berdasarkan ciri-cirinya, nilai unsur ke n suatu barisan geometri ditentukan dengan menggunakan rumus $U_n = a \cdot r^{n-1}$, jumlah n suku pertama suatu deret geometri ditentukan dengan menggunakan rumus $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$, jumlah takhingga deret geometri ditentukan dengan menggunakan rumus $S_\infty = \frac{a}{1-r}$.

Banyak sekali permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang bisa diselesaikan dengan konsep barisan dan deret, misalnya menghitung jumlah perkembang biakan bakteri, pertumbuhan jumlah penduduk, menghitung besar bunga dan anuitas dalam bidang ekonomi dan masih banyak masalah-masalah lain yang bisa dipecahkan dengan konsep barisan deret.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Anak-anakku sekalian, modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh soal yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada modul ini.
5. Jika kalian menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi 5 kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Pola Bilangan, Barisan dan Deret

Kedua : Barisan dan Deret Aritmatika

Ketiga : Barisan dan Deret Geometri

Keempat : Deret Geometri Tak Hingga

Kelima : Aplikasi Barisan dan Deret

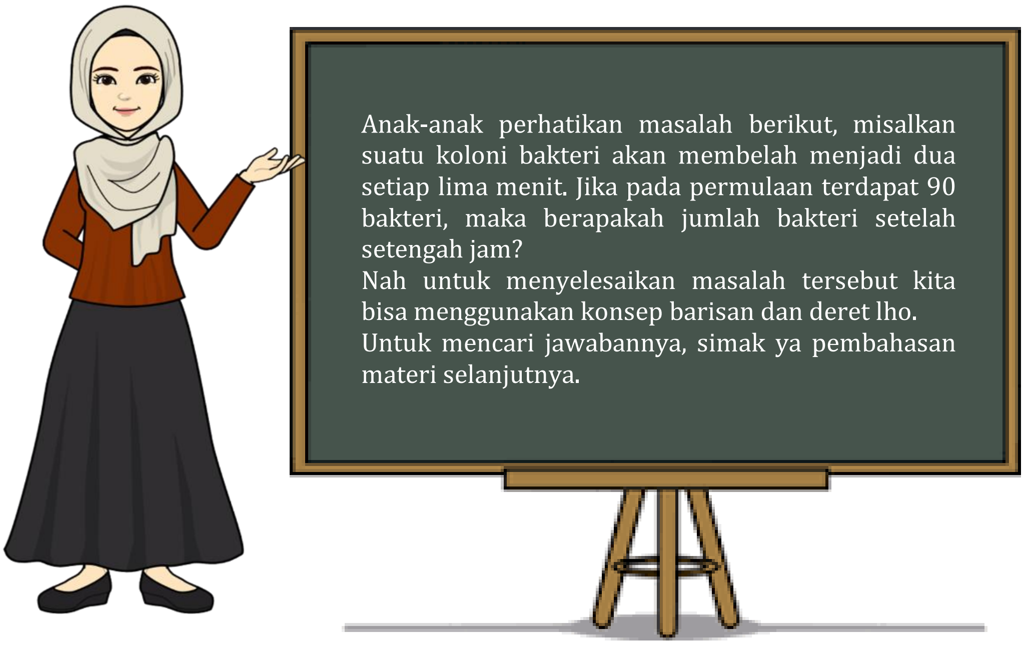
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Pola Bilangan, Barisan dan Deret

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak, setelah kegiatan pembelajaran 1 ini kalian diharapkan dapat:

1. Memahami tentang Pola Bilangan, Barisan dan Deret
2. Menentukan pola suatu barisan bilangan,
3. Menentukan suku ke n suatu barisan berdasarkan sifat/pola yang dimiliki,
4. Menentukan n suku pertama suatu barisan jika rumus suku ke n barisan itu diketahui,
5. Menentukan suku ke n suatu deret berdasarkan sifat/pola yang dimiliki,
6. Menentukan n suku pertama suatu deret jika rumus suku ke n deret itu diketahui.

B. Uraian Materi



POLA BILANGAN

1. Pengertian Barisan Bilangan

Barisan bilangan adalah urutan bilangan-bilangan dengan aturan tertentu.

Contoh :

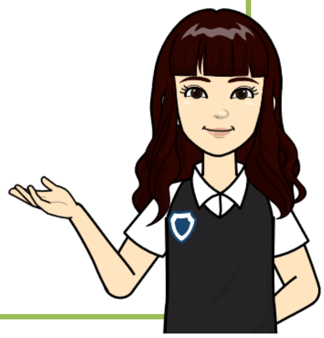
a. 1, 2, 3, 4, 5,….
b. 2, 4, 6, 8, 10,….
c. 14, 11, 8, 5, 2,….
d. 2,– 2, 2, – 2, 2, – 2,….
e. 1, ½, ¼, 1/8, ….
f. 8,4,3,1, – 2, – 5,….
g. 1, 5, 3, 7, 9,….

Pada contoh diatas, bilangan-bilangan pada a,b,c,d,e mempunyai aturan tertentu sehingga disebut sebagai barisan bilangan, sedangkan f dan g tidak mempunyai aturan.
Tiap-tiap bilangan pada barisan bilangan disebut suku (U)
Suku pertama dilambangkan dengan $\mathbf{U_1}$ atau a
Suku kedua dilambangkan dengan $\mathbf{U_2}$
Suku ketiga dilambangkan dengan $\mathbf{U_3}$
Suku ke-n dilambangkan dengan $\mathbf{U_n}$ dengan n ∈A (bilangan Asli)

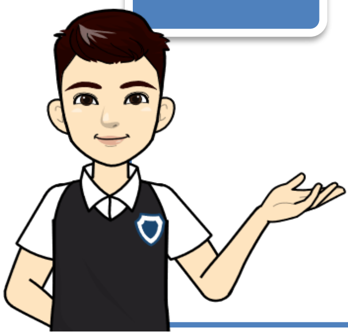
2. Pola bilangan suku ke-n (U_n)

Contoh 1:

Barisan bilangan : 1, 3, 5, 7, ... maka
$U_1 = 1 = (2 \times 1) - 1$
$U_2 = 3 = (2 \times 2) - 1$
$U_3 = 5 = (2 \times 3) - 1$
$U_4 = 7 = (2 \times 4) - 1$
....
$\mathbf{U_n = (2 \times n) - 1} \rightarrow$ $\mathbf{U_n = 2n - 1}$



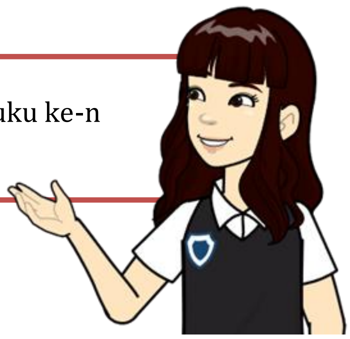
Contoh 2:



Barisan bilangan : 1, 4, 9, 16, ...maka
$U_1 = 1 = (1 \times 1)$
$U_2 = 4 = (2 \times 2)$
$U_3 = 9 = (3 \times 3)$
$U_4 = 16 = (4 \times 4)$
...
$U_n = (n \times n) = \mathbf{n^2} \rightarrow$ $\mathbf{U_n = n^2}$

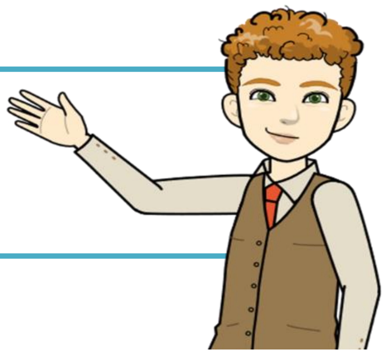
Contoh 3:

Tentukan tiga suku pertama suatu barisan yang rumus suku ke-n nya $U_n = 3n^2 - 2$!



Jawab :
$U_1 = 3(1)^2 - 2 = 3 - 2 = 1$
$U_2 = 3(2)^2 - 2 = 12 - 2 = 10$
$U_3 = 3(3)^2 - 2 = 27 - 2 = 25$
Jadi tiga suku pertama barisan tersebut adalah 1, 10, 25

Contoh 4



Tentukan rumus suku ke-n dari barisan
a) 4, 6, 8, 10, ….
b) 1, 9, 25, 49, ….

Jawab :

a) 4, 6, 8, 10, ….

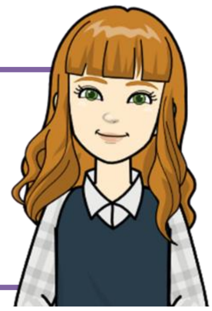
$U_1 = 4 = 2 + 2 = (2 \text{ x } 1) + 2$
$U_2 = 6 = 4 + 2 = (2 \text{ x } 2) + 2$
$U3 = 8 = 6 + 2 = (2 \text{ x } 3) + 2$
$U4 = 10 = 8 + 2 = (2 \text{ x } 4) + 2$
….
$\mathbf{U_n = (2 \text{ x } n) + 2 = 2n + 2} \rightarrow$ $\boxed{\mathbf{U_n = 2n + 2}}$

b) 1, 9, 25, 49, ….

$U_1 = 1 = 12 = ((2 \text{ x } 1) - 1)^2$
$U_2 = 9 = 32 = ((2 \text{ x } 2) - 1)^2$
$U_3 = 25 = 52 = ((2 \text{ x } 3) - 1)^2$
$U_4 = 16 = 72 = ((2 \text{ x } 4) - 1)^2$
….
$\mathbf{U_n = (2n - 1)^2} \rightarrow$ $\boxed{\mathbf{U_n = (2n - 1)^2}}$

Contoh 5

Suatu barisan bilangan dengan rumus $U_n=(\frac{1}{2})^n$
a) Tulis empat buah suku pertamanya
b) Berapa suku ke-5 dan ke-7?

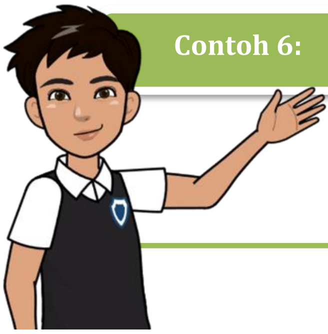


Jawab :

a) $U_n=(\frac{1}{2})^n$

$U_1=(\frac{1}{2})^1 = \frac{1}{2}$
$U_2=(\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})= \frac{1}{4}$
$U_3 =(\frac{1}{2})^3=(\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})= \frac{1}{8}$
$U_4 =(\frac{1}{2})^4= (\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})= \frac{1}{16}$
Jadi barisannya adalah $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$….

b) Suku ke-5 adalah $U_5=(\frac{1}{2})^5= (\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})= \frac{1}{32}$
Suku ke-7 adalah $U_7 =(\frac{1}{2})^7= (\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2})= \frac{1}{128}$



Contoh 6:

Hitunglah n jika :
a) $U_n = 3^n + 3 = 30$
b) $U_n = n^2 + 1 = 17$

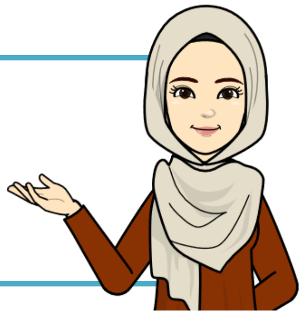
Jawab :

a) $Un = 3^n + 3 = 30$
$\Leftrightarrow\ 3^n = 30 - 3$
$\Leftrightarrow\ 3^n = 27$
$\Leftrightarrow\ 3^n = 3^3$
$\Leftrightarrow\ n = 3$

b) $U_n = n^2 + 1 = 17$
$\Leftrightarrow\ n^2 = 17 - 1$
$\Leftrightarrow\ n^2 = 16$
$\Leftrightarrow\ n = \pm 4$
Karena $n \in A$ maka yang berlaku adalah $n = 4$

3. Pengertian Deret

Deret adalah jumlah seluruh suku-suku dalam barisan dan dilambangkan dengan $\mathbf{S_n}$. berikut adalah contoh deret.
a) 1+2+3+4+5+....
b) 1+3+5+7+....
c) 2+4+6+8+....



Contoh :
Diketahui suatu deret : 1+3+5+7+....
Tentukan :
a) Jumlah dua suku yang pertama
b) Jumlah lima suku pertama

Jawab :
a) $S_2 = 1+3 = 4$
b) $S_5 = 1+3+5+7+9 = 25$

C. Rangkuman

1. Pengertian Barisan
Barisan bilangan adalah urutan bilangan-bilangan dengan aturan tertentu.

2. Pola bilangan
Pola Bilangan adalah aturan yang dimiliki oleh sebuah deretan bilangan.

3. Pengertian Deret
Deret adalah jumlah seluruh suku-suku dalam barisan dan dilambangkan dengan S_n

D. Latihan Soal

Untuk mengukur kemampuan kalian, kerjakan Latihan berikut

1. Jika rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 5 - 2n^2$, maka selisih suku ketiga dan kelima adalah ….
   A. 32 B. –32 C. 28 D. –28 E. 25

2. Rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = 4 + 2n - an^2$, Jika suku ke 4 adalah –36 maka nilai a adalah …
   A. –3 B. –2 C. 2 D. 3 E. 4

3. Rumus suku ke-n dari suatu barisan adalah $U_n = \frac{n^2-1}{n+3}$, Suku keberapakah 3 ?
   A. 8 B. 6 C. 5 D. 4 E. 3

4. Suatu barisan 1, 4, 7, 10, … memenuhi pola $U_n = an + b$. Suku ke 10 dari barisan itu adalah
   A. 22 B. 28 C. 30 D. 31 E. 33

5. Suatu barisan 2, 5, 10, 17, …. memenuhi pola $Un = an^2 + bn + c$. Suku ke 9 dari barisan itu adalah
   A. 73 B. 78 C. 80 D. 82 E. 94

6. Barisan 2, 9, 18, 29, … memenuhi pola $U_n = an^2 + bn + c$. Suku ke berapakah 42?
   A. 5 B. 6 C. 7 D. 8 E. 9

7. Suku ke 20 dari barisan 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, …. adalah
   A. 1 B. 9 C. 10 D. 11 E. 18

8. Suku pertama suatu barisan adalah 4, sedangkan suku umum ke-n (untuk $n > 1$) ditentukan dengan rumus $U_n = 3.U_{n-1} - 5$. Suku ke tiga adalah …
   A. 16 B. 14 C. 13 D. 12 E. 10

9. Rumus umum suku ke-n dari barisan 6, 10, 14, 18, 22, …., adalah $U_n = an + b$. Rumus suku ke-n barisan tersebut adalah …
   A. $Un = 4n - 2$ B. $Un = 3n + 3$ C. $Un = 5n + 1$
   D. $Un = 3n - 2$ E. $Un = 4n + 2$

10. Pola bilangan untuk barisan 44, 41, 38, 35, 32, … memenuhi rumus …
    A. $U_n = 44 - n$ B. $U_n = 46 - 2n$ C. $U_n = 48 - 4n$
    D. $U_n = 3n + 41$ E. $U_n = 47 - 3n$

Pembahasan:

No.	Pembahasan	Skor
1.	Diketahui : $U_n = 5 - 2n^2$ Ditanyakan : $U_3 - U_5 = \cdots ?$ **Jawab:** $\Leftrightarrow U_3 - U_5$ $\Leftrightarrow (5 - 2(3)^2) - (5 - 2(5)^2)$ $\Leftrightarrow \left(5 - 2(9)\quad\right) - (5 - 2(25))$ $\Leftrightarrow (5 - 18) - (5 - 50)$ $\Leftrightarrow (-13) - (-45)$ $\Leftrightarrow 32$ **Jawaban : A**	**10**
2.	Diketahui : $U_n = 4 + 2n - an^2$ $U_4 = -36$ Ditanyakan : $a = \cdots ?$ **Jawab:** $U_4 = -36$ $4 + 2(4) - a(4)^2 = -36$ $4 + 8 - 16a = -36$ $12 - 16a = -36$ $-16a = -48$ $a = 3$ **Jawaban : D**	**10**
3.	Diketahui : $U_n = \dfrac{n^2 - 1}{n + 3}$ $U_n = 3$ Ditanyakan : $n = \cdots ?$ **Jawab:** $U_n = 3$ $\frac{n^2-1}{n+3} = 3$ $n^2 - 1 = 3n + 9$ $n^2 - 3n - 10 = 0$ $(n - 5)(n + 2) = 0$ $\boldsymbol{n} = \mathbf{5}\ atau\ n = -2$ **Jawaban : C**	**10**
4.	Diketahui : Barisan 1, 4, 7, 10, ... $U_n = an + b$ Ditanyakan : $U_{10} = \cdots ?$ **Jawab:** Menentukan U_n : $U_1 = 1$ $a + b = 1 \ldots Persamaan\ (1)$ $U_2 = 4$ $2a + b = 4 \ldots Persamaan\ (2)$ Dengan SPLDV diperoleh a = 3 dan b = -2, sehingga:	**10**

	$U_n = 3n - 2$ $U_{10} = 3(10) - 2$ $= 30 - 2$ $= 28$ **Jawaban : B**	
5.	Diketahui : Barisan 2, 5, 10, 17, … $U_n = an^2 + bn + c$ Ditanyakan : $U_9 = \cdots ?$ **Jawab:** Menentukan nilai a, b, dan c $U_1 = 2$ $a + b + c = 2 \ldots\ Persamaan\ (1)$ $U_2 = 5$ $4a + 2b + c = 5 \ldots\ Persamaan\ (2)$ $U_3 = 10$ $9a + 3b + c = 10 \ldots\ Persamaan\ (3)$ Dengan menggunakan SPLTV diperoleh a = 1; b = 0; dan c = 1, sehingga: $U_n = (1)n^2 + (0)n + 1$ $U_n = n^2 + 1$ $U_9 = 9^2 + 1$ $U_9 = 82$ **Jawaban : D**	**10**
6.	Diketahui : Barisan 2, 9, 18, 29, … $U_n = an^2 + bn + c$ $U_n = 42$ Ditanyakan : $n = \cdots ?$ **Jawab:** Menentukan nilai a, b, dan c $U_1 = 2$ $a + b + c = 2 \ldots\ Persamaan\ (1)$ $U_2 = 9$ $4a + 2b + c = 9 \ldots\ Persamaan\ (2)$ $U_3 = 18$ $9a + 3b + c = 18 \ldots\ Persamaan\ (3)$ Dengan menggunakan SPLTV diperoleh a = 1; b = 4; dan c = -3, sehingga: $U_n = n^2 + 4n - 3$ Menentukan n: $U_n = 42$ $n^2 + 4n - 3 = 42$ $n^2 + 4n - 45 = 0$ $(n + 9)(n - 5) = 0$ $n = -9\ atau\ \boldsymbol{n = 5}$ **Jawaban : A**	**10**

7.	Diketahui : Barisan 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, … Ditanyakan : $U_{20} = \cdots ?$ Jawab: Dengan memperhatikan pola dari barisan tersebut, maka suku ke-20 adalah $\frac{20}{2} = 10$. **Jawaban : C**	
8.	Diketahui : $U_1 = 4$ $U_n = 3U_{n-1} - 5$ Ditanyakan : $U_3 = \cdots ?$ **Jawab:** $U_2 = 3U_1 - 5$ $U_2 = 3(4) - 5$ $U_2 = 7$ $U_3 = 3U_2 - 5$ $U_3 = 3(7) - 5$ $U_3 = 16$ **Jawaban : A**	**10**
9.	Diketahui : Barisan 6, 10, 14, 18, 22, $U_n = an + b$ Ditanyakan : $U_n = \cdots ?$ **Jawab:** $U_1 = 6$ $a + b = 6 \ldots\ Persamaan\ (1)$ $U_2 = 10$ $2a + b = 10 \ldots\ Persamaan\ (2)$ Dengan menggunakan SPLDV diperoleh a = 4; dan b = 2, sehingga : $U_n = 4n + 2$ **Jawaban : E**	**10**
10.	Diketahui : Barisan 44, 41, 38, 35, 32, … Ditanyakan : $U_n = \cdots ?$ **Jawab:** Dari barisan di atas, diperoleh a = 44; b = -3 sehingga: $U_n = a + (n-1)b$ $U_n = 44 + (n-1)(-3)$ $U_n = 44 - 3n + 3$ $U_n = 37 - 3n$ **Jawaban : E**	**10**
	Skor Total	**100**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan= $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ total} x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami tentang Pola Bilangan, Barisan dan Deret?		
2.	Apakah kalian dapat menentukan pola suatu barisan bilangan?		
3.	Apakah kalian dapat menentukan suku ke n suatu barisan berdasarkan sifat/pola yang dimiliki?		
4.	Apakah kalian dapat menentukan n suku pertama suatu barisan jika rumus suku ke n barisan itu diketahui?		
5.	Apakah kalian dapat menentukan suku ke n suatu deret berdasarkan sifat/pola yang dimiliki?		
6.	Apakah kalian dapat menentukan n suku pertama suatu deret jika rumus suku ke n deret itu diketahui?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Barisan dan Deret Aritmatika

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 2 ini kalian diharapkan kalian dapat:
1. Memahami barisan aritmatika,
2. Menentukan unsur ke n suatu barisan aritmatika,
3. Memahami deret aritmatika,
4. Menentukan jumlah n suku pertama deret aritmatika.

B. Uraian Materi

1. Barisan Aritmetika

Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang selisih antara dua suku yang berurutan sama atau tetap.
Contoh :
a) 3, 8, 13, 18, …. (selisih/beda = 8 – 3 = 13 – 8 = 18 – 13 = 5)
b) 10, 7, 4, 1, …. (selisih/beda = 7 – 10 = 4 – 7 = 1 – 4 = – 3)
c) 2, 4, 6, 8, …. (selisih/beda = 4 – 2 = 6 – 4 = 8 – 6 = 2)
d) 25, 15, 5, –5, …. (selisih/beda = 15 – 25 = 5 – 15 = –5 – 5 = –10)

Selisih dua suku yang berurutan disebut **beda (b)**

Rumus : $b = U_2 - U_1$
$b = U_3 - U_2 \rightarrow$ $b = U_n - U_{n-1}$
$b = U_4 - U_3$
dst

Jika suku pertama = a dan beda = b, maka secara umum barisan Aritmetika tersebut adalah:

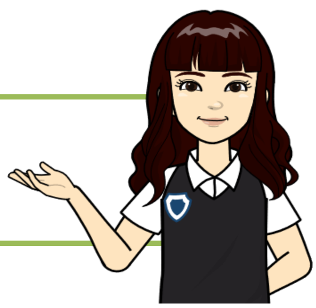
U_1	U_2	U_3	U_4		U_n
a,	a + b,	a + 2b,	a + 3b,	………………………….	a + (n-1)b

Jadi rumus suku ke-n barisan aritmetika adalah

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Dengan : U_n = Suku ke-n
a = Suku pertama
b = beda atau selisih

Contoh 1:



Diketahui barisan Aritmetika : 2, 6, 10, …. Tentukan suku ke-14

Jawab :

a = 2 ,

b = 6 – 2 = 4

n = 14

$U_n = a + (n - 1)b$

$U_{14} = 2 + (14 - 1).\ 4$

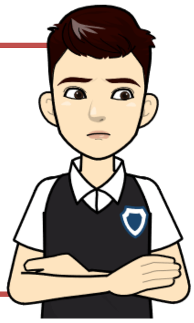
$= 2 + 13 \cdot 4$

$= 2 + 52$

$= 54$

Subsitusi nilai n, a, dan b

Contoh 2:



Diketahui suatu barisan Aritmetika dengan $U_2 = 7$ dan $U_6 = 19$, tentukan :

a) Beda
b) Suku pertama
c) Suku ke-41

Pembahasan :

a) Beda

$U_6 = a + 5\,b = 19$

$U_2 = a + 1\,b = 7$

$4\,b = 12$

$b = 3$

Eliminasi U_6 dan U_2

b) Suku pertama

$U_2 = a + 1\,b = 7$

$\Leftrightarrow\ a + 1\,(3) = 7$

$\Leftrightarrow\ a + 3 = 7$

$\Leftrightarrow\ a = 7 - 3$

$\Leftrightarrow\ a = 4$

Subsitusi nilai b ke U_2

c) Suku ke-41

$U_{41} = a + 40\,b$

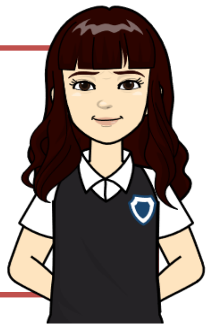
$= 4 + 40(3)$

$= 4 + 120$cc

$= 124$

Subsitusi nilai a dan b untuk mencari U_{41}

Contoh 3:



Diketahui barisan Aritmetika 4, 7, 10, …. Tentukan

a) beda
b) U_{10}
c) Rumus suku ke-n

Pembahasan :

a) Beda (b)

$b = U_2 - U_1$

b = 7 – 4

= 3

b) U_{10}

$U_n = a + (n + 1)b$

$U_{10} = 4 + (10 - 1)\ 3$

$= 4 + 9 . 3$

$= 4 + 27$

$= 31$

Subsitusi nilai a, b dan n untuk mencari U_{10}

c) Rumus suku ke-n

$U_n = a + (n - 1)b$

$U_n = 4 + (n - 1)3$

$U_n = 4 + 3n - 3$

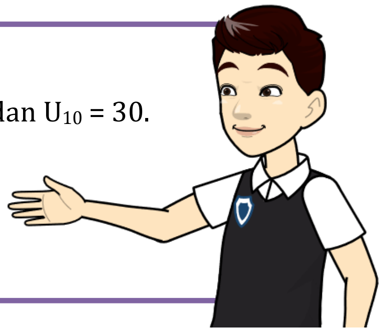
$U_n = 3n + 1$

Subsitusi nilai a dan b untuk mencari rumus U_n

Contoh 4:

Pada suatu barisan Aritmetika diketahui $U_8 = 24$ dan $U_{10} = 30$.
Tentukan :

a) Beda dan suku pertamanya
b) Suku ke-12
c) 6 suku yang pertama



Pembahasan :

a) $U_{10} = a + 9b = 30$

$U_8 = a + 7b = 24$

$2b = 6$

$b = 3$

Eliminasi U_{10}dan U_8

$U_8 = a + 7b = 24$

$\Leftrightarrow \quad a + 7(3) = 24$

$\Leftrightarrow \quad a + 21 = 24$

$\Leftrightarrow \quad a = 3$

Subsitusi nilai a dan b untuk mencari U_8

Jadi didapat beda = 3 dan suku pertama = 3

b) $Un = a + (n - 1)b$

$U_{12} = 3 + (12 - 1)3$

$U_{12} = 3 + 11 . 3$

$U_{12} = 36$

Subsitusi nilai a dan b untuk mencari U_{12}

c) Enam suku yang pertama adalah 3, 6, 9, 12, 15, 18

Contoh 5:

Pada tahun pertama sebuah butik memproduksi 400 stel jas
Setiap tahun rata-rata produksinya bertambah 25 stel jas
Berapakah banyaknya stel jas yang diproduksi pada tahun ke-5 ?

Pembahasan :
Banyaknya produksi tahun I, II, III, dan seterusnya membentuk barisan aritmetika yaitu 400, 425, 450, ….
a = 400 dan b = 25 sehingga

$$
\begin{aligned}
U_5 &= a + (5 - 1)b \\
&= 400 + 4 \,.\, 25 \\
&= 400 + 100 \\
&= 500
\end{aligned}
$$

Jadi banyaknya produksi pada tahun ke-5 adalah 500 stel jas.

2. Deret Aritmetika

Deret Aritmetika adalah jumlah dari seluruh suku-suku pada barisan aritmetika. Jika barisan aritmetikanya adalah $U_1, U_2, U_3, \ldots, Un$ maka deret aritmetikanya $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ dan dilambangkan dengan **Sn**

$$
\begin{aligned}
S_n &= U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + U_n \\
S_n &= a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (Un - 2b) + (Un - b) + U_n \\
S_n &= U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \ldots + (a + 2b) + (a + b) + a
\end{aligned}
$$

$$2\,S_n = \underbrace{(a + Un) + (a + Un) + (a + Un) + \ldots + (a + Un) + (a + Un) + (a + Un)}_{n \text{ suku}}$$

$$2\,S_n = n\,(a + Un)$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}n\,(a + U_n)}$$

Karena $U_n = a + (n - 1)b$ maka jika disubstitusikan ke rumus menjadi

$$S_n = \frac{1}{2}n\,(a + a + (n - 1)b\,)$$

$$S_n = \frac{1}{2}n\,(2a + (n - 1)b\,)$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}n\,(2a + (n - 1)b\,)}$$

Keterangan :
S_n = Jumlah n suku pertama deret aritmetika
U_n = Suku ke-n deret aritmetika
a = suku pertama
b = beda
n = banyaknya suku

Untuk menentukan suku ke-n selain menggunakan rumus $Un = a + (n - 1)b$ dapat juga digunakan rumus yang lain yaitu :

$$\boxed{U_n = S_n - S_{n-1}}$$

Contoh 1:

Tentukan jumlah 20 suku pertama deret 3+7+11+...

Pembahasan :

$$\underbrace{3}_{a} + 7 + 11 \ldots$$

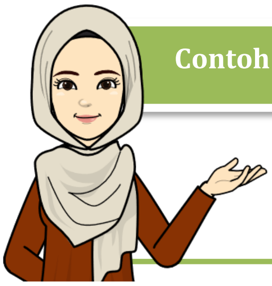
Mencari beda dengan mengurangi suku setelah dengan duku sebelumnya dan dapat dituliskan sebagi berikut

$b = U_n - U_{n-1}$
$b = U_2 - U_1$
$b = 7 - 3$
$b = 4$

Selanjutnya subsitusi $b = 4$ untuk mencari S_{20}

$S_n = \frac{1}{2}n\ (2a + (n - 1)b\ )$
$S_n = \frac{1}{2} . 20\ (2 . 3 + (20 - 1)4\ )$
$S_n = 10\ (6 + 19 . 4\ )$
$S_n = 10\ (6 + 76)$
$S_n = 10\ (82)$
$S_n = 820$

Jadi, jumlah 20 suku pertama adalah 820



Contoh 2:

Suatu barisan aritmetika dengan suku ke-4 adalah −12 dan suku kedubelas adalah −28. Tentukan jumlah 15 suku pertama !

Pembahasan:

$U_{12} = a + 11\ b = -28$
$U_4 = \quad a + 3\ b = -12$
$\quad 8\ b = -16$
$\quad b = -2$

Eliminasi U_{12} dan U_4 untuk mencari b

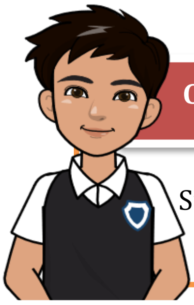
$U_4 = a + 3\ b = -12$
$\Leftrightarrow \quad a + (-2) = -12$
$\Leftrightarrow \quad a + (-6) = -12$
$\Leftrightarrow \quad a = -12 + 6$
$\Leftrightarrow \quad a = -\ 6$

Subsitusi nilai b ke U_4 untuk mencari nilai a

Subsitusi a dan b untuk mencari S_{15}

$S_n = \frac{1}{2}n\ [2a + (n - 1)b\ ]$
$S_{15} = \frac{1}{2} . 15\ [2\ (-6) + (15 - 1)(-2)]$
$= \frac{1}{2} . 15\ [\ -12 + 14(-2)]$
$= \frac{1}{2} . 15\ [\ -12\ -28]$
$= \frac{1}{2} . 15\ [-40]$
$= -\ 300$

Jadi, jumlah 15 suku pertama adalah -300.



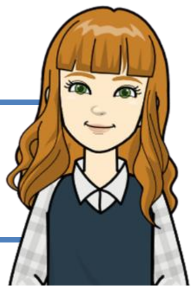
Contoh 3:

Suatu deret aritmetika dengan $S_{12} = 150$ dan $S_{11} = 100$, tentukan U_{12} !

Pembahasan:
Karena yang diketahui S_{12} dan S_{11} maka untuk mencari U_n kita bisa gunakan rumus berikut : $U_n = S_n - S_{n-1}$

$U_n = S_n - S_{n-1}$
$U_{12} = S_{12} - S_{11}$
$\quad = 150 - 100$
$\quad = 50$

Jadi, nilai dari U_{12} adalah 50



Contoh 4:

Suatu barisan aritmetika dirumuskan $U_n = 6n - 2$ tentukan rumus S_n !

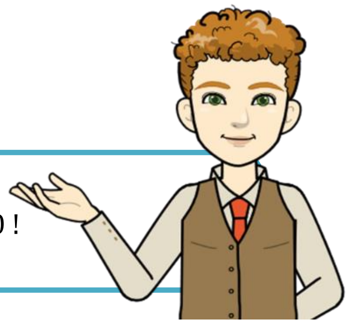
Pembahasan :
Diketahui $U_n = 6n - 2$, untuk mencari $U_1, U_2, U_3, \ldots$ kita dapat mensubsitusi nilai $n = 1, 2, 3, \ldots$ sebagai berikut.

$a = U_1 = 6(1) - 2 = 4$
$\quad U_2 = 6(2) - 2 = 10$
$b = U_2 - U_1 = 10 - 4 = 6$

Subtitusi nilai $a = 4$ dan $b = 6$ untuk mencari rumus S_n

$S_n = \frac{1}{2} n\,[2a + (n - 1)b\,]$
$S_n = \frac{1}{2} n\,[2 \,.\, 4 + (n - 1)6\,]$
$S_n = \frac{1}{2} n\,[\,8 + 6n - 6]$
$S_n = \frac{1}{2} n\,[\,6n + 2\,]$
$S_n = 3n^2 + n$

Jadi, rumus S_n adalah $S_n = 3n^2 + n$



Contoh 5:

Tentukan jumlah semua bilangan ganjil antara 10 dan 200 !

Pembahasan:
Jumlah bilangan ganjil antara 10 dan 200 dapat dituliskan dalam deret sebagai berikut

$$11 + 13 + 15 + 17 + \cdots . +199$$

Deret di atas membentuk deret aritmetika dengan $a = 11, b = 2$ dan $U_n = 199$
Langkah selanjutnya mencari n

$U_n = a + (n - 1)b = 199$
$\Leftrightarrow \; 11 + (n - 1)2 = 199$
$\Leftrightarrow \; 11 + 2n - 2 = 199$

Subtitusi nilai $a = 11, b = 2$ dan $U_n = 199$ ke rumus U_n

⇔ 9 + 2n = 199
⇔ 2n = 190
⇔ n= 95

Subtitusi nilai $n = 95$ untuk mencari S_n diperoleh

$S_n = \frac{1}{2} n\ (a + Un)$

$Sn = \frac{1}{2} . 95\ (11 + 199)$

$Sn = \frac{1}{2} . 95\ (210)$

Sn = 9975

Jadi, jumlah semua bilangan ganjil antara 10 dan 200 adalah 9975

C. Rangkuman

1. **Barisan Aritmetika**

Barisan Aritmetika adalah barisan bilangan yang selisih antara dua suku yang berurutan sama atau tetap.
Selisih dua suku yang berurutan disebut **beda (b)**

$$\mathbf{b = U_n - U_{n-1}}$$

Jadi rumus suku ke-n barisan aritmetika adalah

$$\mathbf{U_n = a + (n - 1)b}$$

Dengan : U_n = Suku ke-n
a = Suku pertama
b = beda atau selisih

2. **Deret Aritmetika**

Deret Aritmetika adalah jumlah dari seluruh suku-suku pada barisan aritmetika. Jika barisan aritmetikanya adalah U_1, U_2, U_3, …., Un maka deret aritmetikanya U_1+ U_2+ U_3+ ….+ U_n dan dilambangkan dengan $\mathbf{S_n}$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2} n(a + U_n)}$$

atau

$$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2} n(2a + (n - 1)b)}$$

Keterangan : S_n = Jumlah n suku pertama deret aritmetika
U_n = Suku ke-n deret aritmetika
a = suku pertama
b = beda
n = banyaknya suku

Untuk menentukan suku ke-n selain menggunakan rumus $\mathbf{U_n = a + (n - 1)b}$ dapat juga digunakan rumus yang lain yaitu :

$$\mathbf{U_n = S_n - S_{n-1}}$$

D. Latihan Soal

Untuk mengukur kemampuan kalian, kerjakan Latihan berikut

1. Dari barisan 3, 5, 7, 9, 11, … suku ke 21 adalah
   A. 40 B. 43 C. 46 D. 49 E. 5

2. Suatu barisan aritmatika diketahui suku ke 4 adalah 6 dan bedanya 3. Suku ke 8 adalah …
   A. 18 B. 31 C. 34 D. 37 E. 40

3. Suatu barisan aritmatika diketahui suku ke 15 adalah 30 dan bedanya −5. Suku ke 6 adalah
   A. 65 B. 25 C. 75 D. 80 E. 90

4. Rumus umum suku ke-n dari barisan 4, 9, 14, 19, 24, …. adalah …
   A. 5n + 2 B. 5n − 1 C. 5n + 1 D. 5n − 2 E. 5n + 2

5. Suatu barisan aritmatika diketahui suku ke 6 adalah −4 dan suku ke 9 adalah −19, maka suku ke 11 adalah…
   A. −34 B. −29 C. −19 D. −24 E. −14

6. Hasil dari 5 + 7 + 9 + 11 + … + 41 adalah …
   A. 379 B. 437 C. 471 D. 407 E. 207

7. Jika 4 + 6 + 8 + 10 + … + x = 130, maka nilai x adalah …
   A. 10 B. 15 C. 18 D. 22 E. 32

8. Suku ke empat dari suatu barisan aritmatika adalah 20 dan jumlah 5 suku pertamanya sama dengan 80. Jumlah sebelas suku pertamanya adalah…
   A. 196 B. 210 C. 264 D. 308 E. 332

9. Dari suatu deret aritmatika diketahui jumlah n suku pertamanya ditentukan dengan rumus $S_n = \frac{n}{2}(3n + 5)$. Suku ke 6 adalah …
   A. 19 B. 33 C. 36 D. 39 E. 42

10. Jumlah bilangan bulat antara 10 dan 60 yang habis dibagi 3 adalah
    A. 552 B. 486 C. 462 D. 312 E. 396

Pembahasan:

No.	Pembahasan	Skor
1.	Diketahui : Barisan 3, 5, 7, 9, 11, , ... Ditanyakan : $U_{21} = \cdots ?$ Jawab: Dari barisan diperoleh a = 3; b = 2 dan disubtitusi ke rumus Un $U_n = a + (n-1)b$ $U_{21} = 3 + (21-1)2$ $U_{21} = 3 + 40$ $U_{21} = 43$ Subtitusi nilai a dan b untuk mencari U_{21} **Jawaban : B**	**10**
2.	Diketahui : $U_4 = 6$ $b = 3$ Ditanyakan : $U_8 = \cdots ?$ Jawab: $U_n = a + (n-1)b$ $U_4 = 6$ $a + (4-1)b = 6$ $a + 3b = 6$ $a + 3(3) = 6$ $a + 9 = 6$ $a = -3$ Subtitusi nilai U_4 dan b untuk mencari nilai a $U_8 = (-3) + (8-1)(3)$ $U_8 = (-3) + (7)(3)$ $U_8 = (-3) + 21$ $U_8 = 18$ Subtitusi nilai a dan b untuk mencari U_8 **Jawaban : A**	**10**
3.	Diketahui : $U_{15} = 30$ $b = -5$ Ditanyakan : $U_6 = \cdots ?$ Jawab: $U_n = a + (n-1)b$ $U_{15} = 30$ $a + (15-1)b = 30$ $a + 14b = 30$ $a + 14(-5) = 30$ $a - 70 = 30$ $a = 100$ Subtitusi nilai b dan U_{15} untuk mencari a $U_6 = 100 + (6-1)(-5)$ $U_6 = 100 + (5)(-5)$ $U_6 = 100 - 25$ $U_6 = 75$ Subtitusi nilai a dan b untuk mencari U_6 **Jawaban : C**	**10**

4.	Diketahui : Barisan 4, 9, 14, 19, 24, ... Ditanyakan : $U_n = \cdots ?$ Jawab: Dari barisan diperoleh a = 4; b = 5, sehingga : $U_n = a + (n-1)b$ $U_n = 4 + (n-1)5$ $U_n = 4 + 5n - 5$ $U_n = 5n - 1$ **Jawaban : B**	**10**
5.	Diketahui : $U_6 = -4$ $U_9 = -19$ Ditanyakan : $U_{11} = \cdots ?$ Jawab: $U_6 = -4$ $a + 5b = -4$ ... Persamaan (1) $U_9 = -19$ $a + 8b = -19$ ... Persamaan (2) Dengan mengunakan SPLDV diiperoleh a = 21; b = -5, sehingga : $U_{11} = 21 + (11-1)(-5)$ $U_{11} = 21 + (10)(-5)$ $U_{11} = 21 - 50$ $U_{11} = -29$ **Jawaban : B**	**10**
6.	Diketahui : $5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 41$ Ditanyakan : Hasil penjumlahan barisan $= \cdots ?$ Jawab: Dari barisan diperoleh : a = 5; b = 2; $U_n = 41$ Menentukan n $U_n = 41$ $a + (n-1)b = 41$ $5 + (n-1)2 = 41$ $5 + 2n - 2 = 41$ $2n + 3 = 41$ $2n = 38$ $n = 19$ Subtitusi nilai $a, b,$ dan Un untuk mencari nilai n $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$ $S_{19} = \frac{19}{2}(5 + 41)$ $S_{19} = \frac{19}{2}(46)$ $S_{19} = 437$ Subtitusi nilai a dan Un untuk mencari S_{19} **Jawaban : B**	**10**
7.	Diketahui : $4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + x = 130$ Ditanyakan : $x = \cdots ?$ Jawab: Dari barisan diatas diperoleh :	

	a = 4 b = 2 $U_n = x$ $S_n = 130$ Menentukan n : $U_n = x$ $a + (\mathrm{n} - 1)\mathrm{b} = \mathrm{x}$ $4 + (\mathrm{n} - 1)2 = \mathrm{x}$ $4 + 2\mathrm{n} - 2 = \mathrm{x}$ $2\mathrm{n} = \mathrm{x} - 2$ $\mathrm{n} = \frac{\mathrm{x}-2}{2}$ $\mathrm{S_n} = 130$ $\frac{n}{2}(a + U_n) = 130$ $\frac{\left(\mathrm{x} - 2/2\right)}{2}(4 + \mathrm{x}) = 130$ $\frac{(\mathrm{x}-2)}{4}(4 + \mathrm{x}) = 130$ $(\mathrm{x} - 2)(4 + \mathrm{x}) = 520$ $4\mathrm{x} + \mathrm{x}^2 - 8 - 2\mathrm{x} = 520$ $\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 528 = 0$ $(\mathrm{x} + 24)(\mathrm{x} - 22) = 0$ $\mathrm{x} = -24 \; atau \; x = 22$ Faktorkan persamaan kuadrat untuk menemukan nilai x Jadi, *x = 22* **Jawaban : D**	**10**
8.	Diketahui : $U_4 = 20$ $S_5 = 80$ Ditanyakan : $S_{11} = \cdots ?$ Jawab: $U_4 = 20$ $a + 3b = 20$... Persamaan (1) $S_5 = 80$ $\frac{5}{2}(2a + (5-1)b) = 80$ $5(2a + 4b) = 160$ $2a + 4b = 32$ $a + 2b = 16$ ... Persamaan (2) Dengan menggunakan SPLDV diperoleh a = 8; b = 4, sehinga: $S_{11} = \frac{11}{2}(2(8) + (11-1)4)$ $S_{11} = \frac{11}{2}(16 + (10)4)$ $S_{11} = \frac{11}{2}(56)$ $S_{11} = 308$ Subtitusi nilai a dan b untuk mencari S_{11} **Jawaban : D**	**10**

9.	Diketahui : $S_n = \frac{n}{2}(3n+5)$ Ditanyakan : $U_6 = \cdots ?$ Jawab: $U_n = S_n - S_{n-1}$ $\left.\begin{aligned} S_6 &= \frac{6}{2}(3(6)+5) \\ S_6 &= 3(18+5) \\ S_6 &= 3(23) \\ S_6 &= 69 \end{aligned}\right\}$ Mencari S_6 dengan mensubtitusi $n = 6$ ke rumus S_n $\left.\begin{aligned} S_5 &= \frac{5}{2}(3(5)+5) \\ S_5 &= \frac{5}{2}(15+5) \\ S_5 &= \frac{5}{2}(20) \end{aligned}\right\}$ Mencari S_5 dengan mensubtitusi $n = 5$ ke rumus S_n $S_5 = 50$ $U_6 = S_6 - S_5$ $U_6 = 69 - 50$ $U_6 = 19$ **Jawaban : A**	**10**
10	Diketahui : $a = 12$ (habis dibagi 3) $b = 3$ $U_n = 57$ *(habis dibagi 3)* Ditanyakan : Jumlah bilangan bulat antara 10 dan 60 yang habis dibagi 3 = ... ? Jawab: $\left.\begin{aligned} U_n &= a + (n-1)b \\ 57 &= 12 + (n-1)3 \\ 57 &= 12 + 3n - 3 \\ 57 &= 9 + 3n \\ 3n &= 48 \\ n &= 16 \end{aligned}\right\}$ Subtitusi U_n, a, dan b untuk mencari n $\left.\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(a + U_n) \\ S_{16} &= \frac{16}{2}(12+57) \\ S_{16} &= 8(69) \\ S_{16} &= 552 \end{aligned}\right\}$ Subtitusi U_n, a, dan n untuk mencari S_{16} **Jawaban : A**	**10**
	Skor Total	**100**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan= $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ total}\ x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami barisan aritmatika?		
2.	Apakah kalian dapat menentukan unsur ke n suatu barisan aritmatika?		
3.	Apakah kalian dapat memahami deret aritmatika?		
4.	Apakah kalian dapat menentukan jumlah n suku pertama deret aritmatika?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
Barisan dan Deret Geometri

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 3 ini kalian diharapkan dapat:
1. Memahami barisan geometri,
2. Menentukan unsur ke n suatu barisan geometri,
3. Memahami deret geometri,
4. Menentukan jumlah n suku pertama deret geometri.

