KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Peminatan

KELAS XI

PERSAMAAN TRIGONOMETRI

MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XI

PENYUSUN
Titin Suryati Sukmadewi, S.Si., M.Pd.

Unit Kerja:

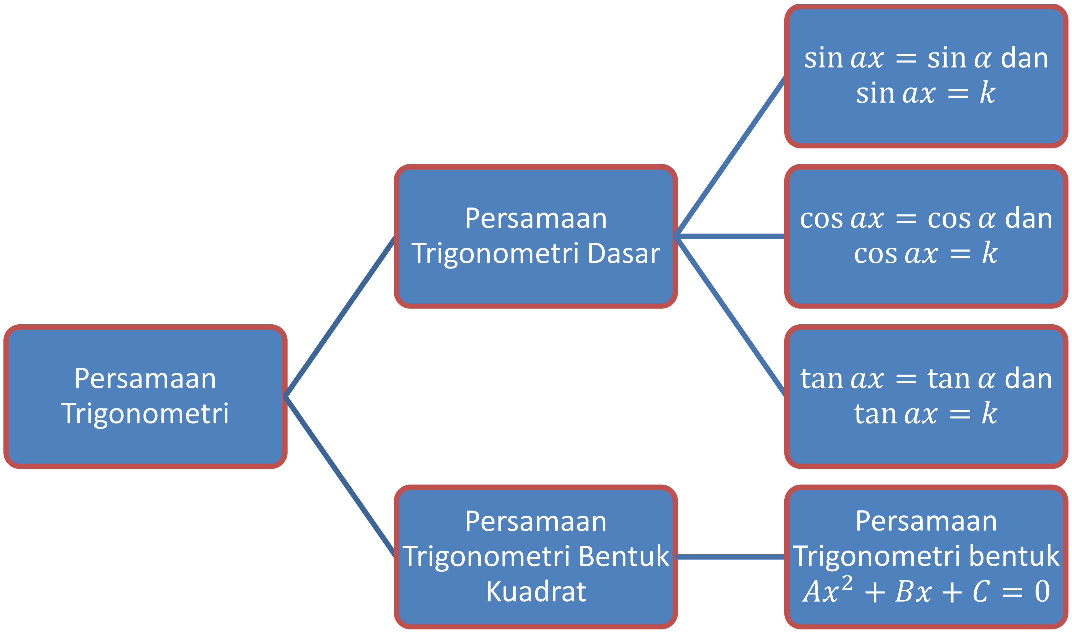
SMA Negeri 1 Sumedang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

- Fungsi trigonometri adalah fungsi dari sebuah sudut yang digunakan untuk menghubungkan antara sudut-sudut yang dalam suatu segitiga dengan sisi-sisi segitiga tersebut.
- Himpunan penyelesaian adalah himpunan yang beranggotakan akar-akar dari suatu persamaan.
- Persamaan trigonometri adalah persamaan yang memuat perbandingan trigonometri.
- Persamaan trigonometri bentuk kuadrat adalah persamaan trigonometri dalam bentuk $Ax^2 + Bx + C = 0, A \neq 0$

PETA KONSEP


Persamaan Trigonometri
Persamaan Trigonometri Dasar
Persamaan Trigonometri Bentuk Kuadrat
$\sin ax = \sin \alpha$ dan $\sin ax = k$
$\cos ax = \cos \alpha$ dan $\cos ax = k$
$\tan ax = \tan \alpha$ dan $\tan ax = k$
Persamaan Trigonometri bentuk $Ax^2 + Bx + C = 0$

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	: Matematika Peminatan
Kelas	: XI
Alokasi Waktu	: 8 JP
Judul Modul	: Persamaan Trigonometri

B. Kompetensi Dasar

3.1 Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri
4.1 Memodelkan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan masalah trigonometri

C. Deskripsi Singkat Materi

Modul ini berisi materi persamaan trigonometri yang merupakan pengembangan dari fungsi trigonometri dengan nilai $y = 0$. Materi prasyarat yang harus dikuasai adalah nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa, nilai perbandingan trigonometri di empat kuadran, invers trigonometri dan penyelesaian persamaan kuadrat. Setelah memahami modul ini diharapkan dapat menentukan penyelesaian persamaan trigonometri baik persamaan dasar maupun persamaan kuadrat. Materi ini akan menjadi prasyarat perhitungan terutama pada mata pelajaran fisika.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, mari berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Sebaiknya Ananda mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, Ananda mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.
4. Ananda dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika Ananda memperoleh nilai < 75 maka Ananda harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Persamaan Trigonometri Dasar

Kedua : Persamaan Trigonometri Bentuk Kuadrat

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Persamaan Trigonometri Dasar

A. Tujuan Pembelajaran

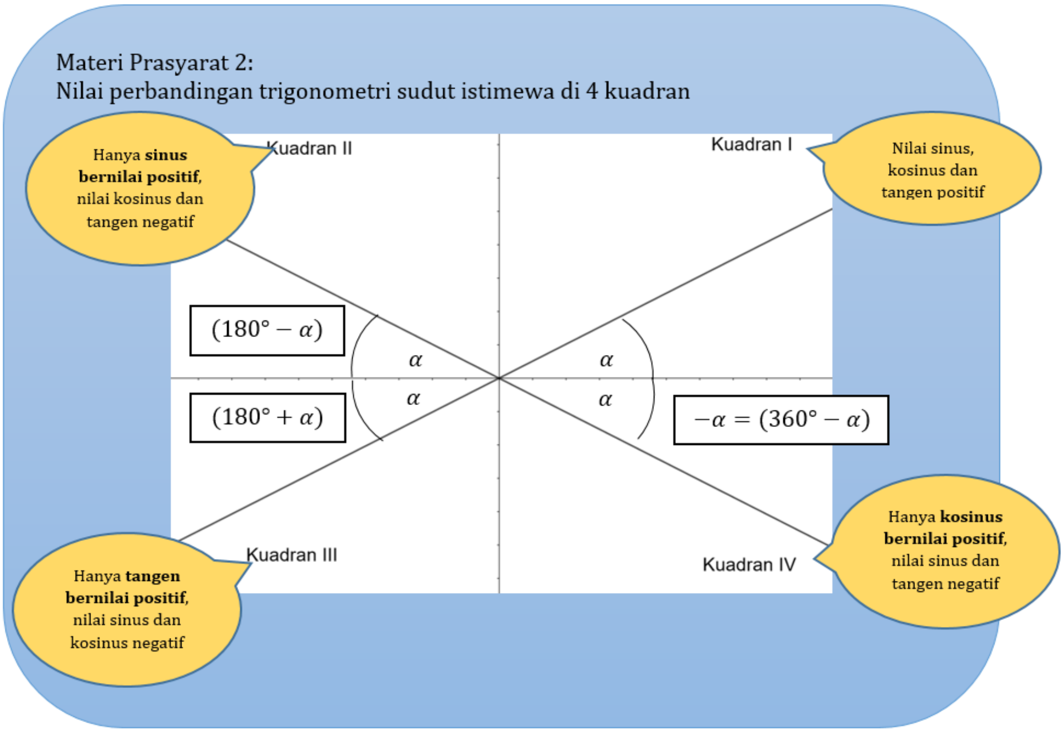
Setelah mempelajari materi ini, diharapkan Ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri dasar

B. Uraian Materi

Jika ananda menyelesaikan suatu persamaan trigonometri, berarti ananda diharuskan menemukan nilai x, dalam satuan radian maupun derajat, yang memenuhi persamaan tersebut.
Sebelum memasuki materi, ada materi prasyarat yang harus ananda kuasai yaitu sebagai berikut.

Materi Prasyarat 1:
Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut istimewa

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\sim$



Untuk memeriksa kesiapan kalian memasuki materi ini, kerjakanlah soal berikut.

Tentukanlah nilai perbandingan trigonometri berikut.

1. $\sin 60° =$
2. $\cos 45° =$
3. $\tan 30° =$
4. $\cos 135° =$
5. $\cos 210° =$
6. $\cos 300° =$
7. $\sin 120° =$
8. $\sin 240° =$
9. $\sin 310° =$
10. $\tan 315° =$

Persamaan Trigonometri Dasar

Persamaan trigonometri dasar meliputi:

1. $\sin x = \sin \alpha$
2. $\cos x = \cos \alpha$
3. $\tan x = \tan \alpha$
4. $\sin x = k$, k sebuah konstanta
5. $\cos x = k$, k sebuah konstanta
6. $\tan x = k$, k sebuah konstanta

Penyelesaian persamaan trigonometri dasar

Menyelesaikan persamaan trigonometri dalam bentuk kalimat terbuka yang memuat variabel berarti menentukan nilai variabel yang terdapat dalam persamaan tersebut sehingga persamaan itu menjadi benar.

Untuk menyelesaikan persamaan trigonometri $\sin x = \sin \alpha$, $\cos x = \cos \alpha$ dan $\tan x = \tan \alpha$, perhatikan tanda (positif atau negatif) untuk $\sin x, \cos x, \tan x$ pada tiap kuadran dan sudut berelasi pada kuadran masing-masing.