B. Uraian Materi

1. Barisan Geometri

Barisan geometri adalah suatu barisan bilangan yang hasil bagi dua suku yang berurutan selalu tetap (sama).
Hasil bagi dua suku yang berurutan disebut rasio **(r)**
Contoh :

a) 3, 6, 12, ... $\left(r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2\right)$

b) 1000, 100, 10, ... $\left(r = \frac{100}{1000} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}\right)$

c) 1, 3, 9, ... $\left(r = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = 3\right)$

d) 1, ½ , ¼ , ... $\left(r = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\right)$

Jika suku pertama dari barisan geometri U_1 = a dan rasio = r, maka barisan geometri tersebut adalah

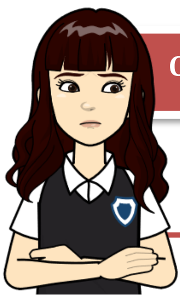
U_1	U_2	U_3	U_4		U_n
a,	a.r,	a.r^2,	a.r^3,	………………………	a.r^{n-1}

a, ar, ar^2 , ar^3 , …. , ar^{n-1} dan $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2}$ …. dst

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} \dots \rightarrow r = \text{rasio}$$

Rumus suku ke-n barisan geometri adalah

$$U_n = a.r^{n-1} \rightarrow U_n = \text{Suku ke-n}$$



Contoh 1:

Diketahui barisan geometri 3, 6, 12, …. Tentukan suku ke-10 !

Pembahasan:
Barisan geometri: 3, 6, 12, ...

a = 3, $r = \frac{6}{3} = 2$, dan n = 10

Maka $U_n = a.r^{n-1}$
$U_{10} = 3\,.\,(2)^{10-1}$
$U_{10} = 3\,.\,(2)^9$
$U_{10} = 3\,.\,512$
$U_{10} = 1536$

Subtitusi a, r, dan n ke rumus U_n untuk mencari U_{10}

Jadi, nilai $U_{10} = 1536$

Contoh 2:

Suatu barisan geometri diketahui $U_3 = 144$ dan $U_7 = 9$. Tentukan U_6!

Pembahasan:
Untuk bisa menentukan U_6 maka harus tahu nilai a dan r

1. Nilai r bisa di dapatkan dari:

$$\frac{U_7}{U_3} = \frac{ar^6}{ar^2} = \frac{9}{144}$$
$$\Leftrightarrow \quad r^4 = \frac{1}{16}$$
$$\Leftrightarrow \quad r^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{2}$$

2. Nilai a bisa didapatkan dari:

$U_3 = 144$
$ar^2 = 144$
$$a\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 144$$
$$a\left(\frac{1}{4}\right) = 144$$
$$a = 144.4$$
$$a = 576$$

Sehingga $U_6 = ar5$
$U_6 = 576.\left(\frac{1}{2}\right)^5$
$U_6 = 576.\frac{1}{32}$
$U_6 = \frac{576}{32}$
$U_6 = 8$

Jadi, nilai $U_6 = 8$

2. Deret Geometri

Deret geometri adalah jumlah dari semua suku-suku pada barisan geometri.
Jika barisan geometrinya $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$
maka deret geometrinya $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$
dan dilambangkan dengan $\mathbf{S_n}$.

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + U_n$

$$\begin{array}{rl} S_n = & a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ rS_n = & ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline \end{array} \; -$$

$S_n - r\,S_n = a - ar^n$
$S_n\,(1 - r) = a(1 - r^n)$ maka :

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $untuk\ r < 1$ atau $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ $untuk\ r > 1$

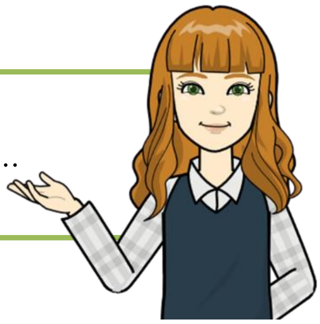
Berdasarkan uraian di atas, diperoleh :

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r}\ untuk\ r < 1}$$ **atau** $$\boldsymbol{S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}\ untuk\ r > 1}$$

Keterangan :
Sn = Jumlah n suku pertama
a = suku pertama r = rasio/pembanding
n = banyaknya suku

Contoh 1:

Tentukan jumlah 10 suku pertama deret 3 + 6 + 12 + ….



Pembahasan:
a = 3
$r = \frac{6}{3} = 2 \quad (r > 1)$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$
$$S_{10} = \frac{3(2^{10}-1)}{2-1}$$
$$= \frac{3(1024-1)}{1}$$
$$= 3.(1023)$$
$$= 3280$$

Subtitusi nilai a dan r ke rumus S_n untuk mencari S_{10}

Contoh 2:

Suatu deret geometri 1 + 3 + 9 + 27 + ... tentukan
a) r dan U_8
b) Jumlah 8 suku yang pertama (S_8)

Pembahasan :

a) $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{3}{1} = 3 \rightarrow$ Mencari perbandingan U_n dengan $U_{(n-1)}$

$$\begin{aligned} U_8 &= ar^{n-1} \\ &= 1.3^{8-1} \\ &= 3^7 \\ &= 3280 \end{aligned}$$

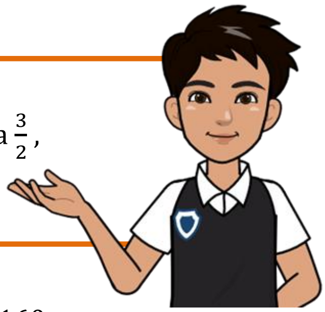
Subtitusi nilai a dan r ke rumus U_n untuk mencari U_8

b) $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{1(3^8-1)}{3-1} \\ &= \frac{6561-1}{2} \\ &= 3280 \end{aligned}$$

Subtitusi nilai a dan r ke rumus S_n untuk mencari S_8

Contoh 3:



Suku pertama suatu deret geometri adalah 160 dan rasionya $\frac{3}{2}$, tentukan n jika S_n = 2110!

Pembahasan :

Suku pertama suatu deret geometri adalah 160 artinya $a = 160$
r = $\frac{3}{2}$
S_n = 2110

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$\Leftrightarrow 2110 = \frac{160\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right)}{\frac{3}{2}-1}$$

$$\Leftrightarrow 2110 = \frac{160\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2110 = 320\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = \frac{2110}{320}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{2110}{320} + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{243}{32}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^5}{2^5}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$\Leftrightarrow n = 5$$

Subtitusi nilai a, r dan S_n untuk mencari nilai n

Jadi, nilai $n = 5$

Contoh 4:

Produksi sebuah pabrik roti pada bulan pertama adalah 500 buah, jika produksi pada bulan-bulan berikutnya menurun 1/5 dari produksi bulan sebelumnya, tentukan :

a) Jumlah produksi pada bulan ke-5

b) Jumlah produksi selama 5 bulan pertama

Pembahasan:

Pabrik memproduksi roti
Pada bulan pertama = 500
Pada bulan kedua = 500 – (1/5 x 500) = 500 – 100 = 400
Pada bulan ketiga = 400 – (1/5 x 400) = 400 – 80 = 320 dan seterusnya sehingga membentuk barisan geometri 500, 400, 320, … dengan
a = 500
r = $\frac{400}{500} = \frac{4}{5}$

a) Jumlah produksi pada bulan ke-5 = U_5

$$\begin{aligned} U_5 &= a.r^{n-1} \\ &= 500\left(\frac{4}{5}\right)^{5-1} \\ &= 500\left(\frac{4}{5}\right)^{4} \\ &= 500\left(\frac{256}{625}\right) \\ &= 204{,}8 \approx 205 \end{aligned}$$

Jadi jumlah produksi pada bulan ke-5 adalah 205 roti.

b) Jumlah produksi selama 5 bulan pertama adalah S_5

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{500\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^5\right)}{1-\frac{4}{5}} \\ &= \frac{500\left(1-\left(\frac{1024}{3125}\right)\right)}{\frac{1}{5}} \\ &= 500\left(\frac{2101}{3125}\right).5 \\ &= \frac{5252500}{3125} \\ &= 1680{,}8 \approx 1681 \end{aligned}$$

Jadi jumlah produksi selama 5 bulan pertama adalah 1681 roti.

C. Rangkuman

1. **Barisan Geometri**
   Barisan geometri adalah suatu barisan bilangan yang hasil bagi dua suku yang berurutan selalu tetap (sama).

   Hasil bagi dua suku yang berurutan disebut rasio **(r)**

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} \ldots.$$

   Rumus suku ke-n barisan geometri adalah

$$U_n = a.r^{n-1}$$

2. **Deret Geometri**
   Deret geometri adalah jumlah dari semua suku-suku pada barisan geometri dan dilambangkan dengan $\mathbf{S_n}$

$$S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{1-r} \; untuk \; r < 1$$

atau

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \; untuk \; r > 1$$

D. Latihan Soal

Untuk mengukur kemampuan kalian, kerjakan Latihan berikut

1. Rasio dari barisan $\frac{27}{16}, \frac{8}{9}, \frac{4}{3}$, 2, … adalah …
   A. 3/4　　B. 4/3　　C. 3/2　　D. 2/3　　E. 1/3

2. Diketahui barisan $\sqrt{3}$, 3, $3\sqrt{3}$, … Suku ke 9 adalah …
   A. 81 3　　B. 81　　C. 243　　D. 612 3　　E. 729

3. Rumus suku ke n dari barisan 100, 20, 4, $\frac{4}{5}$, … adalah …
   A. $U_n = 4.\ 5^{n-1}$　　B. $Un = 4.\ 5^{n-2}$　　C. $Un = 4.\ 5^{n-3}$
   D. $Un = 4.\ 5^{n+3}$　　E. $Un = 4.\ 5^{3-n}$

4. Suatu barisan geometri diketahui suku ke 3 adalah 3 dan suku ke 6 adalah 81. Maka suku ke 8 adalah …
   A. 729　　B. 612　　C. 542　　D. 712　　E. 681

5. Diketahui barisan 2, 2 2 , 4, 4 2 , … Suku keberapakah $64\sqrt{2}$?
   A. 11 B. 12 C.13 D.14 E. 15

6. Jumlah 5 suku pertama dari deret 3 + 6 + 12 + … adalah …
   A. 62 B. 84 C. 93 D. 108 E. 152

7. Jumlah n suku pertama deret geometri dinyatakan dengan $S_n = 2^{n+2} - 3$. Rumus suku ke-n adalah…
   A. 2^{n-1} B. 2^{n+1} C. 2^{n+3} D. 2^{n-3} E. 2^n

8. Diketahui deret geometri dengan suku pertama 6 dan suku keempat adalah 48. Jumlah enam suku pertama deret tersebut adalah …
   A. 368 B. 369 C. 378 D. 379 E. 384

9. Diketahui empat bilangan, tiga bilangan pertama merupakan barisan aritmatika dan tiga bilangan terakhir merupakan barisan geometri. Jumlah bilangan kedua dan keempat adalah 10. Jumlah bilangan pertama dan ketiga adalah 18. Jumlah keempat bilangan tersebut adalah …
   A. 28 B. 31 C. 44 D. 52 E. 81

10. Seutas tali dipotongmenjadi 8 bagian. Panjang masing-masing potongan tersebut mengikuti barisan geometri.Panjang potongan taliyang paling pendek adalah4 cmdan Panjang potongan tali yang paling Panjang adalah 512 cm. Panjang tali semula adalah … cm
    A. 512 B. 1020 C. 1024 D. 2032 E. 2048

Pembahasan:

No.	Pembahasan	Skor
1.	Diketahui : Barisan $\frac{16}{27}, \frac{8}{9}, \frac{4}{3}, 2, \ldots$ Ditanyakan : r = ... ? Jawab : $r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$ $r = \frac{2}{\frac{4}{3}}$ $r = 2 \times \frac{3}{4}$ $r = \frac{6}{4}$ $r = \frac{3}{2}$ Membandigkan suku k e U_n dengan suku U_{n-1} **Jawaban : C**	**10**
2.	Diketahui : Barisan 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, ... Ditanyakan : U_7 = ... ? Jawab : Dari barisan diperoleh a = 9; $r = \frac{1}{3}$. $U_7 = ar^6$ $U_7 = 9\left(\frac{1}{3}\right)^6$ Subtitusi nilai a dan r ke U_n untuk mencari $U_7 = \frac{3^2}{3^6}$ $U_7 = \frac{1}{3^4}$ $U_7 = \frac{1}{81}$ **Ingat sifat bilangan berpangkat:** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $\quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ **Jawaban : B**	**10**
3.	Diketahui : Barisan 100, 20, 4, $\frac{4}{5}$, ... Ditanyakan : U_n = ... ? Jawab : Dari barisan diperoleh a = 100; $r = \frac{1}{5}$. $U_n = ar^{n-1}$ $U_n = 100\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ $U_n = 100\,(5^{-1})^{n-1}$ $U_n = 4.5^2\,(5)^{1-n}$ $U_n = 4.5^2.(5)^1\,(5)^{-n}$ $U_n = 4.\ (5)^{3-n}$ Subtitusi nilai a dan r ke U_n untuk mencari rumus U_n **Jawaban : E**	**10**

4.	Diketahui : $U_3 = 3$ $U_6 = 81$ Ditanyakan : U_8 = ... ? Jawab : $\frac{U_6}{U_3} = \frac{81}{3}$ $\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{81}{3}$ $r^3 = 27$ $r = 3$ Subtitusi nilai U_3 dan U_6 untuk mencari r $ar^2 = 3$ $a(3)^2 = 3$ $a.9 = 3$ $a = \frac{1}{3}$ Subtitusi nilai r ke U_3 untuk mencari a $U_8 = ar^7$ $U_8 = \frac{1}{3}.(3)^7$ $U_8 = 3^6$ $U_8 = 729$ Subtitusi nilai a dan r ke U_n untuk mencari U_8 **Jawaban : A**	**10**
5.	Diketahui : $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, ...$ $U_n = 64\sqrt{2}$ Ditanyakan : n = ... ? Jawab : Dari barisan diperoleh a = 2; $r = \sqrt{2}$ $U_n = 64\sqrt{2}$ $a.r^{n-1} = 64\sqrt{2}$ $2.(\sqrt{2})^{n-1} = 64\sqrt{2}$ $2.\frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} = 64\sqrt{2}$ $(\sqrt{2})^n = \frac{64.2}{2}$ $(2)^{\frac{n}{2}} = 2^6$ $\frac{n}{2} = 6$ $n = 12$ Subtitusi nilai a dan r ke U_n untuk mencari n **Jawaban : B**	**10**
6.	Diketahui : $3 + 6 + 12 + \cdots$ Ditanyakan : S_5 = ... ? Jawab : Dari barisan diperoleh a = 3; r = 2, sehingga :	

	$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ $S_5 = \frac{3(2^5 - 1)}{2 - 1}$ $S_5 = \frac{3(32 - 1)}{1}$ $S_5 = 3(31)$ $S_5 = 93$ **Jawaban : C**	**10**
7.	Diketahui : $S_n = 2^{n+2} - 3$ Ditanyakan : U_n = ... ? Jawab : $U_n = S_n - S_{n-1}$ $U_n = (2^{n+2} - 3) - \left(2^{(n-1)+2} - 3\right)$ $U_n = (2^n.2^2 - 3) - (2^n.2^1 - 3)$ $U_n = 4.2^n - 2.2^n$ $U_n = 2.2^n$ $U_n = 2^{n+1}$ **Jawaban : B**	**10**
8.	Diketahui : $a = 6$ $U_4 = 48$ Ditanyakan : S_6 = ... ? Jawab : $U_4 = 48$ $ar^3 = 48$ $6r^3 = 48$ $r^3 = 8$ $r = 2$ $S_6 = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ $S_6 = \frac{6(2^6 - 1)}{2 - 1}$ $S_6 = 6(64 - 1)$ $S_6 = 6(63)$ $S_6 = 378$ **Jawaban : C**	**10**
9.	Diketahui : a, b, c, d a, b, c $(barisan\ aritmetika)$ b, c, d $(barisan\ geometri)$ $b + d = 10$ $a + c = 18$ Ditanyakan : $a + b + c + d = \cdots ?$ Jawab : Berdasarkan barisan aritmetika diperoleh :	**10**

	$b-a=c-b$ $2b=a+c$ $2b=18$ $\boldsymbol{b=9}$ $b+d=10$ $9+d=10$ $\boldsymbol{d=1}$ $\frac{c}{b}=\frac{d}{c}$ $c^2=bd$ $c^2=9$ $\boldsymbol{c=3}$ $a+c=18$ $a+3=18$ $\boldsymbol{a=15}$ $a+b+c+d=15+9+3+1$ $=28$ **Jawaban : A**	
10	Potongan tali tersebut mengikuti barisan geometri Paling pendek : U1=4 cm Paling Panjang U8=512 cm Panjang tali semula $U_1+U_2+U_3+\dots\dots+U_8$ $U_8=512$ $a.r^7=512$ $4.r^7=512$ $r^7=512/4$ $r^7=128$ $r^7=2^7$ $r=2$ $\boxed{U_n=a.r^{n-1}}$ Sehingga $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}, untuk\ r>1$ $S_8=\frac{4(2^6-1)}{2-1}$ $S_8=\frac{4(256-1)}{1}$ $S_8=1020$ **Jawaban : B**	**10**
	Skor Total	**100**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan=$\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ total}\ x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami barisan geometri?		
2.	Apakah kalian dapat menentukan suku ke n suatu barisan geometri?		
3.	Apakah kalian dapat memahami deret geometri?		
4.	Apakah kalian dapat Menentukan jumlah n suku pertama deret geometri?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 4
Deret Geometri Tak Hingga

A. Tujuan Pembelajaran

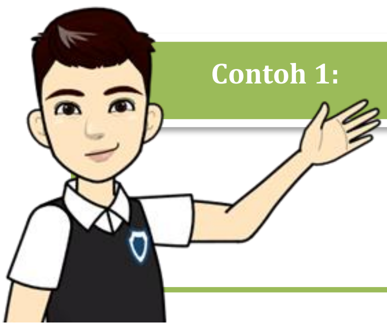
Anak-anak, setelah kegiatan pembelajaran 4 ini kalian diharapkan dapat:
1. Memahami Deret Geometri Tak hingga,
2. Memahami penerapan atau aplikasi dari Deret Geometri Tak hingga.

B. Uraian Materi

1. Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri takhingga adalah deret geometri dengan banyak suku takberhingga. Deret geometri takhingga dengan rasio |r| >1 tidak dapat dihitung. Sedangkan deret geometri dengan rasio antara −1 dan 1 tetapi bukan 0 dapat dihitung sebab nilai sukunya semakin kecil mendekati nol (0) jika n semakin besar.
Deret geometri takhingga yang tidak mempunyai nilai disebut **Deret Divergen** sedangkan Deret geometri takhingga yang mempunyai nilai disebut **Deret Konvergen dan** dirumuskan sebagai berikut

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$



Contoh 1:

Tentukan S_∞ dari :
a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$
b) 1000 +100+10+1+...

Pembahasan :

a) a=1

$$r=\frac{1}{2}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}$$
$$= 2$$

Jadi, nilai $S_\infty = 2$

b) a=1000

$r = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$

$S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{1000}{1-\frac{1}{10}}$

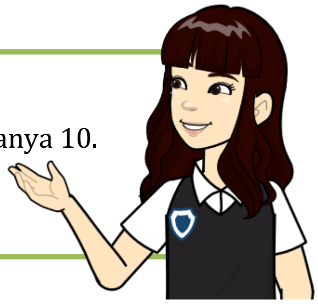
$= \frac{1000}{\frac{9}{10}}$

$= 1000 \times \frac{10}{9}$

$= 1111{,}111$

Jadi, nilai $S_\infty = 1111{,}111$

Contoh 2:



Suatu deret geometri tak hingga jumlahnya 20 dan suku pertamanya 10. Hitunglah jumlah 6 suku pertamanya!

Pembahasan:

$S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$20 = \frac{10}{1-r}$

$20.(1-r) = 10$

$20 - 20r = 10$

$20r = 20 - 10$

$20r = 10$

$r = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

Sehingga:

$S_6 = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$S_6 = \frac{10\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}}$

$S_6 = \frac{10\left(1-\frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}}$

$S_6 = 10\left(\frac{63}{64}\right).2$

$S_6 = \frac{315}{16} = 19\frac{11}{16}$

Jadi, nilai $S_6 = 19\frac{11}{16}$

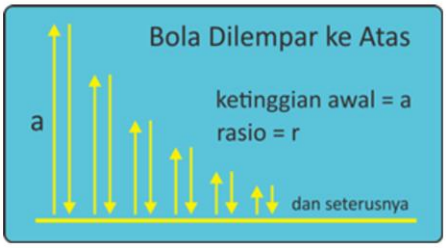
2. Penerapan Deret Geometri Tak Hingga

Pada modul kali ini kita akan belajar seperti apa sih penerapan deret geometri tak hingga dalam kehidupan sehari-hari. Nah salah satu penerapan deret tak hingga yaitu untuk **menghitung Panjang lintasan bola yang jatu**h.

Selain itu, aplikasi deret tak hingga dapat pula digunakan untuk menghitung **pertumbuhan sebuah bakteri tertentu**. Lebih jelasnya lagi mengenai contoh soal cerita deret geometri tak hingga akan kita bahas setelah kita mencari rumusannya.

Sebuah bola dilemparkan ke atas ataupun langsung dijatuhkan dari ketinggian tertentu, kemudian bola tersebut menghantam lantai dan memantul kembali ke atas. Kejadian tersebut berlangsung terus menerus hingga akhirnya bola tersebut kembali memantul.
Dapatkah kalian menentukankan formula untuk menghitung Panjang lintasan yang dilalui bola hingga berhenti? Nah inilah yang akan kita pelajari di sini…
Siap…? Yukkk kita mulai…

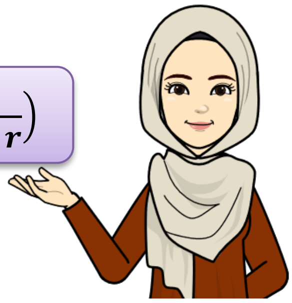
Bola dilempar ke atas
Ketika sebuah bola dilemparkan ke atas maka terbentuk lintasan-lintasan yang dilalui bola, seperti ilustrasi di bawah ini :



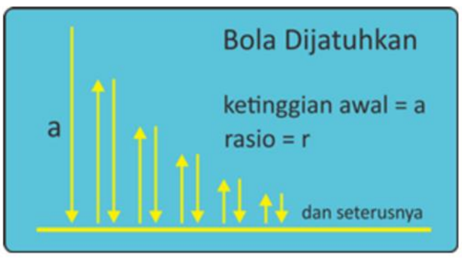
Lintasan yang dilalui oleh bola ada bagian yang naik dan ada bagian yang turun. Panjang Lintasan Naik (PLN) yaitu S_∞ dan Panjang lintasan turun (PLT) yaitu S_∞, sehingga total Panjang lintasan PL sama dengan Panjang lintasan naik ditambah Panjang lintasan turun.

PL=PLN+PLT
PL=S_∞+S_∞
PL=2S_∞
$$PL = 2\left(\frac{a}{1-r}\right)$$

$$\boldsymbol{PL = 2\left(\frac{a}{1-r}\right)}$$



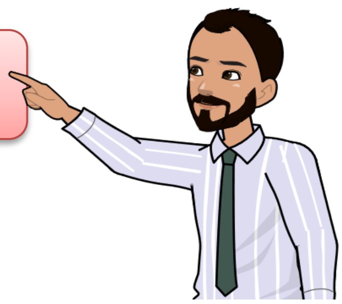
Bola dijatuhkan ke Bawah
Hampir sama kasusnya seperti yang dilemparkan ke atas, yang membedakan adalah lintasan awal yang naik dihilangkan sebab bola langsung dijatuhkan dari atas.

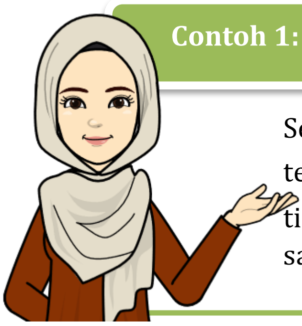


Sehingga formula untuk mencari Panjang lintasannya adalah sebagai berikut:

$$PL = 2S_\infty - a$$
$$PL = 2\left(\frac{a}{1-r}\right) - a$$

$$\boldsymbol{PL = 2\left(\frac{a}{1-r}\right) - a}$$





Contoh 1:

Sebuah bola dilemparkan ke atas mencapai ketinggian 6m, bola tersebut jatuh dan memantul kembali dengan ketinggian $\frac{1}{2}$ dari tinggi sebelumnya, berapakah Panjang lintasan yang dilalui bola sampai berhenti?

Pembahasan:

Diketahui : a=6 dan $r = \frac{1}{2}$

Bola dilempar ke atas, artinya menggunakan rumus:

$$PL = 2\left(\frac{a}{1-r}\right)$$
$$PL = 2\left(\frac{6}{1-\frac{1}{2}}\right)$$
$$PL = 2\left(\frac{6}{\frac{1}{2}}\right)$$
$$PL = 2\left(6.\frac{2}{1}\right)$$
$$PL = 2.12$$
$$PL = 24\ m$$

Jadi, Panjang lintasan yang dilalui bola sampai berhenti 24 m

Contoh 2:

Sebuah bola diajtuhkan dari ketinggian 5m, dan memantul Kembali dengan ketinggian $\frac{3}{5}$ dari tinggi sebelumnya, berapakah Panjang lintasan bola sampai berhenti?

Pembahasan:

Diketahui : a=5 dan $r = \frac{3}{5}$

Bola dijatuhkan ke bawah, artinya menggunakan rumus:

$$PL = \frac{2a}{1-r} - a$$
$$PL = \frac{2.5}{1-\frac{3}{5}} - 5$$
$$PL = \frac{10}{\frac{2}{5}} - 5$$
$$PL = \left(10.\frac{5}{2}\right) - 5$$
$$PL = (5.5) - 5$$
$$PL = 25 - 5$$
$$PL = 20\ m$$

Jadi, Panjang lintasan bola sampai berhenti adalah 20 m.

Anak-anak itulah pembahasan tentang aplikasi deret tak hingga dalam kehidupan sehari-hari,semoga aplikasi deret tak hingga ini dapat membuat kamu lebih paham lagi tentang materi deret geometri tak hingga.

C. Rangkuman

1. Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri takhingga adalah deret geometri dengan banyak suku takberhingga. Deret geometri takhingga dengan rasio |r| >1 tidak dapat dihitung. Sedangkan deret geometri dengan rasio antara −1 dan 1 tetapi bukan 0 dapat dihitung sebab nilai sukunya semakin kecil mendekati nol (0) jika n semakin besar.

Deret geometri takhingga yang tidak mempunyai nilai disebut **Deret Divergen** sedangkan Deret geometri takhingga yang mempunyai nilai disebut **Deret Konvergen**

Rumus deret geometri konvergen adalah

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

2. Penerapan Deret Geometri Tak Hingga

Salah satu penerapan deret tak hingga yaitu untuk **menghitung Panjang lintasan bola yang jatu**h.

Selain itu, aplikasi deret tak hingga dapat pula digunakan untuk menghitung **pertumbuhan sebuah bakteri tertentu**.

Bola dilempar ke atas

$$PL = 2\left(\frac{a}{1-r}\right)$$

Bola dijatuhkan ke Bawah

$$PL = 2\left(\frac{a}{1-r}\right) - a$$

D. Latihan Soal

Untuk mengukur kemampuan kalian, kerjakan Latihan berikut

1. Jumlah tak hingga dari deret geometri 18 + 6 + 2 + 2/3 + ...adalah ...
   A. 81 B. 64 C. 48 D. 32 E. 27

2. Suatu deret geometri tak hingga diketahui jumlahnya 81. Jika rasionya 2/3 maka suku ketiganya adalah ...
   A. 32 B. 24 C. 18 D. 16 E. 12

3. Jika $2 + \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3}$ + ... = 2p, maka nilai p sama dengan ...
   A. –1/2 B. 1/2 C. 2 D. 3 E. 4

4. Suatu deret geometri diketahui suku kedua adalah 12 dan suku kelima adalah 3/2, maka jumlah sampai tak hingga suku-sukunya adalah
   A. 20 B. 24 C. 36 D. 48 E. 64

5. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus. Benda itu mula – mula bergerak ke kanan sejauh S, kemudian bergerak ke kiri sejauh $\frac{1}{2}$ S, kemudian ke kanan lagi sejauh $\frac{1}{4}$ S, demikian seterusnya. Panjang lintasan yang ditempuh benda tersebut sampai berhenti adalah ....
   A. 3 S B. $1\frac{1}{2}$ S C. $1\frac{1}{2}$ S D. $2\frac{1}{2}$ S E. 2 S

6. Jumlah deret geometri tak hingga adalah 10. Jika suku pertamanya 2, suku kedua deret tersebut adalah ...
   A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. 1 D. $1\frac{1}{5}$ E. $1\frac{3}{5}$

7. Dari suatu deret geometri diketahui $U_1 + U_2 = 5$ dan jumlah deret tah hingganya 9. Rasio positif deret tersebut adalah ...
   A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$ E. $\frac{1}{2}$

8. Sebuah bola dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 5 m dan memantul kembali dengan tinggi $\frac{3}{4}$ dari ketinggian semula. Panjang lintasan bola tersebut sampai bola tersebut sampai bola berhenti adalah ... m
   A. 25 B. 30 C. 35 D. 45 E. 65

9. Sebuah ayunan mencapai lintasan pertama sejauh 90 cm dan lintasan berikutnya hanya mencapai $\frac{5}{8}$ dari lintasan sebelumnya. Panjang lintasan seluruhnya hingga ayunan berhenti adalah ... cm
   A. 120 B. 144 C. 240 D. 250 E. 260

10. Sebuh bola mengglinding diperlambat dengan kecepatan tertentu. Pada detik ke-1 jarak yang ditempuh 8 meter, pada detik ke-2 jarak yang ditempuh 6 meter, pada detik ke-3 jarak yang ditempuh 4,5 meter, dan seterusnya mengikuti pola barisan geometri. Jarak yang ditempuh bola sampai dengan berhenti adalah ... meter
    A. 32 B. 28 C. 24 D. 22,5 E. 20,5

Pembahasan:

No.	Pembahasan	Skor
1.	Diketahui : 18 + 6 + 2 + 2/3 +…… $a = 18$ $r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ Ditanyakan : S_∞ Jawab: $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ $S_\infty = \frac{18}{1-\frac{1}{3}}$ $S_\infty = \frac{18}{\frac{2}{3}}$ $S_\infty = 18.\frac{3}{2}$ $S_\infty = 9 \cdot 3$ $S_\infty = 27$ Subtitusi nilai a dan r ke rumus S_∞ untuk mencari nilai S_∞ **Jawaban : E**	**10**
2.	Diketahui : S_∞=81 $r = \frac{2}{3}$ Ditanyakan : U3 Jawab : $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ $81 = \frac{a}{1-\frac{2}{3}}$ $81 = \frac{a}{\frac{1}{3}}$ $81 = 3a$ $a = 27$ Subtitusi nilai r dan S_∞ ke rumus S_∞ untuk mencari nilai a Sehingga: $U_3 = a \cdot r^2$ $U_3 = 27\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $U_3 = 27.\frac{4}{9}$ $U_3 = 12$ Subtitusi nilai a dan r ke rumus U_n untuk mencari nilai U_3 **Jawaban : E**	**10**
3.	Diketahui : $2 + \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3}$ + … = 2p a=2 r=$\frac{1}{p}$ Ditanyakan: p=…. Jawab: $S_\infty = \frac{a}{1-r}$	**10**

	$2p = \dfrac{2}{1-\frac{1}{p}}$ $2p = \dfrac{2}{\frac{p-1}{p}}$ $2p = 2 \cdot \dfrac{p}{p-1}$ $2p(p-1) = 2p$ $2p^2 - 2 = 2p$ $2p^2 - 2p - 2 = 0$ $p^2 - p - 1 = 0$ $(p-2)(p+1)$ $p = 2 \quad atau\ p = -1$ Subtitusi nilai a dan r ke S_∞ untuk mencari nilai p **Jawaban : C**	
4.	Diketahui : $U_2=12$ $U_5=\frac{3}{2}$ Ditanyakan : S_∞ Jawab: $\dfrac{U5}{U_2} = \dfrac{ar^4}{ar}$ $\dfrac{\frac{3}{2}}{12} = r^3$ $\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{12} = r^3$ $\dfrac{3}{24} = r^3$ $\dfrac{1}{8} = r^3$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = r^3$ $r = \dfrac{1}{2}$ Mencari nilai r dengan membandingkan U_5 dan U_2 Sehingga : $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$ $= \dfrac{a.r}{r.(1-r)}$ $= \dfrac{12}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}$ $= \dfrac{12}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)}$ $= \dfrac{12}{\frac{1}{4}}$ $= 12 \times 4$ $= 48$ Mencari nilai r dengan membandingkan U_5 dan U_2 **Jawaban : D**	**10**

5.	Diketahui : $U_1 = S$ $U_2 = \frac{1}{2}S$ $U_3 = \frac{1}{4}S$ Ditanyakan : S_∞ Jawab: $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ $S_\infty = \frac{S}{1-\frac{1}{2}}$ $S_\infty = \frac{S}{\frac{1}{2}}$ $S_\infty = 2S$ Subtitusi nilai U_1 dan r untuk mencari S_∞ Jadi, panjang lintasan yang ditempuh benda tersebut sampai berhenti adalah 2S **Jawaban : E**	**10**
6.	Diketahui : $S_\infty = 10$ $a = 2$ Ditanyakan : U_2 Mencari r $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ $10 = \frac{2}{1-r}$ $(1-r) = \frac{2}{10}$ $(1-r) = \frac{1}{5}$ $-r = \frac{1}{5} - 1$ $-r = -\frac{4}{5}$ $r = \frac{4}{5}$ Subtitusi nilai S_∞ dan a ke rumus S_∞ untuk mencari r Karena $r = \frac{4}{5}$ diperoleh niali U_2 sebagai berikut $U_n = ar^{n-1}$ $U_2 = 2\left(\frac{4}{5}\right)^{2-1}$ $U_2 = 2\left(\frac{4}{5}\right)$ $U_2 = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$ Subtitusi nilai a dan r ke rumus U_n untuk mencari U_2 Jadi, suku kedua deret tersebut adalah $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$ **Jawaban : E**	**10**
7.	Diketahui : $U_1 + U_2 = 5$ dan $S_\infty = 9$ Ditanyakan : r Dari $U_1 + U_2 = 5$ kita bisa mencari a seperti berikut $U_1 + U_2 = 5$ $a + ar = 5$ $a(1+r) = 5$ **Ingat :** $U_n = ar^{n-1}$ sehingga $U_1 = a,\ U_2 = ar$	**10**

	$a = \frac{5}{(1+r)}$ Untuk mencari r subtitusi $a = \frac{5}{(1+r)}$ ke S_∞ $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ $9 = \frac{\frac{5}{1+r}}{1-r}$ $9 = \frac{5}{1+r} \cdot \frac{1}{1-r}$ $9 = \frac{5}{1-r^2}$ $9(1-r^2) = 5$ $9 - 9r^2 = 5$ $-9r^2 = 5 - 9$ $-9r^2 = -4$ $r^2 = \frac{4}{9}$ $r^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $r = \pm\frac{2}{3}$ Subtitusi a dan S_∞ ke rumus S_∞ untuk mencari r Nilai r yang mungkin adalah $r = -\frac{2}{3}$ atau $r = \frac{2}{3}$ Jadi, nilai r positif adalah $r = \frac{2}{3}$ **Jawaban : C**	
8.	Lintasan bola membentuk deret geometri. Lintasan bola turun : $5, \frac{15}{4}, \frac{45}{16}, \ldots$ Dengan $a = 5$ dan $r = \frac{3}{4}$ Untuk mencari lintasan bola turun subtitusi $a = 5$ dan $r = \frac{3}{4}$ ke rumus S_∞ sehingga : $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ $S_\infty = \frac{5}{1-\frac{3}{4}}$ $S_\infty = \frac{5}{\frac{1}{4}}$ $S_\infty = 5 \,.\, 4$ $S_\infty = 20$ Lintasan bola naik : $\frac{15}{4}, \frac{45}{16}, \frac{135}{64}, \ldots$ Dengan $a = \frac{15}{4}$ dan $r = \frac{3}{4}$ Untuk mencari lintasan bola naik subtitusi $a = \frac{15}{4}$ dan $r = \frac{3}{4}$ ke rumus S_∞ sehingga: $S_\infty = \frac{a}{1-r}$	**10**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
$$S_\infty = \frac{\frac{15}{4}}{1-\frac{3}{4}}$$
$$S_\infty = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{1}{4}}$$
$$S_\infty = \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{1}$$
$$S_\infty = 15$$
Total lintasan = Lintasan bola turun + Lintasan Bola Naik
Total lintasan = 20 + 15
Total lintasan = 35
Jadi, panjang lintasan bola tersebut sampai bola tersebut sampai bola berhenti adalah 35 meter.
Jawaban : C
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>9.</td>
<td>
Diketahui $a = 90\ cm$ dan $r = \frac{5}{8}$
Untuk mencari panjang lintasan sebelumnya hingga ayunan berhenti menggunakan rumus S_∞ sebgai berikut
$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$
$$= \frac{90}{1-\frac{5}{8}}$$
$$= \frac{90}{\frac{3}{8}}$$
$$= 90 \cdot \frac{8}{3}$$
$$= 240$$
Subtitusi a dan r ke rumus S_∞ untuk mencari nilai S_∞
Jadi, panjang lintasan sebelumnya hingga ayunan berhenti adalah 240 cm
Jawaban : C
</td>
<td>10</td>
</tr>
<tr>
<td>10</td>
<td>
Bola menggelinding dapat dituliskan dalam deret geometri tak hingga sebagai berikut
$8 + 6 + 4{,}5 + \cdots$
Berdasarkan deret tersebut diperoleh $a = 8$ dan $r = \frac{3}{4}$
Untuk menghitung panjang jarak yang ditempuh bola sampai dengan berhenti kita bisa gunakan rumus S_∞ berikut
$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$
$$= \frac{8}{1-\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{8}{\frac{1}{4}}$$
$$= 8 \cdot 4$$
$$= 32$$
Subtitusi a dan r ke rumus S_∞ untuk mencari nilai S_∞
Jadi, jarak yang ditempuh bola adalah 32 meter
Jawaban : A
</td>
<td>10</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Skor Total</td>
<td>100</td>
</tr>
</table>

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan= $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ total} x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami Deret Geometri Tak hingga?		
2.	Apakah kalian dapat memahami penerapan atau aplikasi dari Deret Geometri Tak hingga		
3.	Apakah kalian dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan aplikasi Deret Geometri Tak hingga?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 5
Aplikasi/Penerapan Barisan dan deret

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 5 ini kalian diharapkan dapat:
1. Memahami Aplikasi Barisan dan Deret
2. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penerapan atau aplikasi dari Barisan dan Deret

B. Uraian Materi

Anak-anak untuk selanjutnya ini kita akan belajar aplikasi/penerapan Barisan dan Deret. Banyak sekali penerapan materi Barisan dan Deret dalam kehidupan sehari-hari, antara lain:

1. Pertumbuhan

Deret geometri takhingga yang tidak mempunyai nilai disebut **Deret Divergen** sedangkan Deret geometri takhingga yang mempunyai nilai disebut **Deret Konvergen**

Contoh :
(a) Perkembangbiakan bakteri
(b) Pertumbuhan penduduk

Rumus Pertumbuhan aritmatika :

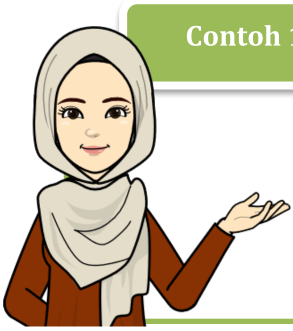
$M_n = M_o\ (1 + in)$ **Atau** $M_n = M_o + bn$

Dimana :
M_n = Jumlah/Nilai suatu objek setelah n waktu
M_o = Jumlah/Nilai suatu objek mula-mula
i = Persentase pertumbuhan
b = Nilai beda pertumbuhan
n = jangka waktu pertumbuhan

Rumus Pertumbuhan geometri :

$M_n = M_o\ (1 + i)^n$ **Atau** $M_n = M_o \cdot r^n$

Dimana :
M_n = Jumlah/Nilai suatu objek setelah n waktu
M_o = Jumlah/Nilai suatu objek mula-mula
i = Persentase pertumbuhan
r = Ratio pertumbuhan (r > 1)
n = jangka waktu pertumbuhan



Contoh 1:

Elsa mulai bekerja pada suatu perusahaan pada awal tahun 2005 dengan gaji permulaan sebesar Rp. 3.000.000. Jika dia mendapatkan kenaikan gaji secara berkala setiap tahunnya sebesar Rp. 200.000 maka berapakah gaji yang diterima Elsa pada awal tahun 2011?

Pembahasan:

Diketahui : M_o = 3.000.000

b = 200.000

n = 6

Ditanya : M_n = ... ?