Menentukan penyelesaian persamaan trigonometri dasar

a. $\sin x = \sin \alpha°$

Nilai sinus suatu sudut positif di kuadran 1 dan 2 sehingga untuk persamaan $\sin x = \sin \alpha°$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° ---------- (Kuadran\ 1) \\ (180 - \alpha)° + k.360° ----- (Kuadran\ 2) \end{cases}$$

b. $\cos x = \cos \alpha°$

Nilai cosinus suatu sudut positif di kuadran 1 dan 4 sehingga untuk persamaan $\cos x = \cos \alpha°$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° ---------- (Kuadran\ 1) \\ (-\alpha)° + k.360° -------- (Kuadran\ 4) \end{cases}$$

c. $\tan x = \tan \alpha°$

Nilai tangen suatu sudut positif di kuadran 1 dan 3 sehingga untuk persamaan $\cos x = \cos \alpha°$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \alpha° + k.180° ------(Kuadran\ 1\ dan\ 3)$$

Begitu pula untuk bentuk sudut dalam radian.

a. $\sin x = \sin \alpha$

$$x = \begin{cases} \alpha + k.2\pi ---------- (Kuadran\ 1) \\ (\pi - \alpha) + k.2\pi -------- (Kuadran\ 2) \end{cases}$$

b. $\cos x = \cos \alpha$

$$x = \begin{cases} \alpha + k.2\pi ---------- (Kuadran\ 1) \\ (-\alpha) + k.2\pi ---------(Kuadran\ 4) \end{cases}$$

c. $\tan x = \tan \alpha$

$$x = \alpha + k.\pi -------- (Kuadran\ 1\ dan\ 3)$$

Agar lebih jelas, coba Ananda simak contoh berikut.

Contoh 1:

Tentukan akar-akar dari persamaan trigonometri berikut kemudian tuliskan himpunan penyelesaiannya.

1. $\sin x = \sin 70°, 0° \leq x \leq 360°$
2. $\cos x = \cos 60°, 0° \leq x \leq 360°$
3. $\tan x = \tan 20°, 0° \leq x \leq 360°$
4. $\sin 2x = \sin \frac{2}{3}\pi, 0 \leq x \leq 2\pi$
5. $\cos 3x = \cos \frac{1}{2}\pi, 0 \leq x \leq \pi$
6. $\tan 2x - \tan \frac{1}{3}\pi = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

Alternatif penyelesaian:

1. $\sin x = \sin 70°, 0° \leq x \leq 360°$

   $x_1 = 70°$

   $x_2 = (180 - 70)° = 110°$

   Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{70°, 110°\}$

2. $\cos x = \cos 60°, 0° \leq x \leq 360°$

$x_1 = 60°$
$x_2 = -60° + 360° = 300°$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{60°, 300°\}$

3. $\tan x = \tan 20°, 0° \leq x \leq 360°$
$x = 20° + k.180°$
Untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 20°$
Untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = 20° + 180° = 200°$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{20°, 200°\}$

4. $\sin 2x = \sin \frac{2}{3}\pi, 0 \leq x \leq 2\pi$
   a. $2x = \frac{2}{3}\pi + k.2\pi$
      $x = \frac{1}{3}\pi + k.\pi$
      untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = \frac{1}{3}\pi$
      untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = \frac{1}{3}\pi + \pi = \frac{4}{3}\pi$
   b. $2x = \left(\pi - \frac{2}{3}\pi\right) + k.2\pi$
      $x = \frac{1}{6}\pi + k.\pi$
      untuk $k = 0$ diperoleh $x_3 = \frac{1}{6}\pi$
      untuk $k = 1$ diperoleh $x_4 = \frac{7}{6}\pi$
      Dari pengerjaan di atas diperoleh himpunan penyelesaiannya yaitu $\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi\right\}$

5. $\cos 3x = \cos \frac{1}{2}\pi, 0 \leq x \leq \pi$
   a. $3x = \frac{1}{2}\pi + k.2\pi$
      $x = \frac{1}{6}\pi + k.\frac{2}{3}\pi$
      untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = \frac{1}{6}\pi$
      untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = \frac{5}{6}\pi$
   b. $3x = -\frac{1}{2}\pi + k.2\pi$
      $x = -\frac{1}{6}\pi + k.\frac{2}{3}\pi$
      untuk $k = 1$ diperoleh $x_3 = \frac{1}{2}\pi$
      Dari pengerjaan di atas diperoleh himpunan penyelesaiannya yaitu $\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$

6. $\tan 2x - \tan \frac{1}{3}\pi = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$
$\tan 2x = \tan \frac{1}{3}\pi, 0 \leq x \leq 2\pi$
$2x = \frac{1}{3}\pi + k.\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi + k.\frac{1}{2}\pi$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = \frac{1}{6}\pi$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = \frac{2}{3}\pi$

Himpunan penyelesaian dari persamaan di atas adalah $\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi\right\}$

Contoh 2:

Tentukan akar-akar dari persamaan trigonometri berikut kemudian tuliskan himpunan penyelesaiannya.

1. $2\cos x - \sqrt{3} = 0, 0° \le x \le 360°$
2. $\sin(x - 30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0° \le x \le 360°$
3. $\sqrt{3}\sin x = \cos x, 0° \le x \le 360°$

Alternatif Penyelesaian:

1. $2\cos x - \sqrt{3} = 0, 0° \le x \le 360°$

   $2\cos x = \sqrt{3}$

   $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   a. $x = 30° + k.360°$

      untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 30°$

   b. $x = -30° + k.360°$

      untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = 330°$

   Himpunan penyelesaiannya adalah $\{30°, 330°\}$

2. $\sin(x - 30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0° \le x \le 360°$

   $\sin(x - 30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60°$

   a. $(x - 30°) = 60° + k.360°$

      $x = 90° + k.360°$

      untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 90°$

   b. $(x - 30°) = (180° - 60°) + k.360°$

      $(x - 30°) = 120° + k.360°$

      $x = 150° + k.360°$

      untuk $k = 0$ diperoleh $x_2 = 150°$

   Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{90°, 150°\}$

3. $\sqrt{3}\sin x = \cos x, 0° \le x \le 360°$

   $\sqrt{3}\sin x = \cos x$

   $\sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$

   $\sqrt{3}\tan x = 1$

   $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

   $\tan x = \tan 30°$

   $x = 30° + k.180°$

   untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 30°$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = 210°$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{30°, 210°\}$

Kita sudah bahas persamaan trigonometri untuk bentuk:
1. $\sin x = \sin \alpha$
2. $\cos x = \cos \alpha$
3. $\tan x = \tan \alpha$
4. $\sin x = k$, k sebuah konstanta
5. $\cos x = k$, k sebuah konstanta
6. $\tan x = k$, k sebuah konstanta

Bagaimana jika salah satu dari ruas kiri maupun ruas kanan bernilai negatif? Kita akan coba bahas contoh berikut.

Contoh 3:

$\sin 2x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0 \leq x \leq 2\pi$

Penyelesaian:

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Nilai sinus suatu sudut negatif berarti sudutnya berada di kuadran III dan IV

(Ingat, $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin\frac{1}{3}\pi$)

Kuadran III
$2x = \left(\pi + \frac{1}{3}\pi\right) + k.2\pi$
$2x = \frac{4}{3}\pi + k.2\pi$
$x = \frac{2}{3}\pi + k.\pi$
untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = \frac{2}{3}\pi$
untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = \frac{5}{3}\pi$

Kuadran IV
$2x = -\frac{1}{3}\pi + k.2\pi$
$x = -\frac{1}{6}\pi + k.\pi$
untuk $k = 1$ diperoleh $x_3 = \frac{5}{6}\pi$
untuk $k = 2$ diperoleh $x_4 = \frac{11}{6}\pi$

Sehingga himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$

C. Rangkuman

Menentukan penyelesaian persamaan trigonometri dasar untuk sudut ukuran derajat:

a. $\sin x = \sin \alpha°$

$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° ---------- (Kuadran\ 1) \\ (180-\alpha)° + k.360° ------ (Kuadran\ 2) \end{cases}$$

b. $\cos x = \cos \alpha°$

$$x = \begin{cases} \alpha° + k.360° ---------- (Kuadran\ 1) \\ (-\alpha)° + k.360° -------- (Kuadran\ 4) \end{cases}$$

c. $\tan x = \tan \alpha°$

$$x = \alpha° + k.180° ------ (Kuadran\ 1\ dan\ 3)$$

Menentukan penyelesaian persamaan trigonometri dasar untuk sudut ukuran radian:

a. $\sin x = \sin \alpha$

$$x = \begin{cases} \alpha + k.2\pi ---------- (Kuadran\ 1) \\ (\pi-\alpha) + k.2\pi -------- (Kuadran\ 2) \end{cases}$$

b. $\cos x = \cos \alpha$

$$x = \begin{cases} \alpha + k.2\pi ---------- (Kuadran\ 1) \\ (-\alpha) + k.2\pi --------- (Kuadran\ 4) \end{cases}$$

D. Latihan Soal

Latihan Soal Bentuk Essay

Tentukan himpunan penyelesaian dari setiap persamaan berikut.

1. $\tan(2x - 35°) = 1, 0° \leq x \leq 360°$
2. $\tan(3\alpha - 15°) = -1, 0° \leq \alpha \leq 180°$
3. $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$
4. $\sin(3x - 30°) = -\frac{1}{2}, 0° \leq x \leq 180°$

Latihan Soal Bentuk Pilihan Ganda

Pilihlah satu jawaban yang paling benar.