Jawab

Mn = Mo + bn

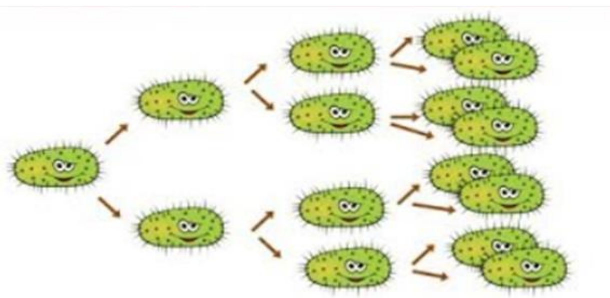
Mn = 3.000.000 + 200.000(6)

Mn = 3.000.000 + 1.200.000

Mn = Rp. 4.200.000

Contoh 2:

Suatu koloni bakteri akan membelah menjadi dua setiap lima menit. Jika pada permulaan terdapat 90 bakteri, maka tentukanlah jumlah bakteri setelah setengah jam ?



Gambar. Perkembang biakan bakteri

Sumber : https://images.app.goo.gl/U4uzPsSvbamwtcM67amwtcM67

Pembahasan :

Diketahui :

M_o = 90

r = 2

n = 30:5=6

Ditanya : M_n = ... ?

Jawab

Mn = Mo . rn

Mn = 90 x 26

Mn = 90 (64)

Mn = 5760 bakteri

Jadi, jumlah bakteri setelah setengah jam adalah 5760

2. Peluruhan

Deret geometri takhingga yang tidak mempunyai nilai disebut **Deret Divergen** sedangkan Deret geometri takhingga yang mempunyai nilai disebut **Deret Konvergen**

Contoh :

(a) Penurunan nilai jual mobil

(b) Penurunan jumlah populasi hewan

Rumus Peluruhan aritmatika :

$M_n = M_o\ (1 - in)$ **Atau** $M_n = M_o - bn$

Dimana :

M_n = Jumlah/Nilai suatu objek setelah n waktu

M_o = Jumlah/Nilai suatu objek mula-mula

i = Persentase peluruhan

b = Nilai beda peluruhan

n = jangka waktu peluruhan

Rumus Peluruhan geometri :

$M_n = M_o\ (1 - i)^n$ **Atau** $M_n = M_o \cdot r^n$

Dimana :

M_n = Jumlah/Nilai suatu objek setelah n waktu

M_o = Jumlah/Nilai suatu objek mula-mula

i = Persentase peluruhan

r = Ratio peluruhan ($r < 1$)

n = jangka waktu peluruhan

Contoh 1:

Sebuah mobil dibeli dengan harga Rp.200.000.000. Jika setiap tahun harganya mengalami penyusutan 20% dari nilai tahun sebelumnya, maka tentukanlah harga mobil itu setelah dipakai selama 5 tahun

Gambar. Mobil

Sumber : https://images.app.goo.gl/JWC23ZYa9ahprDZT8

Pembahasan :

Diketahui :
$M_o = 200.000.000$
$i = 20\% = 0,2$
$n = 5$
Ditanya : $M_n = ...$?
Jawab
$M_n = M_o (1 - i)^n$
$M_n = 200.000.000 (1 - 0,2)^5$
$M_n = 200.000.000 (0,8)^5$
$M_n = 200.000.000(0,32768)$
$M_n = 65.536.000$
Jadi, harga mobil itu setelah dipakai selama 5 tahun adalah Rp 65.536.000

Contoh 2:

Suatu pabrik kendaraan bermotor roda dua mulai memproduksi pertama pada tahun 2010 sebanyak 20.000 unit kendaraan. Tiap tahun produksi pabrik tersebut turun 100 unit. Berapakah jumlah produksi pada tahun 2016?

Gambar. Pabrik kendaraan bermotor
https://images.app.goo.gl/c7dAh1YXnd2bpLNs5

Pembahasan :
$M_o = 20.000$
$b = 100$
$n = 6 \rightarrow \boxed{n = 2016-2010 = 6}$

Ditanya : $M_n = ...$?
Jawab:

$M_n = M_o - bn$
$M_n = 20.000 - 100(6)$
$M_n = 20.000 - 600$
$M_n = 19.400$ unit

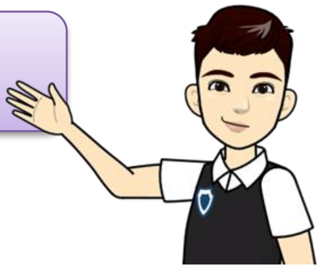
3. Bunga Majemuk

Salah satu apliksai barisan dan deret pada bidang ekonomi adalah pada perhitungan bunga pada simpanan uang di bank atau koperasi atau lembaga lain sejenisnya. Terdapat dua macam jenis bunga pada simpanan, yaitu :

(1) Bunga Tunggal (Barisan Aritmatika)
Yaitu metode pemberian imbalan jasa bunga simpanan yang dihitung berdasarkan modal pokok pinjaman atau modal awal simpanan saja.

Rumus bunga tunggal:

$$M_n = M_o\,(1 + in)$$

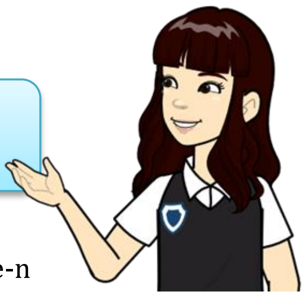


Dimana :
M_n = Nilai modal simpanan periode ke-n
M_o = Nilai modal awal simpanan
i = Persentase bunga simpanan
n = Periode pembungaan

(2) Bunga Majemuk (Barisan geometri)
Yaitu metoda pemberian imbalan jasa bunga simpanan yang dihitung berdasarkan besar modal atau simpanan pada periode bunga berjalan

Rumus bunga majemuk:

$$M_n = M_o\,(1 + i)^n$$



Dimana :
M_n = Nilai modal simpanan setelah periode ke-n
M_o = Nilai modal awal simpanan
i = Persentase bunga simpanan
n = Periode pembungaan

Contoh 1:

Pak Ahmad memerlukan tambahan modal untuk usahanya berdagang makanan, sehingga ia meminjam uang dikoperasi "Maju Jaya" sebesar Rp. 4.000.000 dengan imbalan jasa berupa bunga sebesar 2% dari pokok pinjaman per bulan. Jika pak Ahmad akan melunasi pinjaman itu beserta bunganya setelah 6 bulan, maka tentukanlah total pengembalian pak Ahmad

Pembahasan :
Diketahui :
M_o = 40.000.000
i = 2% = 0,02
n = 6
Ditanyakan : $M_n = \cdots ?$
M_n = Mo (1 + in)
M_6 = 40.000.000(1 + 0,02(6))
M_6 = 40.000.000(1,12)
M_6 = 4.480.000
Jadi total pengembalian pak Ahmad adalah Rp. 4.480.000,-

Contoh 2:

Arman menabung sejumlah uang disebuah bank. Jenis tabungan yang dipilih Arman adalah tabungan dengan sistem bunga tunggal sebesar 3% per caturwulan. Jika setelah 3 tahun tabungan Arman menjadi Rp. 25.400.000 maka tentukanlah besar tabungan awal Arman di bank itu

Gambar. Bank BRI
Sumber : https://images.app.goo.gl/f7P4k6YvD5AC9Ktz5

Pembahasan :

Diketahui : $M_n = 25.400.000$

$i = 3\%$

$\;\; = 0,03$

$n = \dfrac{3 \text{ tahun}}{4 \text{ bulan}}$

$\;\; = \dfrac{36 \text{ bulan}}{4 \text{ bulan}}$

$\;\; = 9$

Menentukan M_0 dengan mensubtitusi nilai $M_n, i,$ dan n diperoleh

$25.400.000 = M_o\big(1 + 0,03(9)\big)$

$25.400.000 = M_o(1 + 0,27)$

$25.400.000 = M_o(1,27)$

$M_o = \dfrac{25.400.000}{1,27}$

$M_o = 20.000.000$

Jadi, besar tabungan awal Arman adalah Rp 20.000.000

Contoh 3:

Santi menyimpan uangnya di sebuah bank sebesar Rp. 2.000.000. Setelah tiga tahun uang tabungan Santi menjadi Rp. 2.662.000. Jika bank tersebut menerapkan sistem bunga majemuk , berapa persenkah per-tahun bunga bank tersebut ?

Pembahasan :
Diketahui :

M_o = 2.000.000
M_n = 2.662.000
n = 3

Ditanya : i = ... ?
Jawab:

$$M_n = M_o(1+i)^n$$
$$2.662.000 = 2.000.000(1+i)^3$$
$$\frac{2.662.000}{2.000.000} = (1+i)^3$$
$$1{,}331 = (1+i)^3$$
$$1{,}1^3 = (1+i)^3$$
$$1+i = 1{,}1$$
$$i = 1{,}1-1$$
$$i = 0{,}1$$

Jadi, persentase bunga bank adalah 10%

4. Anuitas

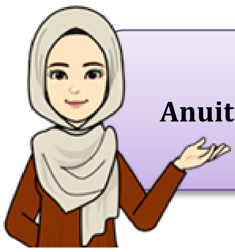
Anuitas bukan hal yang baru dalam kehidupan ekonomi semisal pembayaran sewa rumah, atau angsuran kredit (motor, rumah, bank, dll) atau pun uang tabungan kita di bank yang setiap bulan mendapatkan bunga, semuanya contoh konkret dari anuitas.
Ada dua macam anuitas, yaitu:

a. **Anuitas pasti** yaitu anuitas yang tanggal pembayarannya mulai dan terakhirnya pasti.
   Contoh: KPR, kredit bank, kredit mobil, dll.
b. **Anuitas tidak pasti**, yaitu anuitas yang jangka pembayarannya tidak pasti.
   Contohnya pembayaran santunan asuransi kecelakaan.

Anuitas adalah rangkaian pembayaran atau penerimaan yang sama jumlahnya dan harus dibayarkan atau yang harus diterima pada tiap akhir periode atas sebuah pinjaman atau kredit. Jika suatu pinjaman akan dikembalikan secara anuitas, maka ada tiga komponen yang menjadi dasar perhitungan yaitu:

a. Besar pinjaman
b. Besar bunga
c. Jangka waktu dan jumlah periode pembayaran

Anuitas yang diberikan secara tetap pada setiap akhir periode mempunyai dua fungsi yaitu membayar bunga atas hutang dan mengangsur hutang itu sendiri. Sehingga konsepnya :



Anuitas = Bunga atas hutang + Angsuran hutang

Jika utang sebesar $\boldsymbol{M_0}$ mendapat bunga sebesar **b** per bulan dan anuitas sebesar **A**, maka dapat ditentukan :

- **Besar bunga pada akhir periode ke-n**

$$\boldsymbol{B_n = (1+b)^{n-1}(b.M - A) + A}$$

- **Besar angsuran pada akhir periode ke-n**

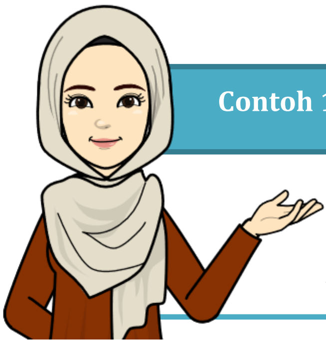
$$\boldsymbol{A_n = (1+b)^{n-1}(A - bM)}$$

- **Sisa hutang pada akhir periode ke-n**

$$\boldsymbol{M_n = (1+b)^n\left(M - \frac{A}{b}\right) + \frac{A}{b}}$$

Besar anuitas untuk membayar hutang sebesar M_0 dengan bunga sebesar b perbulan selama n bulan adalah :

$$\boldsymbol{A = \frac{b.M_0(1+b)^n}{(1+b)^n - 1}}$$



Contoh 1:

Sebuah pinjaman sebesar Rp20.000.000,00 akan dilunasi secara anuitas tahunan sebesar Rp 4.000.000,00. Jika suku bunga 5% per tahun, besar angsuran, bunga, dan sisa hutang tahun ketiga adalah?

Pembahasan :
M = 20.000.000
A = 4.000.000
b = 5 %
n = 3

- **Angsuran**

$$A_n = (1+b)^{n-1}(A - bM)$$
$$A_n = (1+0{,}05)^{3-1}(400.0000 - (0{,}05)20.000.000)$$
$$A_n = (1{,}05)^2(4.000.000 - 1.000.000)$$
$$A_n = (1{,}1025)(3.000.000)$$
$$A_n = 3.307.500{,}00$$

- **Bunga**

$$B_n = (1+b)^n(b.M - A) + A$$
$$B_n = (1+0{,}05)^{3-1}(0{,}05 \times 20.000.000 - 4.000.000) + 4.000.000$$
$$B_n = (1{,}5)^2(-3.000.000) + 4.000.000$$
$$B_n = -3.307.500 + 4.000.000$$
$$B_n = 692.500{,}00$$

- **Sisa hutang**

$$M_n = (1+b)^n\left(M - \frac{A}{b}\right) + \frac{A}{b}$$
$$M_n = (1+0{,}05)^3\left(20.000.000 - \frac{4.000.000}{0{,}05}\right) + \frac{4.000.000}{0{,}05}$$
$$M_n = (1{,}157625)(-60.000.000) + 80.000.000$$
$$M_n = 10.542.500{,}00$$

C. Rangkuman

Aplikasi atau penerapan materi Barisan dan Deret dalam kehidupan sehari-hari.

1. **Pertumbuhan**
   Deret geometri takhingga yang tidak mempunyai nilai disebut **Deret Divergen** sedangkan Deret geometri takhingga yang mempunyai nilai disebut **Deret Konvergen**
   Contoh :
   (a) Perkembangbiakan bakteri
   (b) Pertumbuhan penduduk

2. **Peluruhan**
   Deret geometri takhingga yang tidak mempunyai nilai disebut **Deret Divergen** sedangkan Deret geometri takhingga yang mempunyai nilai disebut **Deret Konvergen**
   Contoh :
   (a) Penurunan nilai jual mobil
   (b) Penurunan jumlah populasi hewan

3. **Bunga Majemuk**
   Salah satu apliksai barisan dan deret pada bidang ekonomi adalah pada perhitungan bunga pada simpanan uang di bank atau koperasi atau lembaga lain sejenisnya. Terdapat dua macam jenis bunga pada simpanan, yaitu :
   (1) Bunga Tunggal (Barisan Aritmatika)
   Yaitu metode pemberian imbalan jasa bunga simpanan yang dihitung berdasarkan modal pokok pinjaman atau modal awal simpanan saja.
   (2) Bunga Majemuk (Barisan geometri)
   Yaitu metoda pemberian imbalan jasa bunga simpanan yang dihitung berdasarkan besar modal atau simpanan pada periode bunga berjalan

4. **Anuitas**
   Anuitas adalah rangkaian pembayaran atau penerimaan yang sama jumlahnya dan harus dibayarkan atau yang harus diterima pada tiap akhir periode atas sebuah pinjaman atau kredit.
   Ada dua macam anuitas, yaitu:
   1. **Anuitas pasti** yaitu anuitas yang tanggal pembayarannya mulai dan terakhirnya pasti.
      Contoh: KPR, kredit bank, kredit mobil, dll.
   2. **Anuitas tidak pasti**, yaitu anuitas yang jangka pembayarannya tidak pasti.
      Contohnya pembayaran santunan asuransi kecelakaan.

D. Latihan Soal

Untuk mengukur kemampuan kalian, kerjakan Latihan berikut

1. Jumlah penduduk suatu kota bertambah menurut pola geometri sebesar 0,1% per bulan. Berarti jika jumlah penduduk kota itu semula 3 juta orang maka pada akhir bulan ke-3 jumlahnya telah menjadi sekitar … orang

2. Suatu jenis hewan langka setiap tahun mengalami penurunan jumlah populasi sebanyak 1/3 dari jumlah populasi tahun sebelumnya. Jika pada tahun 2015 diperkirakan jumlah populasi hewan tersebut disuatu pulau sebanyak 720 ekor, maka berapakah perkiraan jumlah hewan itu pada tahun 2019 ?

3. Dengan pesatnya pembangunan pemukiman, maka daerah pesawahan semakin lama semakin sempit. Menurut data statistik, pada tahun 2003 total areal sawah di daerah itu sekitar 400 ha dan setiap tahun berkurang 5% dari total areal sawah semula . Berapakah diperkirakan areal sawah pada tahun 2015?

4. Pak Budi menabung sebesar Rp. 8.000.000 di suatu bank. Jika bank memberlakukan sistem bunga tunggal sebesar 3% setiap triwulan, maka setelah berapa lamakah uang tabungan pak Budi menjadi Rp. 10.400.000

5. Pak Mulyo adalah seorang pengusaha batik. Ia menyimpan uangnya sebesar Rp. 100.000.000 di sebuah bank. Bank tersebut memberikan bunga tabungan dengan sistem bunga majemuk sebesar 12% per bulan. Berapakah besarnya tabungan pak Mulyo setelah 5 bulan ?

6. Sebuah pinjaman sebesar Rp 850.000.000,00 yang harus dilunasi dengan 6 anuitas jika dasar bunga 4% per bulan dan pembayaran pertama dilakukan setelah sebulan. Sisa hutang pada akhir bulan kelima adalah?

Pembahasan:

<table>
<tr><th>No.</th><th>Pembahasan</th><th>Skor</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Jumlah penduduk suatu kota bertambah menurut pola geometri sebesar 0,1% per bulan. Berarti jika jumlah penduduk kota itu semula 3 juta orang maka pada akhir bulan ke-3 jumlahnya telah menjadi sekitar … orang
Jawab
Diketahui :
Mo = 3.000.000
i = 0,1% = 0,001
n = 3
Ditanya : M_n = …. ?
Jawab
$M_n = Mo\ (1 + i)^n$
$M_3 = 3.000.000\ \ (1 + 0{,}001)^3$
$M_3 = 3.000.000\ \ (1{,}001)^3$
$M_3 = 3.000.000(1{,}003003)$
M_3 = 3.009.009 orang</td><td>3

2

5</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Suatu jenis hewan langka setiap tahun mengalami penurunan jumlah populasi sebanyak 1/3 dari jumlah populasi tahun sebelumnya. Jika pada tahun 2015 diperkirakan jumlah populasi hewan tersebut disuatu pulau sebanyak 720 ekor, maka berapakah perkiraan jumlah hewan itu pada tahun 2019 ?
Jawab
Diketahui :
$M_o = 720$
r = 1/3
n = 4 → $\boxed{n = 2019\text{-}2015 = 4}$
Ditanya : M_n = …. ?
Jawab
$M_n = M_o \,.\, r^n$
$M_n = 720 \text{ x } \left(\frac{1}{3}\right)^4$
$M_n = 720 \text{ x } (\frac{1}{81})$
M_n = 8,888 = 9 ekor</td><td>3

2

5</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Dengan pesatnya pembangunan pemukiman, maka daerah pesawahan semakin lama semakin sempit. Menurut data statistik, pada tahun 2003 total areal sawah di daerah itu sekitar 400 ha dan setiap tahun berkurang 5% dari total areal sawah semula . Berapakah diperkirakan areal sawah pada tahun 2015?
Jawab
Diketahui :
$M_o = 400$
i = 5% = 0,05
n = 12
Ditanya : M_n = …. ?
Jawab
$M_n = M_o\ (1 - in)$
$M_n = 400(1 - 0{,}05\text{x}12)$</td><td>3

2</td></tr>
</table>

	$M_n = 400(1 - 0{,}6)$ $M_n = 400(0{,}4)$ $M_n = 160$ ha	**5**
4.	Pak Budi menabung sebesar Rp. 8.000.000 di suatu bank. Jika bank memberlakukan sistem bunga tunggal sebesar 3% setiap triwulan, maka setelah berapa lamakah uang tabungan pak Budi menjadi Rp. 10.400.000 Jawab Diketahui : $M_o = 8.000.000$ $i = 3\% = 0{,}03$ $M_n = 10.400.000$ maka $M_n = M_o\,(1 + in)$ $10.400.000 = 8.000.000\,(1 + 0{,}03n)$ $10.400.000 = 8.000.000 + 240.000n$ $2.400.000 = 240.000n$ $n = 240.000/2.400.000$ $n = 10$ sehingga n = 10 triwulan = (10x3) bulan = 30 bulan = 2,5 tahun	**3** **2** **5**
5.	Pak Mulyo adalah seorang pengusaha batik. Ia menyimpan uangnya sebesar Rp. 100.000.000 di sebuah bank. Bank tersebut memberikan bunga tabungan dengan sistem bunga majemuk sebesar 12% per bulan. Berapakah besarnya tabungan pak Mulyo setelah 5 bulan ? Jawab Diketahui : $M_o = 100.000.000$ $i = 12\% = 0{,}12$ $n = 5$ Ditanya : $M_n = ...$? Jawab: $M_n = M_o\,(1 + i)^n$ $M_{10} = 100.000.000\ (1 + 0{,}12)^5$ $M_{10} = 100.000.000\ (1{,}12)^5$ $M_{10} = 100.000.000.(1{,}762)$ $M_{10} = 176.200.000$	**3** **2** **5**
6.	Sebuah pinjaman sebesar Rp 850.000.000,00 yang harus dilunasi dengan 6 anuitas jika dasar bunga 4% per bulan dan pembayaran pertama dilakukan setelah sebulan. Sisa hutang pada akhir bulan kelima adalah? Jawab: M = 850.000.000 b = 4% n = 6 • **Anuitas** $A = \frac{b(M_0)(1+b)^n}{(1+b)^n - 1}$ $A = \frac{(0{,}04)(850.000.000)(1+0{,}04)^6}{(1+0{,}04)^6 - 1}$	**2** **4**

	$A = \frac{(0{,}04)(850.000.000)(1{,}04)^6}{(1{,}04)^6 - 1}$ $A = \frac{43.020.846{,}63}{0{,}2265319}$ $A = 162.147.628{,}43$ • **Sisa hutang pada akhir periode ke-5** $M_n = (1+b)^n \left(M - \frac{A}{b}\right) + \frac{A}{b}$ $M_n = (1+0{,}04)^5 \left(850.000.000 - \frac{162.147.628{,}43}{0{,}04}\right) + \frac{162.147.628{,}43}{0{,}04}$ $M_n = (1{,}04)^5 \left(850.000.000 - \frac{162.147.628{,}43}{0{,}04}\right) + \frac{162.147.628{,}43}{0{,}04}$ $M_n = 155.911.109{,}00$	**4**
	Skor Total	**60**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan=$\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ total}\ x\ 100\%$

Kriteria

90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami aplikasi atau penerapan barisan dan deret untuk masalah pertumbuhan ?		
2.	Apakah kalian memahami aplikasi atau penerapan barisan dan deret untuk masalah peluruhan ?		
3.	Apakah kalian memahami aplikasi atau penerapan barisan dan deret untuk masalah bunga majemuk ?		
4.	Apakah kalian memahami aplikasi atau penerapan barisan dan deret untuk masalah anuitas ?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

1. Dari suatu barisan aritmetika, suku ketiga adalah 36, jumlah suku kelima dan ketujuh adalah 144. Jumlah sepuluh suku pertama deret tersebut adalah ….
   a. 840
   b. 660
   c. 640
   d. 630
   e. 315

2. Seorang ibu membagikan permen kepada 5 orang anaknya menurut aturan deret aritmetika. Semakin muda usia anak semakin banyak permen yang diperoleh. Jika banyak permen yang diterima anak kedua 11 buah dan anak keempat 19 buah, maka jumlah seluruh permen adalah …buah.
   a. 60
   b. 65
   c. 70
   d. 75
   e. 80

3. Seorang anak menabung di suatu bank dengan selisih kenaikan tabungan antar bulan tetap. Pada bulan pertama sebesar Rp. 50.000,00, bulan kedua Rp.55.000,00, bulan ketiga Rp.60.000,00, dan seterusnya. Besar tabungan anak tersebut selama dua tahun adalah ….
   a. Rp. 1.315.000,00
   b. Rp. 1.320.000,00
   c. Rp. 2.040.000,00
   d. Rp. 2.580.000,00
   e. Rp. 2.640.000,00

4. Dari suatu deret aritmetika diketahui $U_3 = 13$ dan $U_7 = 29$. Jumlah dua puluh lima suku pertama deret tersebut adalah ….
   a. 3.250
   b. 2.650
   c. 1.625
   d. 1.325
   e. 1.225

5. Suku ke – n suatu deret aritmetika $Un = 3n - 5$. Rumus jumlah n suku pertama deret tersebut adalah ….
   a. $Sn = {}^n/_2\ (3n - 7)$
   b. $Sn = {}^n/_2\ (3n - 5)$
   c. $Sn = {}^n/_2\ (3n - 4)$
   d. $Sn = {}^n/_2\ (3n - 3)$
   e. $Sn = {}^n/_2\ (3n - 2)$

6. Jumlah n buah suku pertama deret aritmetika dinyatakan oleh $Sn = {}^n/_2\ (5n - 19)$. Beda deret tersebut adalah ….
   a. – 5
   b. – 3
   c. – 2
   d. 3
   e. 5

7. Empat buah bilangan positif membentuk barisan aritmetika. Jika perkalian bilangan pertama dan keempat adalah 46, dan perkalian bilangan kedua dan ketiga adalah 144, maka jumlah keempat bilangan tersebut adalah ….
   a. 49
   b. 50
   c. 60
   d. 95
   e. 98

8. Jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah $Sn = n^2 + {}^5/_2\ n$. Beda dari deret aritmetika tersebut adalah ….
   a. $-{}^{11}/_2$
   b. – 2
   c. 2
   d. ${}^5/_2$
   e. ${}^{11}/_2$

9. Dari deret aritmetika diketahui suuku tengah 32. Jika jumlah n suku pertama deret itu 672, banyak suku deret tersebut adalah ….
   a. 17
   b. 19
   c. 21
   d. 23
   e. 25

10. Sebuah mobil dibeli dengan haga Rp. 80.000.000,00. Setiap tahun nilai jualnya menjadi ¾ dari harga sebelumnya. Berapa nilai jual setelah dipakai 3 tahun ?
   a. Rp. 20.000.000,00
   b. Rp. 25.312.500,00
   c. Rp. 33.750.000,00
   d. Rp. 35.000.000,00
   e. Rp. 45.000.000,00

11. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 10 m dan memantul kembali dengan ketinggian ¾ kali tinggi sebelumnya, begitu seterusnya hingga bola berhenti. Jumlah seluruh lintasan bola adalah ….
   a. 65 m
   b. 70 m
   c. 75 m
   d. 77 m
   e. 80 m

12. Seutas tali dipotong menjadi 7 bagian dan panjang masing – masing potongan membentuk barisan geometri. Jika panjang potongan tali terpendek sama dengan 6 cm dan potongan tali terpanjang sama dengan 384 cm, panjang keseluruhan tali tersebut adalah … cm.
   a. 378
   b. 390
   c. 570
   d. 762
   e. 1.530

13. Sebuah bola pingpong dijatuhkan dari ketinggian 25 m dan memantul kembali dengan ketinggian $^4/_5$ kali tinggi semula. Pematulan ini berlangsung terus menerus hingga bola berhenti. Jumlah seluruh lintasan bola adalah … m.
    a. 100
    b. 125
    c. 200
    d. 225
    e. 250

14. Jumlah deret geometri tak hingga $\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \ldots$ adalah ….
    a. $^2/_3\,(\sqrt{2} + 1)$
    b. $^3/_2\,(\sqrt{2} + 1)$
    c. $2\,(\sqrt{2} + 1)$
    d. $3\,(\sqrt{2} + 1)$
    e. $4\,(\sqrt{2} + 1)$

15. Jumlah deret geometri tak hingga adalah 7, sedangkan jumlah suku – suku yang bernomor genap adalah 3. Suku pertama deret tersebut adalah ….
    a. $^7/_4$
    b. $\frac{3}{4}$
    c. $^4/_7$
    d. $\frac{1}{2}$
    e. $\frac{1}{4}$

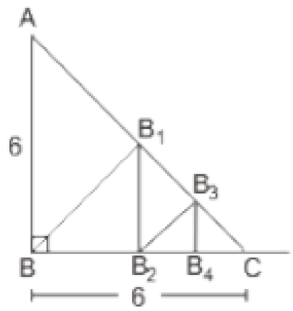
16. Pertambahan penduduk suatu kota tiap tahun mengikuti aturan barisan geometri. Pada tahun 1996 pertambahannya sebanyak 6 orang, tahun 1998 sebanyak 54 orang. Pertambahan penduduk pada tahun 2001 adalah … orang.
    a. 324
    b. 486
    c. 648
    d. 1.458
    e. 4.374

17. Diketahui barisan geometri dengan $U_1 = x^{3/4}$ dan $U_4 = x\sqrt{x}$. Rasio barisan geometri tesebut adalah ….
    a. $x^2 . \sqrt[4]{x}$
    b. x^2
    c. $x^{3/4}$
    d. $\sqrt{x}$
    e. $\sqrt[4]{x}$

18. Diketahui suatu barisan aritmetika dengan $U_3 + U_9 + U_{11} = 75$. Suku tengah barsan tersebut adalah 68 dan banyak sukunya 43, maka U_{43} = ….
    a. 218
    b. 208
    c. 134
    d. 132
    e. 131

19. Jumlah tiga bilangan barisan aritmetika adalah 45. Jika suku kedua dikurangi 1 dan suku ketiga ditambah 5, maka barisan tersebut menjadi barisan geometri. Rasio barisan geometri tersebut adalah ….
    a. ½
    b. ¾
    c. 1½
    d. 2
    e. 3

20. Diketahi segitiga ABC siku – siku sama kaki seperti pada gambar.



Jumlah semua panjang sisi miring AC + AB + BB_1 + B_1B_2 + B_2B_3 + … adalah ….
    a. 18 ($\sqrt{2}$ + 1)
    b. 12 ($\sqrt{2}$ + 1)
    c. 18 $\sqrt{2}$ + 1
    d. 12 $\sqrt{2}$ + 1
    e. 6 $\sqrt{2}$ + 6

21. Diketahui suku ke – 3 dan suku ke – 6 suatu deret aritmetika berturut – turut adalah 8 dan 17. Junlah delapan suku pertama deret tersebut sama dengan ….
    a. 100
    b. 110
    c. 140
    d. 160
    e. 180

22. Seutas tali dipotong menjadi 52 bagian yang masing – masing potongan membentuk deret aritmetika. Bila potongan tali terpendek adalah 3 cm dan yang terpanjang adalah 105 cm, maka panjang tali semula adalah … cm.
    a. 5.460
    b. 2.808
    c. 2.730
    d. 1.352
    e. 808

23. Diketahui deret geometri dengan suku pertama 6 dan suku keempat adalah 48. Jumlah enam suku pertama deret tersebut adalah ….
    a. 368
    b. 369

c. 378
d. 379
e. 384

24. Diketahui barisan aritmetika dengan Un adalah suku ke−n. Jika $U_2 + U_{15} + U_{40} = 165$, maka U_{19} = ...
a. 10
b. 19
c. 28,5
d. 55
e. 82,5

25. Tiga buah bilangan membentuk barisan aritmetika dengan beda tiga. Jika suku kedua dikurangi 1, maka terbentuklah barisan geometri dengan jumlah 14. Rasio barisan tersebut adalah ....
a. 4
b. 2
c. $\frac{1}{2}$
d. $-\frac{1}{2}$
e. −2

KUNCI JAWABAN EVALUASI :

1. B
2. D
3. D
4. D
5. A
6. E
7. B
8. C
9. C
10. C
11. B
12. D
13. D
14. C
15. A
16. D
17. E
18. E
19. D
20. B
21. A
22. B
23. C
24. D
25. B

DAFTAR PUSTAKA

Abdillah, Fahri. 2018. Matematika Kelas 11 | Barisan dan Deret Geometri: Rumus Un, Sn, dan Jenis-Jenis Deret Geometri Tak Hingga. Dalam: https://blog.ruangguru.com/barisan-dan-deret-geometri-rumus-un-sn-dan-deret-geometri-tak-hingga diakses 15 Setember 2020

Anonim. Bunga Tunggal, Bunga Majemuk, Penyusutan, & Anuitas. Dalam : https://www.studiobelajar.com/bunga-tunggal-majemuk-anuitas/ diakses 15 September 2020

Anonim. 2020. Aplikasi Deret Geometri Tak Hingga. Dalam. https://www.materimatematika.com/2017/10/aplikasi-barisan-dan-deret.html 15 September 2020

Imron, Muhammad. 2011. Bahan Ajar Pola, Barisan dan Deret. Universitas Gunadarma.

Manullang, Sudianto. dkk. 2017. Matematika SMA/MA Kelas XI. Jakarta : Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan

Muklis, Duparno. 2014. Matematika Mata Pelajaran Wajib Kelas XI Semester 1. Klaten: Intan Pariwara.

Suwarno, Muji. 2017. Aplikasi Barisan dan Deret. Dalam : https://www.materimatematika.com/2017/10/aplikasi-barisan-dan-deret.html tanggal 15 September 2020

Sukino. 2018. The Best Prestasi Matematika IPA. Bandung: Yrama Widya

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI, PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum

KELAS XI

LIMIT FUNGSI ALJABAR

MATEMATIKA WAJIB KELAS XI

PENYUSUN
Istiqomah, S.Pd

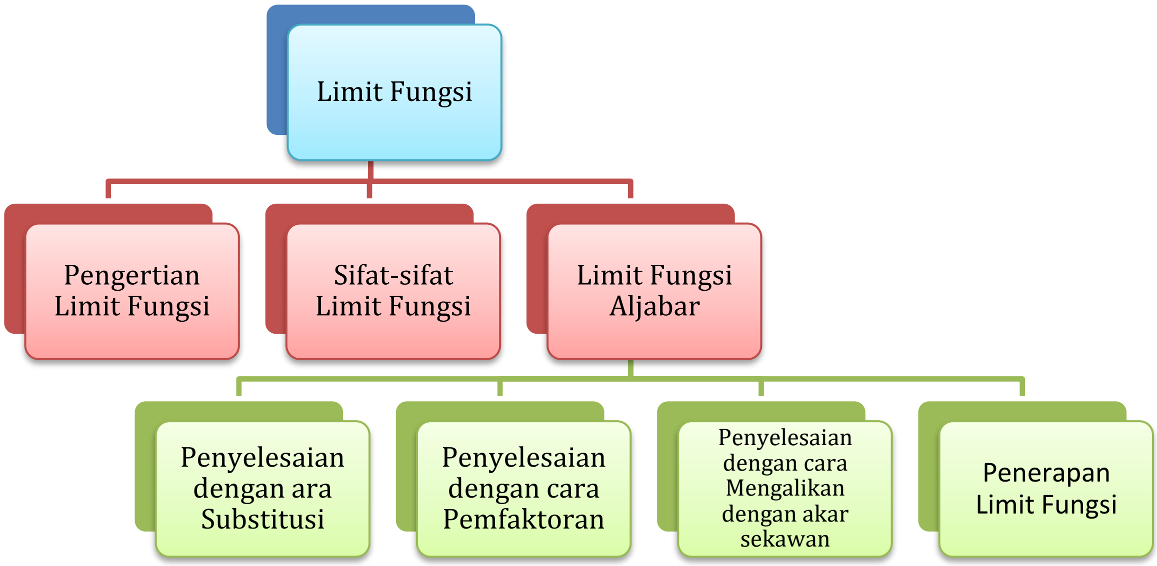
SMA Negeri 5 Mataram

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Limit	:	nilai pendekatan di sekitar titik tertentu baik pendekatan dari kiri suatu titik maupun pendekatan dari kanan titik tersebut.
Limit Kiri	:	Pendekatan nilai fungsi real dari sebelah kiri
Limit Kanan	:	Pendekatan nilai fungsi real dari sebelah kanan
Metode Substitusi	:	menentukan nilai limit dengan mensubstitusi langsung batas limit ke dalam limit fungsi untuk limit tidak bentuk tak tentu.
Metode pemfaktoran	:	menentukan limit bentuk tidak tentu dengan memfaktorkan pembilang dan atau penyebut agar dapat dilakukan metode substitusi.
Metode Perkalian dengan Sekawan	:	menentukan nilai limit bentuk akar dengan mengalikan sekawan agar dapat dilakukan metode pemfaktoran.

PETA KONSEP


Limit Fungsi
Pengertian Limit Fungsi
Sifat-sifat Limit Fungsi
Limit Fungsi Aljabar
Penyelesaian dengan ara Substitusi
Penyelesaian dengan cara Pemfaktoran
Penyelesaian dengan cara Mengalikan dengan akar sekawan
Penerapan Limit Fungsi

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Wajib
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	8x45 Menit
Judul Modul	:	Limit Fungsi Aljabar

B. Kompetensi Dasar

3.7 Menjelaskan limit fungsi aljabar (fungsi polinom dan fungsi rasional) secara intuitif dan sifat-sifatnya, serta menentukan eksistensinya.

4.7 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar.

C. Deskripsi Singkat Materi

Anak-anak, Limit adalah salah satu bab yang terdapat di pelajaran matematika yang sering sekali dianggap rumit. Padahal pemahaman tentang limit diperlukan untuk lebih memahami deret geometri tak hingga, materi differensial, integral dan penerapan pada bidang ilmu yang lain. Oleh karena itu pada modul ini akan disajikan materi limit dengan cara yang sederhana, agar kalian dapat mengubah persepsinya bahwa mempelajari limit tidaklah sulit, selain itu pada modul ini akan dipelajari tentang limit fungsi aljabar yang meliputi limit fungsi secara intuitif, limit nilai tertentu dan limit nilai tak tentu. Materi limit ini sangat menarik karena dengan belajar limit kita akan mengetahui manfaat konsep limit fungsi dalam kehidupan sehari-hari.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Anak-anakku sekalian, modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh soal yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada modul ini.
5. Jika kalian menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Pengertian limit secara intuitif dan sifat-sifat limit fungsi
Kedua : Limit Fungsi Aljabar

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Pengertian dan sifat-sifat Limit Fungsi

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak, setelah kegiatan pembelajaran 1 ini kalian diharapkan dapat memahami tentang ...
1. Pengertian Limit Fungsi
2. Sifat – Sifat Limit Fungsi

B. Uraian Materi

Pengertian Limit Fungsi

Anak-anak, pernahkah kalian mencoba menghitung kecepatan dan percepatan yang dialami sebuah mobil yang bergerak selama t sekon? Jika persamaan gerak mobil tersebut memenuhi persamaan $s(t) = (t^2 + 4t)$ meter, maka berapakah kecepatan dan percepatan mobil tersebut tepat pada saat $t = 3$ sekon?. Permasalahan di atas merupakan permasalahan pada bidang Fisika yang pemecahannya menggunakan bantuan konsep limit fungsi.

Gambar 1. Mobil melaju dengan cepat
Sumber : https://images.app.goo.gl/YuzUW8udBUF4fZGD7

Limit Fungsi adalah nilai pendekatan di sekitar titik tertentu baik pendekatan dari kiri maupun pendekatan dari kanan titik tersebut.

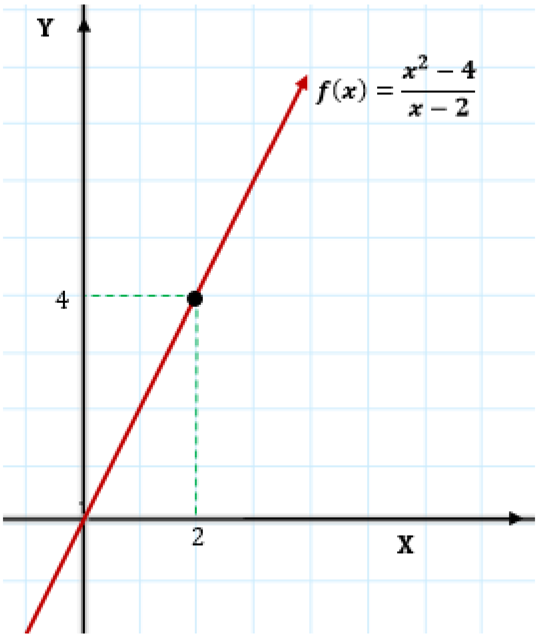
Untuk lebih jelasnya perhatikan ilustrasi berikut :
Misalkan terdapat suatu fungsi $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2$. Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ jika ada !
Untuk menentukan limit fungsi aljabar di $x \to a$ kita bisa menggunakan tabel seperti berikut.

x mendekati 2 dari kiri					↓	x mendekati 2 dari kanan				
x	1,8	1,9	1,99	1,9999	2	2,000001	2,0001	2,001	2,05	2,1
$f(x)$	3,8	3,9	3,99	3,9999	...	4,000001	4,0001	4,001	4,05	4,1
$f(x)$ mendekati 4					↑	$f(x)$ mendekati 4				

Jika kita subtitusi nilai-nilai x dari kiri maka nilainya akan mendekati 4, sedangkan jika kita subtitusi nilai-nilai x dari kanan maka nilainya akan mendekati 4 juga. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ dan $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ jadi $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

Jika disajikan dalam grafik seperti berikut



Gambar 2: Fungsi $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$
Sumber: koleksi pribadi

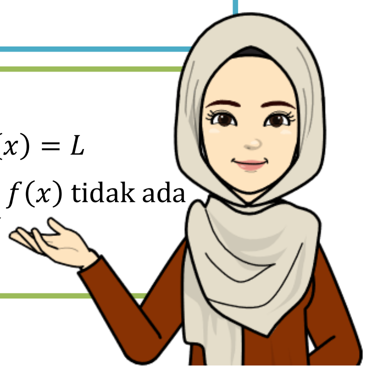
Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ adalah 4

Secara matematis limit dapat didefinisikan sebagai berikut.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ artinya jika x mendekati a,tetapi x tidak sama dengan a, maka nilai $f(x)$ mendekati nilai L

Jika fungsi $f(x)$ terdefinisi pada selang terbuka I, maka:

a. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ (ada) jika dan hanya jika $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$
b. Jika $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1$ dan $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2$ dimana $L_1 \neq L_2$ maka $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tidak ada



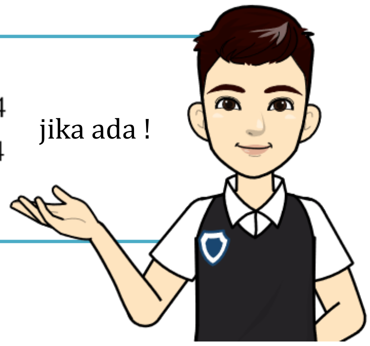
Keterangan :

- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ dibaca limit $f(x)$ untuk nilai x yang mendekati a dari kanan $(x > a)$
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ dibaca limit $f(x)$ untuk nilai x yang mendekati a dari kiri $(x < a)$

Biar makin paham simak contoh berikut ya…

Contoh Soal 1:

Tentukan limit f(x) untuk fungsi $f(x)=\begin{cases}2x & \text{, untuk x} \le 4\\ 2x+3, & \text{untuk x} > 4\end{cases}$ jika ada !

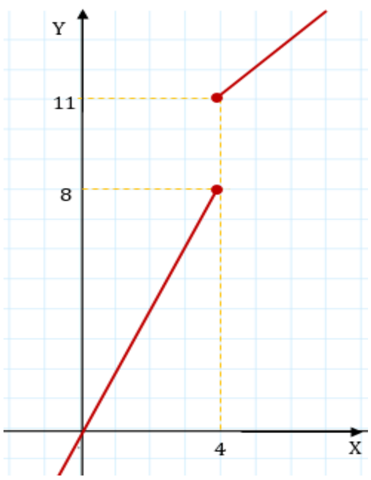


Pembahasan :
Untuk menentukan limit fungsi aljabar di $x \to a$ kita bisa menggunakan tabel seperti berikut.

x mendekati 4 dari kiri					↓	x mendekati 4 dari kanan				
x	3,9	3,95	3,99	3,9999	4	4,00001	4,0001	4,001	4,01	4,1
$f(x)$	7,80	7,90	7,98	7,9998	…	11,00002	11,0002	11,002	11,02	11,2
$f(x)$ mendekati 8					↑	$f(x)$ mendekati 11				

Tabel di atas menunjukkan : $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=8$ dan $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=11$
(limit kiri ≠ limit kanan), sehingga $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ tidak ada.

Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut.



Gambar 3: Grafik fungsi $f(x)=\begin{cases}2x & \text{, untuk x} \le 4\\ 2x+3, & \text{untuk x} > 4\end{cases}$

Sumber: koleksi pribadi

Catatan :

Secara konsep dasar matematika, cara mengerjakan soal matematika yang ada limitnya, hanya tinggal mengganti/mensubtitusi variabel $\boldsymbol{x}$ menjadi angka yang didekati oleh x tersebut.

Contoh Soal 2:

Anak – anak, coba perhatikan limit fungsi di bawah ini

$$\lim_{x \to 1} \frac{5x^3+7x^{14}+6}{8x^5+4x^9-6}$$

Berapakah hasil nilai limit dari data diatas ?
$A.$ 3
$B.$ 0
$C.$ 7
$D.$ 6
$E.$ ∞

Pembahasan:
Pada limit diatas, untuk mencari hasil nilai limitnya, kalian hanya tinggal mensubtitusi atau mengganti variabel x dengan angka 1, sehingga hasil limitnya menjadi

$$\lim_{x \to 1} \frac{5x^3+7x^{14}+6}{8x^5+4x^9-6} = \frac{5.1^3+7.1^{14}+6}{8.1^5+4.1^9-6}$$
$$= \frac{18}{6}$$
$$= 3$$

Jadi, nilai limit tersebut adalah **3** **(Jawaban: A)**

Sifat-sifat Limit Fungsi

Misalkan f(x) dan g(x) adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati a, dengan k dan a adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif, maka sifat-sifat limit fungsi antara lain:

1. $\lim_{x \to a} k = k$

   Contoh:
   $\lim_{x \to 2} 3 = 3$

2. $\lim_{x \to a} x = a$

   Contoh:
   $\lim_{x \to 2} x = 2$

3. $\lim_{x \to a} [kf(x)] = k\left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$

   Contoh:
   $$\lim_{x \to 2} 3x^2 = 3\left[\lim_{x \to 2} x^2\right]$$
   $$= 3.(2)^2$$
   $$= 3.4$$
   $$= 12$$

4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Contoh:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}(x^2+2x) &= \lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 2x \\ &= 3^2 + 2.\lim_{x\to 3} x \\ &= 9 + 2.3 \\ &= 9 + 6 \\ &= 15\end{aligned}$$

5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x).\,g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Contoh:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(x^2.\,x) &= \lim_{x\to 2} x^2.\lim_{x\to 2} x \\ &= (-2)^2.(-2) \\ &= 4.(-2) \\ &= -8\end{aligned}$$

6. $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ $dengan \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Contoh:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2+3}{x+1}\right] &= \frac{\lim\limits_{x\to 1} x^2 + \lim\limits_{x\to 1} 3}{\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 1} \\ &= \frac{1^2+3}{1+1} \\ &= \frac{1+3}{2} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2\end{aligned}$$

7. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$

Contoh:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}[3x^2-1]^5 &= \left[\lim_{x\to 1}(3x^2-1)^5\right] \\ &= [3(1)^2-1]^5 \\ &= [3-1]^5 \\ &= [2]^5 \\ &= 32\end{aligned}$$

8. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}\ dengan\ n\ bilangan\ asli, n \geq 2\ dan\ \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} \in R$

Contoh :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{x^2 + 2} &= \sqrt[3]{\lim_{x \to 5}(x^2 + 2)} \\
&= \sqrt[3]{\lim_{x \to 5} x^2 + \lim_{x \to 5} 2} \\
&= \sqrt[3]{5^2 + 2} \\
&= \sqrt[3]{25 + 2} \\
&= \sqrt[3]{27} \\
&= \sqrt[3]{3^3} \\
&= 3^{\frac{3}{3}} \\
&= 3^1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Itulah sifat-sifat atau teorema limit beserta contoh soal dan penyelesaiannya, semoga kalian paham ya dengan apa yang sudah dijelaskan di atas.

Untuk lebih jelasnya penggunaan sifat di atas perhatikan contoh berikut:

Contoh Soal 1:

Anak-anak, coba perhatikan limit fungsi dibawah ini

$$\lim_{x \to 2} 2x + 3\,x^2$$

terapkan sifat limit dan berapa hasil nilai limit fungsi di atas ?

A. 16
B. 7
C. 5
D. $2\sqrt{2}$
E. $\sqrt{3}$

Pembahasan:

Anak – anak, pada soal diatas kita diminta untuk menerapkan sifat limit dan mencari nilai limit dari

$$\lim_{x \to 2} 2x + 3\,x^2$$

Pada limit fungsi diatas, kita terapkan sifat limit yang nomor 4 ya, sehingga:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} 2x + 3\,x^2 &= \lim_{x \to 2} 2x + \lim_{x \to 2} 3\,x^2 \\
&= 2 \cdot 2 + 3 \cdot (2)^2 \\
&= 4 + 3 \cdot 4 \\
&= 4 + 12 \\
&= 16
\end{aligned}$$

Jadi, nilai hasil limitnya adalah 16 **(Jawaban: A)**

Contoh Soal 2 :

Anak-anak, sekali lagi perhatikan limit fungsi dibawah ini

$$\lim_{x \to -3} (x^2 - 5)^3 = \cdots$$

terapkan sifat limit dan berapa hasil nilai limit fungsi di atas ?

A. 4
B. 8
C. 27
D. 64
E. 81

Pembahasan:
pada soal di atas kita diminta untuk menerapkan sifat limit dan mencari nilai limit dari

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 5)^3 = \cdots$$

Pada limit fungsi diatas, kita terapkan sifat limit yang nomor 7 ya, sehingga

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} (x^2 - 5)^3 &= \left(\lim_{x \to -3} (x^2 - 5)\right)^3 \\
&= ((-3)^2 - 5)^3 \\
&= (9 - 5)^3 \\
&= (4)^3 \\
&= 64
\end{aligned}$$

Jadi, nilai hasil limitnya adalah 64 (**Jawaban: D)**

C. Rangkuman

1. Pengertian Limit Fungsi

Limit Fungsi adalah nilai pendekatan di sekitar titik tertentu baik pendekatan dari kiri maupun pendekatan dari kanan titik tersebut.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ artinya jika x mendekati a,tetapi x tidak sama dengan a, maka nilai $f(x)$ mendekati nilai L

Jika fungsi $f(x)$ terdefinisi pada selang terbuka I, maka:

a. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (ada) jika dan hanya jika $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

b. Jika $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ dan $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$ dimana $L_1 \neq L_2$ maka $\lim_{x \to a} f(x)$ tidak ada

2. **Sifat-sifat Limit Fungsi Aljabar**
   1. $\lim\limits_{x\to a} k = k$
   2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
   3. $\lim\limits_{x\to a} [kf(x)] = k\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$
   4. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
   5. $\lim\limits_{x\to a} [f(x).\, g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$
   6. $\lim\limits_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\ dengan\ \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
   7. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$
   8. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}\ dengan\ f(x) > 0\ dan\ n\ genap$

3. Secara konsep dasar matematika, cara mengerjakan soal limit, hanya tinggal mengganti/mensubstitusi variabel $\boldsymbol{x}$ menjadi angka yang didekati oleh x tersebut.

D. Latihan Soal

Anak- anak untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap pengertian dan sifat-sifat limit fungsi aljabar kerjakan soal latihan berikut:

Soal Pilihan Ganda

1. Perhatikan tabel nilai $f(x)$ berikut.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
1	3
1,5	3,5
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999

Nilai $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \cdots$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

2. Diketahui tabel nilai fungsi $f(x)$ untuk x mendekati 4 sebagai berikut

x	$f(x)$
2	1
3	2
3,1	2,1
3,9	2,9
3,99	2,99
3,999	2,999
…	…
4	…
…	…
4,001	3,001
4,01	3,01
4,1	3,1
5	4

Nilai $\lim_{x \to 4} f(x) = \cdots$

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. tidak ada

3. Diketahui tabel nilai fungsi $f(x)$ untuk x mendekati 4 sebagai berikut

x	$g(x)$
-2	-2
-1,5	-1,5
-1,1	-1,1
-1,01	-1,01
-1,001	-1,001
-1,0001	-1,0001
…	…
-1	…
…	…
-0,999	1
-0,99	1
-0,9	1
0	1

Nilai $\lim_{x \to -1} g(x) = \cdots$

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2 E. tidak ada

4. Nilai $\lim_{x \to 5}(-3) = \cdots$

A. -5 B. -3 C. -2 D. 2 E. 3

5. Nilai $\lim_{x \to -2}(x - 4) = \cdots$

A. -8 B. -6 C. -4 D. 0 E. 2

6. Nilai $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x-1} = \cdots$

A. -8 B. -6 C. -4 D. 0 E. 2

7. Diketahui fungsi $f(x)$ sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{untuk } x < -2 \\ -2x - 1, \text{untuk } x > 2 \end{cases}$$

Nilai $\lim_{x \to -2} f(x) = \cdots$

A. -3 B. -1 C. 0 D. 3 E. tidak ada

8. Diketahui $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$. Nilai $\lim_{x \to 1} f(x) = \cdots$

A. $-\frac{7}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{7}{2}$ E. 5

9. Jika $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$ dan $\lim_{x \to 3} g(x) = 9$, nilai $\lim_{x \to -3} \frac{f(x)+g(x)}{2f(x)} = \cdots$

A. 4,1 B. 3,1 C. 1,4 D. 1,3 E. 1,0

10. Diketahui $\lim_{x \to a} f(x) = p$, nilai $\lim_{x \to a} (f(x) + 1)^2 - 3f(x)$ adalah …
    A. $p^2 + 5p + 1$
    B. $p^2 - p + 3$
    C. $p^2 - p + 1$
    D. $p^2 + p + 1$
    E. $p^2 + p + 1$

Pembahasan :

1. Dari tabel terlihat untuk nilai-nilai x yang mendekati 2 dari kiri terlihat, nilai fungsi $f(x)$ semakin mendekati 4
   Jadi, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$
   Jawaban : D

2. Dari tabel terlihat fungsi $f(x)$ mendekati nilai 3 untuk nilai-nilai x mendekati 4 baik dari kiri $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 3$ dan dari kanan $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 3$. Oleh karena $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 3$ maka $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 3$
   Jawaban : B

3. Dari tabel terlihat bahwa untuk nilai-nilai x mendekati -1 dari kiri, nilai fungsi $g(x)$ mendekati nilai -1. Artinya $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -1$. Untuk nilai-nilai x mendekati 1 dari kanan, nilai fungsi $g(x)$ mendekati nilai -1. Artinya $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 1$. Karena $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ maka nilai $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ tidak ada.
   Jawaban : E

4. $\lim\limits_{x \to 5}(-3) = -3$ karena berdasarkan sifat limit $\lim\limits_{x \to a} k = k$
   Jawaban : B

5. Untuk menentukan $\lim\limits_{x \to -2}(x - 4)$ subtitusi nilai $x = -2$ ke $x - 4$ seperti berikut
   $$\begin{aligned}\lim_{x \to -2}(x - 4) &= -2 - 4 \\ &= -6\end{aligned}$$
   Jawaban : B

6. Untuk menentukan nilai $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x-1}$ bisa dengan mensubtitusi nilai $x = -1$ sehingga diperoleh sebagai berikut
   $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(-1)^2 - 1}{-1 - 1}$$
   $$= \frac{1 - 1}{-2}$$
   $$= \frac{0}{-2}$$
   $$= 0$$
   Jadi, nilai $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x-1}$ adalah 0
   Jawaban : D

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{untuk } x < -2 \\ -2x - 1, \text{untuk } x > 2 \end{cases}$
   Nilai $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ dapat kita cari dari pendekatan untuk nilai $f(x)$ dari kiri dan kanan

   Pendekata dari kiri
   $$\begin{aligned}\lim_{x \to -2^-} f(x) &= \lim_{x \to -2} x^2 - 1 \\ &= (-2)^2 - 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3\end{aligned}$$
   Pendekatan dari kanan
   $$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2} -2x - 1$$

$= -2(-2) - 1$
$= 4 - 1$
$= 3$

Karena $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 3$, maka $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$

Jadi, nilai $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$

Jawaban : D

8. Untuk mencari nilai $\lim_{x \to 1} \frac{2x-5}{x+1}$ dengan substitusi langsung seperti berikut

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x-5}{x+1} = \frac{2(1)-5}{1+1}$$
$$= \frac{2-5}{2}$$
$$= -\frac{3}{2}$$

Jadi, nilai dari $\lim_{x \to 1} \frac{2x-5}{x+1}$ adalah $-\frac{3}{2}$

Jawaban : B

9. Diketahui :

$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

$\lim_{x \to 3} g(x) = 9,$

Diketahui : $\lim_{x \to -3} \frac{f(x)+g(x)}{2f(x)} = \cdots$

Untuk menentukan nilai $\lim_{x \to -3} \frac{f(x)+g(x)}{2f(x)}$ bisa menerapkan sifat-sifat limkt fungsi seperti berikut.

$$\lim_{x \to -3} \frac{f(x)+g(x)}{2f(x)} = \frac{\lim_{x \to -3} f(x)+g(x)}{\lim_{x \to -3} 2f(x)}$$

Gunakan sifat 6

$$= \frac{\lim_{x \to -3} f(x) + \lim_{x \to -3} g(x)}{\lim_{x \to -3} 2 \times \lim_{x \to -3} f(x)}$$

Gunakan sifat 4 untuk pembilang dan sifat 3 untuk penyebut

$$= \frac{5+9}{2 \times 5}$$
$$= \frac{14}{10}$$

Substitusi nilai $f(x)$ dan $g(x)$

$$= 1{,}4$$

Jadi, nilai $\lim_{x \to -3} \frac{f(x)+g(x)}{2f(x)}$ adalah 1,4

Jawaban : C

10. Diketahui $\lim_{x \to a} f(x) = p$

Untuk menentukan nilai $\lim_{x \to a} (f(x)+1)^2 - 3f(x)$, kita gunakan sifat-sifat limit seperti berikut

$\lim_{x \to a} (f(x)+1)^2 - 3f(x)$

$= \lim_{x \to a} (f(x))^2 + 2f(x) + 1) - 3f(x)\} \rightarrow$ Jabarkan bentuk $(f(x)+1)^2$

$= \lim_{x \to a} \{(f(x)^2 - f(x) + 1)$

$= \lim_{x \to a} f(x)^2 - \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} 1 \rightarrow$ Gunakan sifat 6

$= p^2 - p + 1$

Jadi, nilai $\lim_{x \to a} (f(x) + 1)^2 - 3f(x)$ adalah $p^2 - p + 1$

Jawaban : C

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami pengertian limit fungsi?		
2.	Apakah kalian memahami sifat-sifat limit fungsi Aljabar?		
3.	Apakah kalian dapat menentukan limit fungsi Aljabar dengan menggunakan sifat-sifat limit fungsi Aljabar?		

Catatan:

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Limit Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 2 ini kalian diharapkan dapat:
1. Memahami limit fungsi aljabar
2. Menentukan nilai limit fungsi aljabar
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar

B. Uraian Materi

Anak – anak, jika kalian menemukan sebuah limit fungsi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ dan disubtitusikan $x = 2$, maka hasilnya adalah $\frac{0}{0}$. Dalam limit, ini tidak boleh dan harus diubah.

Bagaimana cara merubahnya ya?

Secara konsep matematika, cara merubah bentuk limit yang hasilnya $\frac{0}{0}$ (bentuk tak tentu), kita menggunakan dua cara, yakni cara **memfaktorkan** dan **merasionalkan (mengalikan dengan akar sekawan)**. Mau tau caranya? Simak pembahasan selanjutnya ya…

Nah berikutnya kita akan membahas metode penyelesaian limit bentuk tak tentu dengan pemfaktoran dan mengalikan dengan akar sekawan.

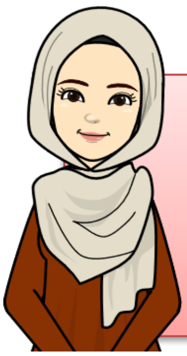
Sebelum membahas contoh soal dengan pemfaktoran kalian harus tahu dulu bentuk hasil limit. Bentuk hasil limit dibedakan menjadi dua yaitu **bentuk tentu** dan **bentuk tak tentu.**

Hasil limit Bentuk Tentu:

$\left(a, \frac{a}{b}, \frac{a}{0} = \infty, \frac{0}{b} = 0\right)$ dengan $a, b \in R$

Hasil limit Bentuk Tentu:

$\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty^{\infty}\right)$ dengan $a, b \in R$



Catatan

Dengan menggunakan metode substitusi, jika hasilnya bentuk tentu maka bentuk tentu itulah hasil limitnya. Tapi jika hasilnya merupakan bentuk tak tentu, maka harus diselesaikan dengan menggunakan metode faktorisasi atau mengalikan dengan akar sekawan.

Agar kalian paham dengan hasil bentuk tentu dan tak tentu, perhatikan contoh-contoh berikut:

Contoh Soal 1 :

Tentukan hasil limit berikut!

1. $\lim_{x \to 1} 5x^3$
2. $\lim_{x \to -1} \frac{4-3x}{-2x}$
3. $\lim_{x \to 3} \frac{2x-3}{x-3}$
4. $\lim_{x \to 1} \frac{4-4x}{3x}$
5. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Pembahasan:

1. $\lim_{x \to 1} 5x^3$
$= 5.(1)^3$
$= 5.1$
$= 5$ (bentuk tentu)

2. $\lim_{x \to -1} \frac{4-3x}{-2x}$
$= \frac{4-3(-1)}{-2(-1)}$
$= \frac{4+3}{3}$
$= \frac{7}{3}$ (bentuk tentu)

3. $\lim_{x \to 3} \frac{2x-3}{x-3}$
$= \frac{2(3)-3}{3-3}$
$= \frac{6-3}{0}$
$= \frac{3}{0}$
$= \infty$ (bentuk tentu)

Khusus dalam limit, ketika hasil limitnya berbentuk $\frac{a}{0}$ maka nilainya sama dengan ∞, hal ini dikarenakan bentuk grafik fungsi $f(x) = \frac{a}{x}$ untuk x mendekati 0 nilainya mendekati ∞

4. $\lim_{x \to 1} \frac{4-4x}{3x}$
$= \frac{4-4(1)}{3(1)} = \frac{4-4}{3}$
$= \frac{0}{3} = 0$ (bentuk tentu)

5. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

$$= \frac{2^2-4}{2-2}$$

$$= \frac{4-4}{2-2}$$

$= \frac{0}{0}$ (bentuk tak tentu)

Dengan substitusi hasilnya tidak ada bilangan yang memenuhi, sehingga harus diselesaikan dengan menggunakan metode lain.

Nah pada contoh nomor 5 ini merupakan contoh soal limit yang bisa diselesaikan dengan metode pemfaktoran.

- **Menyelesaikan Limit dengan cara Pemfaktoran**

Contoh Soal 1:

Anak-anak sekarang kita coba menyelesaikan soal nomor 5 di atas dengan cara memfaktorkan

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} x+2$$

$$= 2+2$$

$$= 4$$

Contoh Soal 2:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \ldots$$

Dengan substitusi langsung diperoleh:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \frac{(-2)^3+8}{-2+2} = \frac{0}{0} (tak\ tentu)$$

Dengan memfaktorkan :

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2} (x^2-2x+4)$$

$$= (-2)^2-(-2)+4$$

$$= 4+4+4$$

$$= 12$$

Penting untuk diingat....!

Beberapa bentuk *faktor istimewa* :

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Contoh Soal 3:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{3x^2+8x+5} = \cdots$$

Dengan substitusi langsung diperoleh:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-x-3}{3x^2+8x+5} = \frac{2(-1)^2-(-1)-3}{3(1)^2-8(-1)+)5} = \frac{2+1-3}{3-8+5} = \frac{0}{0}\ (tak\ tentu)$$

Dengan memfaktorkan :

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x-3}{3x^2+8x+5} = \lim_{x\to 1} \frac{(2x-3)(x+1)}{(3x+5)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x-3}{3x+5}$$

$$= \frac{2(-1)-3}{3(-1)+5} = \frac{-5}{2}$$

Contoh Soal 4:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2+6x}{x^2+2x} = \cdots$$

Dengan substitusi langsung diperoleh:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x+6}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(0^3-3.0+6.0)}{(0^2+2.0)} = \frac{0}{0}\ (tak\ tentu)$$

Dengan memfaktorkan diperoleh:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2+6x}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-3x+6)}{x(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2-3x+6)}{(x+2)} = \frac{(0^2-3.0+6)}{(0+2)} = \frac{6}{2} = 3$$

Inilah contoh soal limit yang diselesaikan dengan cara pemfaktoran, baiklah selanjutnya kita akan belajar cara menyelesaikan limit dengan cara mengalikan dengan akar sekawan.

- **Menyelesaikan Limit dengan cara Mengalikan dengan Akar Sekawan**

Anak-anak ada suatu kondisi dimana suatu limit tidak bisa diselesaikan dengan cara substitusi ataupun dengan cara pemfaktoran, yaitu salah satunya adalah limit fungsi yang berbentuk akar.

Contoh Soal 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

Nah penyelesaian bentuk limit akar ini jika diselesaikan dengan substitusi langsung hasilnya $\frac{0}{0}$ (tak tentu), dengan metode pemfaktoranpun sangat sulit diselesaikan, jadi solusinya penyelesaian limit bentuk akar ini adalah diselesaikan dengan merasionalkan/mengalikan dengan akar sekawan. Baiklah langsung kita jawab ya…

Sebelum kita membahas contoh soal di atas, kita ingat kembali bentuk-bentuk sekawan dari bentuk akar.

Ingat..!

Bentuk Sekawan dari :

$x - a$	bentuk kawan dari	$x + a$
$\sqrt{x}-a$	bentuk kawan dari	$\sqrt{x}+a$
$\sqrt{x}-\sqrt{a}$	bentuk kawan dari	$\sqrt{x}+\sqrt{a}$
$\sqrt{x+a}-b$	bentuk kawan dari	$\sqrt{x+a}+b$

Pembahasan:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)\times 1$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)\times\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}\times\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

Kalikan dengan akar sekawan dari $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}$$

perubahan penyebut dari bentuk rumus $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{1+x-1+x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2}$$

Substitusi nilai x=0

$$= \frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{2}$$

$$= \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Contoh Soal 2:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{3-x} = \cdots$$

Nah penyelesaian bentuk limit akar ini jika diselesaikan dengan substitusi langsung hasilnya $\frac{0}{0}$ (tak tentu). Jadi untuk menyelesaikan limit ini kita selesaikan dengan akar sekawan. Langsung saja kita bahas ya...

Pembahasan:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{3-x} = \lim_{x \to 3} \left(\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{3-x}\right) \times 1$$

$$= \lim_{x \to 3} \left(\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{3-x}\right) \times \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$$

Kalikan dengan akar sekawan

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(3+x)-(2x)}{(3-x)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{3-x}{(3-x)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3+3}+\sqrt{2.3}}$$

Substitusi nilai x=3

$$= \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{6}}$$

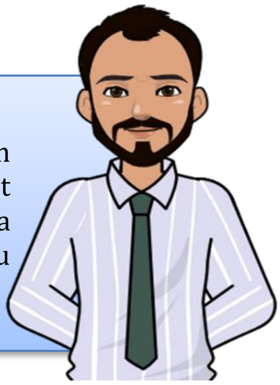
$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

Rasionalkan penyebut, kalikan pembilang dan dengan $\sqrt{6}$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{6}$$

Catatan:

Anak-anak ingat ya… tidak semua limit bentuk akar diselesaikan dengan mengalikan akar sekawan, sebelum menyelesaikan limit harus dicoba dulu dengan menggunakan substitusi, jika hasilnya bentuk tentu maka itulah hasilnya, tapi jika bentuknya tak tentu maka baru diselesaikan dengan cara lain.

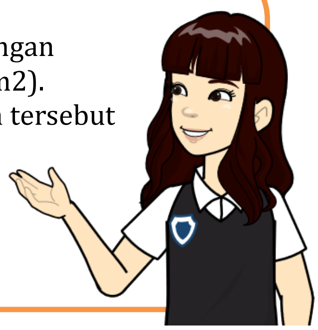


Aplikasi Limit Fungsi

Seperti yang sudah kita bahas sebelumnya, bahwa limit fungsi dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari seperti beberapa contoh berikut. Untuk lebih memahami aplikasi limit fungsi tersebut perhatikan baik-baik contoh berikut.

Contoh Soal 1:

Sebuah lempengan logam yang dipanaskan akan memuai dengan pertambahan luas sebagai fungsi waktu f(t)=0,36t2 +0,6t (cm2). Kecepatan perubahan luas perubahan luas lempengan logam tersebut pada saat t menit dirumuskan dengan $v = \lim\limits_{t \to t_1} \frac{f(t)-f(t_1)}{t-t_1}$.
Tentukan kecepatan perubahan luas lempengan logam pada saat t=5 menit



Pembahasan :

$$\begin{aligned} f(t) &= 0{,}36t^2 + 0{,}6t \\ f(5) &= 0{,}36(5)^2 + 0{,}6(5) \\ &= 0{,}36\ (25) + 3 \\ &= 9 + 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Kecepatan perubahan pertambangan luas lempengan logam pada saat t=5 menit

$$\begin{aligned} v &= \lim_{t \to t_1} \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \\ &= \lim_{t \to 5} \frac{f(t) - f(5)}{t - 5} \\ &= \lim_{t \to 5} \frac{0{,}36t^2 + 0{,}6t - 12}{t - 5} \\ &= \lim_{t \to 5} \frac{0{,}6(0{,}6t^2 + t - 20)}{t - 5} \\ &= \lim_{t \to 5} \frac{0{,}6(0{,}6t + 4)(t - 5)}{t - 5} \\ &= \lim_{t \to 5} 0{,}6.\ (0{,}6t + 4) \\ &= 0{,}6.\ (0{,}6 \times 5 + 4) \\ &= 0{,}6(3 + 4) \\ &= 4{,}2 \end{aligned}$$

Jadi kecepatan perubahan luas lempengan logam adalah 4,2 cm2/menit

Contoh Soal 2 :

Sebuah mobil yang bergerak dengan kelajuan setiap saat dirumuskan dengan $v(t) = 5t - \frac{1}{2}t^2$, v dalam m/detik dan t dalam detik.

a. Tentukan nilai pendekatan kelajuan untuk t mendekati 5 detik.
b. Tentukan percepatan (dalam m/detik) pada saat t mendekati 3 detik

Percepatan $= \frac{\text{Perubahan kelajuan}}{\text{Perubahan waktu}} = \frac{\triangle v}{\triangle t}$ (m/det²)

Pembahasan:

a. Nilai pendekatan v(t) untuk t mendekati 5 detik

$$\lim_{t\to 5} v(t) = \lim_{t\to 5}\left(5t - \frac{1}{2}t^2\right)$$
$$= 5 \times 5 - \frac{1}{2} \times 5^2$$
$$= 25 - 12{,}5$$
$$= 12{,}5$$

b. Percepatan$=\frac{\textit{Perubahan kelajuan}}{\textit{Perubahan waktu}}$

Untuk waktu mendekati 3 detik

$$\lim_{t\to 3} \frac{\triangle v}{\triangle t} = \lim_{t\to 3} \frac{v(t) - v(3)}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3} \frac{5t - \frac{1}{2}t^2 - 10{,}5}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3} \frac{\frac{1}{2}(10t - t^2 - 21)}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3} \frac{\frac{1}{2}(-t^2 + 10t - 21)}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3} \frac{\frac{1}{2}(-t^2 + 7)(t-3)}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3} \frac{1}{2}(-t+7)$$
$$= \frac{1}{2}(-3+7)$$
$$= 2$$

C. Rangkuman

1. Untuk menyelesaikan limit fungsi aljabar Langkah pertama adalah substitusi langsung, jika hasilnya bentuk tentu maka itulah nilai limitnya, jika substitusi langsung hasilnya bentuk tak tentu maka harus diselesaikan dengan cara lain yaitu **metode pemfaktoran** atau **mengalikan dengan akar sekawan**.

2. Bentuk hasil limit dibedakan menjadi dua yaitu bentuk tentu dan bentuk tak tentu.

   Hasil limit Bentuk Tentu:
   $\left(a, \frac{a}{b}, \frac{a}{0} = \infty, \frac{0}{b} = 0\right)$ dengan $a, b \in R$

   Hasil limit Bentuk Tentu:
   $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty^{\infty}\right)$ dengan $a, b \in R$

3. Tidak semua limit bentuk akar diselesaikan dengan mengalikan akar sekawan, sebelum menyelesaikan limit harus dicoba dulu dengan menggunakan substitusi, jika hasilnya bentuk tentu maka itulah hasilnya, tapi jika bentuknya tak tentu maka baru diselesaikan dengan cara lain.

D. Latihan Soal

Anak- anak untuk mengukur kemampuan pemahaman kalian terhadap penyelesaikan limit fungsi aljabar kerjakan soal latihan berikut ya…

Tentukan nilai limit dari:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x+2} = \cdots$
   A. 0
   B. 1
   C. 3
   D. 9
   E. ∞

2. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x^2-x-12}$
   A. $\frac{5}{7}$
   B. $\frac{6}{7}$
   C. $\frac{8}{7}$
   D. $\frac{9}{7}$
   E. $\frac{10}{7}$

3. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$
   A. $-\frac{1}{4}$
   B. $-\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{4}$
D. 0
E. 1

4. $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$
A. 0
B. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{5}{2}$
D. $\frac{7}{2}$
E. $\frac{9}{2}$

5. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x - 1}}{x - 1}$
A. 0
B. $-\frac{1}{4}$
C. $-\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{2}$
E. 1

6. $\lim_{x \to 2} \frac{(4 - x^2)}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$
A. - 6
B. 1
C. 3
D. 6
E. 9

7. Sebuah mobil bergerak dengan kecepatan setiap saat dirumuskan dengan $v(t) = t^2 - t$ (v dalam meter, t dalam detik). Jika t mendekati 5 detik, kecepatan mobil mendekati....
A. 10 m/detik
B. 12 m/detik
C. 15 m/detik
D. 20 m/detik
E. 25 m/detik

8. Angka pertumbuhan penduduk setiap tahun dirumuskan dengan $p(t) = \sqrt{\frac{1}{2} - 3t + 5\%}$. Pertumbuhan penduduk saat mendekati tahunkelima (t=5) adalah....
A. 0,75%
B. $\sqrt{15}$ %
C. $\sqrt{2}$ %
D. $\sqrt{2,5}$ %
E. $\sqrt{2,75}$ %

9. Sebuah mobil bergerak dengan kelajuan tertentu sehingga jarak tempuh setiap saat dirumuskan $S(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t$ (S dalam meter dan t dalam detik). Jarak yang ditempuh mobil saat t mendekati 60 detik adalah…
   A. 1.980 meter
   B. 2.000 meter
   C. 2.160 meter
   D. 2.700 meter
   E. 2.980 meter

10. Kecepatan benda setiap saat ditentukan dengan rumus $v(t) = 0{,}2t^2 - 0{,}4t$. Perubahan kecepatan untuk t mendekati 5 dirumuskan dengan $\lim_{t \to 5} \frac{v(t)-v(s)}{t-5}$. Nilai perubahan kecepatan benda tersebut adalah…
    A. 1,2 m/det2
    B. 1,6 m/det2
    C. 1,8 m/det2
    D. 2,0 m/det2
    E. 2,4 m/det2

Pembahasan:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{x+2} = \cdots$

   Dengan substitusi langsung

   $$\lim_{x\to 2} \frac{2x}{x+2} = \frac{2\times 0}{0+2}$$
   $$= \frac{0}{2}$$
   $$= 0$$

   Jawaban : C

2. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-x-12}$

   $$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+3)}$$

   Faktorakan pembilang dan penyebut

   $$= \lim_{x\to 4} \frac{(x+4)}{(x+3)}$$

   $$= \frac{4+4}{4+3} = \frac{8}{7}$$

   Jawaban : C

3. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$

   $$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-1)}$$

   Faktorakan pembilang dan penyebut

   $$= \lim_{x\to 3} \frac{x-4}{x-1}$$

   $$= \frac{3-4}{3-1}$$

   $$= \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

   Jawaban : B

4. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$

   $$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2-3x-9)}{(x-3)(x+3)}$$

   Faktorkan pembilang dan penyebut

   $$= \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3}$$
   $$= \frac{3^2+3.3+9}{3+3}$$

   Substitusi nilai $x = 3$

   $$= \frac{27}{6}$$
   $$= \frac{9}{2}$$

Jawaban : E

5. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(\sqrt{x})-(\sqrt{2x-1})}{(x-1)}\times\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

Kalikan dengan akar sekawan

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2x-1})^2}{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-(2x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-2x+1}{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-x+1}{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}$

$=\frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{2(1)-1}}$

$=\frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{2-1}}$

Substitusi nilai $x=1$

$=\frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}$

$=\frac{-1}{1+1}$

$=\frac{-1}{2}$

$=-\frac{1}{2}$

Jawaban : C

6. $\lim\limits_{x\to2}\frac{(4-x^2)}{3-\sqrt{x^2+5}}$

$=\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{(4-x^2)}{3-\sqrt{x^2+5}}\times\frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3)^2-(\sqrt{x^2+5})^2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5}\right)$

perubahan penyebut dari bentuk rumus $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$= \lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{(4 - x^2)\left(3 + \sqrt{x^2 + 5}\right)}{4 - x^2} \right)$

$= \lim\limits_{x \to 2} \left(3 + \sqrt{x^2 + 5}\right)$

$= 3 + \sqrt{2^2 + 5}$

$= 3 + \sqrt{4 + 5}$

$= 3 + \sqrt{9}$

$= 3 + 3$

$= 6$

Substitusi nilai $x = 2$

Jawaban : D

7. Sebuah mobil bergerak dengan kecepatan setiap saat dirumuskan dengan $v(t) = t^2 - t$ (v dalam meter, t dalam detik). Jika t mendekati 5 detik, kecepatan mobil mendekati....

Pembahasan:

Diketahul : $v(t) = t^2 - 2t$
t mendekati 5 detik

maka kecepatan mobil mobil pada saat t mendekati 5 detik adalah :

$\lim\limits_{t \to 5} v(t) = \lim\limits_{t \to 5} (t^2 - t)$

$= 5^2 - 2 \times 5$

$= 25 - 10$

$= 15$

Jawaban : C

8. Angka pertumbuhan penduduk setiap tahun dirumuskan dengan $p(t) = \sqrt{\frac{1}{2} - 3t + 5\%}$. Pertumbuhan penduduk saat mendekati tahunkelima (t=5) adalah....

Pembahasan :

Rumus pertumbuhan penduduk setiap tahun :

$p(t) = \sqrt{\frac{1}{2}t^2 - 3t + 5}$

Pertumbuhan penduduk saat mendekati tahun kelima (t=5)

$\lim\limits_{t \to 5} p(t) = \lim\limits_{t \to 5} \sqrt{\frac{1}{2}t^2 - 3t + 5}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}(5)^2 - 3(5) + 5}$

$= \sqrt{\frac{1}{2} \times 25 - 15 + 5}$

$= \sqrt{12{,}5 - 15 + 5}$

$= \sqrt{2{,}5}$

Jadi pertumbuhan penduduk setiap tahun $\sqrt{2{,}5}$ %

Jawaban : D

9. Sebuah mobil bergerak dengan kelajuan tertentu sehingga jarak tempuh setiap saat dirumuskan $S(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t$ (S dalam meter dan t dalam detik). Jarak yang ditempuh mobil saat t mendekati 60 detik adalah…

   Pembahasan :

   $(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t$

   Saat t mendekati 60 detik jarak yang ditempuh sebagai berikut.

   $$\begin{aligned} S(t) &= \lim_{t\to 60}\left(\frac{1}{2}t^2 + 3t\right) \\ &= \frac{1}{2}\times 60^2 + 3\times 60 \\ &= \frac{1}{2}\times 3.600 + 180 \\ &= 1800 + 180 \\ &= 1.980 \end{aligned}$$

   Jadi jarak yang ditempuhmendekati 1.980 meter

   Jawaban : A

10. Kecepatan benda setiap saat ditentukan dengan rumus $v(t) = 0,2t^2 - 0,4t$. Perubahan kecepatan untuk t mendekati 5 dirumuskan dengan $\lim_{t\to 5}\frac{v(t)-v(s)}{t-5}$. Nilai perubahan kecepatan benda tersebut adalah…

    Pembahasan:

    $v(t) = 0,2t^2 - 0,4t$

    $v(5) = 0,2\times 5^2 - 0,4\times 5$

    $v(5) = 5 - 2$

    $v(5) = 3$

    $$\begin{aligned} \lim_{t\to 5}\frac{v(t)-v(5)}{t-5} &= \lim_{t\to 5}\frac{0,2t^2 - 0,4t - 3}{t-5} \\ &= \lim_{t\to 5}\frac{0,2(t^2 - 2t - 15)}{t-5} \\ &= \lim_{t\to 5}\frac{0,2(t-5)(t+3)}{t-5} \\ &= \lim_{t\to 5} 0,2\times(t+3) \\ &= 0,2\times(5+3) \\ &= 1,6 \end{aligned}$$

    Jadi **perubahan** kecepatan benda tersebut adalah 1,6 m/det^3

    Jawaban **: B**

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami langkah-langkah menyelesaikan limit fungsi aljabar?		
2	Apakah kalian dapat menyelesaikan limit fungsi aljabar dengan cara substitusi?		
3.	Apakah kalian dapat menyelesaikan limit fungsi aljabar dengan cara pemfaktoran?		
4.	Apakah kalian dapat menyelesaikan limit fungsi aljabar dengan cara merasionalkan atau mengalikan dengan akar sekawan?		
5.	Apakah kalian memahami dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan penerapan limit fungsi aljabar		

Catatan:

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

1. Diketahui table nilai fungsi f(x) untuk x mendekati 7 sebagai berikut.

x	f(x)
5	1,583333
6	1,54
6,1	1,534351
6,9	1,5041,5
6,99	1,5
6,999	1,50004
....	....
7	?
....	...
7,001	2,999929
7,01	2,99929
7,1	2,99
8	2,93

Nilai $\lim_{x \to 7^+} f(x) = \ldots.$

A. $\frac{3}{2}$
B. 2
C. $\frac{2}{3}$
D. 3
E. 7

2. Perhatikan table nilai berikut.

x	f(x)
-5	-8
-4	-3,5
-3,1	-2,1
-3,01	-2,01
-3,001	-2,001
....	....
-3	?
....	...
-2,999	-1,999
-2,99	-1,99
-2,9	-1,9
-2	-1,3

Nilai $\lim_{x \to -3} f(x) = \ldots.$

A. -8
B. -2
C. 0
D. 2
E. 8

3. Diketahui fungsi f(x) sebagai berikut.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, untuk\ x<-2 \\ -2x-1, untuk\ x>-2 \end{cases}$$

Nilai $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \cdots$

A. –3
B. –1
C. 0
D. 3
E. Tidak ada

4. Jika $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5\ dan \lim\limits_{x\to 3} g(x) = 9, maka\ nilai \lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)+g(x)}{2f(x)} = \cdots$
A. 4,1
B. 3,1
C. 1,4
D. 1,3
E. 1,0

5. $\lim\limits_{y\to 2} \left(\frac{4y^3+8y}{y+4}\right)^{\frac{1}{3}} = \cdots$
A. 1
B. $\sqrt[3]{2}$
C. $\sqrt[3]{4}$
D. 2
E. 4

6. $\lim\limits_{x\to -5} (2x^4+3x^3-25) = \cdots$
A. 1.650
B. 1.600
C. 1.400
D. 875
E. 850

7. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^{10}-1)}{1-x^2} = \ldots$
A. –341
B. –256
C. 256
D. 341
E. 1.023

8. Nilai $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2x^2-8}{x+2} = \ldots$
A. –8
B. –4
C. –2
D. 4
E. 8

9. Nilai $\lim_{x \to -2} \frac{8x^2 + 14x - 4}{2x + 4} = \ldots$
   A. –9
   B. –7
   C. 0
   D. 7
   E. 10

10. Nilai $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 1}$
   A. 3
   B. $\frac{5}{2}$
   C. 2
   D. 1
   E. –1

11. Nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{2x^2 - 5x - 3} = \ldots.$
   A. $\frac{1}{5}$
   B. $\frac{1}{7}$
   C. 0
   D. $-\frac{1}{7}$
   E. $-\frac{2}{5}$

12. Nilai $\lim_{x \to 3} \frac{6 - 2x}{2x^2 - 9x + 9} = \ldots.$
   A. –2
   B. $-\frac{2}{3}$
   C. $-\frac{2}{9}$
   D. $\frac{2}{3}$
   E. 2

13. Nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \ldots$
   A. –6
   B. $-\frac{3}{2}$
   C. 0
   D. . $\frac{3}{2}$
   E. 6

14. Nilai $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^2 - 14x + 8}{x^2 - 3x - 4}$ = ...
    A. 4
    B. 2
    C. $\frac{1}{2}$
    D. – 2
    E. – 4
15. Nilai $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 - 3x - 18}{x^2 + 2x - 3}$ = ...
    A. $4\frac{1}{4}$
    B. $3\frac{1}{2}$
    C. $3\frac{1}{4}$
    D. $2\frac{1}{2}$
    E. $2\frac{1}{4}$

16. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$
    A. 0
    B. 2
    C. 4
    D. 6
    E. 8

17. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$
    A. 0
    B. 2
    C. 4
    D. 6
    E. 8

18. $\lim\limits_{X\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$
    A. 0
    B. 2
    C. 4
    D. 6
    E. 8

19. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-2\sqrt{2x-1}}{x-1}$
    A. 0
    B. 2
    C. 4
    D. 6
    E. 8

20. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{6x-2}-4}$
A. $\frac{1}{9}$
B. $\frac{2}{9}$
C. $\frac{4}{9}$
D. $\frac{5}{9}$
E. $\frac{8}{9}$

21. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}-x-1}$
A. -4
B. -2
C. 0
D. 2
E. 4

22. $\lim\limits_{X \to 2} \frac{x+2}{\sqrt{5x+14}-2}$
A. 4
B. 2
C. 1,2
D. 0.8
E. 0,4

23. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+6x}-\sqrt{1-6x}}$
A. $\frac{1}{6}$
B. $\frac{5}{6}$
C. $\frac{1}{5}$
D. $\frac{2}{5}$
E. $\frac{3}{5}$

24. Sebatang besi dipanaskan sehingga mengalami pemuaian memanjang. Adapun rumus pertambahan memanjang terhadap waktu dituliskan dengan fungsi f(t)=0,16t^2+0,8t (mm), t dalam menit. Kecepatan perubahan memanjang pada saat t=10 menit adalah…
A. 2,4 mm/menit
B. 3,6 mm/menit
C. 4 mm/menit
D. 6 mm/menit
E. 8 mm/menit

25. Sebuah mobil bergerak dengan kelajuan tertentu sehingga jarak yang ditempuh dalam waktu tertentu dirumuskan dengan fungsi $S(t) = \frac{1}{4}t^2 + 2t$ (dalam meter) dan t dalam detik. Tentukan kelajuan mobil pada saat t=8 detik.
(Petunjuk: kelajuan adalah perubahan jarak persetiap perubahan waktu atau $v(t) = \frac{\triangle S}{\triangle t}$)
A. 4 m/det
B. 6 m/det

C. 8 m/det
D. 10 m/det
E. 12 m/det

KUNCI JAWABAN EVALUASI:

1. D
2. C
3. D
4. C
5. D
6. E
7. A
8. A
9. A
10. E
11. B
12. B
13. E
14. B
15. E
16. D
17. B
18. E
19. A
20. E
21. A
22. D
23. A
24. C
25. B

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. Materi Lengkap Limit Fungsi Aljabar, Dalam : https://edumatik.net/materi-lengkap-limit-fungsi-aljabar/ , diakses 9 September 2020

Anonim, Sifat-sifat limit fungsi Aljabar, Dalam : https://edumatik.net/sifat-sifat-limit-fungsi-aljabar/ , diakses 9 September 2020

Anonim. Soal-pg-pilihan Ganda - Bahas Limit Akar Sekawan, Dalam : https://www.gupak.com/2017/06/soal-pg-pilihan-ganda-bahas-limit-akar-sekawan.html, diakses tanggal 9 September 2020

Muklis, Duparno. 2014. Matematika Mata Pelajaran Wajib Kelas XI Semester 1. Klaten: Intan Pariwara.