1. Jika $\sin x = \sin p$, maka salah satu penyelesaian persamaan tersebut adalah $x =$ ....

A. $p + k\pi, k \in$ bilangan bulat
B. $-p + k\pi, k \in$ bilangan bulat
C. $p + k.2\pi, k \in$ bilangan bulat
D. $(180° + p) + k.2\pi, k \in$ bilangan bulat
E. $(180° - p) + k.2\pi, k \in$ bilangan bulat

2. Himpunan penyelesaian dari $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$ adalah ....

A. $\left\{\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi\right\}$
B. $\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi\right\}$
C. $\left\{\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$
D. $\left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$
E. $\left\{\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right\}$

3. Yang bukan penyelesaian dari persamaan $\sin 3x = 0$ untuk $0° \leq x < 360°$ adalah ....

A. $0°$
B. $60°$
C. $120°$
D. $240°$
E. $270°$

4. Himpunan penyelesaian dari persamaan $\tan 3x - \tan\frac{4}{3}\pi = 0$ adalah ....

A. $\left\{x \middle| x = \frac{\pi}{9}(4 + 3k), k \in bulat\right\}$
B. $\left\{x \middle| x = -\frac{\pi}{9}(4 + 3k), k \in bulat\right\}$
C. $\left\{x \middle| x = \frac{4\pi}{9} + k.\pi, k \in bulat\right\}$
D. $\left\{x \middle| x = \frac{4\pi}{3} + k.\pi, k \in bulat\right\}$
E. $\left\{x \middle| x = \frac{4\pi}{3} + k.\frac{\pi}{3}, k \in bulat\right\}$

5. Himpunan penyelesaian dari persamaan $\sin(x - 60°) = \cos 2x$ untuk $0° \leq x \leq 360°$ adalah ....
   A. $\{70°, 170°, 210°, 250°\}$
   B. $\{70°, 190°, 210°, 250°\}$
   C. $\{50°, 190°, 250°, 290°\}$
   D. $\{50°, 170°, 210°, 290°\}$
   E. $\{50°, 170°, 250°, 290°\}$

Kunci Jawaban dan Pembahasan

Kunci Jawaban Soal Latihan Bentuk Essay

1. $\tan(2x - 35°) = 1, 0° \leq x \leq 360°$

(SKOR MAKSIMUM 10)

$2x - 35° = 45° + k.180°$
$2x = 80° + k.180°$
$x = 40° + k.90°$ (untuk k bilangan bulat)
$x_1 = 40°$
$x_2 = 40° + 90° = 130°$
$x_3 = 40° + 180° = 220°$
$x_4 = 40° + 270° = 310°$
HP = {40°,130°,220°,310°}

2. $\tan(3\alpha - 15°) = -1, 0° \leq \alpha \leq 180°$

(SKOR MAKSIMUM 10)

$(3\alpha - 15°) = 135° + k.180°$
$3\alpha = 150° + k.180°$
$\alpha = 50° + k.60°$
$\alpha_1 = 50°$
$\alpha_2 = 50° + 60° = 110°$
$\alpha_3 = 50° + 120° = 170°$
HP = {60°, 110°, 170°}

3. $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

(SKOR MAKSIMUM 15)

$$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$
$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
Kosinus Positif di Kuadran I
$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$$
$$2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + k.2\pi$$
$$2x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$$
$$x = \frac{\pi}{4} + k.\pi$$
$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 0.\pi = \frac{\pi}{4}$$
$$x_2 = \frac{\pi}{4} + 1.\pi = \frac{5\pi}{4}$$
Kosinus Positif di Kuadran IV
$$2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k.2\pi$$
$$2x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$$

$x = \frac{\pi}{12} + k.\pi$
$x_3 = \frac{\pi}{12} + 0.\pi = \frac{\pi}{12}$
$x_4 = \frac{\pi}{12} + 1.\pi = \frac{13\pi}{12}$
HP = $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}\right\}$

4. $\sin(3x - 30°) = -\frac{1}{2}, 0° \leq x \leq 180°$

(SKOR MAKSIMUM 15)

Nilai sinus negatif di kuadran III dan IV
Kuadran III
$3x - 30° = 240° + k.360°$
$3x = 270° + k.360°$
$x = 90° + k.120°$
$x_1 = 90°$
Kuadran IV
$3x - 30° = 300° + k.360°$
$3x = 330° + k.360°$
$x = 110° + k.120°$
$x = 110° + 0.120° = 110°$
HP = {90°, 110°}

Kunci Jawaban Soal Bentuk Pilihan Ganda

1. Kunci : C
Pembahasan
$\sin x = \sin p$
$x = p + k.2\pi$ dan $x = (\pi - p) + k.2\pi$
2. Kunci: E
$2\sin x - \sqrt{3} = 0$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$
$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
Kuadran I:

$x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi$
$x_1 = \frac{\pi}{3} + 0.2\pi = \frac{\pi}{3}$
Kuadran II:
$x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + k.2\pi$
$x = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi$
$x_2 = \frac{2\pi}{3} + 0.2\pi = \frac{2\pi}{3}$
HP = $\left\{\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right\}$
3. Kunci: E

$\sin 3x = 0$
$3x = k.360°$
$x = k.120°$
$x_1 = 0°$
$x_2 = 120°$
$x_3 = 240°$
$\sin 3x = 0$
$3x = 180° + k.360°$
$x = 60° + k.120°$
$x_4 = 60°$
$x_5 = 180°$
$x_6 = 300°$
Jadi yang tidak memenuhi adalah 270°.

4. Kunci: A
Pembahasan:
$\tan 3x - \tan \frac{4}{3}\pi = 0$
$\tan 3x = \tan \frac{4}{3}\pi$
$3x = \frac{4}{3}\pi + k.\pi$
$x = \frac{4}{9}\pi + k.\frac{1}{3}\pi$
$x = \frac{\pi}{9}(4 + 3k)$

5. Kunci: D
Pembahasan:
$\sin(x - 60°) = \cos 2x$ untuk $0° \leq x \leq 360°$
$\sin(x - 60°) = \cos\big(90° - (x - 60°)\big)$
$\sin(x - 60°) = \cos(150° - x)$
$\cos(150° - x) = \cos 2x$

$2x = 150° - x + k.360°$
$3x = 150° + k.360°$
$x = 50° + k.120°$
$x_1 = 50°$
$x_2 = 170°$
$x_3 = 290°$

$2x = -(150° - x) + k.360°$
$2x = x - 150° + k.360°$
$x = -150° + k.360°$
$x_4 = 210°$
HP= $\{50°, 170°, 210°, 290°\}$

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri $\sin x = k$?	Ya	Tidak
2	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri $\cos x = k$?	Ya	Tidak
3	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri $\tan x = k$?	Ya	Tidak
4	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri dasar untuk interval dalam bentuk radian?	Ya	Tidak
5	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri $\sin ax = k$?	Ya	Tidak
6	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri $\cos ax = k$?	Ya	Tidak
7	Apakah ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri $\tan ax = k$?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan riview pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Persamaan Trigonometri Bentuk Kuadrat

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini, diharapkan Ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri berbentuk $Ax^2 + Bx + C = 0, A \neq 0$.

B. Uraian Materi

Persamaan trigonometri terkadang ada yang berbentuk persamaan kuadrat, atau mengharuskan kita untuk mengubah bentuknya menjadi persamaan kuadrat sehingga penyelesaian bisa kita peroleh dengan menggunakan aturan dalam persamaan kuadrat. Pengubahan bentuk persamaan trigonometri ke bentuk persamaan kuadrat trigonometri memerlukan wawasan Ananda tentang identitas trigonometri seperti misalnya:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

Jika ada kata persamaan kuadrat, tentu saja diperlukan kompetensi untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat tersebut, misalnya dengan pemfaktoran maupun melengkapkan kuadrat sempurna.

Perlu diingat pula rentang nilai untuk sinus dan cosinus adalah:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$
$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

Agar lebih jelas, cermati beberapa contoh berikut.

Contoh 1:

Tentukan himpunan penyelesaian untuk $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ untuk $0° \leq x \leq 360°$

Alternatif penyelesaian:

Misal $p = \cos x$

$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

$p^2 - p - 2 = 0$

$(p-2)(p+1) = 0$

$p_1 = 2$ atau $p_2 = -1$

$\cos x = 2$ atau $\cos x = -1$

($\cos x = 2$ tidak memenuhi)

Ingat, nilai $-1 \leq \cos x \leq 1$

Sehingga $\cos x = -1$

$x = 180° + k.360°$

diperoleh nilai $x = 180°$ atau himpunan penyelesaiannya $\{180°\}$

Contoh 2:

$2 - 2\cos^2 \alpha = \sin \alpha$ untuk $0° \leq \alpha \leq 360°$

Alternatif penyelesaian:

$2 - 2\cos^2 \alpha = \sin \alpha$

$2(1 - \cos^2 \alpha) = \sin \alpha$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$2\sin^2\alpha = \sin\alpha$

$2\sin^2\alpha - \sin\alpha = 0$

$\sin\alpha(2\sin\alpha - 1) = 0$

$\sin\alpha = 0$ atau $\sin\alpha = \frac{1}{2}$

a. $\sin\alpha = 0$
   $\alpha = 0° + k.360°$
   untuk $k = 0$ diperoleh $\alpha_1 = 0°$
   untuk $k = 1$ diperoleh $\alpha_2 = 360°$
   $\alpha = 180° + k.360°$
   untuk $k = 0$ diperoleh $\alpha_3 = 180°$

b. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$
   Kuadran I $\quad \alpha = 30° + k.360°$
   untuk $k = 0$ diperoleh $\alpha_4 = 30°$
   Kuadran II $\quad \alpha = (180° - 30°) + k.360°$
   $\alpha = 150° + k.360°$
   untuk $k = 0$ diperoleh $\alpha_5 = 150°$

Himpunan penyelesaian dari persamaan di atas adalah $\{0°, 30°, 150°, 180°, 360°\}$

C. Rangkuman

Hal yang harus diperhatikan dalam mencari solusi persamaan trigonometri berbentuk $Ax^2 + Bx + C = 0$

1. Rentang nilai sinus dan kosinus:
$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$$
$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$
2. Identitas trigonometri yang membantu penyelesaian
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

E. Latihan Soal

Latihan Soal Bentuk Essay
Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri berikut.

1. $2\sin^2 2x - 7\sin 2x + 3 = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$
2. $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$, $-180° \leq x \leq 180°$
3. $2\sin^2 x - 9\cos x + 3 = 0$, $0° \leq x \leq 360°$
4. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$, $0° \leq x \leq 360°$

Latihan Soal Bentuk Pilihan Ganda
Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Jika $\tan^2 x - \tan x - 6 = 0$ untuk $0 < x < \pi$, maka nilai $\sin x$ adalah ....
   A. $\left\{\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$
   B. $\left\{\frac{3\sqrt{10}}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$
   C. $\left\{-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$
   D. $\left\{\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$
   E. $\left\{\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right\}$

2. Semua solusi real dari persamaan $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ adalah ....
   A. $2\pi k, k \in Bulat$
   B. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Bulat$
   C. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Bulat$
   D. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Bulat$
   E. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Bulat$

3. Nilai $\sin x$ dari $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ yang memenuhi untuk $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ adalah ....
   A. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   B. $-\frac{1}{2}$
   C. $\frac{1}{2}$
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

4. Berikut adalah himpunan penyelesaian persamaan kuadrat trigonometri $2\sin^2 2x - 7\sin 2x + 3 = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$, kecuali ....
   A. $\frac{\pi}{12}$
   B. $\frac{5\pi}{12}$
   C. $\frac{8\pi}{12}$
   D. $\frac{13\pi}{12}$
   E. $\frac{17\pi}{12}$

5. Himpunan penyelesaian dari persamaan $2\sin^2 x - 9\cos x + 3 = 0$ untuk $0° \leq x \leq 360°$ adalah ....
   A. $\{30°, 60°\}$
   B. $\{30°, 300°\}$
   C. $\{30°, 330°\}$
   D. $\{60°, 300°\}$
   E. $\{60°, 330°\}$

Kunci Jawaban dan Pembahasan

Pembahasan Latihan Soal Bentuk Essay

1. $2\sin^2 2x - 7\sin 2x + 3 = 0$, $0 \le x \le 2\pi$

(SKOR MAKSIMUM 10)

Misalkan $y = \sin 2x$
$2y^2 - 7y + 3 = 0$
$(2y - 1)(y - 3) = 0$
$y = \frac{1}{2}$ atau $y = 3$ tidak memenuhi karena nilai sinus berkisar dari -1 sampai 1
$y = 3$ tidak memenuhi karena nilai sinus berkisar dari -1 sampai 1
$\sin 2x = \frac{1}{2}$
$2x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$ ……. (Kuadran I)
$x = \frac{\pi}{12} + k.\pi$
$x_1 = \frac{\pi}{12} + 0.\pi = \frac{\pi}{12}$
$x_2 = \frac{\pi}{12} + 1.\pi = \frac{13\pi}{12}$

$2x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k.2\pi$ ……. (Kuadran II)
$2x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi$
$x = \frac{5\pi}{12} + k.\pi$
$x_3 = \frac{5\pi}{12} + 0.\pi = \frac{5\pi}{12}$
$x_4 = \frac{5\pi}{12} + 1.\pi = \frac{17\pi}{12}$
HP= $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$

2. $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$, $-180° \le x \le 180°$

(SKOR MAKSIMUM 10)

Misal $p = \cos x$
$4p^2 - 4p - 3 = 0$
$(2p + 1)(2p - 3) = 0$
$p = -\frac{1}{2}$ atau $p = \frac{3}{2}$
$p = \frac{3}{2}$ tidak memenuhi karena nilai sinus berkisar dari -1 sampai 1
$\cos x = -\frac{1}{2}$
$x = (180° - 60°) + k.360°$ ……….. (Kuadran II)
$x = 120° + k.360°$
$x_1 = 120° + 0.360° = 120°$
$x = (180° + 60°) + k.360°$ ……….. (Kuadran III)
$x = (240°) + k.360°$
$x_2 = 240° + (-1).360° = -120°$

HP $= \{-120°, 120°\}$

3. $2\sin^2 x - 9\cos x + 3 = 0$, $0° \le x \le 360°$

(SKOR MAKSIMUM 15)

$2(1 - \cos^2 x) - 9\cos x + 3 = 0$ …………….. (substitusi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$)
$2 - 2\cos^2 x - 9\cos x + 3 = 0$
$-2\cos^2 x - 9\cos x + 5 = 0$
$2\cos^2 x + 9\cos x - 5 = 0$
Misal $p = \cos x$

$2p^2 + 9p - 5 = 0$
$(2p - 1)(p + 5) = 0$
$p = \frac{1}{2}$ atau $p = -5$
$p = -5$ tidak memenuhi
$p = \frac{1}{2}$
$\cos x = \frac{1}{2}$
$x = 60° + k.360°$ .... (Kuadran I)
$x_1 = 60°$
$x = -60° + k.360°$ .... (Kuadran IV)
$x_2 = 300°$
$\text{HP} = \{60°, 300°\}$

4. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$, $0° \leq x \leq 360°$

(SKOR MAKSIMUM 10)

$2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$ .... (substitusi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$)
$2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0$
$-2\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$
$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$
Misal $y = \cos x$
$2y^2 - 3y - 2 = 0$
$(2y + 1)(y - 2) = 0$
$y = -\frac{1}{2}$ atau $y = 2$
$y = 2$ tidak memenuhi
$\cos x = -\frac{1}{2}$
$\cos x = -\frac{1}{2}$
$x = (180° - 60°) + k.360°$ .... (Kuadran II)
$x = 120° + k.360°$
$x_1 = 120° + 0.360° = 120°$
$x = (180° + 60°) + k.360°$ .... (Kuadran III)
$x = (240°) + k.360°$
$x_2 = 240° + (-1).360° = -120°$

$\text{HP} = \{-120°, 120°\}$

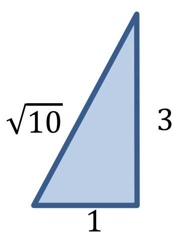
Pembahasan Latihan Soal Bentuk Pilihan Ganda

1. Kunci : A

Pembahasan

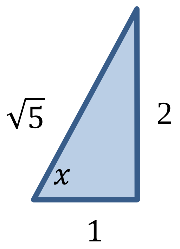
$\tan^2 x - \tan x - 6 = 0$ untuk $0 < x < \pi$
$(\tan x - 3)(\tan x + 2) = 0$
$\tan x = 3$ atau $\tan x = -2$

x



$\tan x = 3$

$\sin x = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3}{10}\sqrt{10}$



$\tan x = -2, 0 < x < \pi$, ada di kuadran I dan II
Nilai $\tan x$ negatif berarti ada di kuadran II, nilai $\sin x$ di kuadran II positif
$\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$

2. Kunci : A
$\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$
$(\cos x + 2)(\cos x - 1) = 0$
$\cos x = 1$
$x = 0 + k.2\pi = 2\pi k, k \in Bulat$

3. Kunci: C
$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$(2\sin x - 1)(\sin x + 3) = 0$
$\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = -3$ tidak memenuhi

4. Kunci: C
$2\sin^2 2x - 7\sin 2x + 3 = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$
Misal $p = \sin 2x$
$2p^2 - 7p + 3 = 0$
$(2p - 1)(p - 3) = 0$
$p = \frac{1}{2}$ atau $p = 3$ (tidak memenuhi)
$\sin 2x = \frac{1}{2}$
$2x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$ .... (Kuadran I)
$x = \frac{\pi}{12} + k.\pi$
$x_1 = \frac{\pi}{12} + 0.\pi = \frac{\pi}{12}$
$x_2 = \frac{\pi}{12} + 1.\pi = \frac{13\pi}{12}$
$2x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k.2\pi$ .... (Kuadran II)
$2x = \left(\frac{5\pi}{6}\right) + k.2\pi$
$x = \left(\frac{5\pi}{12}\right) + k.\pi$
$x_1 = \frac{5\pi}{12} + 0.\pi = \frac{5\pi}{12}$
$x_2 = \frac{5\pi}{12} + 1.\pi = \frac{17\pi}{12}$
$\text{HP} = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$
Jadi $\frac{8\pi}{12}$ tidak ada pada himpunan penyelesaian

5. Kunci: D
$2\sin^2 x - 9\cos x + 3 = 0$ untuk $0° \leq x \leq 360°$
$2(1 - \cos^2 x) - 9\cos x + 3 = 0$ .... (substitusi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$)
$-2\cos^2 x - 9\cos x + 5 = 0$
$2\cos^2 x + 9\cos x - 5 = 0$
Misal $y = \cos x$
$2y^2 + 9y - 5 = 0$
$(2y - 1)(y + 5) = 0$

$y = \frac{1}{2}$ atau $y = -5$ (tidak memenuhi)
$x = 60° + k.360°$ …………….. (Kuadran I)
$x_1 = 60°$
$x = -60° + k.360°$ …………….. (Kuadran IV)
$x_2 = 300°$
$\text{HP} = \{60°, 300°\}$

F. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah ananda dapat menentukan pemfaktoran persamaan kuadrat trigonometri?	Ya	Tidak
2	Apakah ananda dapat menentukan himpunan persamaan kuadrat trigonometri dalam rentang derajat?	Ya	Tidak
3	Apakah ananda dapat menentukan himpunan persamaan kuadrat trigonometri dalam rentang radian?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan riview pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