Manullang, Sudianto. dkk. 2017. Matematika SMA/MA Kelas XI. Jakarta : Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan

Sukino. 2018. The Best Prestasi Matematika IPA. Bandung: Yrama Widya

Tedy Rizkha Heryansyah. 2017. Cara menghitung bunga majemuk, Dalam : https://blog.ruangguru.com/cara-menghitung-bunga-majemuk, diakses tanggal 8 September 2020

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum

KELAS XI

TURUNAN FUNGSI ALJABAR

MATEMATIKA UMUM

KELAS XI

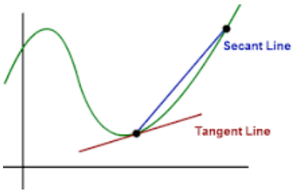
PENYUSUN
YUYUN SRI YUNIARTI

SMA NEGERI 1 PEDES

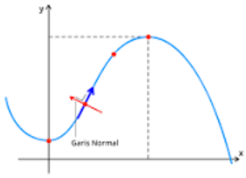
DAFTAR ISI

GLOSARIUM

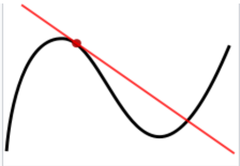
Garis Sekan (Secant Line) adalah **garis** lurus yang ditarik dari dua titik pada suatu kurva.



Garis normal merupakan **garis** yang melalui titik singgung dan tegak lurus dengan **garis** singgung.



garis singgung (disebut juga **garis tangen**) kurva bidang pada titik yang diketahui adalah garis lurus yang "hanya menyentuh" kurva pada titik tersebut.



Garis singgung kurva. Garis merah merupakan garis singgung kurva pada titik yang ditandai oleh titik merah.

Turunan :Pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai input, atau secara umum turunan menunjukkan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya.

f'(x) :Turunan pertama dari fungsi f(x)

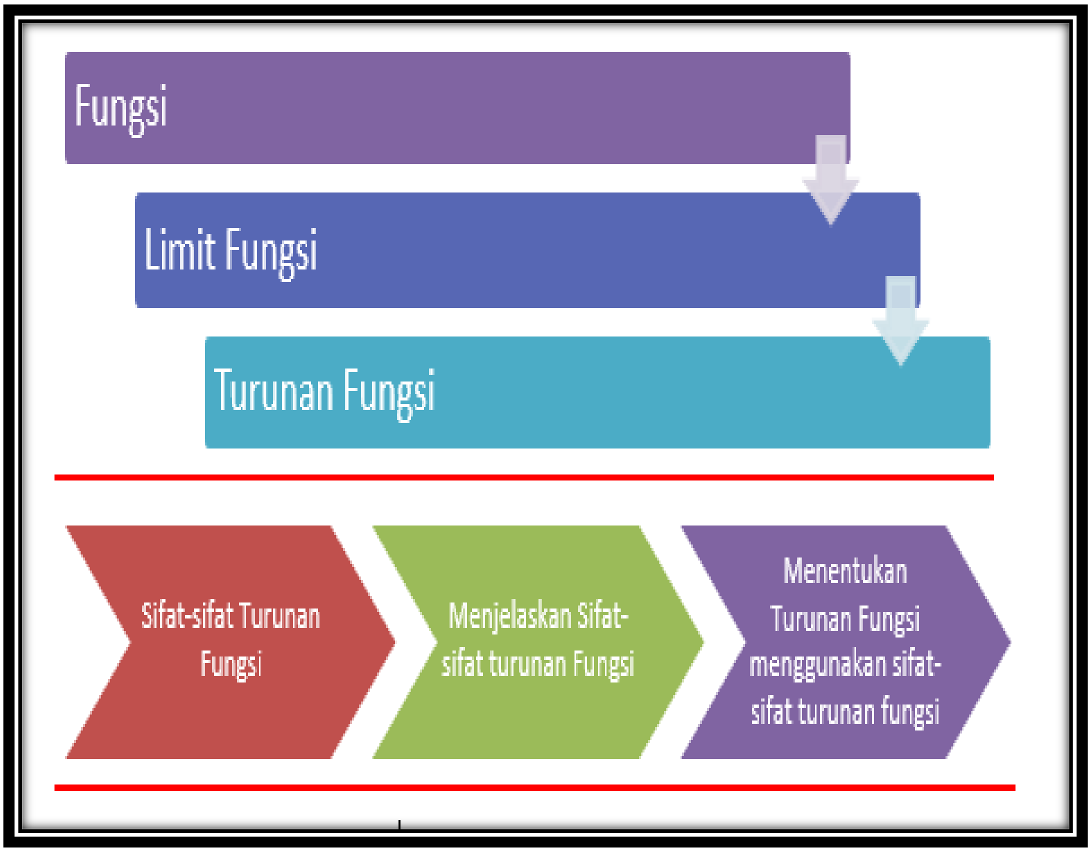
Gradien : (bahasa Inggris: *gradient*) adalah salah satu operator dalam kalkulus vektor yang berguna untuk mencari perubahan arah dan kecepatan dalam bidang skalar, atau biasa disebut dengan kemiringan.

u(x) :Fungsi u

v(x) :Fungsi v

Titik Singgung : Titik persinggungan antara dua kurva

PETA KONSEP


Fungsi
Limit Fungsi
Turunan Fungsi
Sifat-sifat Turunan Fungsi
Menjelaskan Sifat-sifat turunan Fungsi
Menentukan Turunan Fungsi menggunakan sifat-sifat turunan fungsi

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	10 JP
Judul Modul	:	Differensial

B. Kompetensi Dasar

3. 1 Menjelaskan sifat-sifat turunan fungsi aljabar dan menentukan turunan fungsi aljabar menggunakan definisi atau sifat- sifat turunan fungsi

4.1 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar

C. Deskripsi Singkat Materi

Turunan adalah pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai yang dimasukan, atau secara umum turunan menunjukkan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya. Proses dalam menemukan turunan disebut diferensiasi.

Terdapat berbagai pemanfaatan turunan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu:

- Salah satu penerapan turunan yang paling umum adalah penentuan nilai maksimum dan minimum. Hal tersebut dapat diamati dengan seberapa sering kita mendengar atau membaca istilah keuntungan terbesar, biaya terkecil, kekuatan terbesar, dan jarak terjauh. Nilai balik maksimum suatu fungsi pada domain f dapat berupa nilai maksimum mutlak atau nilai maksimum relatif. Begitupun dengan nilai minimum, dapat berupa nilai minimum mutlak dan nilai minimum relatif. Jika dalam interval tertentu terdapat dua nilai maksimum atau lebih, nilai maksimum mutlak (absolut) adalah nilai tertinggi sedangkan yang lainnya merupakan nilai maksimum relatif, begitupun sebaliknya. Jika terdapat dua atau lebih nilai minimum pada suatu fungsi, maka titik terendah merupakan nilai minimum mutlak (absolut), sedangkan yang lainnya merupakan nilai minimum relatif.

- Turunan dapat digunakan untuk menentukan kecepatan dan percepatan sehingga sering digunakan dalam pekerjaan dan penelitian yang membutuhkan ilmu fisika. Selain itu percepatan juga digunakan dalam menghitung laju percepatan pada kegiatan lempar lembing, lempar cakram, menembak, dan lain – lain. Setiap waktu dan percepatannya mempunyai nilai yang dapat diketahui melalui fungsi turunan.
- Dalam membuat konstruksi bangunan, percampuran bahan bahan bangunan yang di lakukan oleh arsitek, pembuatan tiang – tiang, langit langit, ruangan, dan lain lain menggunakan turunan sehingga bangunan terlihat cantik dan kokoh (optimal). Pembuatan kapal, pesawat, dan kendaraan lainnya menggunakan turunan.
- Kegunaan penurunan,terdapat juga pada quick count. Dalam perhitungan tersebut,terdapat juga perhitungan yang baik sehingga dapat mempunyai perhitungan yang maksimal.

Dalam dunia penerbangan, turunan mempunyai fungsi terpenting untuk menentukkan laju pesawat dengan cepat. Pesawat akan mengikuti navigasi dari tower yang berada di bandara. Setiap laju pesawat akan terdeteksi pada navigasi (menggunakan perhitungan kalkulus otomatis) sehingga laju pesawat tidak salah arah dan percepatannya sesuai dengan panduan dari tower. (Brainly.co.id)

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, mari berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Sebaiknya Ananda mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, Ananda mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.

4. Ananda dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika Ananda memperoleh nilai < 75 maka Ananda harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama	:	Menemukan Konsep Turunan Sebagai Limit Fungsi
Kedua	:	Turunan Fungsi Aljabar

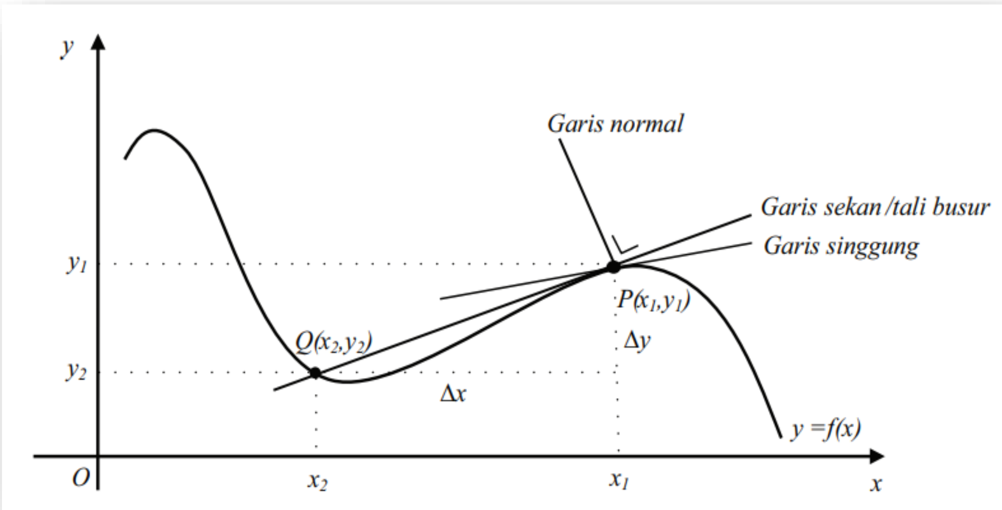
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Menemukan Konsep Turunan

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran kali ini, Ananda akan digiring untuk dapat menemukan konsep turunan secara mandiri. Selain itu juga Ananda akan diajak untuk dapat menentukan turunan fungsi aljabar mulai dari yang paling sederhana sampai ke yang kompleks. Namun tidak usah khawatir, dalam modul ini Ananda akan mempelajarinya secara bertahap untuk memungkinkan Ananda dapat mempelajarinya secara mandiri.

B. Uraian Materi

Untuk menemukan konsep turunan, kita akan mencoba mengamati berbagai permasalahan nyata dan mempelajari beberapa kasus dan contohnya. Kita akan memulainya dengan menemukan konsep garis tangen atau garis singgung. Sebagai ilustrasi perhatikan berikut:

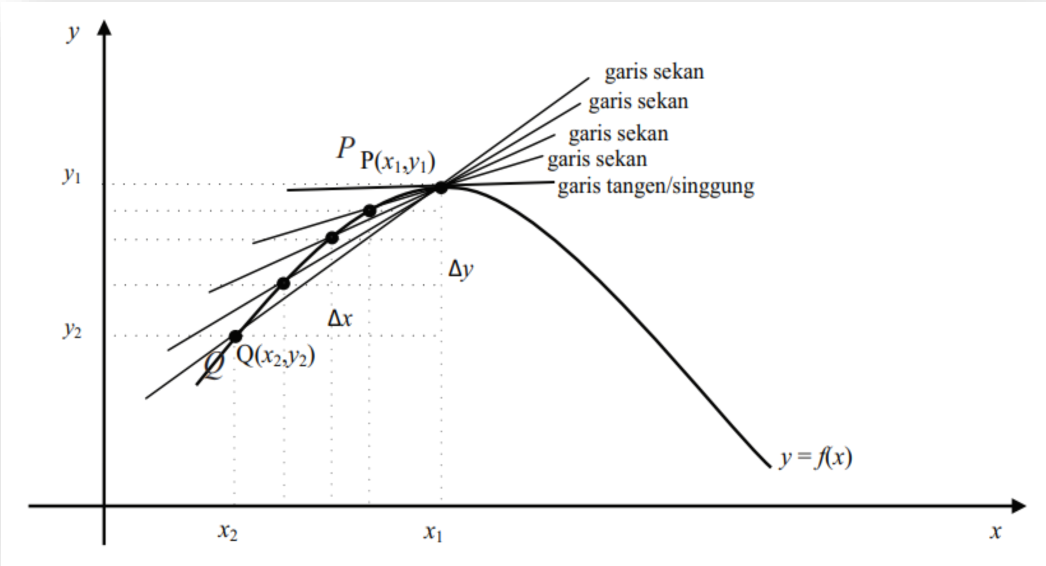


Gambar 1

Misalkan seseorang yang sedang bermain papan seluncur bergerak dari titik Q (x_2, y_2) dan melayang ke udara pada titik P(x_1 , y_1) sehingga ia bergerak dari titik Q mendekati titik P. Garis yang menghubungkan titik Q (x_2 , y_2) dan titik P (x_1 , y_1) disebut tali busur atau garis sekan dengan kemiringan atau gradien $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Ingat konsep garis lurus).

Jika $\Delta x = x_2 - x_1$ maka $x_2 = \Delta x + x_1$ (Δx merupakan selisih dari x) dan Jika $\Delta y = y_2 - y_1$ makan $y_2 = \Delta y + y_1$

Jika Δx semakin kecil maka Q akan bergerak mendekati P (Jika $\Delta x \to 0$ maka $Q \to P$).
Sehingga gambar grafiknya dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 2

Jika y = f(x) maka gradien garis sekan PQ adalah:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) + f\,(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x\,) - f(x_1)}{x_1 + \Delta x - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x\,) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Dari persamaan tersebut, kita dapat menarik definisi:

Misalkan $f : R \to R$ adalah fungsi kontinu dan titik P (x_1, y_1) dan $Q\,(x_1 + \Delta x\,, y_1 + \Delta y)$ pada kurva f. Garis sekan menghubungkan titik P dan Q dengan gradien $m_{sec} = \frac{f\,(x_1+\Delta x\,)-f\,(x_1\,)}{\Delta x}$

Kita kembali ke gambar kedua yuk, Ananda amati kembali bahwa jika titik Q mendekati P maka $\Delta x \to 0$ sehingga diperoleh garis singgung di titik P dengan gradien :

$m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_1+\Delta x\,)-f(x_1)}{\Delta x}$ jika limitnya ada, nahhh ini yang harus Ananda pahami tentang teori limit. Dari perhitungan matematis ini kita dapatkan definisi kedua mengenai gradien garis singgung yaitu sebagai berikut:

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f. Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis: $m_{GS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. (Jika limitnya ada)

Contoh soal 1:

Tentukan gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 3x - 4$ di titik (2, 6)

Jawab :

$f(x) = x^2 + 3x - 4$

$f(2) = 2^2 + 3\,(2) - 4 = 4 + 6 - 4 = 6$

$f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 + 3\,(2 + \Delta x) - 4$

$= 4 + 4\Delta x + \Delta x^2 + 6 + 3\Delta x - 4 = \Delta x^2 + 7\Delta x + 6$

Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 7\Delta x + 6 - 6}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 7\Delta x}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7\Delta x}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = 0 + 7 = 7$$

Jadi gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 3x - 4$ di titik (2, 6) sama dengan 7.

Bagaimana Ananda? Bisakah Ananda memahami bagaimana mencari gradien atau kemiringan suatu kurva dengan menggunakan konsep secan? Nahhh lanjut ke pelajaran berikutnya yaitu kita akan mengulas kembali persamaan garis singgung yang pernah Ananda pelajari waktu SMP. Ingat kembali bahwa rumus mencari persamaan garis kurva $y = f(x)$ *di titik* (x_1 , y_1) yaitu :

$$\boldsymbol{y - y_1 = m_{PGS}\,(x - x_1)}$$

Contoh soal 2:

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2 + 4x \; di \; titik \; (-1\,,-3)$.

Jawab:

$f(x) = x^2 + 4x$

Langkah pertama kita cari dulu $f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) = 1 - 4 = -3$

Kemudian cari $f(-1 + \Delta x) = (-1 + \Delta x)^2 + 4\,(-1 + \Delta x)$

$= (-1)^2 - 2\Delta x + \Delta x^2 - 4 + 4\Delta x = 1 - 2\Delta x + \Delta x^2 - 4 + 4\Delta x = \Delta x^2 + 2\Delta x - 3$

Maka di dapat :

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x - 3 - (-3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x - 3 + 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 0 + 2 = 2$$

Didapat gradien kurva tersebut = 2

Maka Persamaan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2 + 4x \; di \; titik \; (-1\,,-3)$. Adalah

$$\boldsymbol{y - y_1 = m_{PGS}\,(x - x_1)}$$
$$\boldsymbol{y - (-3) = 2\,(x - (-1))}$$
$$\boldsymbol{y + 3 = 2\,(x + 1)}$$
$$\boldsymbol{y + 3 = 2x + 2}$$
$$\boldsymbol{y = 2x + 2 - 3}$$
$$\boldsymbol{y = 2x - 1}$$

Atau bentuk lainnya

$$\boldsymbol{y - 2x + 1 = 0}$$

C. Rangkuman

a. Definisi untuk mencari gradien atau kemiringan garis singgung adalah

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f. Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis: $m_{GS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. (Jika limitnya ada)

b. Rumus untuk mencari persamaan garis singgung kurva

$$y - y_1 = m_{PGS}\,(x - x_1)$$

D. Latihan Soal

Kerjakan semua soal di bawah ini di kertas, kemudian cocokkan dengan kunci jawabannya.

1) Tentukan gradien garis singgung kurva $y = 2x^2 + 3x - 5$ di titik (2, 9)

   Jawab: m = 11

2) Gradien garis singgung kurva $y = \ x^3 - 2x$ di titik ((1 , -1)

   Jawab : m = 1

3) Persamaan garis singgung kurva $y = \ x^2 - 2x + 5$ di titik (- 1 , 8) adalah ...

   Jawab : $y + 4x - 4 = 0$

4) Persamaan garis singgung kurva $y = 3x^2 - 5$ di titik (- 2, 7) adalah ...

   Jawab : $y + 12x + 17 = 0$

5) Diketahui garis x + y = a menyinggung parabola $y = \ -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$. Nilai a adalah ....

   Jawab: a = 5

Pembahasan

Nomor	Pembahasan	Skoring
1	Penyelesaian Diketahui kurva $y = 2x^2 + 3x - 5$ $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ $f(2) = 2(2)^2 + 3\ (2) - 5 = 8 + 6 - 5 = 9$ $f(2 + \Delta x\ ) = 2(2 + \Delta x)^2 + 3\ (2 + \Delta x) - 5$ $= 2(4 + 4\Delta x + \Delta x^2) + 6 + 3\Delta x - 5$ $= 8 + 8\Delta x + 2\Delta x^2 + 6 + 3\Delta x - 5$ $= 2\Delta x^2 + 11\Delta x + 9$ Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x\ ) - f(x_1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x\ ) - f(2)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x^2 + 11\Delta x + 9 - 9}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x^2 + 11\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x^2}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{11\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = 0 + 11 = 11$ Jadi gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 3x - 5$ di titik (2, 9) sama dengan 11.	20
2	Penyelesaian Diketahui kurva $y = x^3 - 2x$ dan titik (1, - 1) $f(x) = x^3 - 2x$ $f(1) = 1^3 - 2(1) = -1$ $f(1 + \Delta x\ ) = (1 + \Delta x)^3 - 2(\Delta x)$ $= 1 + 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3 - 2\Delta x$ $= \Delta x^3 + 3\Delta x^2 + \Delta x - 1$ Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x\ ) - f(x_1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x\ ) - f(1)}{\Delta x}$	20

	$m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^3 + 3\Delta x^2 + \Delta x - 1 - (-1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^3 + 3\Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^3}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3\Delta x^2}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = 0 + 0 + 1 = 1$ Jadi gradien garis singgung kurva $y = x^3 - 2x$ di titik $(1, -1)$ sama dengan 1	
3	Penyelesaian Diketahui kurva $y = x^2 - 2x + 5$ dan titik (- 1 , 8) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 5 = 1 + 2 + 5 = 8$ $f(-1 + \Delta x) = (-1 + \Delta x)^2 - 2(-1 + \Delta x) + 5$ $= (1 - 2\Delta x + \Delta x^2) + 2 - 2\Delta x + 5$ $= 1 - 2\Delta x + \Delta x^2 + 2 - 2\Delta x + 5$ $= \Delta x^2 - 4\Delta x + 8$ Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^2 - 4\Delta x + 8 - 8}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x^2}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{4\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = 0 - 4 = -4$ Jadi gradien garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 5$ dan titik (- 1 , 8) sama dengan - 4. Persamaan garis singgungnya : $y - y_1 = m_{PGS}(x - x_1)$ $y - 8 = -4(x - (-1))$ $y - 8 = -4x - 4$ Atau $y = -4x - 4 + 8$ $y = -4x + 4$	20
	Penyelesaian Diketahui kurva $y = 3x^2 - 5$ di titik (- 2, 7)	

4	$f(x) = 3x^2 - 5$ $f(-2) = 3(-2)^2 - 5 = 12 - 5 = 7$ $f(-2 + \Delta x) = 3(-2 + \Delta x)^2 - 5$ $= 3(4 - 4\Delta x + \Delta x^2) - 5$ $= 3\Delta x^2 - 12\Delta x + 7$ Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2 + \Delta x) - f(-2)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x^2 - 12\Delta x + 7 - 7}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x^2 - 12\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x^2}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = 0 - 12 = -12$ Jadi gradien garis singgung kurva $y = 3x^2 - 5$ di titik (- 2, 7) sama dengan - 12. Persamaan garis singgungnya : $y - y_1 = m_{PGS}(x - x_1)$ $y - 7 = -12\,(x - (-2))$ $y - 7 = -12x - 24$ Atau $y = -12x - 24 + 7$ $y = -12x - 17$	20
5	Penyelesaian Diketahui garis x + y = a menyinggung parabola $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$. Nilai a adalah .... $x + y = a$ $y = a - x$ menyinggung parabola maka $y_1 = y_2$ $a - x = -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$ $-\frac{1}{3}x^2 + x + 2 + x - a = 0$ $-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 2 - a = 0$ $a = -\frac{1}{3}; b = 2; c = 2 - a$	20

	Karena menyinggung maka, D = 0 $D = b^2 - 4\,ac$ $D = (2)^2 - 4\,(-\frac{1}{3})(2 - a) = 0$ $4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}a = 0$ $\frac{12}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}a = 0$ $\frac{20}{3} - \frac{4}{3}a = 0$ $-\frac{4}{3}a = 0 - \frac{20}{3} = -\frac{20}{3}$ $a = -\frac{20}{3}\,.(-\frac{3}{4}) = 5$	
TOTAL SKOR		100

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggung jawab.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami definisi turunan ?		
2.	Apakah Ananda telah mampu memahami konsep gradien garis singgung?		
3.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan turunan?		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
SIFAT-SIFAT TURUNAN

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran kedua, Ananda akan dibimbing untuk dapat menggunakan sifat-sifat turunan yang telah Ananda peroleh pada kegiatan pembelajaran satu. Cara menentukan turunan pertama sebuah fungsi yang terdefinisi di $\mathbb{R}$ Ananda dapat menggunakan definisi turunan atau dapat juga menggunakan rumus umum turunan.

B. Uraian Materi

Konsep turunan merupakan salah satu dari bagian utama kalkulus. Konsep turunan ditemukan oleh **Sir Isaac Newton** (1642 – 1727) dan **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716). Bahasa lain dari turunan adalah differensial yang merupakan tingkat perubahan dari suatu fungsi. Turunan dari fungsi $y = f(x)$ dituliskan dengan $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}$ (dibaca y aksen sama dengan f aksen x sama dengan $dy\, dx$ sama dengan $d\, f(x)\, dx$, ini dapat diartikan turunan pertama fungsi f terhadap x, atau turunan pertama y. Jika fungsinya dalam $a, f(a)$ maka $f'(a) merupakan\ turunan\ pertama\ f\ terhadap\ a$ dan seterusnya.

Definisi Turunan
Misal $f(x)$ merupakan fungsi yang terdefinisi di $\mathbb{R}$, turunan pertama dari fungsi tersebut didefinisikan sebagai limit dari perubahan rata-rata dari nilai fungsi terhadap variabel x dan ditulis sebagai:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Konsep ini merupakan dasar untuk menentukan turunan suatu fungsi. Atau definisi tersebut dapat dituliskan:

Definisi 1

Misalkan $f: S \to R$ dengan $S \subseteq R$. Fungsi f dapat diturunkan pada S jika dan hanya jika fungsi f dapat diturunkan di setiap titik c di S.

Atau jika terdapat titik c anggota R

Definisi 2

Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$. Fungsi f dapat diturunkan di titik c jika dan hanya jika ada $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$.

Definisi 3

Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$

- Fungsi f memiliki turunan kanan pada titik c jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.
- Fungsi f memiliki turunan kiri pada titik c jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.

Suatu fungsi akan dapat diturunkan pada suatu titik jika memenuhi sifat berikut:

Sifat turunan fungsi

Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $x \in S$ dan $L \in R$. Fungsi f dapat diturunkan di titik x jika dan hanya jika turunan kiri sama dengan turunan kanan, ditulis,

$$f'(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = L.$$

Keterangan:

1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kanan pada domain S.
2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kiri pada domain S.

Contoh Soal:

Dengan menggunakan konsep turunan, tentukan turunan pertama dari :

1. $f(x) = 10$

   Jawab:

   Karena $f(x) = 10$ merupakan fungsi konstan (tetap) maka $f(x + \Delta x) = 10\ (tetap)$

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10-10}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

2. $f(x) = 3x + 5$

   Jawab:

   $$f(x) = 3x + 5\ maka\ f(x+\Delta x) = 3\,(x + \Delta x) + 5 = 3x + 3\Delta x + 5$$

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) + 5 - (3x+5)}{\Delta x}$$

   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x + 3\Delta x + 5 - 3x - 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3$$

3. $f(x) = 5x^2 + 3$

   Jawab:

   $$f(x+\Delta x) = 5\,(x+\Delta x)^2 + 3 = 5\,(x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2) + 3$$
   $$= 5x^2 + 10x.\Delta x + 5\Delta x^2 + 3$$

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x^2 + 10x.\Delta x + 5\Delta x^2 + 3 - (5x^2 + 3)}{\Delta x}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x^2 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 + 3 - 5x^2 - 3}{\Delta x}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10x.\Delta x + 5\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10x.\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x^2}{\Delta x}$$
   $$= \lim_{\Delta x \to 0} 10x + \lim_{\Delta x \to 0} 5\Delta x = 10x + 0 = 10x$$

Sekarang marilah kita perhatikan ketiga contoh tersebut lalu kita tarik kesimpulan. Untuk contoh pertama, fungsi yang diberikan adalah fungsi konstan, menghasilkan turunan pertama sama dengan nol. Contoh soal kedua adalah fungsi linear menghasilkan turunan pertama koefisiennya, dan contoh soal ketiga adalah fungsi kuadrat, nahh perhatikan bahwa koefisien dari x pangkat dua adalah 5 dan pangkat dari x adalah 2, kalikan 5 dengan 2 didapat 5(2) = 10, hasil akhir berpangkat satu maka 2 – 1 = 1. Dari sini kita tarik kesimpulan bahwa:

- **Untuk fungsi konstan mempunyai bentuk umum $f(x) = c$, dengan c adalah konstanta bilangan Real.**

$$\textbf{Jika } f(x) = c; maka\ f'(x) = 0$$

- **Untuk fungsi linear mempunyai bentuk umum $y = ax + b$, dengan a dan b anggota bilangan Real.**

$$Jika\ f(x) = ax + b\ maka\ f'(x) = a$$

- **Untuk fungsi kuadrat mempunyai bentuk umum $y = ax^n$, dengan a anggota bilangan Real dan n pangkat/eksponen**

$$Jika\ f(x) = ax^n\ maka\ f'(x) = ax^{n-1}$$

Nahhh setelah Ananda merumuskan rumus umum turunan seperti di atas, maka dapat Ananda lihat untuk pengerjaan soal turunan dapat langsung menggunakan rumus tersebut.

Contoh. Tentukan turunan pertama dari

a) $y = 100$
Jawab $y' = 0$

b) $y = 19x - 5$
Jawab $y' = 19$

c) $y = 6x^3$
Jawab : $y' = 6(3)^{3-1} = 18x^2$

d) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2}$
Jawab: Untuk menjawab soal ini kita harus mengubah bentuk akar ke dalam bentuk pangkat pecahan.

$$f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} = 5x^{\frac{2}{3}}$$

Jadi Ananda punya koefisien = 5, pangkat = 2/3

$$\text{Maka } f'(x) = 5(\frac{2}{3})x^{\frac{2}{3}-1}$$

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}}$$

e) $f(x) = 2x - 15$
Jawab : Fungsi tersebut adalah fungsi linear maka $f'(x) = 2$

f) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 - 12x + 10$
Jawab :
$f'(x) = 2(3)x^{3-1} - 21(2)x^{2-1} - 12(1)x^{1-1} + 0$
$f'(x) = 6x^2 - 42x - 12$

g) $f(x) = (2x + 3)(x^3 - 2x^2)$
Jawab:
Perhatikan bahwa soal ini merupakan perkalian dua fungsi berbeda, yaitu fungsi $2x + 3\ dan\ \ x^3 - 2x^2$. Untuk menjawab soal ini Ananda dapat mengalikan satu persatu tiap komponen fungsi terlebih dahulu, ini tidak sulit karena masing-masing fungsi yang berada di dalam kurung berpangkat satu. Setelah dikalikan maka fungsi $f(x)$ menjadi:

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^3 - 6x^2$
$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2$

Setelah ini baru kita turunkan
$f'(x) = 2(4)x^{4-1} - 1(3)x^{3-1} - 6(2)x^{2-1}$
$f'(x) = 8x^3 - 3x^2 - 12x$

Nahhh bagaimana setelah Ananda belajar sampai contoh terakhir ini..? mudah bukan mempelajari konsep turunan? Jadi kalo udah ketemu rumus umum turunannya, Ananda gak perlu lagi pakai konsep limit dalam mencari turunan pertama. Langsung aja pakai tuh rumusnya. Oke.. ?? semangattt...

ATURAN RANTAI

Ananda perhatikan contoh soal bagian g). Seandainya fungsi $f(x)$ tersebut berpangkat lebih dari dua, tentu akan repot bagi Ananda melakukan perkaliannya.

CONTOH SOAL 1. Tentukan turunan pertama dari :

$f(x) = (2x + 3)^3$
Nahh cara menyelesaikan soal ini Ananda memisalkan,
Misal: $u = 2x + 3$
Maka $u' = \frac{du}{dx} = 2$ notasi leibniz
Fungsi di atas kita ganti dengan u sehingga:

$f(x) = u^3$
$f'(x) = 3\,u^2 \frac{du}{dx} = 3u^2\ (2) = 6u^2 = 6\,(2x + 3)^2$

CONTOH SOAL 2. Tentukan $f'(x)$ dari:
$f(x) = (3x-5)\sqrt[3]{4x-10}$

Jawab:

Misal $u = 3x-5$ $\quad v = \sqrt[3]{4x-10} = (4x-10)^{\frac{1}{3}}$

$u' = 3$ $\quad v' = \frac{1}{3}(4x-10)^{\frac{1}{3}-1}.(4) = \frac{4}{3}(4x-10)^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}}$

$= \dfrac{4}{3}(4x-10)^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) = u'v + uv'$

$f'(x) = 3\,.(4x-10)^{\frac{1}{3}} + (3\mathrm{x}-5).\dfrac{4}{3}(4x-10)^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) = (4x-10)^{\frac{1}{3}}\left(3 + \frac{4}{3}(3x-5)(4x-10)^{-1}\right)$

C. Rangkuman

Berdasarkan paparan di atas, berikut merupakan rumus-rumus umum turunan yang dapat Ananda ingat dan gunakan dalam menyelsaikan soal turunan. Misalkan f, u, v adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan di interval I dan a adalah bilangan real, maka:

1. $f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = \text{a}$
3. $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
4. $f(x) = au(x) \rightarrow f'(x) = au'(x)$
5. $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
6. $f(x) = u(x)v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
7. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

D. Latihan Soal

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan benar dan teliti yaa

1. Jika diketahui $f(r) = 2r^{\frac{3}{2}} - 2r^{\frac{1}{2}}$, maka nilai dari $f'(1) = \cdots$

2. Sebuah persegi dengan sisi x memiliki luas $f(x)$. Nilai $f'(6) = \cdots$
   Jawab:

3. Besar populasi di suatu daerah t tahun mendatang ditentukan oleh persamaan $p(t) = 10^3t^2 - 5.10^2t + 10^6$. Laju pertumbuhan penduduk 5 tahun mendatang adalah..

4. Dua bilangan bulat m dan n memenuhi hubungan $2m - n = 40$. Nilai minimum dari $p = m^2 + n^2$ adalah ...

5. Diberikan fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ Jika $f'(0) = 2, dan\ f(2) = 6$

   Tentukan nilai a, b dan c.

Pembahasan

Nomor	Pembahasan	Skoring
1	Diketahui $f(r) = 2r^{\frac{3}{2}} - 2r^{\frac{1}{2}}$, Dengan menggunakan aturan turunan dasar, maka turunan pertama dari fungsi $f(r)$ $adalah$ $f'(r) = 2\frac{3}{2}r^{\frac{3}{2}-1} - 2\frac{1}{2}r^{\frac{1}{2}-1}$ $= 3r^{\frac{1}{2}} - r^{-\frac{1}{2}}$ $= 3\sqrt{r} - \frac{1}{r}$ Untuk r = 1 maka $f'(1) = 3\sqrt{1} - \frac{1}{1} = 3 - 1 = 2$	20
2	Penyelesaian Luas Persegi diayatakan dengan sisi kali sisi maka $f(x) = x.x = x^2$ Dengan menggunakan rumus dasar turunan dieroleh $f'(x) = 2x$ Jadi nilai $f(6) = 2\ (6) = 12$	20
3	Penyelesaian $p(t) = 10^3t^2 - 5.10^2t + 10^6$ $turunan\ pertama\ dari\ p(t) adalah$ $p'(t) = 2.10^3t^{2-1} - 5.10^2$ Untuk t = 5 maka $p'(5) = 2.10^3.5 - 5.10^2 = 15\ .10^3 - 5.10^2$ $= 10.000 - 500 = 9.500$	20
4	Penyelesaian Diketahui $2m - n = 40$ Persamaan tersebut dapat ditulis menjadi $n = 2m - 40$ Karena $p = m^2 + n^2$ maka $p = m^2 + (2m - 40)^2$ $p = m^2 + 4m^2 - 160m + 1600$ $p = 5m^2 - 160m + 1600$	20

	Agar p minimum maka turunan pertama harus bernilai nol $p = 5m^2 - 160m + 1600$ $p' = 10m - 160 = 0$ $10m = 160 \leftrightarrow m = \frac{160}{10} = 16$ Jadi nilai p minimum adalah $p = 5(16)^2 - 160(16) + 1600 = 1280 - 2560 + 1600 = 320$	
5	Penyelsaian Diketahui $(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2\,ax + b$ Karena $f'(0) = 2\; maka\; 2a(0) + b = 2 \leftrightarrow b = 2$ dan $a = 1$ Karena $f(2) = 6\; maka\; f(2) = 1(2)^2 + 2(2) + c = 6$ $f(2) = 4 + 4 + c = 6$ $f(2) = 8 + c = 6\; maka\; c = -2$ Jadi nilai a, b dan c berturut – turut adalah $a = 1;\; b = 2\; dan\; c = -2$	20
SKOR TOTAL		100

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggung jawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami definisi turunan?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menentukan turunan pertama fungsi aljabar linear?		
3.	Apakah Ananda telah mampu menentukan turunan pertama fungsi pecahan?		
4.	Apakah Ananda telah mampu menentukan turunan pertama dari fungsi berbentuk akar?		
5.	Aapakah Ananda mampu menentukan turunan fungsi dengan menggunakan aturan rantai?		
6.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan soal yang berkaitan dengan turunan?		

EVALUASI

Pilih satu jawaban yang paling tepat (Sebaiknya Ananda kerjakan di buku latihan, tanyakan kepada guru Ananda apabila terdapat materi atau soal yang belum Ananda pahami)

1) Turunan Pertama dari $f(x) = (2-6x)^3$ $adalah\ f'(x) = \cdots$

   A. $-18\,(2-6x)^2$

   B. $-\frac{1}{2}\,(2-6x)^2$

   C. $3\,(2-6x)^2$

   D. $18\,(2-6x)^2$

   E. $-\frac{1}{2}\,(2-6x)^2$

   Jawab: A

2) Diketahui $f(x) = (2x-3)^4$; $f'(x) merupakan\ turunan\ pertama\ dari\ f(x)$. Nilai dari $f'(3) = \cdots$

   A. 24

   B. 36

   C. 72

   D. 108

   E. 216

   Jawab: E

3) Persamaan garis singgung kurva $y = 5x^2 + 2x - 12$ di titik (2, 12) adalah

   A. $y = 32 - 22x$

   B. $y = 22x - 32$

   C. $y = 22x - 262$

   D. $y = 22x - 42$

   E. $y = 22x + 32$

   Jawab: B

4) Jika $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2+2x+1}$, maka $f'(2)$ = ….

A. $\frac{2}{9}$

B. $-\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{7}{27}$

E. $\frac{7}{4}$

Jawab : D

5) Persamaan garis singgung pada kurva $y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ di titik yang berabsis 1 adalah ...

A. $5x + y + 7 = 0$

B. $5x + y + 3 = 0$

C. $5x + y - 7 = 0$

D. $3x - y - 4 = 0$

E. $3x - y - 5 = 0$

Jawab : C

6) Garis l menyinggung kurva $y = 6\sqrt{x}$ di titik yang berabsis 4. Titik potong garis l dengan sumbu x adalah ...

A. (4,0)

B. (- 4, 0)

C. (12, 0)

D. (- 6, 0)

E. (6, 0)

Jawab : C

7) Diketahui $y = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$, maka $y' = \cdots$

A. $5x^3$

B. $3x^3 + 3x$

C. $2x^4 - 2x$

D. $x^4 + x^2 - x$

E. $5x^4 + 3x^2 - 2x$

Jawab : E

8) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 10$ maka $f'(x) = \cdots$

A. $2x^2 - 3x + 1$

B. $6x^3 - 6x^2 + x$

C. $6x^2 - 6x - 10$

D. $6x^2 = 6x + 1$

E. $6x^2 - 6x + 9$

Jawab : C

9) Diketahui $f(x) = \frac{x^2+3}{2x+1}$. Jika $f'(x)$ menyatakan turunan pertama dari $f(x)$ maka $f(0) + 2\,f'(0) = \cdots$

A. – 10

B. – 9

C. – 7

D. – 5

E. – 3

Jawabn : B

10) Jika garis singgung kurva $y = x\sqrt{5-x}$ di titik (4, 4) memotong sumbu x di titik (a, 0) dan memotong sumbu y di titik (0, b), maka nilai a + b adalah ..

A. – 2

B. 0

C. 9

D. 16

E. 18

Jawab : D

11) Jika $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3}$, maka turunan pertama dari fungsi $f\ di\ x = 3$ adalah $f'(3) = \cdots$

A. $-1\frac{1}{2}$

B. $-\frac{5}{6}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{1}{2}$

E. $-\frac{1}{3}$

Jawab : D

12) Garis singgung pada kurva y = $\sqrt{x}$ di titik P membentuk sudut 45° dengan sumbu-x positif, koordinat titik singgungnya adalah...
A. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$
B. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
C. $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$
D. $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$
E. $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$
Jawab: A

13) persamaan garis singgung kurva $y = \sqrt{x} - 2$ di titik potong kurva itu terhadap sumbu$x$ adalah...
A. $4x + 1$
B. $4x - 1$
C. $\frac{1}{4}x - 1$
D. $\frac{1}{4}x + 1$
E. $-\frac{1}{4}x - 1$
Jawab: C

14) Persamaan garis singgung kurva $y = 3 - x^2$ yang tegak lurus terhadap garis $4y = x + 1$ adalah
A. $y = 4x - 7$

B. $y = 4x + 7$

C. $y = -4x - 7$

D. $y = -4x + 7$

E. $y = -4x + 8$

Jawab: D

15) Persamaan garis singgung kurva $y = 2\sqrt{x}$ di titik dengan ordinat 2 adalah...
A. $y - x - 1 = 0$
B. $y - x + 1 = 0$
C. $y + x - 1 = 0$
D. $-y - x - 1 = 0$

E. $-y - x + 1 = 0$

Jawab: A

DAFTAR PUSTAKA

Erlangga Fokus UN SMA/MA 2013 Program IPA. (2012). Jakarta: Erlangga.

Erlangga X-Press UN 2015 SMA/MA Program IPA. (2014). Jakarta: Erlangga.

Matematika Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (2014). Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Siswanto. (2005). *Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya*. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Willa Adrian. (2008). *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya.

https://smatika.blogspot.com/2016/04/persamaan-garis-singgung-kurva_6.html

https://www.zenius.net/prologmateri/matematika/a/1222/Cara-Mencari-Titik-Singgung

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

BERANI JUJUR HEBAT!