EVALUASI

1. Manakah di bawah ini yang bukan merupakan solusi dari $2\sin^2 x - 1 = 0$?
   A. 425°
   B. 585°
   C. 225°
   D. 135°
   E. 45°

2. Himpunan penyelesaian dari $2\sin x = 1$ untuk $0° \leq x \leq 360°$ adalah ....
   A. $\{60°\}$
   B. $\{60°, 120°\}$
   C. $\{60°, 150°\}$
   D. $\{30°, 150°\}$
   E. $\{30°, 150°, 210°\}$

3. Penyelesaian dari $\cos(40° + x) + \sin(40° + x) = 0$ untuk $0° \leq x \leq 360°$ adalah ....
   A. $x = 45°$ dan $x = 135°$
   B. $x = -95°$ dan $x = 275°$
   C. $x = 95°$ dan $x = 275°$
   D. $x = 5°$ dan $x = 95°$
   E. $x = 85°$ dan $x = 5°$

4. Himpunan penyelesaian dari $6\sin(2x + 60°) = 3$ untuk $0° \leq x \leq 180°$ adalah ....
   A. $\{30°, 150°\}$
   B. $\{45°, 165°\}$
   C. $\{15°, 150°\}$
   D. $\{30°, 60°\}$
   E. $\{120°, 135°\}$

5. Himpunan penyelesaian dari $\sin(x - 75°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dengan $0° \leq x \leq 360°$ adalah ....
   A. $\{60°, 135°\}$
   B. $\{60°, 195°\}$
   C. $\{135°, 195°\}$
   D. $\{135°, 315°\}$
   E. $\{195°, 315°\}$

6. Di bawah ini adalah himpunan penyelesaian dari persamaan $\cos 2x = \frac{1}{2}$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, kecuali ....
   A. $\frac{10}{6}\pi$
   B. $\frac{5}{6}\pi$
   C. $\frac{7}{6}\pi$
   D. $\frac{1}{6}\pi$
   E. $\frac{11}{6}\pi$

7. Berikut adalah salah satu penyelesaian persamaan $\sin 3x = \frac{1}{2}$ untuk $0° \leq x \leq 360°$, kecuali ....
   A. $290°$
   B. $250°$
   C. $130°$
   D. $40°$
   E. $10°$

8. Himpunan penyelesaian dari $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ untuk $0° \leq x \leq 360°$ adalah ....
   A. $\{60°, 120°\}$
   B. $\{30°, 150°\}$
   C. $\{120°, 240°\}$
   D. $\{150°, 210°\}$
   E. $\{240°, 300°\}$

9. Himpunan penyelesaian dari persamaan $4\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 2\cos^2 x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$ adalah ....
   A. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
   B. $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
   C. $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$
   D. $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
   E. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

10. Diketahui persamaan $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$ pada $0 < x < \frac{\pi}{2}$. himpunan penyelesaian $\sin x$ yang memenuhi adalah ....
    A. $\emptyset$
    B. $\{0\}$
    C. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$
    D. $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}$
    E. $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{3}\right\}$

Kunci Jawaban Evaluasi

1. A
2. B
3. C
4. B
5. C
6. A
7. A
8. C
9. B
10. E

DAFTAR PUSTAKA

B.K. Noormandiri, 2019. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Kelompok Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,* Jakarta : Erlangga.

Sembiring, S. 2007. *1700 Soal Bimbingan Pemantapan Matematika SMA/MA*. Badung : Yrama Widya.

Sukino. 2016. *Matematika untuk SMA/MA Kelas XI Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam.* Jakarta : Erlangga.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

JUJUR ADALAH LANGKAH AWAL BERANTAS KORUPSI

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Peminatan

KELAS XI

JUDUL MODUL

RUMUS JUMLAH DAN SELISIH SINUS DAN COSINUS

KELAS XI

PENYUSUN
YUYUN SRI YUNIARTI

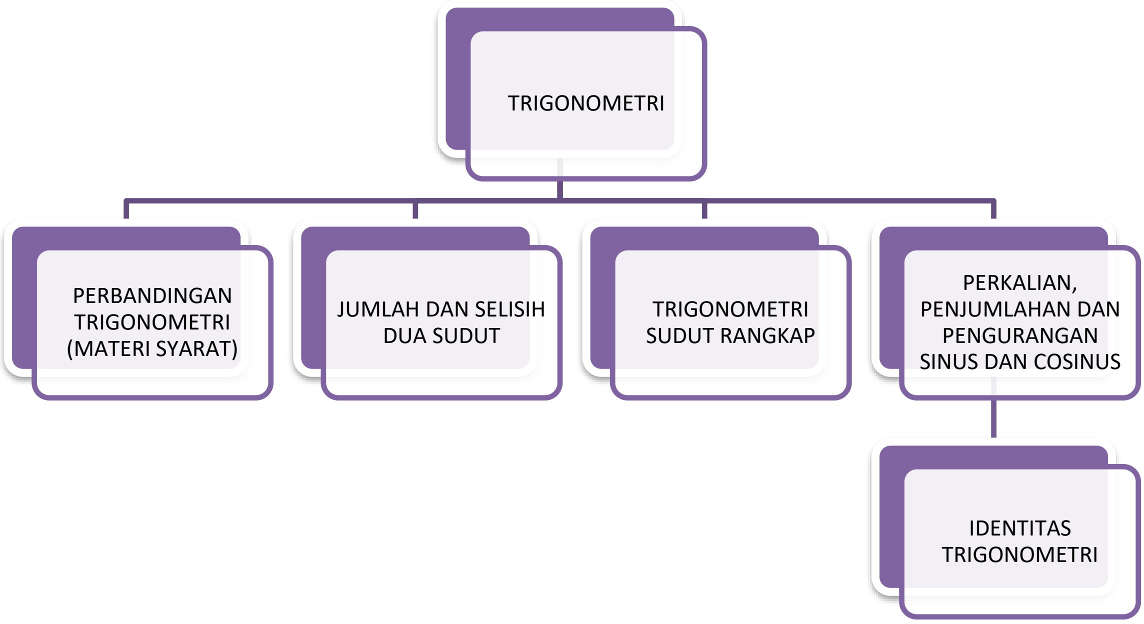
SMA NEGERI 1 PEDES

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Trigonometri	:	sebuah cabang matematika yang mempelajari hubungan yang meliputi panjang dan sudut segitiga
Identitas trigonometri	:	sebuah relasi atau kalimat terbuka yang bisa memuat fungsi-fungsi trigonometri dan juga bernilai benar untuk setiap penggantian variabel secara konstan anggota domain fungsinya
Persamaan trigonometri	:	persamaan yang mengandung perbandingan antara sudut trigonometri dalam bentuk x
Sinus	:	perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi miring (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90°)
Cosinus	:	perbandingan sisi segitiga yang terletak di sudut dengan sisi miring (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90°)
Tangen	:	perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi segitiga yang terletak di sudut (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90°)

PETA KONSEP


TRIGONOMETRI
PERBANDINGAN TRIGONOMETRI (MATERI SYARAT)
JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT
TRIGONOMETRI SUDUT RANGKAP
PERKALIAN, PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN SINUS DAN COSINUS
IDENTITAS TRIGONOMETRI

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Peminatan
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	14 JP
Judul Modul	:	Rumus Jumlah dan Selisih Sinus dan Cosinus

B. Kompetensi Dasar

3.2 Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus

4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus

C. Deskripsi Singkat Materi

Trigonometri (berasal dari bahasa Yunani yaitu, *trigonon* = tiga sudut dan *metro* = mengukur) adalah sebuah cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segi tiga dan fungsi trigonometrik seperti sinus, cosinus dan tangen. Trigonometri memiliki hubungan dengan geometri, meskipun ada ketidaksetujuan tentang apa hubungannya; bagi beberapa orang, trigonometri adalah bagian dari geometri. Sulit ditelusur siapa yang pertama kali mengklaim penemu ilmu ini, yang pasti ilmu ini sudah ada sejak jaman Mesir dan Babilonia 3000 tahun lampau.

Ilmuwan Yunani di masa Helenistik, Hipparchus (190 SM – 120 SM) diyakini adalah orang yang pertama kali menemukan teori tentang tigonometri dari keingintahuannya akan dunia. Adapun rumusan sinus, cosinus juga tangen diformulasikan oleh Surya Siddhanta, ilmuwan India yang dipercaya hidup sekitar abad 3 SM. Selebihnya teori tentang Trigonometri disempurnakan oleh ilmuwan-ilmuwan lain di jaman berikutnya. Trigonometri hanya mempelajari sisi-sisi dan sudut pada segitiga terutama segitiga siku-siku. Materi trigonometri sebenarnya termasuk matematika terapan yang umumnya berguna dibidang navigasi, konstuksi, dan surveying lahan tanah.

Aplikasi trigonometri yang paling sederhana adalah mengukur luas atau keliling tanah. Lebih jauh lagi adalah penentuan koordinat titik simpul dalam metoda elemen hingga untuk analisis dinamik pada jembatan non standar.

Adapun pemanfaatan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari, antara lain:

1. Untuk menghitung sudut serang (*angle of attack)* yang paling optimal dari suatu peluncur senjata agar mampu melontarkan projektil sejauh mungkin.
2. Menentukan berapa gradient tertinggi dari suatu tanjakan dijalan umum dipe gunungan, agar semua kendaraan (terutama sedan, dengan panjang sumbu badan yang tinggi, tetapi, ketinggian as roda rendah) dapat melewatinya dengan selamat,
3. Untuk menghitung berapa "*lift force*" suatu sayap profil pesawat, dengan kecepatan tertentu, yang tidak boleh dilewati. Bila nilai ini dilewati, maka pesawat akan mengalami stall (jatuh karena tidak memiliki daya angkat), khususnya perhitungan ini diperlukan pada pesawat pemburu.
4. Pada olah gerak teknis kapal selam dibawah air, dengan mengetahui sudut hidroplane depan dan belakang, menginterpolarisasikannya dengan kecepatan kapal, kita lalu dapat memperkirakan berapa kita harus mengisi compensating tank agar kapal welltrimm pada kecepatan tersebut.

5. Pada pengukuran ketinggian / kontur tanah, dengan mengetahui jarak tiang pengukur yang satu terhadap yang lain, dan beda ketinggian antara dua tempat tiang pengukur, maka kita akan dapat mengetahui berapa gradien kenaikan tanah yang kita ukur.
6. Mengukur luas atau keliling tanah.
7. Lebih jauh lagi adalah penentuan koordinat titik simpul dalam metoda elemen hingga untuk analisis dinamik pada jembatan non standar.
8. Kalau menjadi TNI, kita harus bisa menentukan titik-titik koordinat dimana kita berada dengan menggunakan grafik dan sudut-sudut trigonometri.
9. Matematikawan India adalah perintis penghitungan variabel aljabar yang digunakan untuk menghitung astronomi dan juga trigonometri.
10. Lagadha adalah matematikawan yang dikenal sampai sekarang yang menggunakan geometri dan trigonometri untuk penghitungan astronomi dalam bukunya Vedanga, Jyotisha, yang sebagian besar hasil kerjanya hancur oleh penjajah India.
11. Matematikawan Yunani Hipparchus sekitar 150 SM menyusun tabel trigonometri untuk menyelesaikan segi tiga.
12. Matematikawan Yunani lainnya, Ptolemy sekitar tahun 100 mengembangkan penghitungan trigonometri lebih lanjut.

Pada modul ini kita akan mempelajari trigonometri lanjutan. Ananda tentu masih ingat dengan pelajaran trigonometri di kelas X yang mempelajari tentang perbandingan trigonometri. Nahhh materi tersebut jangan dilupakan yaaa, sebab materi tersebut merupakan salah satu prasyarat untuk memahami modul ini. Yuk ah gak usah takut dengan trigonometri, kita belajar bertahap selangkah demi selangkah yaa..

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, mari berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Sebaiknya Ananda mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, Ananda mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.
4. Ananda dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai $\geq$ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika Ananda memperoleh nilai < 75 maka Ananda harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **3** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut (4 JP)

Kedua : Rumus Trigonometri Sudut Rangkap (4 JP)

Ketiga : Rumus Perkalian, Penjumlahan dan Pengurangan Sinus dan Cosinus (4 JP) dan Membuktikan Identitas Trigonometri (2 JP)

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

A. Tujuan Pembelajaran

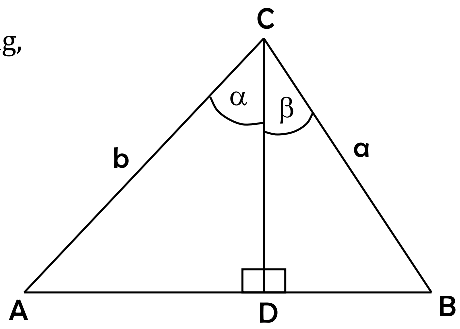
Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan Ananda dapat menggunakan rumus jumlah dan selisih sinus, cosinus atau tangen untuk menentukan nilai dari sudut sinus, cosinus maupun tangen dan kebalikannya yang tidak istimewa dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hal tersebut.

B. Uraian Materi

Pada kegiatan pembelajaran pertama, kita akan mencari rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut dari sinus dan cosinus. Perhatikan penurunannya yaa...

1. Rumus untuk sin (α + β) dan sin (α – β)

Menemukan rumus sin (α + β) :
Coba Ananda perhatikan gambar △ABC di samping,



dengan perbandingan trigonometri diperoleh :

$\frac{CD}{a} = \cos\ \beta$, sehingga CD = a . cos β .... (1)
$\frac{AD}{b} = \sin\ \alpha$, sehingga AD = b . sin α .... (2)
$\frac{CD}{b} = \cos\ \alpha$, sehingga CD = b . cos α .... (3)
$\frac{BD}{a} = \sin\ \beta$, sehingga BD = a . sin β .... (4)

Agar lebih mudah diingat:

$$\sin \theta = \frac{sisi\ depan\ sudut}{sisi\ miring}$$
$$\cos \theta = \frac{sisi\ samping\ sudut}{sisi\ miring}$$
$$\tan\ \theta = \frac{sisi\ depan\ sudut}{sisi\ samping\ sudut}$$

Dengan menggunakan persamaan (1) dan (2),

diperoleh :

Luas △ADC = $\frac{1}{2}$. AD x CD = $\frac{1}{2}$. b.sin α . a.cos β = $\frac{1}{2}$ab. sin α cos β ... (5)
Dengan menggunakan persamaan (3) dan (4), diperoleh :
Luas △BDC = $\frac{1}{2}$. BD x CD = $\frac{1}{2}$. a.sin β x b.cos α = $\frac{1}{2}$ab. cos α sin β ... (6)
Dari persamaan (5) dan (6) diperoleh Luas △ABC adalah :

Luas △ABC = Luas △ADC + Luas △BDC
= $\frac{1}{2}$ab. sin α cos β + $\frac{1}{2}$ab. cos α sin β
= $\frac{1}{2}$ab (sin α cos β + cos α sin β) …….. (7)

Dengan menggunakan rumus umum luas segitiga, diperoleh Luas ΔABC :

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin(\alpha + \beta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Dari persamaan (7) dan (8) diperoleh kesamaan :

$$\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} ab\,(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

Atau : $$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

Persamaan di atas merupakan ***rumus sinus jumlah dua sudut***. Adapun rumus sinus selisih dua sudut dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $-\beta$ ke dalam β , sehingga diperoleh :

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$$

Karena $\cos(-\beta) = \cos\beta$ dan $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, maka :

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

<u>Contoh Soal</u>

1. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   a. $\sin 75°$
   b. $\sin 15°$

   ***Penyelesaian* :**

   a. $\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45°$ ain $30°$

   $$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

   b. $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$

   $$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

2. Hitunglah nilai dari $\sin 43° \cos 13° - \cos 43° \sin 13°$!

   Penyelesaian :

   $\sin 43° \cos 13° - \cos 43° \sin 13° = \sin(43° - 13°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

3. Diketahui $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ dan $\cos\beta = \frac{5}{13}$ (α dan β sudut lancip).
   Tentukan nilai $\sin(\alpha + \beta)$!

   Penyelesaian :

   $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

   $\sin\alpha$ dan $\cos\beta$ telah diketahui, sehingga kita perlu menentukan $\cos\alpha$ dan $\sin\beta$ terlebih dahulu.

   Dari Identitas $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, maka $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ atau $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

   $\cos\alpha = +\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ .... ($\cos\alpha$ positif untuk α lancip)

   $$= +\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

sin β $= +\sqrt{1-cos^2\,\beta}$ .... (sin β positif untuk β lancip)

$= +\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

Jadi, sin (α + β) = sin α cos β + cos α sin β $= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{20}{65}+\frac{36}{65} = \frac{56}{65}$.

4. Rumus untuk cos (α + β) dan cos (α – β)

Dengan menggunakan rumus sudut berelasi (pelajaran Trigonometri di kelas X), kita dapat menemukan rumus cosinus jumlah dua sudut sebagai berikut.

cos α = sin (90° - α) , sehingga cos (α + β) = sin (90° – (α + β))

= sin ((90° – α) – β)

= sin (90° – α) cos β – cos (90° – α)sinβ

= cos α cos β – sin α sin β

Jadi, **cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β**

Rumus cosinus selisih dua sudut dapat diperoleh dengan mensubstitusikan –β ke dalam β pada rumus di atas, sehingga diperoleh :

cos (α + (–β)) = cos α cos (–β) – sin α sin (–β)

Karena cos (–β) = cos β dan sin (–β) = – sin β , maka :

cos (α – β) = cos α cos β + sin α sin β

Contoh Soal

1) Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   a. cos 75° b. cos 15°

   ***Penyelesaian* :**

   a. cos 75° = cos (45° + 30°) = cos 45° cos 30° – sin 45° sin 30°

   $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

   b. cos 15° = cos (45° – 30°) = cos 45° cos 30° + sin 45° sin 30°

   $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

2) Hitunglah nilai dari cos 105° cos 75° + sin 105° sin 75° !

   ***Penyelesaian* :**

   cos 105° cos 75° + sin 105° sin 75° = cos (105° – 75°) = cos 30°= $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

3) Diketahui cos α = $\frac{3}{5}$ dan cos β = $\frac{12}{13}$ (α dan β sudut lancip).

   Tentukan nilai cos (α + β) !

   Penyelesaian :

   cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β

   cos α dan cos β telah diketahui, sehingga kita perlu menentukan sin α dan sin β terlebih dahulu.

   Dari Identitas $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, maka $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

   sin α $= +\sqrt{1-cos^2\,\alpha}$ .... (sin α positif untuk α lancip)

$= +\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

sin β $= +\sqrt{1-cos^2\beta}$ ……………. (sin β positif untuk β lancip)

$= +\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$

Jadi, cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β = $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)=\frac{36}{65}-\frac{20}{65}=\frac{16}{65}$.