JUJUR ADALAH LANGKAH AWAL BERANTAS KORUPSI

ZI-WBK

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum

KELAS XI

APLIKASI TURUNAN FUNGSI ALJABAR

MATEMATIKA UMUM KELAS XI

PENYUSUN

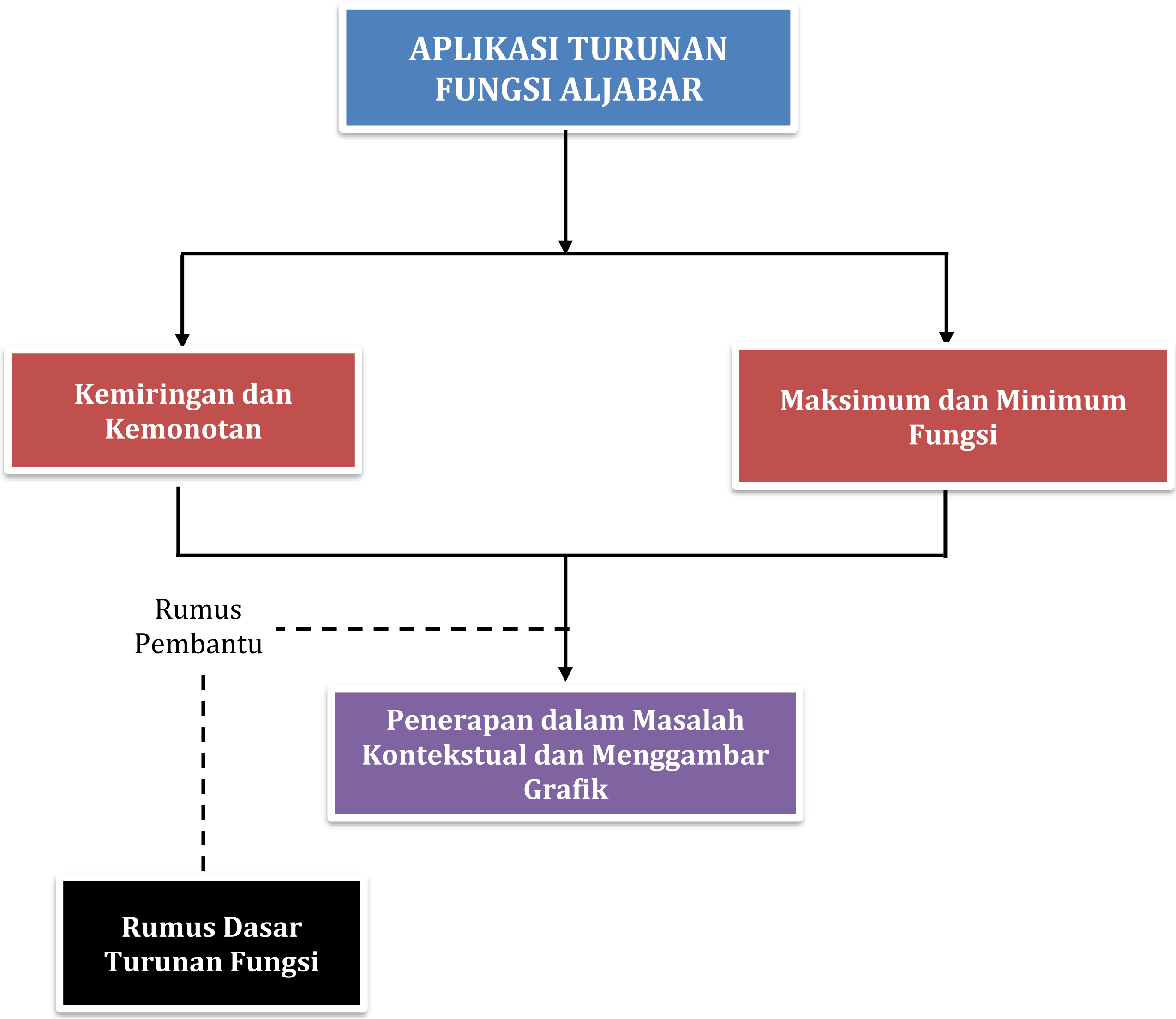
Dr. Yuyun Sri Yuniarti, M.Pd.
SMA Negeri 1 Pedes
Kabupaten Karawang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Fungsi naik	:	Sebarang fungsi $f(x)$ dimana x bergerak ke kanan, maka grafik fungsi tersebut bergerak ke atas atau naik
Fungsi turun	:	Sebarang fungsi $f(x)$ dimana x bergerak ke kanan, maka grafik fungsi tersebut bergerak ke bawah atau turun
Gradien	:	Kemiringan, ukuran seberapa cepat nilai fungsinya berubah; nilai turunan fungsi di titik singgungnya
Garis singgung	:	Kurva bidang pada titik yang diketahui ialah garis lurus yang "hanya menyentuh" kurva pada titik tersebut
Garis normal	:	Garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung
Nilai maksimum	:	Nilai terbesar dari suatu fungsi pada interval tertentu
Nilai minimum	:	Nilai terkecil dari suatu fungsi pada interval tertentu
Titik stasioner	:	Titik pada kurva yang mengakibatkan kurva tersebut tidak naik dan tidak turun.
Turunan	:	Laju perubahan suatu fungsi terhadap perubahan peubahnya.

PETA KONSEP


APLIKASI TURUNAN FUNGSI ALJABAR
Kemiringan dan Kemonotan
Maksimum dan Minimum Fungsi
Rumus Pembantu
Penerapan dalam Masalah Kontekstual dan Menggambar Grafik
Rumus Dasar Turunan Fungsi

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	12 JP
Judul Modul	:	Aplikasi Turunan Fungsi Aljabar

B. Kompetensi Dasar

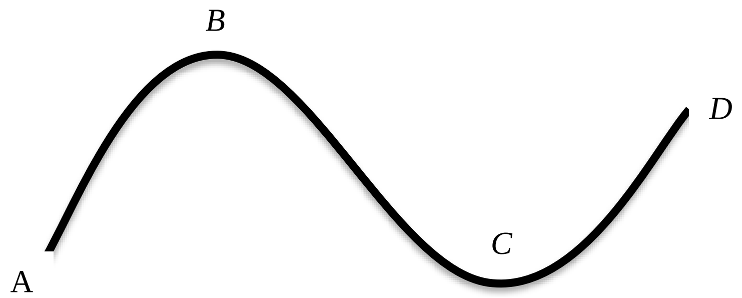
3.9 Menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum dan selang kemonotonan fungsi serta kemiringan garis singgung.

4.9 Menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan titik maksimum, titik minimum, dan selang kemonotonan fungsi serta kemiringan garis singgung kurva, persamaan garis singgung dan garis normal kurva berkaitan dengan masalah kontekstual

C. Deskripsi Singkat Materi

Konsep turunan adalah subjek yang banyak berperan dalam aplikasi matematika di kehidupan sehari-hari di berbagai bidang. Konsep turunan digunakan untuk menentukan interval fungsi naik/turun, keoptimalan fungsi dan titik belok suatu kurva. Untuk memahami apa yang akan Ananda pelajari dalam modul ini, perhatikan ilustrasi berikut.

Coba bayangkan ketika Ananda mendaki gunung. Ananda akan memulainya di kaki gunung, kemudian perlahan bergerak ke atas sampai tiba di puncak gunung. Ketika berada di puncak gunung Ananda merasa berada di titik paling atas bukan? Nahh setelah itu Ananda turun kembali menuju lembah sampai tiba di kaki gunung kembali. Pergerakan Ananda mendaki gunung dapat diilustrasikan dengan gambar sebagai berikut:



Gambar 1 Ilustrasi fungsi naik dan turun

Dari ilustrasi tersebut, ketika Ananda bergerak dari titik A menuju ke titik B, Ananda akan bergerak naik hingga sampai puncak, kemudian Ananda bergerak dari titik B ke titik C, pergerakan Ananda akan turun, demikian juga ketika Ananda bergerak dari titik C ke D Ananda akan bergerak naik. Deskripsi ini menggambarkan fungsi naik untuk pergerakan dari A ke B, fungsi turun untuk pergerakan dari B ke C. Dari Gambar tersebut juga dapat kita lihat terdapat puncak dan lembah. Nahh ketika Ananda berada di puncak berarti Ananda akan berada di titik maksimum, demikian juga ketika Ananda berada di bawah akan berada di titik minimum. Inilah yang disebut titik ekstrim atau titik puncak yang bisa berarti maksimum atau minimum.

Terdapat berbagai pemanfaatan aplikasi turunan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu:

- Salah satu penerapan turunan yang paling umum adalah penentuan nilai maksimum dan minimum. Hal tersebut dapat diamati dengan seberapa sering kita mendengar atau membaca istilah keuntungan terbesar, biaya terkecil, kekuatan terbesar, dan jarak terjauh. Nilai balik maksimum suatu fungsi pada domain f dapat berupa nilai maksimum mutlak atau nilai maksimum relatif. Begitupun dengan nilai minimum, dapat berupa nilai minimum mutlak dan nilai minimum relatif. Jika dalam interval tertentu terdapat dua nilai maksimum atau lebih, nilai maksimum mutlak (absolut) adalah nilai tertinggi sedangkan yang lainnya merupakan nilai maksimum relatif, begitupun sebaliknya. Jika terdapat dua atau lebih nilai minimum pada suatu fungsi, maka titik terendah merupakan nilai minimum mutlak (absolut), sedangkan yang lainnya merupakan nilai minimum relatif.
- Turunan dapat digunakan untuk menentukan kecepatan dan percepatan sehingga sering digunakan dalam pekerjaan dan penelitian yang membutuhkan ilmu fisika. Selain itu percepatan juga digunakan dalam menghitung laju percepatan pada kegiatan lempar lembing, lempar cakram, menembak, dan lain – lain. Setiap waktu dan percepatannya mempunyai nilai yang dapat diketahui melalui fungsi turunan.
- Dalam membuat konstruksi bangunan, percampuran bahan bahan bangunan yang di lakukan oleh arsitek, pembuatan tiang – tiang, langit langit, ruangan, dan lain lain menggunakan turunan sehingga bangunan terlihat cantik dan kokoh (optimal). Pembuatan kapal, pesawat, dan kendaraan lainnya menggunakan turunan.
- Kegunaan penurunan,terdapat juga pada quick count. Dalam perhitungan tersebut,terdapat juga perhitungan yang baik sehingga dapat mempunyai perhitungan yang maksimal.
- Dalam dunia penerbangan, turunan mempunyai fungsi terpenting untuk menentukkan laju pesawat dengan cepat. Pesawat akan mengikuti navigasi dari tower yang berada di bandara. Setiap laju pesawat akan terdeteksi pada navigasi (menggunakan perhitungan kalkulus otomatis) sehingga laju pesawat tidak salah arah dan percepatannya sesuai dengan panduan dari tower. (Brainly.co.id)

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi Ananda dalam melakukan kegiatan pembelajaran secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan Ananda dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan Ananda terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar Ananda dapat mengukur penguasaan terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan Ananda untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi 3 kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Kemiringan Garis Singgung dan Kemonotan Fungsi Aljabar
Kedua : Maksimum dan Minimum Fungsi Aljabar
Ketiga : Menggambar Grafik Fungsi Aljabar

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Kemiringan Garis Singgung dan Kemonotan Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini, diharapkan Ananda dapat menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi aljabar dengan kemiringan garis singgung dan selang kemonotonan fungsi (interval fungsi naik dan fungsi turun) dan dapat menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan kemiringan garis singgung kurva, persamaan garis singgung dan garis normal kurva dan selang kemonotonan fungsi aljabar.

B. Uraian Materi

Dalam mempelajari modul Aplikasi Turunan Fungsi Aljabar ada materi prasyarat yang harus dipelajari kembali, diantaranya adalah rumus turunan atau diferensial fungsi aljabar beserta sifat-sifatnya.

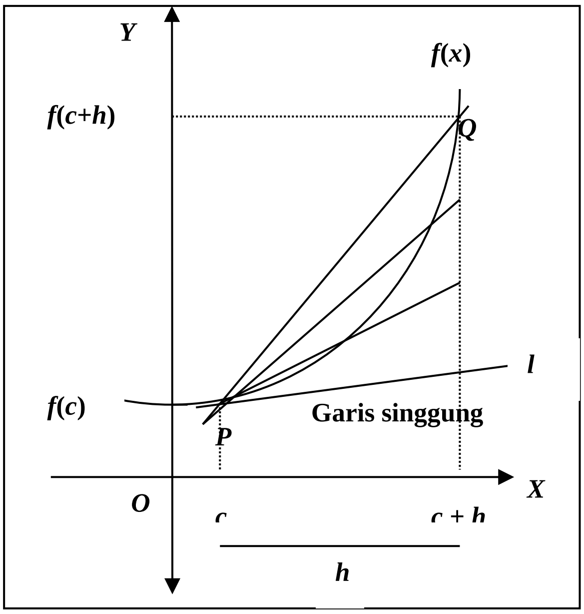
Rumus Turunan Fungsi Aljabar serta Sifat-sifatnya

Misalkan f, u, dan v fungsi dari x bernilai real serta dapat diturunkan dan a konstanta bilangan real, maka berlaku:

- $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a$
- $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = anx^{n-1}$
- $f(x) = au^n \Rightarrow f'(x) = an\,u^{n-1}.\,u'$
- $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- $f(x) = u\,.\,v \Rightarrow f'(x) = u'.\,v + u\,.\,v'$
- $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Kemiringan Garis Singgung

Perhatikan Gambar 2 berikut!



Gambar 2. Konsep kemiringan garis singgung

Misalkan P adalah sebuah titik tetap pada suatu kurva dan andaikan Q adalah sebuah titik berdekatan yang dapat dipindah-pindahkan pada kurva tersebut. Koordinat titik P adalah $(c, f(c))$, titik Q mempunyai koordinat $(c + h, f(c + h))$. Tali busur yang melalui P dan Q mempunyai kemiringan atau gradien

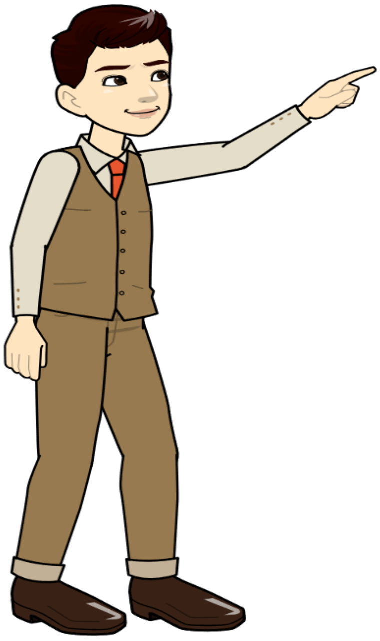
$$m_{PQ} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Garis l merupakan garis singgung kurva di titik P. Kemiringan (gradien) garis singgung l adalah:

$$m = f'(c) = \lim_{h\to 0} m_{PQ}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m\,(x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$

Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung. Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}\,(x - x_1)$.



Catatan:
Pengertian dua garis sejajar dan tegak lurus sering muncul dalam persamaan garis singgung.

- ❖ Misalkan garis g: $y = m_1x + c_1$ sejajar garis h: $y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h, maka $m_1 = m_2$.
- ❖ Misalkan garis g: $y = m_1x + c_1$ tegak lurus garis h: $y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h, maka $m_1 \,.\, m_2 = -1$.

Contoh 1

Tentukan gradien garis singgung kurva $y = x^2 + 2x - 2$ di titik (1, 1).

Penyelesaian:

- ❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi y
  $y = x^2 + 2x - 2$
  $\frac{dy}{dx} = 2x + 2$
- ❖ Tentukan gradien garis singgung m
  $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$
  $m = 2(1) + 2 = 4$
- ❖ Jadi, gradien garis singgung kurva adalah 2 .

Contoh 2

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva $y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ di titik yang berabsis 1.

Penyelesaian:

- ❖ Tentukan titik singgung (x_1, y_1)
  Absis $= x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$
  $= 2(1)^3 - 5(1)^2 - (1) + 6$
  $= 2$
  Jadi, titik singgungnya adalah (1, 2).

- Tentukan turunan pertama fungsi y

  $y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$, maka

  $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 10x - 1$
- Tentukan gradien m

  $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

  $= 6(1)^2 - 10(1) - 1$

  $= -5$
- Tentukan persamaan garis singgung

  $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

  $\Leftrightarrow y - 2 = -5(x - 1)$

  $\Leftrightarrow y - 2 = -5x + 5$

  $\Leftrightarrow 5x + y - 7 = 0$
- Tentukan persamaan garis normal

  $y - y_1 = -\frac{1}{m}\,(x - x_1)$

  $\Leftrightarrow y - 2 = -\frac{1}{5}\,(x - 1)$

  $\Leftrightarrow 5y - 10 = -x + 1$

  $\Leftrightarrow x + 5y - 11 = 0$
- Kesimpulan

  Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ di titik yang berabsis 1 adalah $5x + y - 7 = 0$ dan persamaan garis normalnya adalah $x + 5y - 11 = 0$.

Contoh 3

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 3$ yang tegak lurus dengan garis $x + 2y + 2 = 0$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi y

  $y = x^2 + 3$

  $\frac{dy}{dx} = 2x$
- Tentukan gradien garis singgung

  Misal garis h: $x + 2y + 2 = 0$

  $$y = -\tfrac{1}{2}x - 1 \Rightarrow m_h = -\tfrac{1}{2}$$

  Misal g adalah garis singgung kurva, karena garis g tegak lurus garis h ($g \perp h$), maka

  $m_g \,.\, m_h = -1$

  $m_g \,.\, (-\tfrac{1}{2}) = -1$

  $m_g = 2$
- Tentukan titik singgung (x_1, y_1)

  $m_g = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$

  $2 = 2x$

  $x = 1$

  $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = (1)^2 + 3 = 4$

  Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = (1, 4)$
- Tentukan persamaan garis singgung

  $y - y_1 = m_g\,(x - x_1)$

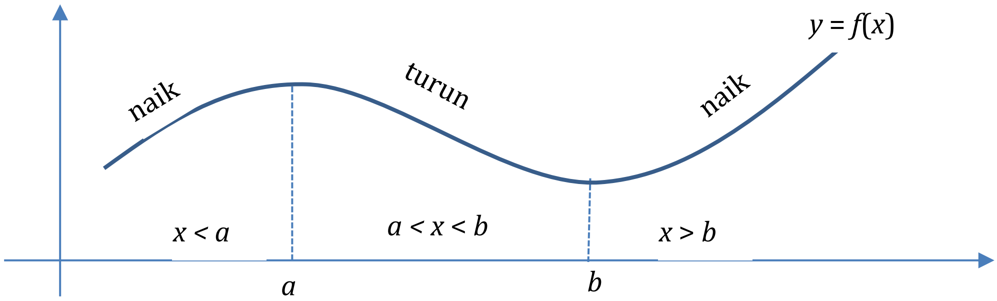
$\Leftrightarrow y - 4 = 2\,(x - 1)$
$\Leftrightarrow y = 2x + 2$

❖ Kesimpulan

Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 3$ yang tegak lurus dengan garis $x + 2y + 2 = 0$ adalah $y = 2x + 2$.

Kemonotan Fungsi

Secara grafik, jika kurva suatu fungsi merupakan sebuah kurva mulus, maka fungsi monoton naik dan fungsi monoton turun dapat dengan mudah Ananda amati. Misalnya untuk grafik fungsi yang digambarkan dibawah ini, Ananda dapat mengatakan bahwa fungsi $y = f(x)$ monoton naik pada interval $x < a$ atau $x > b$, monoton turun pada interval $a < x < b$. Kadangkala istilah monoton bisa dihilangkan sehingga menjadi fungsi naik dan fungsi turun.



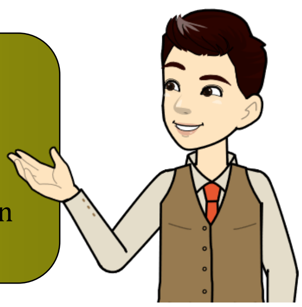
Gambar 3. Interval kurva naik dan turun

Secara aljabar pengertian fungsi naik dan fungsi turun adalah sebagai berikut.

Definisi 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I.

- Fungsi f disebut ***naik*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
- Fungsi f dikatakan ***turun*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

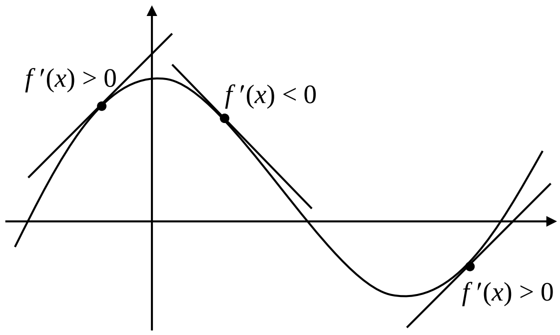


Ingat kembali bahwa turunan pertama $f'(x)$ memberikan makna kemiringan dari garis singgung pada grafik f di titik x. Jika $f'(x) > 0$, garis singgung naik ke kanan (lihat Gambar 3, jika $f'(x) < 0$, garis singgung jatuh ke kanan Untuk menyelidiki atau mencari interval di mana fungsi naik dan di mana fungsi turun, Ananda dapat menggunakan turunan pertama seperti teorema berikut.

Teorema 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I.

- Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi naik.
- Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi turun.



Gambar 3 Fungsi naik dan fungsi turun

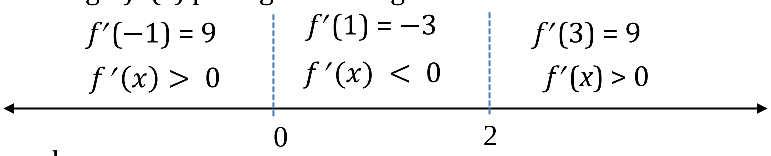
Agar Ananda lebih mahir dalam menentukan interval di mana fungsi naik dan turun pada fungsi aljabar, pelajari contoh berikut.

Contoh 4

Tentukan selang atau interval di mana fungsi naik dan turun dari fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15$, maka
  $f'(x) = 3x^2 - 6x$
- Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$
  $\Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0$
  $\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 2$
- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan



- Kesimpulan
  - syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $x < 0$ atau $x > 2$
  - syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $0 < x < 2$.

Contoh 5

Tentukan selang atau interval di mana fungsi naik dan turun dari fungsi

$f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$

Penyelesaian

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$, menggunakan aturan pembagian, diperoleh

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)(1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

- Tentukan titik-titik kritis
  - Titik stasioner $f'(x) = 0$
    $\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$
    $\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = 3$
  - Titik singular
    $\Leftrightarrow (x - 1) \neq 0$
    $\Leftrightarrow x \neq 1$
- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan

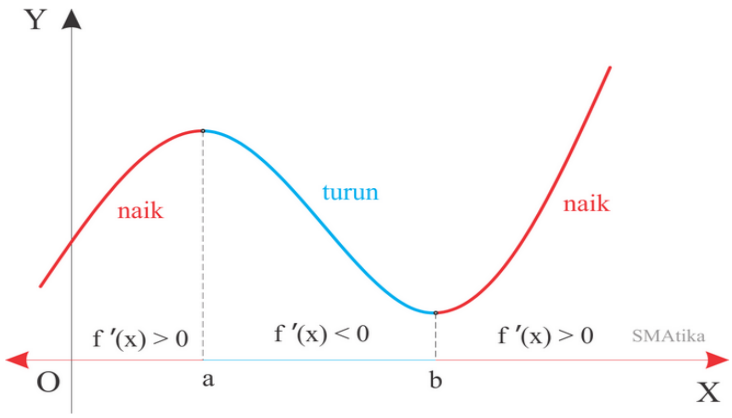
$f'(-2) = \frac{5}{9}$	$f'(0) = -3$	$f'(2) = -3$	$f'(4) = \frac{5}{9}$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

-1 $\qquad$ 1 $\qquad$ 3

- Kesimpulan
  - syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $x < -1$ atau $x > 3$
  - syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $-1 < x < 1$ atau $1 < x < 3$.

C. Rangkuman

- Gradien garis singgung di titik (x_1, y_1) adalah $m = f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$
- Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$
- Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung. Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.
- Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I.
  - Fungsi f disebut ***naik*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
  - Fungsi f dikatakan ***turun*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.
- Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I.
  - Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi naik.
  - Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi turun.



D. Latihan Soal

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Gradien garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 2$ di titik (1, 1) adalah ….
   A. -2
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. 2
2. Persamaan garis singgung yang melalui titik berabsis 1 pada kurva $y = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$ adalah ...
   A. $5x + 2y + 5 = 0$
   B. $5x - 2y - 5 = 0$
   C. $5x + 2y - 5 = 0$
   D. $3x + 2y - 3 = 0$
   E. $3x - 2y - 3 = 0$
3. Persamaan garis singgung pada kurva $y = -2x^2 + 6x + 7$ yang tegak lurus garis $x - 2y + 13 = 0$ adalah ....
   A. $2x + y + 15 = 0$
   B. $2x + y - 15 = 0$
   C. $2x - y - 15 = 0$
   D. $4x - 2y + 29 = 0$
   E. $4x + 2y - 29 = 0$
4. Diketahui kurva dengan persamaan $y = x^2 + px + q$, dengan p dan q konstanta. Garis $y = -3x + 5$ menyinggung kurva itu di titik dengan absis 1. Nilai p adalah ….
   A. 5
   B. 3
   C. -2
   D. -3
   E. -5
5. Persamaan garis normal dari kurva $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pada titik (8, 2) adalah ….
   A. $3y - 2x + 10 = 0$
   B. $3y + 4x - 38 = 0$
   C. $6y - x + 4 = 0$
   D. $12y - x - 16 = 0$
   E. $y + 12x - 98 = 0$
6. Jika $f(x) = x^2 - 6x + 8$, maka fungsi akan naik pada interval ...
   A. $x < 3$
   B. $x > 3$
   C. $x < 6$
   D. $x > 6$
   E. $x > -3$
7. Grafik fungsi $y = x^3 + 3x^2 - 45x$ turun pada interval...
   A. $-5 < x < 3$
   B. $3 < x < 5$
   C. $x < -5$ atau $x > 3$
   D. $x < -3$ atau $x > 5$
   E. $x < 3$ atau $x > 5$
8. Fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ naik pada interval ...
   A. $x > -2$
   B. $x > 3$
   C. $x < -2$

D. $x < -2$ atau $x > 3$
E. $-2 < x < 3$

9. Fungsi $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1$ turun pada interval ...
   A. $x < 0$ atau $2 < x < 4$
   B. $x < 0$
   C. $x < 4$
   D. $x > 2$
   E. $x < 2$
10. Fungsi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ turun hanya pada interval $\frac{2}{3} < x < 8$, maka nilai $a + b$ =..
   A. 29
   B. 16
   C. 13
   D. 3
   E. –13

Pembahasan Latihan Soal Kegiatan Belajar 1

1. Gradien garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 2$ di titik (1, 1) adalah ....
   Jawaban: C
   Penyelesaian:
   - Tentukan turunan pertama dari fungsi y
     $y = x^2 - 2x + 2$
     $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$
   - Tentukan gradien garis singgung m
     $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$
     $m = 2(1) - 2 = 0$
   - Jadi, gradien garis singgung kurva adalah 0 .

2. Persamaan garis singgung yang melalui titik berabsis 1 pada kurva $y = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$ adalah ....
   Jawaban: C
   Penyelesaian:
   - Tentukan titik singgung (x_1, y_1)
     Absis = $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$
     $= \frac{1}{1^2} - \sqrt{1}$
     $= 0$
     Jadi, titik singgungnya adalah (1, 0)
   - Tentukan turunan pertama fungsi y
     $y = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x} = x^{-2} - x^{\frac{1}{2}}$, maka
     $\frac{dy}{dx} = -2x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
     $= -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
   - Tentukan gradien m
     $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$
     $= -\frac{2}{1^3} - \frac{1}{2\sqrt{1}}$
     $= -\frac{5}{2}$
   - Tentukan persamaan garis singgung
     $y - y_1 = m(x - x_1)$
     $\Leftrightarrow y - 0 = -\frac{5}{2}(x - 1)$
     $\Leftrightarrow 2y = -5x + 5$
     $\Leftrightarrow 5x + 2y - 5 = 0$
     Jadi, persamaan garis singgung yang diminta adalah $5x + 2y - 5 = 0$.

3. Persamaan garis singgung pada kurva $y = -2x^2 + 6x + 7$ yang tegak lurus garis $x - 2y + 13 = 0$ adalah ....

Jawaban: B

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi y

  $y = -2x^2 + 6x + 7$

  $\dfrac{dy}{dx} = -4x + 6$
- Tentukan gradien garis singgung

  Misal garis h: $x - 2y + 13 = 0$

  $$y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \Rightarrow m_h = \frac{1}{2}$$

  Misal g adalah garis singgung kurva, karena garis g tegak lurus garis h ($g \perp h$), maka

  $m_g \,.\, m_h = -1$

  $m_g \,.\, (\frac{1}{2}) = -1$

  $m_g = -2$
- Tentukan titik singgung (x_1, y_1)

  $m_g = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$

  $-2 = -4x + 6$

  $4x = 8$

  $x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = -2(2)^2 + 6(2) + 7 = 11$

  Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = (2, 11)$
- Tentukan persamaan garis singgung

  $y - y_1 = m_g\,(x - x_1)$

  $\Leftrightarrow y - 11 = -2\,(x - 2)$

  $\Leftrightarrow y = -2x + 15$

  $\Leftrightarrow 2x + y - 15 = 0$

4. Diketahui kurva dengan persamaan $y = x^2 + px + q$, dengan p dan q konstanta. Garis $y = -3x + 5$ menyinggung kurva itu di titik dengan absis 1. Nilai p adalah ….

   Jawaban: E

   Penyelesaian:

   Gradien garis $y = -3x + 5$ adalah $m = -3$.

   $y = x^2 + px + q$, maka

   $\dfrac{dy}{dx} = 2x + p$ dan

   $m = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

   $\Leftrightarrow -3 = 2(1) + p$

   $\Leftrightarrow \quad p = -5$

   Jadi, nilai p adalah -5.
5. Persamaan garis normal dari kurva $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pada titik (8, 2) adalah ….

   Jawaban: E

   Penyelesaian

- Tentukan gradien m

  $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, maka $f'(x) = \dfrac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}}$. Karena garis melalui titik (8, 2), maka

$m = f'(8)$

$= \frac{1}{3}\, 8^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{3}\, (2^3)^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{3}\, (2)^{-2}$

$= \frac{1}{12}$

❖ Tentukan persamaan garis normal

Garis normal dengan gradien $m = \frac{1}{12}$ dan melalui titik (8, 2) adalah

$y - y_1 = -\frac{1}{m}\ (x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 2 = -12\ (x - 8)$

$\Leftrightarrow y = -12x + 98$

$\Leftrightarrow y + 12x - 98 = 0$

6. Jika $f(x) = x^2 - 6x + 8$, maka fungsi akan naik pada interval ....
   Jawaban: B
   Penyelesaian:
   Diketahui $f(x) = x^2 - 6x + 8$ maka $f'(x) = 2x - 6$
   Fungsi akan naik jika $f'(x) > 0$
   Maka $2x - 6 > 0$
   $2x > 6$
   $x > 3$
7. Grafik fungsi $y = x^3 + 3x^2 - 45x$ turun pada interval...
   Jawaban : A
   Penyelesaian:
   Syarat fungsi turun adalah $f'(x) < 0$ sehingga kita turunkan fungsi y pada soal diatas.
   $y' = 3x^2 + 6x - 45 < 0$ atau
   $3(x^2 + 2x - 15) < 0$
   $(x - 3)(x + 5) < 0$ agar mudah kita abaikan dulu tanda pertidaksamaannya sehingga:
   $x - 3 = 0$ atau $x + 5 = 0$.
   $x = 3$ atau $x = -5$

❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan

$f'(-6) = 27$	$f'(0) = -45$	$f'(4) = 27$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

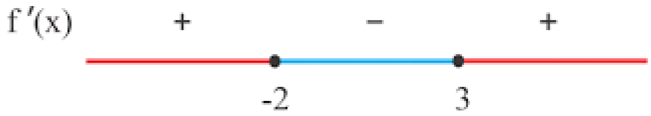
$-5 \qquad 3$

❖ Kesimpulan

syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $-5 < x < 3$.

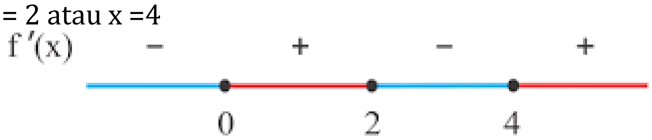
8. Fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ naik pada interval ....
   Jawaban: D
   Penyelesaian:
   $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$
   $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$
   $f(x)$ naik $\Rightarrow f'(x) > 0$
   $\Leftrightarrow\ 6x^2 - 6x - 36 > 0$

Pembuat nol :
$6x^2 - 6x - 36 = 0$
$x^2 - x - 6 = 0$
$(x + 2)(x - 3) = 0$
$x = -2$ atau $x = 3$



Jadi $f(x)$ naik pada interval $x < -2$ atau $x > 3$

9. Fungsi $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1$ turun pada interval ....
Jawaban: A
Penyelesaian:
$f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1$
$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 32x$
fungsi $f(x)$ akan turun jika $f'(x) < 0$
$\Leftrightarrow 4x^3 - 24x^2 + 32x < 0$
Pembuat nol :
$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0$
$\Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0$
$\Leftrightarrow x(x - 2)(x - 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ atau $x - 2 = 0$ atau $x - 4 = 0$
$\Leftrightarrow$ x = 0 atau x = 2 atau x =4



Ambil titik di sebelah kiri 0 misalnya titik -1, maka $f'(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 8(-1)$ $= -1 - 6 - 8 = -15$ (ini bernilai < 0)
Ambil titik di antara 0 dan 2, misalnya titik 1, maka $f'(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 8(1)$ $= 1 - 6 + 8 = 3$ (ini bernilai > nol) dst sehingga di dapat seperti pada gambar di atas.
Jadi, $f(x)$ turun pada interval $x < 0$ atau $2 < x < 4$

10. Fungsi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ turun hanya pada interval $\frac{2}{3} < x < 8$, maka nilai $a + b$ =..

Jawaban: D
Penyelesaian:
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
$f(x)$ turun hanya pada interval $\frac{2}{3} < x < 8$, berarti $f(x)$ naik pada $x > \frac{2}{3}$ dan $x < 8$, dan $f(x)$ stasioner pada $x = \frac{2}{3}$ dan $x = 8$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f(x)$ stasioner pada $x = \frac{2}{3}$ dan $x = 8$, maka

$f'(\frac{2}{3}) = 0 \Leftrightarrow 3(\frac{2}{3})^2 + 2a(\frac{2}{3}) + b = 0$

$\Leftrightarrow \frac{4}{3} + \frac{4}{3}a + b = 0$

$\Leftrightarrow 4 + 4a + 3b = 0$

$\Leftrightarrow 4a + 3b = -4$ ... (i)

$f'(8) = 0 \quad \Leftrightarrow 3(8)^2 + 2a(8) + b = 0$

$\Leftrightarrow 192 + 16a + b = 0$

$\Leftrightarrow 16a + b = -192$ … (ii)

Eliminasi (i) dan (ii) diperoleh

$$\begin{array}{l|l|l} 4a + 3b = -4 & \times 4 & 16a + 12b = -16 \\ 16a + b = -192 & \times 1 & \underline{16a + b = -192} \; - \\ & & \quad 11b = 176 \\ & & \Leftrightarrow \quad b = 16 \end{array}$$

Substitusi $b = 16$ ke persamaan (i), diperoleh

$4a + 3b = -4 \Leftrightarrow 4a + 3(16) = -4 \Leftrightarrow a = -13$

Jadi, nilai $a + b = 3$

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu menentukan turunan fungsi aljabar ?		
2.	Apakah Ananda mampu menentukan kemiringan garis singgung suatu kurva ?		
3.	Apakah Ananda mampu menentukan persamaan garis singgung pada fungsi aljabar?		
4.	Apakah Ananda mampu menentukan persamaan garis normal pada fungsi aljabar?		
5.	Apakah Ananda mampu menentukan interval fungsi naik pada fungsi aljabar ?		
6.	Apakah Ananda mampu menentukan interval fungsi turun pada fungsi aljabar ?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Maksimum dan Minimum Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

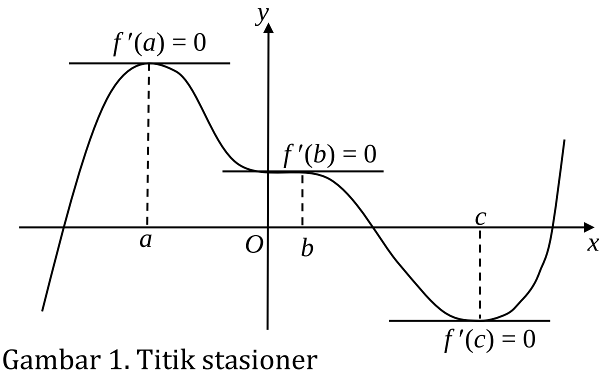
Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Ananda dapat menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi dengan nilai maksimum dan nilai minimum dan dapat menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan titik maksimum, titik minimum berkaitan dengan masalah kontekstual.

B. Uraian Materi

Titik dan Nilai Stasioner Fungsi Aljabar

Titik stasioner terjadi apabila garis singgung pada kurva di titik tersebut merupakan garis horisontal. Perhatikan Gambar disamping.

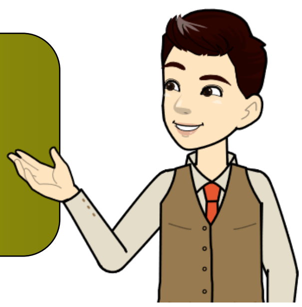
Definisi titik stasioner diberikan sebagai berikut:



Gambar 1. Titik stasioner

Definisi 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang yang mempunyai turunan.
Jika $f'(a) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di titik $x = a$, dengan
- Nilai $f(a)$ disebut nilai stasioner $f(x)$ di $x = a$.
- Titik $(a, f(a))$ disebut titik stasioner



Contoh 1

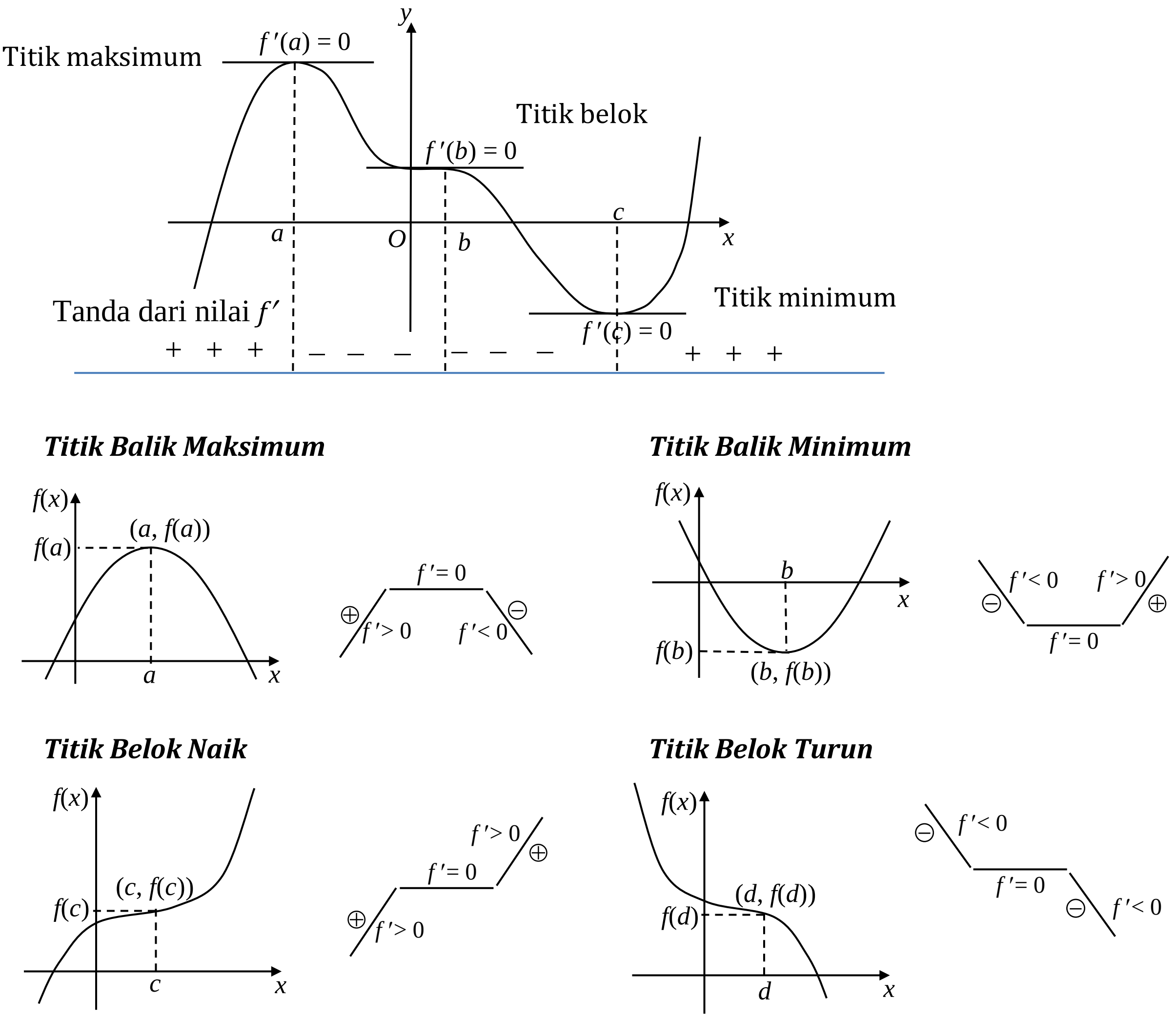
Tentukan nilai dan titik stasioner fungsi $f(x) = x^3 - 12x + 8$.

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
  $f(x) = x^3 - 12x + 8$, maka
  $f'(x) = 3x^2 - 12$
- Syarat stasioner
  $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 12 = 0$
  $\iff 3(x^2 - 4) = 0$
  $\iff 3(x + 2)(x - 2) = 0$
  $\iff x = -2$ atau $x = 2$
- Menentukan nilai stasioner
  $x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 8 = 24$
  $x = 2 \Rightarrow f(2) = (2)^3 - 12(2) + 8 = -8$
- Kesimpulan
  - Nilai stasionernya adalah -8 dan 24
  - Titik stasionernya $(2, -8)$ dan $(-2, 24)$

Menentukan Titik Maksimum dan Titik Minimum

Perhatikan Gambar 2 berikut, menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, diuraikan dalam sifat berikut.

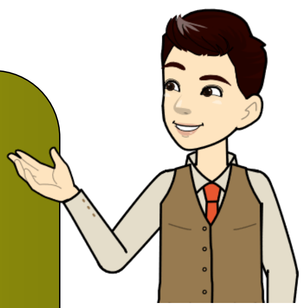


Gambar 2. Titik Maksimum, Titik Minimum, dan Titik Belok

Sifat 1

Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan dan $f'(a) = 0$

- Jika nilai f' bertanda positif di $x < a$ dan bertanda negatif di $x > a$, maka $(a, f(a))$ disebut titik maksimum lokal.
- Jika nilai f' bertanda negatif di $x < c$ dan bertanda positif di $x > c$, maka $(c, f(c))$ disebut titik minimum lokal.
- Jika disekitar titik $x = b$ tidak ada perubahan tanda nilai f', maka $(b, f(b))$ disebut titik belok horizontal.



Untuk lebih memahami lagi Ananda dalam menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, pelajari contoh berikut.

Contoh 2

Tentukan titik balik maksimum dan minimum dari fungsi $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$

Penyelesaian :

❖ Tentukan turunan pertama

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$

$f'(x) = x^2 + x - 6$

❖ Syarat titik stasioner

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ atau $x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ atau $x = -3$

❖ Menentukan titik stasioner

$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 - 6(2) = \frac{8}{3} + 2 - 12 = -7\frac{1}{3}$

$x = -3 \Rightarrow f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 6(-3) = -9 + \frac{9}{2} + 18 = 13\frac{1}{2}$

Jadi, ada dua titik stasioner, yaitu $\left(2, -7\frac{1}{3}\right)$ dengan nilai stasionernya $-7\frac{1}{3}$ dan $\left(-3, 13\frac{1}{2}\right)$ dengan nilai stasionernya $13\frac{1}{2}$.

❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

X	$x < -3$	-3	$-3 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
gradien					

maksimum (pada $x = -3$)   ***minimum*** (pada $x = 2$)

❖ Kesimpulan

➢ $f(-3) = 13\frac{1}{2}$ merupakan nilai balik maksimum, karena f' berubah tanda dari + (positif) ke – (negatif) dan titik balik maksimumnya adalah $\left(-3, 13\frac{1}{2}\right)$

➢ $f(2) = -7\frac{1}{3}$ merupakan nilai balik minimum, karena f' berubah tanda dari – (negatif) ke + (positif) dan titik balik minimum adalah $\left(2, -7\frac{1}{3}\right)$.