5. Rumus untuk tan (α + β) dan tan (α – β)

***Menemukan rumus untuk* tan (α + β) *dan* tan (α – β)**

Dengan menggunakan rumus sinus dan kosinus untuk jumlah dan selisih dua sudut, tunjukkan bahwa :

$$\boxed{tan\ \ (\alpha+\beta)=\frac{tan\,\alpha\,+\,tan\,\beta}{1-tan\,\alpha\ \ tan\,\beta}}$$

dan

$$\boxed{tan\ \ (\alpha-\beta)=\frac{tan\,\alpha\,-\,tan\,\beta}{1+tan\,\alpha\ \ tan\,\beta}}$$

Contoh Soal

1. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   a. tan 75° b. tan 15°

   ***Penyelesaian* :**

   a. tan 75° = tan (45° + 30°) = $\frac{tan\,45^o\,+\,tan\,30^o}{1-tan\,45^o\ \ tan\,30^o} = \frac{1\,+\,\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1-(1)\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ x $\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

   $= \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$

   b. tan 15° = tan (45° – 30°) = $\frac{tan\,45^o\,-\,tan\,30^o}{1+tan\,45^o\ \ tan\,30^o} = \frac{1\,-\,\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1+(1)\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ x $\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

   $= \frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}$

2. Diketahui cos A = $\frac{4}{5}$ dan sin B = $-\frac{15}{17}$, dengan A sudut di kuadran I dan B sudut di kuadran III. Tentukan nilai dari :
   tan (A – B)

   ***Penyelesaian* :**

   Untuk A di kuadran I, tan A = $\frac{y}{x}$ dengan x bernilai positif dan y bernilai positif.

   cos A = $\frac{4}{5}$, artinya x = 4, r = 5, dan y = $+\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$, Sehingga tan A = $\frac{3}{4}$.

   Untuk B di kuadran III, tan B = $\frac{y}{x}$ dengan x bernilai negatif dan y bernilai negatif.

   sin B = $-\frac{15}{17}$, artinya y = –15, r = 17, dan x = $-\sqrt{17^2-(-15)^2}=-\sqrt{64}=-8$,

   Sehingga tan B = $\frac{-15}{-8}=\frac{15}{8}$.

   Jadi tan (A – B) = $\frac{tan\,A\,-\,tan\,B}{1+tan\,A\ \ tan\,B} = \frac{\frac{3}{4}-\frac{15}{8}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{15}{8}\right)} = \frac{\frac{24-60}{32}}{\frac{32+45}{32}} = \frac{-36}{77} = -\frac{36}{77}$

Identitas Trigonometri Dasar

Nah ini catatan rumus biar Ananda ingat yaa

- $\csc\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha}$
- $\sec\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$
- $\cot\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}$
- $\tan\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ dan $\cot\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$
- $sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$
- $1 + tan^2\,\alpha = sec^2\,\alpha$
- $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

C. Rangkuman

Berikut adalah rumus-rumus jumlah dan selisih dua sudut:

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
5. $tan\ \ (\alpha + \beta) = \frac{tan\,\alpha\, +\, tan\,\beta}{1 - tan\,\alpha\ \ tan\,\beta}$
6. $tan\ \ (\alpha - \beta) = \frac{tan\,\alpha\, -\, tan\,\beta}{1 + tan\,\alpha\ \ tan\,\beta}$
7. Identitas Dasar:

- $\csc\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha}$
- $\sec\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$
- $\cot\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}$
- $\tan\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ dan $\cot\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$
- $sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$
- $1 + tan^2\,\alpha = sec^2\,\alpha$
- $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

D. Latihan Soal

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan tepat dan benar.

1. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   a. sin 105°
   b. sin 195°

2. Hitunglah nilai dari sin 42° cos 18° + cos 42° sin 18° !

3. Diketahui sin $\alpha = \frac{4}{5}$ dan cos $\beta = \frac{5}{13}$ (α dan β sudut lancip).
   Tentukan nilai sin (α - β) !

6. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   b. cos 105°   b. cos 195°

7. Hitunglah nilai dari cos 195° cos 75° + sin 195° sin 75° !

8. Diketahui cos $\alpha = \frac{3}{5}$ dan cos $\beta = \frac{12}{13}$ (α dan β sudut lancip).
   Tentukan nilai cos (α - β) !

9. Buktikan identitas : $\frac{cos(A+B)}{cos\,A.cos\,B} = 1 - tan\,A\,.\,tan\,B$

10. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
    a. tan 105°   b. tan 165°

11. Diketahui cos A = $\frac{4}{5}$ dan sin B = $-\frac{15}{17}$, dengan A sudut di kuadran I dan B sudut di kuadran III. Tentukan nilai dari :
    tan (A + B)

12. Buktikan identitas : $tan(\frac{\pi}{2} + x) = -cotan\ \ x$

Pembahasan:

Nomor	Pembahasan	Skor
1	*Penyelesaian* : a. sin 105° = sin (45° + 60°) = sin 45° cos 60° + cos 45° sin 60° $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$ b. sin 195° = sin (150° + 45°) = sin 150° cos 45° + cos 150° sin 45° $= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}$ $= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$	5 5
2	*Penyelesaian* : sin 42° cos 18° + cos 42° sin 18° = sin (42° + 18°) = sin 60° = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$	5
3	***Penyelesaian :*** sin (α - β) = sin α cos β - cos α sin β sin α dan cos β telah diketahui, sehingga kita perlu menentukan cos α dan sin β terlebih dahulu. Dari Identitas $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, maka $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ atau $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$. cos α $= +\sqrt{1 - sin^2\,\alpha}$ .... (cos α positif untuk α lancip) $= +\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ Sin β $= +\sqrt{1 - cos^2\,\beta}$ .... (sin β positif untuk β lancip) $= +\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$ Jadi, sin (α - β) = sin α cos β - cos α sin β $= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{20}{65} - \frac{36}{65} = -\frac{16}{65}$.	15
4	***Penyelesaian*** **:** a. cos 105° = cos (60° + 45°) = cos 60° cos 45° – sin 60° sin 45° $= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ b. cos 195° = cos (150° + 45°) = cos 150° cos 45° – sin 150° sin 45°	5

	$= \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} =$ $-\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	5
5	***Penyelesaian* :** cos 195° cos 75° + sin 195° sin 75° = cos (195° – 75°) $= \cos 120° = -\frac{1}{2}$	5
6	***Penyelesaian :*** cos (α - β) = cos α cos β + sin α sin β cos α dan cos β telah diketahui, sehingga kita perlu menentukan sin α dan sin β terlebih dahulu. Dari Identitas $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, maka $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ sin α $= +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ ……………. (sin α positif untuk α lancip) $= +\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ sin β $= +\sqrt{1 - \cos^2 \beta}$ ……………. (sin β positif untuk β lancip) $= +\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$ Jadi, cos (α - β) = cos α cos β + sin α sin β $= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{56}{65}$	15
7	***Penyelesaian* :** $\frac{\cos(A+B)}{\cos A \,.\, \cos B} = \frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\cos A \,.\, \cos B}$ $= \frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}$ = 1 – tan A tan B	10
8	***Penyelesaian* :** a. tan 105° = tan (60° + 45°) $= \frac{\tan 60^o + \tan 45^o}{1 - \tan 60^o \ \tan 45^o} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - (\sqrt{3})(1)}$ $= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \text{x} \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3}$ $= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$ b. tan 165° = tan (120° + 45°) $= \frac{\tan 120^0 + \tan 45^0}{1 - \tan 120^0 \ \tan 45^0} =$ $\frac{-\sqrt{3}+1}{1-(-\sqrt{3})(1)} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \text{x} \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ $= \frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-2} = -2 + \sqrt{3}$	10
9	***Penyelesaian* :** Untuk A di kuadran I, tan A $= \frac{y}{x}$ dengan x bernilai positif dan y bernilai positif.	

	$\cos A = \frac{4}{5}$, artinya $x = 4, r = 5$, dan $y = +\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$, Sehingga $\tan A = \frac{3}{4}$. Untuk B di kuadran III, $\tan B = \frac{y}{x}$ dengan x bernilai negatif dan y bernilai negatif. $\sin B = -\frac{15}{17}$, artinya $y = -15$, r = 17, dan $x = -\sqrt{17^2 - (-15)^2} = -\sqrt{64} = -8$, Sehingga $\tan B = \frac{-15}{-8} = \frac{15}{8}$. Jadi $\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A \ \tan B} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{15}{8}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{15}{8}\right)} = \frac{\frac{24+60}{32}}{\frac{32-45}{32}} = \frac{84}{-13} = -\frac{84}{13}$	10
10	***Penyelesaian :*** $tan(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{sin\frac{\pi}{2} cos\, x + cos\frac{\pi}{2}.sin\, x}{cos\frac{\pi}{2} cos\, x - sin\frac{\pi}{2} sin\, x} = \frac{(1)\, cos\, x + (0).sin\, x}{(0)\, cos\, x - (1)\, sin\, x}$ $= \frac{cos\, x}{-\, sin\, x} = -$ cotan x	10
TOTAL SKOR		100

E. Penilaian Diri

Isilah oleh Ananda sesuai dengan kenyataannya

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami proses menurunkan rumus-rumus trigonometri ?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menggunakan rumus-rumus trigonometri tersebut untuk menyelesaikan soal yang berkaitan dengan jumlah dan selisih dua sudut pada sinus dan cosinus?		
3.	Apakah Ananda telah mampu membedakan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut antara sinus dan cosinus?		

Jika Jawaban Ananda tidak maka Ananda dapat berdiskusi dengan teman atau guru matematika Ananda secara daring maupun tatap muka asal tetap memperhatikan protokol kesehatan yaa...

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Rumus Trigonometri Sudut Rangkap

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan Ananda dapat menggunakan rumus trigonometri sudut rangkap dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus tersebut.