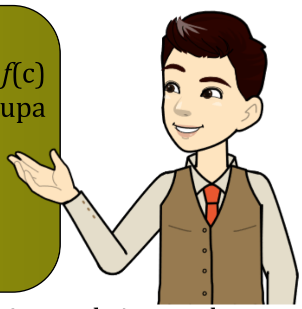
Nilai Maksimum dan Minimum suatu Fungsi pada Interval Tertutup [a, b]

Biasanya fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan akan mempunyai interval $I = [a, b]$ sebagai daerah asalnya. Nilai-nilai ekstrem sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup sering kali terjadi pada titik-titik ujung interval.

Sifat 2

Misalkan f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c. Jika f(c) adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu:

- titik ujung dari I
- titik stasioner dari f (f'(c) = 0)
- titik singular dari f (f'(c) tidak ada)



Tahapan menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ adalah sebagai berikut.

1) Selesaikan $f'(x)$
2) Cari semua titik kritis $f(x)$ pada interval tertutup $[a, b]$, yaitu
   a) Titik ujung interval, $x = a$ dan $x = b$
   b) Titik stasioner $c \in [a, b]$, dengan $f'(c)=0$
   c) Titik singular $d \in [a, b]$, dengan $f'(d)$ tidak ada
3) Hitung nilai fungsi $f(x)$ pada semua titik kritis yang diperoleh pada langkah 2). Nilai terbesar dan terkecil yang dihasilkan merupakan nilai maksimum dan minimum fungsi f.

Contoh 3

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ dalam interval $-2 \leq x \leq 1$.

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$, maka
  $f'(x) = 12x^2 - 6x - 6$
  $= 6(2x^2 - x - 1)$
  $= 6(x + 1)(2x - 1)$
- Cari semua titik kritis $f(x)$ pada interval tertutup $[-2, 1]$, yaitu
  1. Titik ujung interval, $x = -2$ dan $x = 1$
  2. Titik stasioner
     $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x + 1)(2x - 1) = 0$
     $\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = \frac{1}{2}$
  3. Tidak ada titik singular
- Hitung f pada setiap titik kritis

Titik kritis	$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$
$x = -2$	$f(-2) = 4(-2)^3 + 3(-2)^2 - 6(-2) + 1 = -7$
$x = -1$	$f(-1) = 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 6(-1) + 1 = 6$
$x = \frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2})^3 + 3(\frac{1}{2})^2 - 6(\frac{1}{2}) + 1 = -\frac{3}{4}$
$x = 1$	$f(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 6(1) + 1 = 2$

- Kesimpulan
  - $f(-2) = -7$ merupakan nilai minimum
  - $f(-1) = 6$ merupakan nilai maksimum.

Maksimum dan Minimum pada Masalah Kontekstual

Dalam hidup ini, kita sering menghadapai masalah guna mendapatkan jalan terbaik untuk melalkukan sesuatu. Sebagai contoh, seorang petani ingin memilih kombinasi hasil panen yang dapat menghasilkan keuntungan terbesar. Seorang dokter akan menentukan dosis obat yang terkecil untuk menyembuhkan suatu penyakit. Seorang kepala pabrik akan menekan sekecil mungkin biaya pendistribusian produknya. Kadangkala salah satu dari masalah di atas dapat dirumuskan sehingga akan melibatkan memaksimumkan dan meminimumkan fungsi tertentu.

Dalam menyelesaikan maksimum dan minimum pada masalah kontekstual, harus memperhatikan tahapan berikut.

- ❖ Tetapkan besaran yang ada dalam masalah sebagai variabel untuk memperoleh hubungan atau ekspresi matematikanya
- ❖ Tetapkan rumus fungsi satu variabel yang merupakan model matematika dari masalah
- ❖ Tentukan penyelesaian optimum dari model matematika
- ❖ Berikanlah tafsiran terhadap hasil yang diperoleh

Berikut diberikan beberapa contoh maksimum dan minimum pada masalah kontekstual.

Contoh 4

Akan dibuat sebuah persegi panjang dengan keliling 48 cm. Berapakah ukuran persegi panjang tersebut agar luasnya maksimum ?

Penyelesaian :

$K = 2(p + l) = 48 \quad \Rightarrow \quad p + l = 24$

$\Rightarrow \quad l = 24 - p$ .... (*)

Luas persegi panjang :

$L = p \,.\, l$

$= p \,.\, (24 - p)$

$= 24p - p^2$

$$\frac{dL}{dp} = 24 - 2p$$

Syarat ekstrim untuk L adalah $\frac{dL}{dp} = 0$, sehingga :

$24 - 2p = 0$

$2p = 24$

$p = 12$

Substitusikan $p = 12$ ke (*), sehingga diperoleh : $l = 24 - 12 = 12$.

Jadi, ukuran persegi panjang tersebut agar luasnya maksimum adalah $p = 12$ cm, $l = 12$ cm, dan luas persegi panjang = 12 . 12 = 144 cm^2.

Contoh 5

Jumlah dua buah bilangan adalah 10. Tentukan kedua bilangan tersebut sehingga jumlah kuadratnya paling minimum.

Penyelesaian :

Misalkan bilangan pertama = x dan bilangan kedua = y

Jumlah kedua bilangan 10, sehingga $x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x$ .... (*)

Misalkan jumlah kuadrat kedua bilangan = B, maka :

$B = x^2 + y^2$ .... (**)

Substitusikan persamaan (*) ke (**), sehingga diperoleh :
$B = x^2 + (10 - x)^2$
$B = x^2 + (100 - 20x + x^2) = 2x^2 - 20x + 100$
$\frac{dB}{dx} = 4x - 20$

syarat ekstrim untuk B adalah $\frac{dB}{dx} = 0$,

sehingga : $4x - 20 = 0$
$\rightarrow 4x = 20$
$\rightarrow x = 5$
substitusikan $x = 5$ ke (*) sehingga diperoleh : $y = 10 - 5 = 5$
Jadi, kedua bilangan tersebut agar jumlah kuadratnya minimum adalah
5 dan 5.

Contoh 6

Sebuah peluru ditembakkan ke atas. Tinggi h meter setelah t detik dirumuskan dengan $h(t) = 120t - 5t^2$, tentukanlah tinggi maksimum yang dicapai peluru tersebut.

Penyelesaian :

Tinggi peluru : $h(t) = 120t - 5t^2$ .... (*)
$h'(t) = 120 - 10t$
peluru mencapai tinggi maksimum jika $h'(t) = 0$, sehingga :

$$120 - 10t = 0 \Leftrightarrow 120 = 10t \Leftrightarrow t = \frac{120}{10} = 10 \text{ detik}$$

Substitusikan $t = 10$ detik ke (*), sehingga diperoleh tinggi maksimum peluru :
$h(10) = 120(10) - 5(10)^2 = 1200 - 500 = 700$ meter.

Contoh 7

Sebuah kotak tanpa tutup akan dibuat dari bahan seng dengan kapasitas 36 dm^3. Jika ukuran panjang kotak dua kali lebarnya, tentukanlah ukuran kotak agar bahan yang dibutuhkan seminimum mungkin.

Penyelesaian :

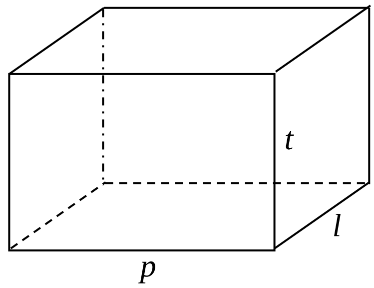
Misalkan panjang = p, lebar = l, dan tinggi = t.
Panjang kotak dua kali lebarnya, berarti $p = 2l$ .... (*)
Volume kotak = 36 dm^3

$$p\,.\,l\,.\,t = 36 \rightarrow (2l).\,l\,.\,t = 36 \rightarrow t = \frac{36}{2l^2} \rightarrow t = \frac{18}{l^2} \text{ .... (**)}$$

Bahan kotak akan diminimumkan, berarti yang diminimumkan adalah luas permukaan kotak tanpa tutup, disimbol dengan A.
A = luas alas + 2 luas sisi samping + 2 luas sisi depan/belakang
$A = p.l + 2\,l.t + 2\,p.\,t$ .... (***)
Substitusikan (*) dan (**) ke persamaan (***), sehingga
diperoleh :

$$A = (2l).l + 2l.\left(\frac{18}{l^2}\right) + 2(2l).\left(\frac{18}{l^2}\right)$$

$$= 2l^2 + \frac{36}{l} + \frac{72}{l}$$



$= 2l^2 + \frac{108}{l}$

$\frac{dA}{dl} = 4l - 108l^{-2} = 4l - \frac{108}{l^2}$

Luas permukaan kotak minimum jika $\frac{dA}{dl} = 0$, sehingga
:

$4l - \frac{108}{l^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4l = \frac{108}{l^2}$

$\Leftrightarrow \quad 4l^3 = 108$

$\Leftrightarrow \quad l^3 = \frac{108}{4} = 27$

$\Leftrightarrow \quad l = \sqrt[3]{27} = 3$ dm.

substitusikan $l = 3$ dm ke (*) dan (**), diperoleh : $p = 2(3) = 6$m dan

$t = \frac{18}{3^2} = \frac{18}{9} = 2$ dm.

Jadi, ukuran kotak agar bahan yang digunakan minimum adalah $p = 6$ dm, $l = 3$ dm, dan $t = 2$ dm.

C. Rangkuman

- Misalkan f fungsi yang yang mempunyai turunan. Jika $f'(a) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di titik $x = a$, dengan
  - Nilai $f(a)$ disebut nilai stasioner $f(x)$ di $x = a$.
  - Titik $(a, f(a))$ disebut titik stasioner
- Misalkan f fungsi yang yang mempunyai turunan dan $f'(a) = 0$
  - Jika nilai f' bertanda positif di $x < a$ dan bertanda negatif di $x > a$, maka $(a, f(a))$ disebut titik maksimum lokal.
  - Jika nilai f' bertanda negatif di $x < c$ dan bertanda positif di $x > c$, maka $(c, f(c))$ disebut titik minimum lokal.
  - Jika disekitar titik $x = b$ tidak ada perubahan tanda nilai f', maka $(b, f(b))$ disebut titik belok horisontal.
- Misalkan f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c. Jika f(c) adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu:
  - titik ujung dari I
  - titik stasioner dari f (f′ (c) = 0)
  - titik singular dari f (f′ (c) tidak ada)
- Dalam menyelesaikan maksimum dan minimum pada masalah kontekstual, harus memperhatikan tahapan berikut.
  - Tetapkan besaran yang ada dalam masalah sebagai variabel untuk memperoleh hubungan atau ekspresi matematikanya
  - Tetapkan rumus fungsi satu variabel yang merupakan model matematika dari masalah
  - Tentukan penyelesaian optimum dari model matematika
  - Berikanlah tafsiran terhadap hasil yang diperoleh

D. Latihan Soal

Pilih satu jawaban yang paling tepat.

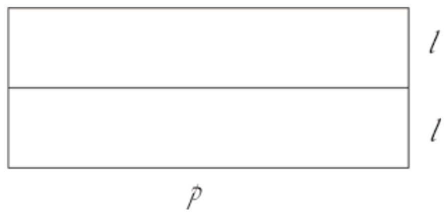
1. Nilai stasioner dari fungsi $y = x^3 - x^2 - 8x$ diperoleh pada ....
   A. $x = 4$ dan $x = -\frac{2}{3}$
   B. $x = \frac{4}{3}$ dan $x = 2$
   C. $x = \frac{4}{3}$ dan $x = -2$
   D. $x = \frac{2}{3}$ dan $x = -4$
   E. $x = 2$ dan $x = -\frac{4}{3}$
2. Untuk $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 7$ mempunyai nilai stasionernya sama dengan ....
   A. 2 dan 4
   B. 35
   B. 1
   C. 21 dan 87
   D. 21 dan –77
3. Titik stasioner untuk fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$ adalah ....
   A. (0, 6)
   B. (2, 12)
   C. (2, 14)
   D. (12, 2)
   E. (14, 2)
4. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar persamaan $x^2 - (a - 1)x + a = 0$. Nilai stasioner dari $x_1{}^3 + 3x_1.x_2 + x_2{}^3$ dicapai untuk a = ...
   A. 1 dan 2
   B. 1 dan 3
   C. 2 dan 3
   D. 1
   E. 0 dan – 1
5. Fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ mencapai ….
   A. minimum di (–1, 7)
   B. minimum di (0, 2)
   C. maksimum di (0, 2)
   D. maksimum di (–1, 7)
   E. maksimum di (3, –25)
6. Jika kurva $y = 2x^5 - 5x^4 + 20$ mencapai nilai minimum di titik (x_o, y_o), maka x_o = ….
   A. –1
   B. 0
   C. 1
   D. 2
   E. 3
7. Nilai minimum fungsi $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5$ dalam interval $-3 \leq x \leq 4$ adalah ….
   A. –160
   B. –155
   C. –131
   D. –99
   E. –11
8. Sebuah titik materi dengan persamaan $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$ (t = waktu dan s = kedudukan). Titik materi ini mempunyai kecepatan tertinggi pada saat t = ...
   A. 1

B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

9. Selisih dua bilangan adalah $4p$. Nilai terkecil dari hasil perkalian kedua bilangan itu adalah .....
A. $6p^2$
B. $4p^2$
C. $-2p^2$
D. $-4p^2$
E. $-5p^2$

10. Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx - 5$ mempunyai koordinat titik balik minimum di (2, −9). Nilai a + b = ….
A. −1
B. −2
C. −3
D. −4
E. −5

11. Kawat sepanjang 120 m akan dibuat kerangka seperti pada gambar dibawah ini. Agar luasnya maksimum panjang kerangka (p) tersebut adalah ....
A. 16 m
B. 18 m
C. 20 m
D. 22 m
E. 24 m



12. Suatu perusahaan menghasilkan produk yang dapat diselesaikan dalam x jam dengan biaya per jam $4x - 800 + \frac{120}{x}$ dalam ratus ribu rupiah. Agar biaya minimum, produk tersebut dapat diselesaikan dalam waktu ....
A. 40 jam
B. 100 jam
C. 110 jam
D. 120 jam
E. 150 jam

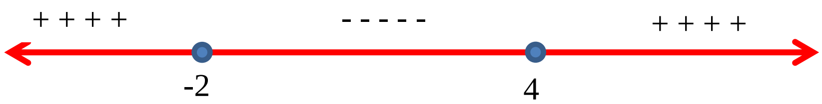
13. Luas permukaan balok dengan alas persegi adalah 150 cm^2. Agar diperoleh volume balok yang maksimum, panjang alas balok adalah ....
A. 3 cm
B. 5 cm
C. 6 cm
D. 15 cm
E. 25 cm

14. Suatu perusahaan menghasilkan x produk dengan biaya $(9.000 + 1.000x + 10x^2)$ rupiah. Jika semua hasil produk perusahaan tersebut habis dijual dengan harga Rp5.000,00 untuk satu produknya, maka laba maksimum yang dapat diperoleh perusahan tersebut adalah ....
A. Rp149.000,00
B. Rp249.000,00
C. Rp391.000,00
D. Rp609.000,00
E. Rp757.000,00

15. Dua bilangan m dan n memenuhi hubungan $2m - n = 40$. Nilai minimum dari $p = m^2 + n^2$ adalah ....
    A. 320
    B. 295
    C. 280
    D. 260
    E. 200

Pembahasan Soal Latihan Kegiatan Pembelajaran 2

1. Nilai stasioner dari fungsi $y = x^3 - x^2 - 8x$ diperoleh pada ....
   Jawaban: E
   Penyelesaian:
   Syarat fungsi stasioner adalah $f'(x) = 0$, sehingga kita turunkan fungsi y pada soal diatas:
   $y = x^3 - x^2 - 8x$
   $y' = 0$
   $\Leftrightarrow\ 3x^2 - 2x - 8 = 0$ (faktorkan)
   $\Leftrightarrow\ (3x + 4)(x - 2) = 0$
   $\Leftrightarrow\ 3x + 4 = 0$ atau $x - 2 = 0$
   $\Leftrightarrow\ x = -\frac{4}{3}$ dan $x = 2$
2. Untuk $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 7$ mempunyai nilai stasionernya sama dengan .....
   Jawaban: D
   Penyelesaian:
   $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 7$
   Nilai dan titik stasioner didapat jika $y' = 0$
   $y' = 0$
   $\Leftrightarrow\ 3x^2 - 6x - 24 = 0$
   $\Leftrightarrow\ x^2 - 2x - 8 = 0$
   $\Leftrightarrow\ (x - 4)(x + 2) = 0$
   $\Leftrightarrow\ x - 4 = 0$ atau $x + 2 = 0$
   $\Leftrightarrow\ x = 4$ atau $x = -2$



   Fungsi maksimum pada $x = -2$, maka nilai balik maksimumnya:
   $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 24(-2) - 7$
   $= -8 - 12 + 48 - 7$
   $= 21$
   Fungsi minimum pada $x = 4$, maka nilai balik minimumnya:
   $f(4) = (4)^3 - 3(4)^2 - 24(4) - 7$
   $= 64 - 48 - 96 - 7$
   $= -87$
   Jadi, nilai stasionernya adalah 21 dan -87.

3. Titik stasioner untuk fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$ adalah ....
   Jawaban: C
   Penyelesaian:
   $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$
   $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$
   syarat stasioner $f'(x) = 0$
   $\Leftrightarrow\ 3x^2 - 12x + 12 = 0$
   $\Leftrightarrow\ x^2 - 4x + 4 = 0$
   $\Leftrightarrow\ (x - 2)(x - 2) = 0$
   $\Leftrightarrow\ x = 2$
   $x = 2 \Rightarrow y = (2)^3 - 6(2)^2 + 12(2) + 6 = 14$
   Jadi, titik stasionernya adalah (2, 14).
4. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar persamaan $x^2 - (a - 1)x + a = 0$. Nilai stasioner dari $x_1^3 + 3x_1.x_2 + x_2^3$ dicapai untuk a = ...
   Jawaban: B

Penyelesaian:

$x^2 - (a - 1)x + a = 0$

$A = 1, B = -(a - 1), C = a$

Jika akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah x_1 dan x_2 maka

$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} = (a - 1)$

$x_1.x_2 = \frac{C}{A} = a$

$x_1^3 + 3x_1.x_2 + x_2^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1.x_2$

$= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1.x_2(x_1 + x_2) + 3x_1.x_2$

$= (a - 1)^3 - 3a(a - 1) + 3a$

$= (a - 1)^3 - 3a^2 + 6a$

Stasioner jika turunan pertama = 0

Andai $p(a) = (a - 1)^3 - 3a^2 + 6a$

maka $p' = 3(a - 1)^2 - 6a + 6 = 0$

$(a - 1)^2 - 2a + 2 = 0$ Kedua ruas dibagi 3

$a^2 - 2a + 1 - 2a + 2 = 0$

$a^2 - 4a + 3 = 0$

$(a - 1)(a - 3) = 0$

$a - 1 = 0$ atau $a - 3 = 0$

$a = 1$ atau $a = 3$

5. Fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ mencapai ….

Jawaban: D

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$, maka

  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$
- Syarat stasioner

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

  $\Leftrightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0$

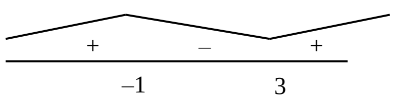
  $\Leftrightarrow 3(x + 1)(x - 3) = 0$

  $\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = 3$
- Menentukan nilai stasioner

  $x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 2 = 7$

  $x = 3 \Rightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 2 = -25$
- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

  $f'(-2) = 15$, $f'(0) = -9$, dan $f'(4) = 15$



- Kesimpulan
  - $f(-1) = 7$ merupakan nilai balik maksimum, karena f' berubah tanda dari + (positif) ke – (negatif)
  - $f(3) = -25$ merupakan nilai balik minimum, karena f' berubah tanda dari – (negatif) ke + (positif).

6. Jika kurva $y = 2x^5 - 5x^4 + 20$ mencapai nilai minimum di titik (x_o, y_o), maka x_o = ….

Jawaban: D

Penyelesaian:

$y = 2x^5 - 5x^4 + 20$, maka

$y' = 10x^4 - 20x^3$

Syarat stasioner $y' = 0$, maka

$10x^4 - 20x^3 = 0$
$\Leftrightarrow 10x^3(x - 2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 2$
$x = 0 \Rightarrow y = 2(0)^5 - 5(0)^4 + 20 = 20$
$x = 2 \Rightarrow y = 2(2)^5 - 5(2)^4 + 20 = 4$
Jadi, kurva mencapai nilai minimum di $x_o = 2$.

7. Nilai minimum fungsi $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5$ dalam interval $-3 \le x \le 4$ adalah ....
Jawaban: B
Penyelesaian:
❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5$, maka
$f'(x) = 6x^2 - 12x - 48$
$= 6(x^2 - 2x - 8)$
$= 6(x + 2)(x - 4)$
❖ Cari semua titik kritis $f(x)$ pada interval tertutup $[-3, 4]$, yaitu
1. Titik ujung interval, $x = -3$ dan $x = 4$
2. Titik stasioner
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x + 2)(x - 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ atau $x = 4$
3. Tidak ada titik singular
❖ Hitung f pada setiap titik kritis

Titik kritis	$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5$
$x = -3$	$f(-3) = 2(-3)^3 - 6(-3)^2 - 48(-3) + 5 = 41$
$x = -2$	$f(-2) = 2(-2)^3 - 6(-2)^2 - 48(-2) + 5 = 61$
$x = 4$	$f(4) = 2(4)^3 - 6(4)^2 - 48(4) + 5 = -155$

❖ Kesimpulan
➢ $f(-2) = 61$ merupakan nilai maksimum
➢ $f(4) = -155$ merupakan nilai minimum

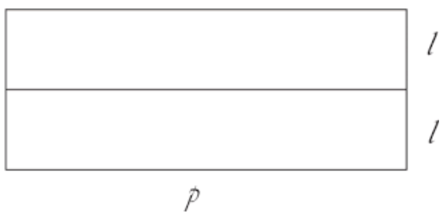
8. Sebuah titik materi dengan persamaan $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$ (t = waktu dan s = kedudukan). Titik materi ini mempunyai kecepatan tertinggi pada saat t = ...
Jawaban: A
Penyelesaian:
$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$
kecepatan $v(t) = s'(t)$
$v(t) = -3t^2 + 6t - 5$
$v(t)$ maksimum diperoleh saat $v'(t) = 0$
$v'(t) = -6t + 6 = 0$
$t = 1$
Jadi, $v(t)$ maksimum diperoleh saat $t = 1$.

9. Selisih dua bilangan adalah $4p$. Nilai terkecil dari hasil perkalian kedua bilangan itu adalah .....
Jawaban: D
Penyelesaian:
Misalkan dua bilangan itu adalah x dan y, maka:
$x - y = 4p$
$y = x - 4p$
Perkalian bilangan tersebut
$z = xy$
$= x(x - 4p)$
$= x^2 - 4xp$
Perkalian tersebut akan minimum jika turunan pertama dari $z = x^2 - 4xp$ sama dengan nol.
$z = x^2 - 4xp$

$z' = 2x - 4p = 0$
$2x = 4p$
$x = 2p$
Untuk $x = 2p$ maka $y = 2p - 4p = -2p$, sehingga hasil perkalian minimumnya adalah:
$z = xy = 2p(-2p) = -4p^2$

10. Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx - 5$ mempunyai koordinat titik balik minimum di (2, −9). Nilai a+b = ...
Jawaban: C
Penyelesaian:
Substitusi titik $(2, -9)=(x, y)$ ke fungsi $f(x)$
$f(x) = ax^2 + bx - 5$
$-9 = a(2)^2 + b(2) - 5$
$4a + 2b = -4$ (1)
$f'(x) = 2ax + b$
Karena f mencapai nilai balik minimum di $x = 2$, maka :
$f'(2) = 0$
$2a(2) + b = 0$
$4a + b = 0$ (2)
Eliminasi (1) dan (2) diperoleh
$4a + 2b = -4$
$4a + b = 0$ dikurangi
$b = -4$
Untuk $b = -4$ maka $4a + (-4) = 0$
$4a = 4$
$a = 1$
Jadi, $a + b = 1 + (-4) = -3$

11. Kawat sepanjang 120 m akan dibuat kerangka seperti pada gambar dibawah ini. Agar luasnya maksimum panjang kerangka (p) tersebut adalah ....
Jawaban: C
Penyelesaian:



Persamaan kerangka :
$3p + 4l = 120$
$4l = 120 - 3p$ (masing-masing dibagi 4)
$l = 30 - \frac{3}{4}p$
Persamaan luas :
$L = p \times 2l$
$= p \times 2\left(30 - \frac{3}{4}p\right)$
$= 60p - \frac{3}{2}p^2$
Luas akan maksimum jika :
$L' = 0$
$60 - 3p = 0$
$60 = 3p$
$3p = 60$
$p = 20$
Jadi, panjang kerangka agar luas maksimum adalah 20 m.

12. Suatu perusahaan menghasilkan produk yang dapat diselesaikan dalam x jam dengan biaya per jam $4x - 800 + \frac{120}{x}$ dalam ratus ribu rupiah. Agar biaya minimum, produk tersebut dapat diselesaikan dalam waktu ....

Jawaban: B
Penyelesaian:
Biaya per jam : $4x - 800 + \frac{120}{x}$
Biaya untuk x jam :
$B(x) = x(4x - 800 + \frac{120}{x})$

Dikali x

$= 4x^2 - 800x + 120$
Biaya akan minimum jika :
$B'(x) = 0$
$8x - 800 = 0$
$x = 100$
Jadi, waktu yang diperlukan agar biaya minimum adalah 100 jam.

13. Luas permukaan balok dengan alas persegi adalah 150 cm^2. Agar diperoleh volume balok yang maksimum, panjang alas balok adalah ....
Jawaban: B
Penyelesaian:
Misal p = panjang balok, l = lebar balok, dan t = tinggi balok, L = luas permukaan balok, dan V = volume balok
Karena alas berbentuk persegi, maka $p = l$
$L = 150$
$2(pl + pt + lt) = 150$
$pl + pt + lt = 75$
$p^2 + pt + pt = 75$ (karena $p = l$)
$2pt = 75 - p^2$
$t = \frac{75-p^2}{2p}$
$$
\begin{aligned}
V &= plt \\
&= p^2 t \quad \text{(karena } p = l\text{)} \\
&= p^2\left(\frac{75 - p^2}{2p}\right) \\
&= \frac{75p^2 - p^4}{2p} \\
&= \frac{75}{2}p - \frac{1}{2}p^3
\end{aligned}
$$
Volume akan maksimum jika $V' = 0$, diperoleh
$\frac{75}{2} - \frac{3}{2}p^2 = 0$
$75 - 3p^2 = 0$
$3p^2 = 75$
$p^2 = 25$
$p = 5$
Jadi, volume akan maksimum jika panjang alas balok 5 cm.

14. Suatu perusahaan menghasilkan x produk dengan biaya $(9.000 + 1.000x + 10x^2)$ rupiah. Jika semua hasil produk perusahaan tersebut habis dijual dengan harga Rp5.000,00 untuk satu produknya, maka laba maksimum yang dapat diperoleh perusahaan tersebut adalah ....
Jawaban: C
Penyelesaian:
Biaya produksi x produk adalah $9.000 + 1.000x + 10x^2$
Biaya penjualan 1 produk adalah 5.000
Jadi, biaya penjualan x produk adalah $5.000x$
Laba = Biaya penjualan – Biaya produksi
$L(x) = 5.000x - (9.000 + 1.000x + 10x^2)$

$= 5.000x - 9.000 - 1.000x - 10x^2$
$= -10x^2 + 4.000x - 9.000$
Laba akan maksimum, jika :
$L'(x) = 0$
$-20x + 4.000 = 0$
$x = 200$
Jadi, laba akan maksimum jika perusahaan menghasilkan 200 produk, dengan laba maksimumnya adalah :
$L(200) = -10(200)^2 + 4.000(200) - 9.000$
$= -400.000 + 800.000 - 9.000$
$= 391.000$

15. Dua bilangan m dan n memenuhi hubungan $2m - n = 40$. Nilai minimum dari $p = m^2 + n^2$ adalah ....
Jawaban: A
Penyelesaian:
Diketahui $2m - n = 40$
$n = 2m - 40$
$p = m^2 + n^2$
$= m^2 + (2m - 40)^2$
$= m^2 + 4m^2 - 160m + 1600$
$= 5m^2 - 160m + 1600$
p akan minimum jika :
$p' = 0$
$10m - 160 = 0$
$m = 16$
$n = 2m - 40$
$= 2(16) - 40$
$= -8$
Jadi, nilai minimum p adalah
$p = m^2 + n^2$
$= 16^2 + (-8)^2$
$= 320$

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai dan titik stasioner fungsi aljabar ?		
2.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi aljabar dengan uji turunan pertama?		
3.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi aljabar pada interval tertutup?		
4.	Apakah Ananda mampu membuat model dari permasalahan kontekstual atau dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan maksimum dan minimum?		
5.	Apakah Ananda mampu menyelesaikan permasalahan kontekstual atau dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan maksimum dan minimum?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
Menggambar Grafik Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini, diharapkan Ananda dapat menggambar grafik fungsi Aljabar.

B. Uraian Materi

Dengan materi prasyarat yang mencukupi yaitu menentukan turunan pertama dari suatu fungsi yang diberikan, fungsi naik, fungsi turun dan stasioner, Ananda dapat memulai modul tersebut.

Langkah-langkah menggambar grafik fungsi aljabar:

- ❖ Tentukan koordinat titik-titik potong kurva dengan sumbu koordinat.
  - a. Titik potong dengan sumbu–x, syarat $y = 0$
  - b. Titik potong dengan sumbu–y, syarat $x = 0$
- ❖ Tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya.
- ❖ Tentukan selang tempat fungsi naik atau turun.
- ❖ Tentukan beberapa titik lainnya untuk mempermudah dalam menggambar grafik (jika diperlukan).

Contoh

Gambarlah sketsa grafik fungsi $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x$.

Penyelesaian :

1. Titik-titik potong terhadap :

a. sumbu x, syarat $y = 0$, maka : $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$x\left(\frac{1}{3}x^2 - x - 8\right) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } \frac{1}{3}x^2 - x - 8 = 0 \text{ (dikali 3)}$$

$$x = 0 \text{ atau } x^2 - 3x - 24 = 0$$

Pake rumus kuadrat

Diketahui : $a = 1$, $b = -3$, $c = -24$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-24)}}{2\ (1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 96}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 10{,}25}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 10{,}25}{2} = \frac{13{,}25}{2} = 6{,}625$$

$$x_2 = \frac{3 - \ 10{,}25}{2} = \frac{-7{,}05}{2} = -3{,}525$$

$x = 0$ atau $x = 6{,}62$ atau $x = -3{,}62$

Jadi diperoleh titik potong (0, 0), (6,62; 0), dan (–3,62; 0)

b. sumbu y, syarat $x = 0$, maka : $y = \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 - 8(0) = 0$ diperoleh titik (0, 0)

2. Titik-titik stasioner ($f'(x) = 0$)

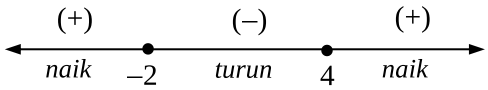
   $f'(x) = x^2 - 2x - 8 = 0 \iff (x + 2)(x - 4) = 0$

   sehingga absis titik stasioner $x = -2$ dan $x = 4$

   untuk $x = -2$, maka $y = f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)^2 - 8(-2) = -\frac{8}{3} - 4 + 16 = 9\frac{1}{3}$

   untuk $x = 4$, maka $y = f(4) = \frac{1}{3}(4)^3 - (4)^2 - 8(4) = \frac{64}{3} - 16 - 32 = -26\frac{2}{3}$

   Jenis stasioner :



   Untuk $x = -2$, terdapat titik balik maksimum, yaitu $\left(-2, 9\frac{1}{3}\right)$, dan

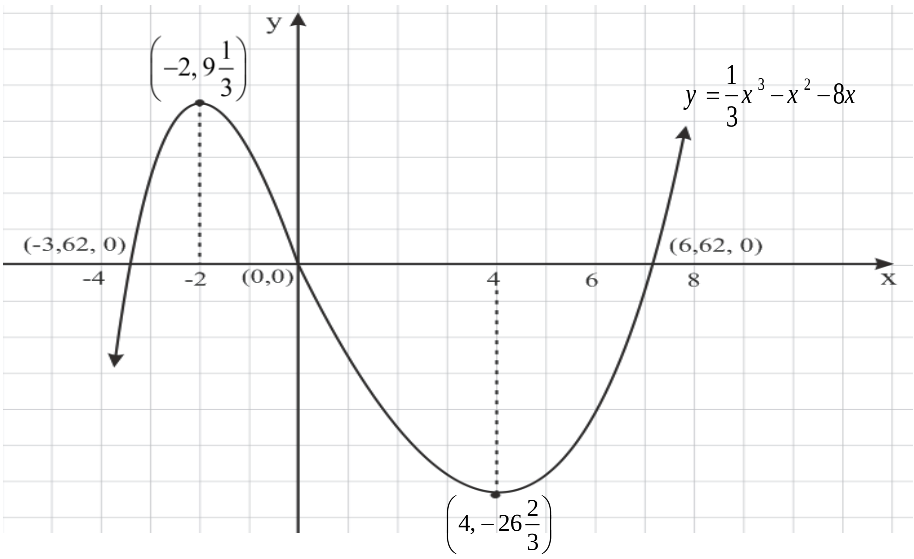
   Untuk $x = 4$, terdapat titik balik minimum, yaitu $\left(4, -26\frac{2}{3}\right)$

3. $f(x)$ naik pada interval $x < -2$ atau $x > 4$

   $f(x)$ turun pada interval $-2 < x < 4$

4. Jika diperlukan, tentukan dua titik lagi. Misalnya, $x = 7$ (di sebelah kanan titik potong) dan $x = -4$ (di sebelah kiri titik potong).

5. Gambarkan semua titik yang diperoleh dari hasil perhitungan di atas pada bidang cartesius, kemudian hubungkan semua titik-titik tersebut sehingga diperoleh kurva berikut.



C. Rangkuman

Langkah-langkah menggambar grafik fungsi suku banyak :

- Tentukan koordinat titik-titik potong kurva dengan sumbu koordinat.
  - Titik potong dengan sumbu – x, syarat $y = 0$
  - Titik potong dengan sumbu – y, syarat $x = 0$
- Tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya.
- Tentukan selang tempat *fungsi* naik atau turun.
- Tentukan beberapa titik lainnya untuk mempermudah dalam menggambar grafik (jika diperlukan).

D. Latihan Soal

Sebagai latihan Ananda, coba gambarlah sketsa grafik : (Gunakan langkah-langkah sesuai contoh soal yaa)

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$
2. $y = 8 + 2x^2 - x^4$

Penyelesaian:

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ **(skor 50)**

- Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat.
  - Titik potong dengan sumbu $Y \Rightarrow x = 0$

    $y = 2(0)^3 + 3(0)^2 - 12(0) + 7 = 7 \Rightarrow (0, 7)$
  - Titik potong dengan sumbu $X \Rightarrow y = 0$

    $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 = 0$

    $\Leftrightarrow (2x + 7)(x - 1)^2 = 0$

    $\Leftrightarrow x = -\dfrac{7}{2}$ atau $x = 1$

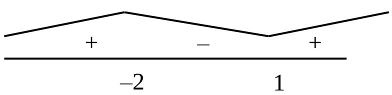
    $\Rightarrow (-\dfrac{7}{2}, 0)$ dan $(1, 0)$

- Tentukan interval-interval ketika fungsi itu naik dan turun.

  $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0$

  $\Leftrightarrow 6(x + 2)(x - 1) = 0$

  $\Leftrightarrow x = -2$ atau $x = 1$

  Jadi, fungsi naik pada interval $x < -2$ atau $x > 1$

  dan turun pada interval $-2 < x < 1$.

- Tentukan titik-titik kritis.

  $x = -2 \Rightarrow y = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 7 = 27$

  $x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 7 = 0$

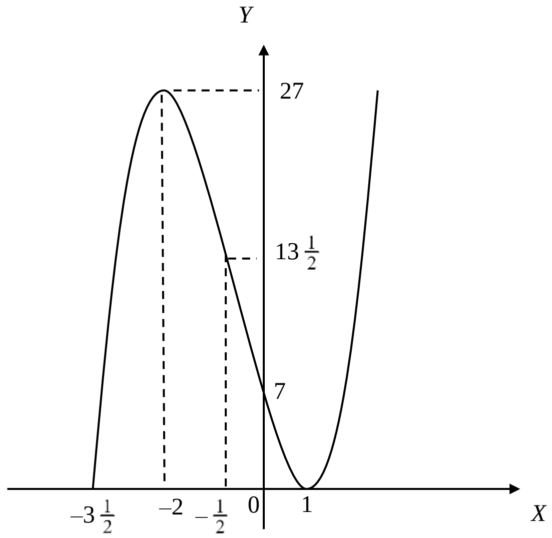
  Jadi, titik balik minimum $(1, 0)$ dan titik balik maksimum $(-2, 27)$

- Tentukan beberapa titik bantu lainya

  $x = -1 \Rightarrow y = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 12(-1) + 7 = 20 \Rightarrow (-1, 20)$

  $x = 2 \Rightarrow y = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 12(2) + 7 = 11 \Rightarrow (2, 11)$

❖ Sketsa grafik.



2. $y = 8 + 2x^2 - x^4$ **(skor 50)**

❖ Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat.

➢ Titik potong dengan sumbu $Y \Rightarrow x = 0$

$y = 8 + 2(0)^2 - (0)^4 = 8 \Rightarrow (0, 8)$

➢ Titik potong dengan sumbu $X \Rightarrow y = 0$

$8 + 2x^2 - x^4 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$ atau $x^2 = -2$ (tidak memenuhi)

$x = -2$ atau $x = 2$

$\Rightarrow (-2, 0)$ dan $(2, 0)$

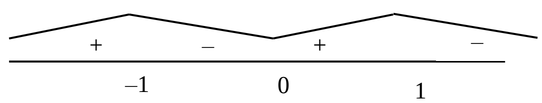
❖ Tentukan interval-interval ketika fungsi itu naik dan turun.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x - 4x^3 = 0$

$\Leftrightarrow 4x(1 - x^2) = 0$

$\Leftrightarrow 4x(1 - x)(1 + x) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = 0$ atau $x = 1$



Jadi, fungsi naik pada interval $x < -1$ atau $0 < x < 1$

dan turun pada interval $-1 < x < 0$ atau $x > 1$.

❖ Tentukan titik-titik kritis.

$x = -1 \Rightarrow y = 8 + 2(-1)^2 - (-1)^4 = 9$

$x = 0 \Rightarrow y = 8 + 2(0)^2 - (0)^4 = 8$

$x = 1 \Rightarrow y = 8 + 2(1)^2 - (1)^4 = 9$

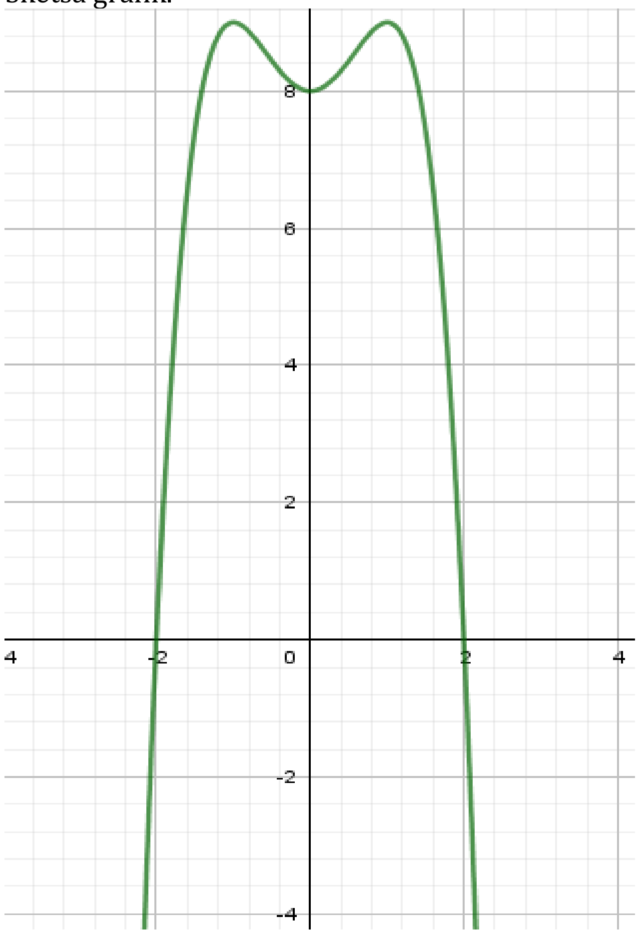
Jadi, titik balik miksimum $(-1, 9)$ dan $(1, 9)$ dan titik balik minimum $(0, 8)$

❖ Tentukan beberapa titik bantu lainya

$x = -3 \Rightarrow y = 8 + 2(-3)^2 - (-3)^4 = \Rightarrow (-3, -55)$

$x = 3 \Rightarrow y = 8 + 2(3)^2 - (3)^4 = \Rightarrow (3, -55)$

❖ Sketsa grafik.



E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu menggambar grafik fungsi Aljabar dengan menggunakan langkah-langkah yang telah ditulis?		
2.	Apakah Ananda mampu menggambar grafik fungsi Aljabar ke dalam grafik cartesius?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Gradien garis singgung kurva $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ di titik (1, 4) adalah ….
   A. –3
   B. –1
   C. 0
   D. 1
   E. 3
2. Persamaan garis singgung kurva $y = x\sqrt{2x}$ dititik pada kurva dengan absis 2 adalah ....
   A. $y = 3x - 2$
   B. $y = 3x + 2$
   C. $y = 3x - 1$
   D. $y = -3x + 2$
   E. $y = -3x + 1$
3. Garis singgung pada kurva $y = \dfrac{2x+1}{2-3x}$ di titik (1, –3) adalah ….
   A. $y + 7x - 10 = 0$
   B. $y - 7x + 10 = 0$
   C. $7y + x + 20 = 0$
   D. $7y - x - 20 = 0$
   E. $7y - x + 20 = 0$
4. Koorditan titik-titik singgung pada kurva $y = x^2\ (2x - 3)$ yang garis singgungnya sejajar dengan garis $2y - 24x = 1$ adalah ….
   A. (1, 5) dan (–2, –4)
   B. (–1, 5) dan (–2, –4)
   C. (–1, –5) dan (2, 4)
   D. (1, –5) dan (2, 4)
   E. (1, 5) dan (2, 4)
5. Kurva $y = 2x^2 - 3x + 3$ bersinggungan dengan garis $y = 5x - 5$. Persamaan garis normalnya adalah ….
   A. $5x - y = 0$
   B. $x - 5y - 1 = 0$
   C. $x + 5y - 1 = 0$
   D. $x - 5y + 23 = 0$
   E. $x + 5y - 27 = 0$
6. Fungsi $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ akan naik pada interval ....
   A. $x > 2$
   B. $x > 3$
   C. $x > 4$
   D. $x < 2$
   E. $x < 4$
7. Batas nilai p agar fungsi $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 2px + 5$ selalu turun untuk semua nilai x bilangan real adalah ….
   A. $p < -2$ atau $p > 0$
   B. $-2 \le p \le 0$
   C. $-2 < p < 0$
   D. $-2 \le p < 0$
   E. $-2 < p \le 0$

8. Grafik fungsi $f(x) = x\sqrt{x-2}$ naik untuk nilai x yang memenuhi ….
   A. $2 < x < 3$
   B. $3 < x < 4$
   C. $2 < x < 4$
   D. $x > 4$
   E. $x > 2$
9. Fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ turun pada interval ….
   A. $-2 < x < 2$
   B. $0 < x < 4$
   B. $2 < x < 6$
   C. $-4 < x < 0$
   D. $4 < x < 8$
10. Agar grafik fungsi $y = x^3 - 3x^2 - ax$ naik hanya pada interval $x < -2$ atau $x > 4$, maka nilai a harus sama dengan ….
    A. 48
    B. 24
    C. 12
    D. 8
    E. 4
11. Titik stasioner untuk fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 5$ adalah ....
    A. (3, 4)
    B. (3, –4)
    C. (–3, 4)
    D. (–3, –4)
    E. (0, 5)
12. Nilai stasioner untuk fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ adalah ....
    A. 15 dan 17
    B. 15 dan – 17
    C. 15 dan 17
    D. 15 dan - 17
    E. 15
13. Koordinat titik stasioner dari fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x - 5$ adalah ....
    A. (1, –1) dan (3, 5)
    B. (1, –1) dan (3, –5)
    C. (1, 1) dan (3, 5)
    D. (1, –1) dan (–3,5)
    E. (1, –1) dam (3, –5)
14. Fungsi $y = ax^3 + bx^2$ dengan a dan b konstan. Jika nilai stasioner di $x = 1$ adalah −1, maka nilai nilai $a - b$ adalah ....
    A. 2
    B. 3
    C. 4
    D. 5
    E. 6
15. Fungsi $f(x) = x^3 + px^2 + 9x - 18$ mempunyai nilai stasioner untuk $x = 3$. Nilai p = ….
    A. –6
    B. –4
    C. –3
    D. 4
    E. 6
16. Jika nilai maksimum fungsi $y = x + \sqrt{p - 2x}$ adalah 4, maka p = ….
    A. 3

B. 4
C. 5
D. 7
E. 8

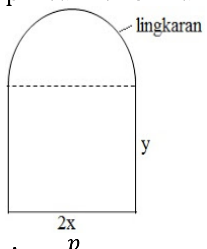
17. Diketahui fungsi f yang dirumuskan sebagai $f(x) = x^3 - 12x^2$. Nilai maksimum fungsi f dalam interval $-1 \leq x \leq 5$ adalah ….
A. –175
B. –128
C. –13
D. 0
E. 128

18. Sebidang tanah akan dibatasi oleh pagar dengan menggunakan kawat berduri seperti pada gambar. Batas tanah yang dibatasi pagar adalah yang tidak bertembok. Kawat yang tersedia 800 meter. Berapakah luas maksimum yang dapat dibatasi oleh pagar yang tersedia?
A. 80.000 m^2
B. 40.000 m^2
C. 20.000 m^2
D. 5.000 m^2
E. 2.000 m^2

19. Sebuah tabung tanpa tutup yang terbuat dari lempengan tipis dapat memuat air sebanyak 27π cm^2. Luas permukaan tabung akan minimum jika jari-jari tabung sama dengan ....
A. 9 cm
B. 8 cm
C. 6 cm
D. 4 cm
E. 3 cm

20. Sebuah akuarium tanpa tutup memiliki alas berbentuk persegi panjang dengan perbandingan panjang dan lebarnya 2 : 3. Jika luas permukaan akuarium adalah 1.800 cm^2, volume maksimum akuarium tersebut adalah ....
A. 3.600 cm^3
B. 5.400 cm^3
C. 6.300 cm^3
D. 7.200 cm^3
E. 8.100 cm^3

21. Sebuah pintu berbentuk seperti tergambar. Keliling pintu sama dengan p. Agar luas pintu maksimum, maka x sama dengan ....



A. $\frac{p}{4+\pi}$
B. $\frac{p}{4-\pi}$
C. p
D. $4 - x$
E. $4 - p$

22. Kebun Pak Jaya berbentuk persegi panjang dengan keliling 60 meter. Jika panjangnya x meter dan lebarnya y meter, maka luas maksimum kebun Pak Jaya adalah ….
A. 120

B. 150
C. 225
D. 250
E. 300

23. Selembar karton berbentuk persegi panjang dengan lebar 5 dm dan panjang 8 dm akan dibuat kotak tanpa tutup. Pada keempat pojok karton dipotong persegi yang sisinya x dm. Ukuran kotak tersebut (panjang, lebar, tinggi) agar volume maksimum berturut-turut adalah ....
A. 10 dm, 7 dm, 1 dm
B. 8 dm , 5 dm, 1 dm
C. 7 dm, 4 dm, 2 dm
D. 7 dm, 4 dm, 1 dm
E. 6 dm, 3 dm, 1 dm

24. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal V_o m/detik. Tinggi peluru setelah t detik dinyatakan dengan fungsi $h(t) = 100 + 40t - 4t^2$. Tinggi masksimum yang dapat dicapai peluru tersebut adalah ....
A. 160 m
B. 200 m
C. 340 m
D. 400 m
E. 800 m

25. Seorang petani menyemprotkan obat pembasmi hama pada tanamannya. Reaksi obat tersebut t jam setelah disemprotkan dinyatakan dengan rumus $f(t)=15t^2 - t^3$. Reaksi maksimum tercapai setelah ....
A. 3 jam
B. 5 jam
C. 10 jam
D. 15 jam
E. 30 jam

Kunci Jawaban Evaluasi

1. E
2. A
3. B
4. C
5. E
6. A
7. C
8. E
9. B
10. B
11. B
12. B
13. E
14. D
15. A
16. D
17. D
18. D
19. E
20. D
21. A
22. C
23. E
24. B
25. C

DAFTAR PUSTAKA

Manullang, Sudianto, dkk. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Purcell, E.J., dan Dale Varberg. 1990. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

Siswanto. 2005. *Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya*. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Sobirin. 2008. *Fokus Matematika Siap Ujian Nasional untuk SMA/MA*. Jakarta: Erlangga.

Stewart, James. 2001. *Kalkulus Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

Willa Adrian. 2008. *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya.

https://soalkimia.com/contoh-soal-aplikasi-turunan/

https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-aplikasi-turunan-diferensial/

https://smatika.blogspot.com/2016/10/pembahasan-soal-ujian-nasional-aplikasi.html

https://www.materimatematika.com/2017/10/fungsi-naik-dan-fungsi-turun.html

https://rumusbilangan.com/titik-stasioner/

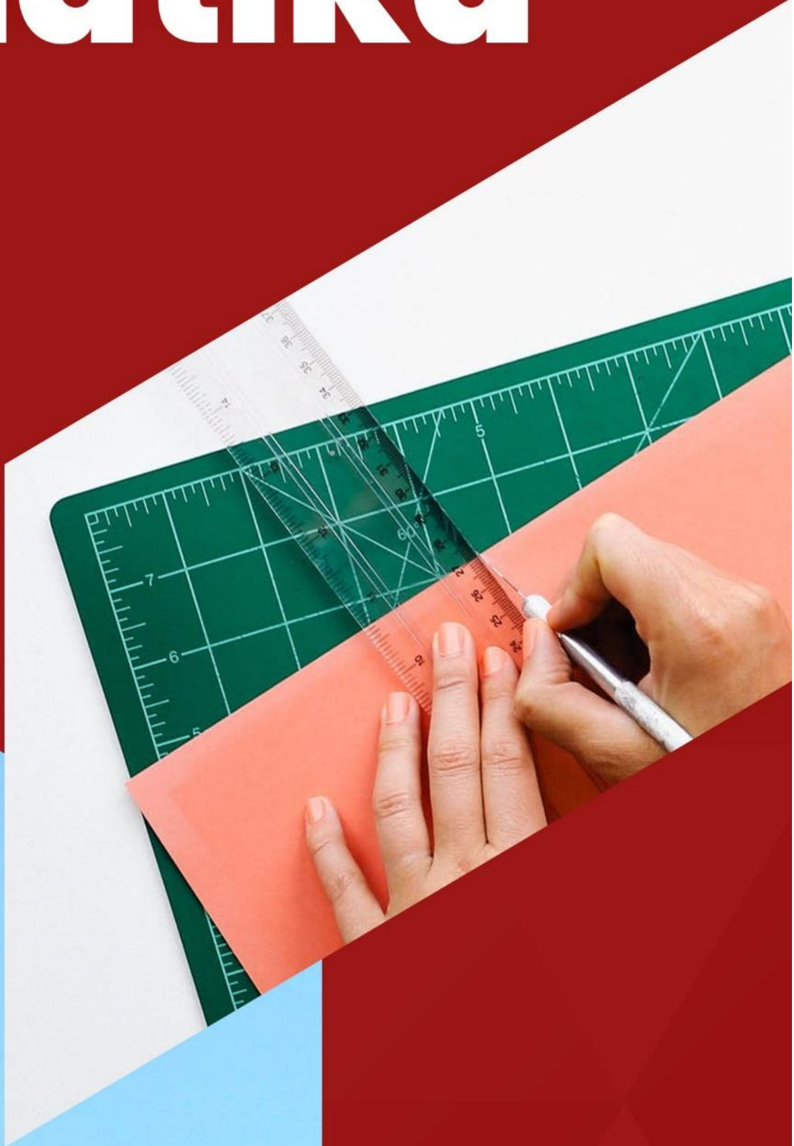
https://www.mademematika.net/2017/02/menentukan-nilai-stasioner-suatu-fungsi.html

http://ilmuku-duniaku14.blogspot.com/2018/07/soal-dan-pembahasan-menentukan-titik.html

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI, PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS XI

INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI ALJABAR

MATEMATIKA UMUM KELAS XI

PENYUSUN
Titin Suryati Sukmadewi, S.Si., M.Pd.

Unit Kerja:

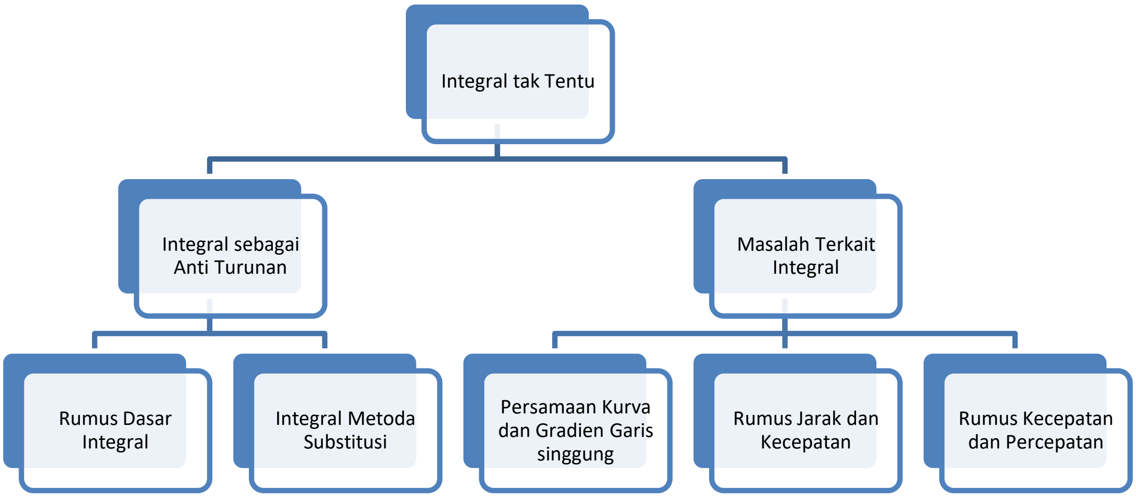
SMA Negeri 1 Sumedang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Integral	:	Operasi invers (balikan) dari turunan
Integral tak Tentu	:	Integral yang tidak disertai dengan batasan-batasan (batas atas atau batas bawah)
Integral Substitusi	:	Pengintegralan yang cara penyelesaiannya menggunakan pemisalan sebagai pengganti sementara sebagian atau seluruh fungsi yang akan diintegralkan
Gradien Garis Singgung Kurva	:	Nilai turunan pertama fungsi kurva di absis titik singgungnya
Fungsi Kecepatan	:	Turunan pertama fungsi jarak
Fungsi Percepatan	:	Turunan pertama fungsi kecepatan

PETA KONSEP


Integral tak Tentu
Integral sebagai Anti Turunan
Masalah Terkait Integral
Rumus Dasar Integral
Integral Metoda Substitusi
Persamaan Kurva dan Gradien Garis singgung
Rumus Jarak dan Kecepatan
Rumus Kecepatan dan Percepatan

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Peminatan
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	8 x 45 menit
Judul Modul	:	Integral Tak Tentu

B. Kompetensi Dasar

3.10 Mendeskripsikan integral tak tentu (anti turunan) fungsi aljabar dan menganalisis sifat-sifatnya berdasarkan sifat-sifat turunan fungsi.

4.10 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu (anti turunan) fungsi aljabar

C. Deskripsi Singkat Materi

- Hitung integral erat kaitannya dengan kalkulus diferensial atau turunan suatu fungsi. Integral ditemukan terlebih dahulu sebelum turunan, sebelum akhirnya diketahui bahwa ternyata integral dan turunan ternyata mempunyai hubungan. Walaupun integral ditemukan terlebih dahulu, hitung integral akan lebih mudah dipahami dengan mudah setelah kita mempelajari turunan.
- Modul ini membahas tentang menentukan integral sebuah fungsi aljabar sebagai anti turunan, rumus-rumus dasar dan teknik substitusi. Seperti halnya turunan mempelajari tentang gradien garis singgung suatu kurva, maka integral pun dapat digunakan kebalikannya yaitu dapat menentukan persamaan suatu kurva jika diketahui gradien garis singgung kurva tersebut. Begitu pula dengan kecepatan sebagai turunan dari persamaan jarak, dan percepatan sebagai turunan dari kecepatan. Integral dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan jarak, kecepatan, dan percepatan.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, mari berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Sebaiknya Ananda mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, Ananda mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.
4. Ananda dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika Ananda memperoleh nilai < 75 maka Ananda harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar

Kedua : Masalah yang Melibatkan Integral Tak Tentu

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI ALJABAR

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat menentukan integral tak tentu fungsi aljabar.

B. Uraian Materi

Sumber: *www.en.wikipedia.org*

Leibniz

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) adalah seorang ilmuwan, filsuf, matematikawan, diplomat, pustakawan, dan pengacara berkebangsaan Jerman keturunan Sorb.

Menurut catatannya, terobosan sangat penting terjadi pada 11 November 1675 ketika ia mendemonstrasikan kalkulus integral pertama kalinya untuk menghitung luas daerah di bawah fungsi y = x.

Ia memper kenalkan beberapa notasi dalam kalkulus yang tetap digunakan sampai sekarang

Integral Fungsi

Setiap hari tentu saja kita sering melakukan aktivitas yang saling berkebalikan, seperti naik dan turun, maju dan mundur, menghirup udara dan menghembuskan udara, dan lain sebagainya. Begitu pula dalam matematika kita mengenal operasi yang saling berkebalikan atau saling invers seperti pengurangan dengan penjumlahan, pembagian dengan perkalian, pemangkatan dengan penarikan akar dan sebagainya. Nahh kalian pernah mempelajari turunan dari sebuah fungsi, lalu operasi apakah yang merupakan kebalikan atau invers dari turunan?

Kalian tentu masih ingat bahwa turunan dari sebuah fungsi $f(x)$ kita tulis $f'(x)$. Nah seandainya diketahui sebuah fungsi $f(x)$ adalah turunan dari sebuah fungsi $F(x)$, bagaimana kita dapat menentukan fungsi $F(x)$?

1. Integral sebagai Anti Turunan

Jika $F'(x) = f(x)$ maka $F(x)$ adalah anti turunan/anti derivatif dari $f(x)$

Jika $y = F(x)$ maka $\dfrac{dy}{dx} = F'(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = f(x)$

$\Leftrightarrow dy = f(x)dx$

$\Leftrightarrow \int dy = \int f(x)dx$

$\Leftrightarrow y = \int f(x)dx$

Jika $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ maka $\int f(x)dx = F(x) + C$ untuk setiap bilangan real C

Proses mendapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari y (suatu fungsi x) disebut diferensial, sedangkan proses mendapatkan y dari $\frac{dy}{dx}$ disebut **Integral**

Lambang $\int$ adalah simbol integral, $f(x)$ yaitu fungsi di samping simbol integral disebut **integran**, dan $\int f(x)dx$ disebut **integral tak tentu** dan dibaca **integral dari $f(x)$ terhadap x.**

Jadi dari persamaan $\int f(x)dx = F(x) + C$, turunan dari ruas kanan adalah integran di ruas kiri.

Berikutnya, bagaimana cara kita menentukan integral tak tentu dari sebuah fungsi $f(x)$? Simak pada bagian berikutnya ya.

2. Rumus-rumus Integral Tak Tentu
   a. $\int dx = x + C$
   b. $\int a\, dx = ax + C$
   c. Integral Pangkat
      Untuk setiap bilangan real $n \neq -1$, berlaku bahwa:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Contoh 1:

$\int x^4\, dx =$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int x^4\, dx = \frac{1}{4+1} x^{4+1} + C$$
$$= \tfrac{1}{5} x^5 + C$$

Contoh 2:

$\int \frac{1}{x^3}\, dx =$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int \frac{1}{x^3}\, dx = \int x^{-3}\, dx$$
$$= \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C$$

$$= \frac{1}{-2} x^{-2} + C$$
$$= \frac{1}{-2x^2} + C$$

Contoh 3:

$$\int x\sqrt{x}\, dx =$$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int x\sqrt{x}\, dx = \int x^{3/2} dx$$
$$= \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C$$
$$= \frac{1}{5/2} x^{\frac{5}{2}} + C$$

d. Integral Perkalian Skalar
   Untuk setiap bilangan real k berlaku:

$$\int k\ f(x)dx = k \int f(x)dx$$

Contoh:

$$\int 4x^3\, dx =$$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int 4x^3\, dx = 4 \int x^3 dx$$
$$= 4\left(\frac{1}{3+1} x^{3+1}\right) + C$$
$$= 4\left(\frac{1}{4} x^4\right) + C$$
$$= x^4 + C$$

e. Integral Penjumlahan dan Pengurangan
   Dalam integral berlaku sifat linieritas yaitu:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

Contoh:

$$\int (2x-1)(x+3)\, dx =$$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int (2x-1)(x+3)\, dx = \int \left(2x^2 + 5x - 3\right) dx$$
$$= \int 2x^2\, dx + \int 5x\, dx - \int 3\, dx$$
$$= 2\int x^2\, dx + 5\int x\, dx - \int 3x^0\, dx$$
$$= \left(\frac{2}{2+1} x^{2+1} + C_1\right) + \left(\frac{5}{1+1} x^{1+1} + C_2\right) - \left(\frac{3}{0+1} x^{0+1} + C_3\right)$$
$$= \frac{2}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 - 3x + C_1 + C_2 + C_3$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + C$$

f. Integral Metoda Substitusi

Pengintegralan dengan metoda substitusi memiliki cara penyelesaian menggunakan pemisalan sebagai pengganti sementara sebagian atau seluruh fungsi yang akan diintegralkan

Bentuk umum:

$$\int f(u)\left(\frac{du}{dx}\right)du = \int f(u)du$$

Contoh 1:

$$\int (ax+b)^n dx =$$

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $u = ax + b$

$du = a\,dx$

$dx = \frac{1}{a}du$

$$\int (ax+b)^n dx = \int (u)^n \frac{1}{a}\,du$$

$$= \frac{1}{a}\int u^n du$$

$$= \frac{1}{a}\frac{1}{(n+1)}u^{n+1} + C$$

$$= \frac{1}{a(n+1)}u^{n+1} + C$$

$$= \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$$

Contoh 2:

$$\int (x+1)(x^2+2x+1)^4 dx =$$

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2 + 2x + 1$

$du = (2x+2)\,dx$

$du = 2(x+1)dx$

$dx = \frac{1}{2(x+1)}du$

$$\int (x+1)(x^2+2x+1)^4 dx = \int (x+1)u^4 \frac{1}{2(x+1)}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \cancel{(x+1)}u^4 \frac{1}{\cancel{(x+1)}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \cancel{(x+1)}u^4 \frac{1}{\cancel{(x+1)}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^4\,du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(4+1)}u^{4+1} + C$$

$$= \frac{1}{10}u^5 + C$$

$$= \frac{1}{10}(x^2+2x+1)^5 + C$$

C. Rangkuman

1. Jika $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ maka $\int f(x)dx = F(x) + C$ untuk setiap bilangan real C
2. $\int dx = x + C$
3. $\int a\ dx = x + C$
4. Untuk setiap bilangan real $n \neq -1$, berlaku bahwa:
$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$
5. Untuk setiap bilangan real k berlaku:
$$\int k\ f(x)dx = k \int f(x)dx$$
6. Dalam integral berlaku sifat linieritas yaitu:
$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$
7. Bentuk umum integral metoda substistusi:
$$\int f(u) \left(\frac{du}{dx}\right) du = \int f(u)du$$

D. Latihan Soal

Pilihlah jawaban yang paling tepat.

1. Hasil dari $\int 5\, dx$ adalah ….
   A. C
   B. 0
   C. $5x + C$
   D. $\frac{5}{2}x^2 + C$
   E. $5x^2 + C$
2. Hasil dari $\int \pi\, dx$ adalah ….
   A. $\pi x + C$
   B. $\frac{1}{2}\pi^2 + C$
   C. 0
   D. πC
   E. $\pi + C$
3. Hasil dari $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}} dx$ adalah ….
   A. $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + C$
   B. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$
   C. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
   D. $-\frac{2}{3x\sqrt{x}} + C$
   E. $-\frac{2}{5x^2\sqrt{x}} + C$
4. Hasil dari $\int x(6x - 2)dx =$….
   A. $12x - 2 + C$
   B. $12x^2 - 2x + C$
   C. $6x^3 - 2x^2 + C$
   D. $2x^3 - x^2 + C$
   E. $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$
5. Hasil dari $\int(6x + 2)(x - 3)dx =$….
   A. $6x^2 - 16x - 6 + C$
   B. $12x - 16 + C$
   C. $2x^3 - 8x^2 - 6x + C$
   D. $6x^3 - 16x^2 - 6x + C$
   E. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$
6. Hasil $\int(4x + 3)\left(4x^2 + 6x - 9\right)^9 dx$ adalah ….
   A. $\frac{1}{10}\left(4x^2 + 6x - 9\right)^{10} + C$
   B. $\frac{1}{15}(2x - 3)^{10} + C$
   C. $\frac{1}{20}(2x - 3)^{10} + C$
   D. $\frac{1}{20}\left(4x^2 + 6x - 9\right)^{10} + C$
   E. $\frac{1}{30}\left(4x^2 + 6x - 9\right)^{10} + C$
7. Hasil $\int 6x\sqrt{3x^2 + 5}dx$ = ….
   A. $\frac{2}{3}(6x^2 + 5)\sqrt{6x^2 + 5} + C$
   B. $\frac{2}{3}(3x^2 + 5)\sqrt{3x^2 + 5} + C$
   C. $\frac{2}{3}(x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 5} + C$

D. $\frac{3}{2}(x^2+5)\sqrt{x^2+5}+C$

E. $\frac{3}{2}(3x^2+5)\sqrt{3x^2+5}+C$

8. Hasil dari $\int \frac{3x-1}{(3x^2-2x+7)^7} = \ldots.$

A. $\frac{1}{3(3x^2-2x+7)^7}+C$

B. $\frac{1}{4(3x^2-2x+7)^6}+C$

C. $\frac{1}{6(3x^2-2x+7)^6}+C$

D. $\frac{-1}{12(3x^2-2x+7)^6}+C$

E. $\frac{-1}{12(3x^2-2x+7)^7}+C$

Kunci Jawaban dan Pembahasan

1. C
   Pembahasan:
   $\int a\,dx = ax + C$ sehingga $\int 5\,dx = 5x + C$
2. A
   Pembahasan:
   $\int a\,dx = ax + C$ dengan a sebuah konstanta, dan π sebuah konstanta (bilangan riil), sehingga $\int \pi\,dx = \pi x + C$
3. D
   Pembahasan:
   $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{x^{5/2}}dx$
   $= \int x^{-5/2}dx$
   $= \frac{1}{-\frac{5}{2}+1}x^{-\frac{5}{2}+1} + C$
   $= \frac{1}{-\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + C$
   $= -\frac{2}{3}\frac{1}{x^{3/2}} + C$
   $= -\frac{2}{3x\sqrt{x}} + C$
4. D
   Pembahasan:
   $\int x(6x-2)dx = \int(6x^2 - 2x)dx$
   $= \frac{6}{3}x^3 - \frac{2}{2}x^2 + C$
   $= 2x^2 - x^2 + C$
5. C
   Pembahasan:
   $\int (6x+2)(x-3)dx = \int (6x^2 - 16x - 6)dx$
   $= \frac{6}{3}x^3 - \frac{16}{2}x^2 - 6x + C$
   $= 2x^3 - 8x^2 - 6x + C$
6. D
   Pembahasan:
   $\int(4x+3)(4x^2+6x-9)^9dx$
   Misalkan $u = 4x^2 + 6x - 9$
   $du = (8x+6)dx$
   $du = 2(4x+3)dx$
   $dx = \frac{1}{2(4x+4)}du$
   $\int (4x+3)(4x^2+6x-9)^9dx = \int \cancel{(4x+3)}u^9 \frac{1}{2\cancel{(4x+3)}}du$
   $= \frac{1}{2}\int u^9du$
   $= \frac{1}{2}.\frac{1}{10}u^{10} + C$
   $= \frac{1}{20}u^{10} + C$
   $= \frac{1}{20}(4x^2+6x-9)^{10} + C$
7. B
   Pembahasan:

$\int 6x\sqrt{3x^2+5}dx$

Misalkan $u = 3x^2 + 5$

$du = 6x\ dx$

$dx = \frac{1}{6x}\ du$

$\int 6x\sqrt{3x^2+5}dx = \int 6x\ u^{1/2}\ \frac{1}{6x}du$

$= \int u^{1/2}\ du$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\ u^{\frac{1}{2}+1} + C$

$= \frac{1}{3/2}\ u^{3/2} + C$

$= \frac{2}{3}u\sqrt{u} + C$

$= \frac{2}{3}(3x^2+5)\sqrt{3x^2+5} + C$

8. D

Pembahasan:

$\int \frac{3x-1}{(3x^2-2x+7)^7}$, misal $u = 3x^2 - 2x + 7$

$du = (6x-2)dx$

$du = 2(3x-1)dx$

$dx = \frac{1}{2(3x-1)}du$

$\int \frac{3x-1}{(3x^2-2x+7)^7}dx = \int (3x-1)u^{-7}\ \frac{1}{2(3x-1)}du$

$= \frac{1}{2}\int u^{-7}\ du$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{-7+1}u^{-7+1} + C$

$= \frac{1}{2}.-\frac{1}{6}\ u^{-6} + C$

$= -\frac{1}{12}u^{-6} + C$

$= -\frac{1}{12}(3x^2-2x+7)^{-6} + C$

$= -\frac{1}{12(3x^2-2x+7)^6} + C$

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah ananda dapat menentukan $\int a\,dx$?	Ya	Tidak
2	Apakah ananda dapat menentukan $\int x^n\,dx$?	Ya	Tidak
3	Apakah ananda dapat menentukan $\int ax^n\,dx$?	Ya	Tidak
4	Apakah ananda dapat menentukan $\int (f(x) \pm g(x))\,dx$?	Ya	Tidak
5	Apakah ananda dapat menentukan integral menggunakan metoda substitusi?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan riview pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

MASALAH YANG BERKAITAN DENGAN INTEGRAL TAK TENTU

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan siswa dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu.

B. Uraian Materi

Masalah yang Melibatkan Integral Tak Tentu

1. Menentukan persamaan kurva dari fungsi turunan

Ketika mempelajari turunan, kalian sudah membahas gradien dan persamaan garis singgung kurva di suatu titik. Jika $y = f(x)$ maka gradien garis singgung kurva di sembarang titik pada kurva itu adalah:

$$m_{gs} = y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Oleh karena itu jika diketahui gradien garis singgung kurva, maka persamaan kurvanya adalah:

$$y = f(x) = \int f'(x)dx = F(x) + C$$

Lalu bagaimana menentukan nilai C? Nilai C dapat dihitung jika diketahui salah satu titik yang melalui kurva tersebut.

Contoh 1:

Gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di sembarang titik (x, y) adalah $\frac{dy}{dx} = 4x + 3$. Jika kurva melalui titik (0,5) tentukanlah persamaan kurvanya.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $m_{gs} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$

Sehingga $y = f(x) = \int (4x + 3)dx$

$= 2x^2 + 3x + C$

Kurva melalui titik (0,5) sehingga nilai $x = 0$ dan $y = 5$ bisa disubstitusikan ke persamaan $f(x) = 2x^2 + 3x + C$

$5 = 2.0^2 + 3.0 + C$

$5 = 0 + 0 + C$

Diperoleh $C = 5$

Sehingga $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

Contoh 2:

Gradien garis singgung suatu kurva di titik (x, y) adalah $6\sqrt{x}$. Jika Kurva ini melalui titik (9,120) maka persamaan garis singgung kurva ini di titik yang berabsis 1 adalah….

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $m_{gs} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 6\sqrt{x}$

Sehingga $y = f(x) = \int \left(6\sqrt{x}\right)dx$

$= \int \left(6x^{1/2}\right)dx$

$= 6 \int x^{1/2}dx$

$$= \frac{6}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{6}{3/2} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$= 6.\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

$f(x) = 4x\sqrt{x}$ +C

Kurva melalui titik (9,120) sehingga kita bisa substitusikan koordinat titik tersebut ke persamaan kurva $f(x)$.

$120 = 4.9.\sqrt{9} + C$

$120 = 108 + C$

$C = 12$

$f(x) = 4x\sqrt{x} + 12$

Kita akan menentukan persamaan garis singgung kurva di titik berabsis 1, jadi kita tentukan titik singgung dan gradien garis singgungnya terlebih dahulu.

$f(x) = 4x\sqrt{x} + 12$

$f(1) = 4.1.\sqrt{1} + 12 = 16$

Jadi titik singgungnya adalah (1,16)

Gradien garis singgungya adalah $6\sqrt{x} = 6\sqrt{1} = 6$

Persamaan garis dengan gradien $m = 6$ dan melalui titik (1,16) adalah:

$y - 16 = 6(x - 1)$

$y = 6x + 10$

2. Kecepatan dan Percepatan

Kalian pun sudah mempelajari bahwa turunan dari jarak terhadap waktu adalah kecepatan, dan turunan kecepatan terhadap waktu adalah percepatan.

Kecepatan didefinisikan sebagai laju perubahan jarak terhadap waktu.

$v = \frac{ds}{dt}$ atau $ds = vdt$

$$\int ds = \int vdt$$

$$s = \int v\,dt$$

(v merupakan persamaan kecepatan dalam t)

Jadi jika diketahui persamaan kecepatan, persamaan jarak bisa dihitung dengan mengintegralkan persamaan kecepatan.

Percepatan didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan terhadap waktu.

$a = \frac{dv}{dt}$ atau $dv = a\,dt$

$$\int dv = \int a\,dt$$

$$v = \int a\,dt$$

(a merupakan persamaan percepatan dalam t)

Jadi jika diketahui persamaan percepatam, persamaan kecepatan bisa dihitung dengan mengintegralkan persamaan kecepatan.

Contoh 1:

Sebuah bola bergerak dengan kecepatan $v = 3t^2 - 2t$ m/det. Jika pada saat $t = 3$ detik panjang $s = 9$ meter, tentukan rumus jarak pada saat t detik.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $v = 3t^2 - 2t$

$s = \int v\,dt$ atau $s = \int(3t^2 - 2t)dt$

$= t^3 - t^2 + C$

$s(t) = t^3 - t^2 + C$; diketahui pada saat $t = 3$, $s = 9$ sehingga kita substitusikan ke persamaan untuk mendapatkan nilai C.

$$9 = 3^3 - 3^2 + C$$

$$9 = 27 - 9 + C$$
$$9 = 18 + C$$
$$C = 9 - 18 = -9$$

Rumus jarak diperoleh $s(t) = t^3 - t^2 - 9$

Contoh 2:
Diketahui persamaan percepatan sebuah benda adalah $a = (6t^2 + 1)$ m/det², tentukan persamaan kecepatan benda jika pada saat $t = 2$ detik kecepatannya adalah 20 m/det.
Alternatif penyelesaian:
Diketahui $a = 6t^2 + 1$

$$v = \int a\, dt$$
$$v = \int (6t^2 + 1) dt$$
$$= 2t^3 + t + C$$

Sehingga $v(t) = 2t^3 + t + C$; diketahui pada saat $t = 2$ detik kecepatannya adalah 20 m/det, kita substitusikan untuk mendapatkan nilai C.

$$20 = 2.\, 2^3 + 2 + C$$
$$20 = 16 + 2 + C$$

Diperoleh nilai $C = 2$, sehingga persamaan kecepatannya adalah $v(t) = 2t^3 + t + 2$

C. Rangkuman

1. Jika $y = f(x)$ maka gradien garis singgung kurva di sembarang titik pada kurva itu adalah:
$$m_{gs} = y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$
maka persamaan kurvanya adalah:
$$y = f(x) = \int f'(x)dx = F(x) + C$$
2. Kecepatan didefinisikan sebagai laju perubahan jarak terhadap waktu.
$v = \frac{ds}{dt}$ atau $ds = vdt$
Untuk mendapatkan rumus jarak jika diketahui rumus kecepatan adalah:
$$\int ds = \int vdt$$
$$s = \int v\,dt$$
3. Kecepatan didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan terhadap waktu.
$a = \frac{dv}{dt}$ atau $dv = a\,dt$
Untuk mendapatkan rumus jarak jika diketahui rumus percepatan adalah:
$$\int dv = \int a\,dt$$
$$v = \int a\,dt$$

D. Latihan Soal

Untuk memantapkan pemahaman materi, kerjakanlah latihan soal berikut. Pilihlah jawaban yang paling tepat.

1. Gradien garis singgung suatu kurva di titik (x, y) adalah $3\sqrt{x}$, jika kurva ini melalui titik (4,9), nilai y di titik berabsis 1 adalah ....
   A. -5
   B. -4
   C. -3
   D. -2
   E. -1
2. Tentukan persamaan fungsi f jika grafik fungsi $y = f(x)$ melalui titik (1, 2) dan gradien garis singgung di setiap titiknya ditentukan oleh persamaan $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{16}{x^4}$ $dan\ x \neq 0$
   A. $y = x + \frac{16}{3x^3} - \frac{13}{3}$
   B. $y = x - \frac{16}{3x^3} - \frac{13}{3}$
   C. $y = x + \frac{16}{3x^3} + \frac{13}{3}$
   D. $y = x - \frac{16}{3x^3} + \frac{13}{3}$
   E. $y = x + \frac{16}{3x^3}$
3. Diketahui $F'(x) = 4x - 1$ dan $F(3) = 20$. Nilai $F(1)$ adalah ....
   A. 4
   B. 5
   C. 6
   D. 7
   E. 8
4. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus. Kecepatan benda pada setiap saat adalah $v = 6t^2 + 4t$ m/det. Pada saat $t = 0$ panjang lintasan yang ditempuh adalah $s = 5$ meter. Jarak yang ditempuh benda saat $t = 2$ detik adalah....
   A. 21
   B. 23
   C. 25
   D. 27
   E. 29
5. Diketahui kecepatan suatu benda adalah $v(t) = 6t^2 - 8t$ dan posisi benda pada jarak 5 untuk $t = 0$. Rumus fungsi jarak $s(t)$ adalah ....
   A. $s = 2t^3 - 4t^2 + 3$
   B. $s = 2t^3 - 4t^2 + 5$
   C. $s = 2t^3 - 4t^2 + 7$
   D. $s = 12t - 8$
   E. $s = 12t - 7$
6. Diketahui suatu partikel bergerak dengan percepatan $a(t) = 24t + 10$. Jika diketahui kecepatan partikel pada $t = 10$ adalah 1.303, persamaan kecepatan partikel adalah ....
   A. $v = 24t^2 + 10 - 197$
   B. $v = 24t^2 + 5t - 147$
   C. $v = 12t^2 + 10t$
   D. $v = 12t^2 + 10t + 3$
   E. $v = 12t^2 + 10t + 13$

Kunci Jawaban dan Pembahasan

1. A

   Pembahasan:

   Gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di sembarang titik (x, y) adalah $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{x}$,

   $y = \int 3\sqrt{x}dx$

   $y = 3\int x^{1/2}dx$

   $= 3.\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$

   $= 3.\frac{2}{3}x^{3/2} + C$

   $= 2x\sqrt{x} + C$

   Kurva melalui titik (4,9), kita substitusikan $x = 4$ dan $y = 9$ diperoleh:

   $9 = 2.4\sqrt{4} + C$

   $9 = 16 + C$

   $C = -7$

   Sehingga $y = 2x\sqrt{x} - 7$

   Untuk $x = 1$ diperoleh $y = 2.1\sqrt{1} - 7 = 2 - 7 = -5$

2. B

   Pembahasan:

   $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{16}{x^4} = 1 - 16x^{-4}$

   $dy = (1 - 16x^{-4})dx$

   $y = \int(1 - 16x^{-4})dx$

   $= x - \frac{16}{-3}x^{-3} + C$

   $= x + \frac{16}{3}x^{-3} + C$

   $= x + \frac{16}{3x^3} + C$

   Kurva $y = f(x)$ melalui titik (1,2)

   $2 = 1 + \frac{16}{3} + C$

   $\frac{6}{3} = \frac{19}{3} + C$

   $C = -\frac{13}{3}$

   $y = x + \frac{16}{3x^3} - \frac{13}{3}$

3. C

   Pembahasan:

   $F'(x) = 4x - 1$

   $F(x) = \int F'(x)\,dx$

   $= \int(4x - 1)dx$

   $= 2x^2 - x + C$

   Diketahui kurva melalui titik (3,20)

   $20 = 2.3^2 - 3 + C$

   $20 = 18 - 3 + C$

   $C = 5$

   Sehingga diperoleh $F(x) = 2x^2 - x + 5$

   Nilai $F(1) = 2.1^2 - 1 + 5 = 6$

4. E

   $v = 6t^2 + 4t$

   $s = \int v\,dt$

   $= \int(6t^2 + 4t)dt$

   $= 2t^3 + 2t^2 + C$

$s(0) = 5$
$5 = 2.0^3 + 2.0^2 + C$
$C = 5$
$s = 2t^3 + 2t^2 + 5$
Untuk $t = 2$ diperoleh $s = 2.2^3 + 2.2^2 + 5 = 29$

5. B
Pembahasan:
$v(t) = 6t^2 - 8t$
$s = \int v\, dt$
$= \int (6t^2 - 8t) dt$
$= 2t^3 - 4t^2 + C$
Posisi benda pada jarak 5 untuk $t = 0$
$5 = 2.0^3 - 4.0^2 + C$
$C = 5$
Jadi $s = 2t^3 - 4t^2 + 5$

6. D
Pembahasan:
Percepatan $a(t) = 24t + 10$.
$v = \int a\, dt$
$= \int (24t + 10)\, dt$
$= 12t^2 + 10t + C$
Kecepatan partikel pada $t = 10$ adalah 1.303
$1.303 = 12.10^2 + 10.10 + C$
$1.303 = 1200 + 100 + C$
$C = 3$
Sehingga persamaan kecepatannya adalah $v = 12t^2 + 10t + 3$

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah ananda dapat menentukan persamaan kurva jika diketahui gradien garis singgung kurva tersebut dan salah satu titik yang dilaluinya?	Ya	Tidak
2	Apakah Ananda dapat menentukan persamaan jarak jika diketahui persamaan kecepatannya?	Ya	Tidak
3	Apakah Ananda dapat menentukan persamaan kecepatan jika diketahui persamaan percepatannya?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan riview pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

EVALUASI

1. Hasil dari $\int dx$ adalah ....
   A. C
   B. 0
   C. $x + C$
   D. $\frac{1}{2}x^2 + C$
   E. $x^2 + C$
2. Hasil dari $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$ adalah ....
   A. $\frac{2}{5}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$
   B. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + C$
   C. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
   D. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$
   E. $\frac{2}{3}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{5}x\sqrt{x} + C$
3. Hasil dari $\int 2x(3x-1)dx =$....
   A. $12x - 2 + C$
   B. $12x^2 - 2x + C$
   C. $6x^3 - 2x^2 + C$
   D. $2x^3 - x^2 + C$
   E. $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$
4. Hasil dari $\int(3x+1)(2x-6)dx =$....
   A. $6x^2 - 16x - 6 + C$
   B. $12x - 16 + C$
   C. $2x^3 - 8x^2 - 6x + C$
   D. $6x^3 - 16x^2 - 6x + C$
   E. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$
5. Hasil $\int (4x-6)\left(x^2 - 3x + 4\right)^4 dx$ adalah ....
   A. $6\left(x^2 - 3x + 4\right)^5 + C$
   B. $3\left(x^2 - 3x + 4\right)^5 + C$
   C. $\frac{1}{3}\left(x^2 - 3x + 4\right)^5 + C$
   D. $\frac{1}{6}\left(x^2 - 3x + 4\right)^5 + C$
   E. $\frac{1}{12}\left(x^2 - 3x + 4\right)^5 + C$
6. Hasil $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}} dx = \ldots.$
   A. $2\sqrt{3x^2+9x-1} + C$
   B. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$
   C. $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$

E. $\frac{3}{2}\sqrt{3x^2+9x-1}+c$

7. Gradien garis singgung suatu kurva $y = f(x)$ di titik (x, y) adalah $f'(x) = 4x - 3$. Jika kurva $f(x)$ini melalui titik $(-1,12)$, persamaan kurva $f(x)$ adalah ....
   A. $2x^2 - 3x + 7$
   B. $x^2 - 4x - 5$
   C. $2x^2 - 3x + 6$
   D. $x^2 - 3x + 6$
   E. $x^2 + 3x - 6$
8. Diketahui $g'(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ dan $g(1) = \frac{1}{3}$. Rumus fungsi $g(x)$ adalah ....
   A. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} - 5$
   B. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} - 4$
   C. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} - 3$
   D. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} - 2$
   E. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} - 1$
9. Dari sebuah titik awal, sebuah bola bergerak lurus ke arah kanan dengan percepatan $a = 6t - 24$ m/det. Jika saat $t = 0$ kecepatannya adalah 36 m/det maka rumus kecepatannya adalah ....
   A. $3t^2 - 24t + 32$
   B. $3t^2 - 24t + 34$
   C. $3t^2 - 24t + 36$
   D. $2t^3 - 12t^2 + 34$
   E. $2t^3 - 12t^2 + 36$
10. Diketahui kecepatan suatu benda adalah $v(t) = 3t^2 - 4t$ dan posisi benda pada jarak 5 untuk t = 2. Rumus fungsi jarak $s(t)$ adalah ....
    A. $s = t^3 - 2t^2 + 3$
    B. $s = t^3 - 2t^2 + 5$
    C. $s = t^3 - 4t^2 + 13$
    D. $s = t^3 - 4t^2 + 15$
    E. $s = t^3 - 4t^2 + 17$

Kunci Jawaban Evaluasi

1. C
2. D
3. D
4. C
5. C
6. C
7. A
8. E
9. C
10. B

DAFTAR PUSTAKA

Sukino (2017). *Matematika untuk SMA/MA*. Jakarta: Erlangga

Rosihan Ari Y dan Indriyastuti (2008). *Perspektif Matematika 3 Kelas XII SMA/MA IPA.* Solo: Tiga Serangkai.

Matematika Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (2014). Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.