B. Uraian Materi

1. Rumus Trigonometri Sudut Rangkap (Ganda)

Sudut ganda dari α dinyatakan dengan 2α. Rumus trigonometri sudut rangkap dapat diperoleh dengan menggunakan rumus trigonometri jumlah dua sudut.

- Rumus sinus sudut rangkap

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

- Rumus kosinus sudut rangkap

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\ &= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\end{aligned}$$

dengan menggunakan identitas $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, kita dapat menemukan bentuk lain untuk $\cos 2\alpha$:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \\ &= 2\cos^2\alpha - 1\end{aligned}$$

Atau :

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

- Rumus tangen sudut rangkap

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \tan(\alpha + \alpha) \\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\ \tan\alpha} \\ &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}\end{aligned}$$

Contoh Soal

1. Sederhanakan bentuk – bentuk di bawah ini !

   a. $2\sin 22{,}5° \cos 22{,}5°$
   b. $2\cos^2 67{,}5° - 1$
   c. $2\sin 3A\cos 3A$
   d. $1 - 2\sin^2 5A$
   e. $\cos^2 3A - \sin^2 3A$
   f. $\frac{2\tan 3\alpha}{1 - \tan^2 3\alpha}$

   Penyelesaian :

   a. $2\sin 22{,}5° \cos 22{,}5° = \sin 2(22{,}5°) = \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   b. $2\cos^2 67{,}5° - 1 = \cos 2(67{,}5°) = \cos 135° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c. 2 sin 3A cos 3A = sin 2(3A) = sin 6A

d. 1 – 2 $\sin^2$ 5A = cos 2(5A) = cos 10A

e. $\cos^2$ 3A – $\sin^2$ 3A = cos 2(3A) = cos 6A

f. $\frac{2\tan 3\alpha}{1-\tan^2 3\alpha}$ = tan 2(3α) = tan 6α

2. Diketahui sin A = $\frac{5}{13}$, dengan A lancip. Hitung nilai sin 2A, cos 2A, dan tan 2A !

Penyelesaian :

sin A = $\frac{5}{13}$, maka cos A = $+\sqrt{1-\sin^2 A} = +\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

Sehingga :

sin 2A = 2 sin A cos A = $2\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{120}{169}$

cos 2A = $\cos^2$ A – $\sin^2$ A = $\left(\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$

tan 2A = $\frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \frac{\frac{120}{169}}{\frac{119}{169}} = \frac{120}{119}$

3. Tunjukkan bahwa :

(sin θ + cos θ)^2 = 1 + sin 2θ

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}(\sin\theta+\cos\theta)^2 &= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\\ &= (\sin^2\theta+\cos^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta\\ &= 1 + 2\sin\theta\end{aligned}$$

2. Rumus Trigonometri untuk Setengah Sudut

Dari rumus trigonometri sudut ganda, dapat diturunkan rumus trigonometri untuk setengah sudut, yaitu dengan menetapkan $\frac{1}{2}\alpha$ sebagai sudut tunggal dan α sebagai sudut ganda.

- cos 2θ = 1 – 2 $\sin^2$ θ
  Misalkan 2θ = α dan θ = $\frac{\alpha}{2}$, maka : cos α = 1 – 2 $\sin^2\frac{\alpha}{2}$

  $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$

- cos 2θ = 2 $\cos^2$ θ – 1
  Misalkan 2θ = α dan θ = $\frac{\alpha}{2}$, maka : cos α = 2 $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ – 1

  $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$

- $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \Rightarrow \boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$

- Dengan mengalikan ruas kanan pada rumus tangen setengah sudut dengan $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, diperoleh :

  $\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \mathbf{x} \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{(1+\cos\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha}}{1+\cos\alpha}$

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

- Dengan mengalikan ruas kanan pada rumus tangen setengah sudut dengan $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, diperoleh :

$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \times \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2}}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha}}$

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Contoh Soal

Tanpa menggunakan tabel trigonometri atau kalkulator, hitunglah :

a. $\sin 22{,}5°$
b. $\cos 165°$
c. $\tan 67{,}5°$

Penyelesaian :

a. $22{,}5° = \frac{1}{2}(45°)$.

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, maka : $\sin 22{,}5° = +\sqrt{\frac{1-\cos 45^o}{2}}$ .... (+) karena di kuadran I

$= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

b. $165° = \frac{1}{2}(330°)$,

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, maka : $\cos 165° = -\sqrt{\frac{1+\cos 330^o}{2}}$ ...... (−) karena di kuadran II

$= -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

c. $67{,}5° = \frac{1}{2}(135°)$, dengan menggunakan : $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$,

maka : $\tan 67{,}5° = \frac{\sin 135^o}{1+\cos 135^o} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4-2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+1$

C. Rangkuman

Rumus Trigonometri Sudut Ganda:

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
- $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Rumus Trigonometri Sudut Tengahan:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

D. Latihan Soal

1. Sederhanakan bentuk – bentuk di bawah ini !
   a. $1 - 2\sin^2 5A$
   b. $\cos 2\,3A - \sin 2\,3A$
   c. $\frac{2\,tan\,3\alpha}{1-tan^2\,3\alpha}$

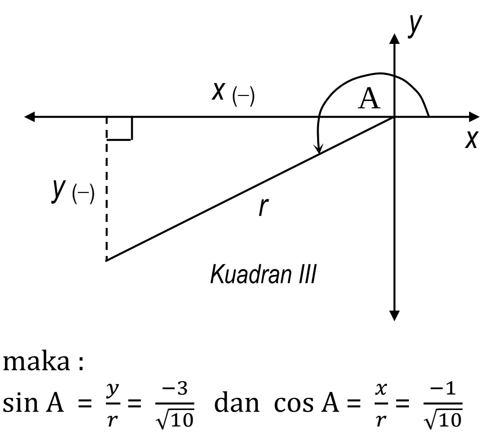
2. Diketahui $\sin A = \frac{3}{5}$, dengan A lancip. Hitung nilai sin 2A, cos 2A, dan tan 2A !

3. Jika tan A = 3 dan A di kuadran III, hitunglah nilai sin 2A, cos 2A, dan tan 2A.

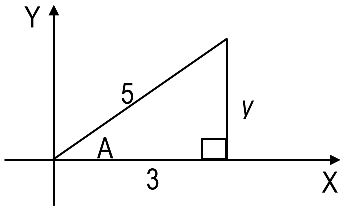
4. Tunjukkan bahwa :
   a. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$
   b. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ (petunjuk : nyatakan bahwa 3A = 2A + A)
   c. $\frac{cos^4\,\alpha - sin^4\,\alpha}{1-tan^4\,\alpha} = cos^4\,\alpha$

5. Jika $\tan\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}$, A sudut lancip, hitunglah tan A dan tan 2A !

Pembahasan

Nomor	Pembahasan	Skor
1	*Penyelesaian* : a. $1 - 2\sin^2 5A = \cos 2(5A) = \cos 10A$ b. $\cos^2 3A - \sin 2\ 3A = \cos 2(3A) = \cos\ 6A$ c. $\frac{2\tan 3\alpha}{1-\tan^2 3\alpha} = \tan 2(3\alpha) = \tan 6\alpha$	5 5 5
2	*Penyelesaian* : $\sin A = \frac{3}{5}$, maka $\cos A = +\sqrt{1-\sin^2 A} = +\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ Sehingga : $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$ $\tan 2A = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$	5 5 5
3	*Penyelesaian :* Untuk menentukan sin A dan cos A dengan tan A yang diketahui, maka sebaiknya digunakan segitiga siku-siku dengan A di kuadran III, seperti pada gambar. $\tan A = \frac{y}{x}$ dengan $\tan A = 3 = \frac{-3}{-1}$ A di kuadran III, berarti $x = -1$ dan $y = -3$, sehingga $r = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$  maka : $\sin A = \frac{y}{r} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$ dan $\cos A = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$ $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	30

	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)^2 - \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1}{10} - \frac{9}{10} =$ $\frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}$ $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2(3)}{1-(3)^2} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$	
4	*Penyelesaian :* a. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$ $= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta$ $= 1 + 2\sin\theta$ b. $\sin 3A = \sin(2A + A)$ $= \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A$ $= (2\sin A\cos A)\cos A + (\cos^2 A - \sin^2 A)\sin A$ $= 2\sin A\cos^2 A + \cos^2 A\sin A - \sin^3 A$ $= 3\sin A\cos^2 A - \sin^3 A$ $= 3\sin A(1 - \sin^2 A) - \sin^3 A$ **(ingat : $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$)** $= 3\sin A - 3\sin^3 A - \sin^3 A$ $= 3\sin A - 4\sin^3 A$ (terbukti) c. $\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{1-\tan^4\alpha} = \frac{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)(1-\tan^2\alpha)}$ **Ingat bahwa:** **$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$** **$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$** **$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$** $= \frac{(1)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{(\sec^2\alpha)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}$ $= \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}$ $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ $= \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}$ $= \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\frac{1}{\cos^4\alpha}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = \cos^4\alpha$ (terbukti)	10 10 10
	Penyelesaian : $\tan\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1-\cos A}{1+\cos A}$ $\Leftrightarrow 1 + \cos A = 4 - 4\cos A$	

5	$\Leftrightarrow$ 5 cos A = 3 $\Leftrightarrow$ cos A = $\frac{3}{5}$  cos A = $\frac{3}{5}$, berarti x = 3, r = 5, dan $y = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} =$ 4 maka : tan A = $\frac{y}{x} = \frac{4}{3}$ tan 2A = $\frac{2\,tan\,A}{1-tan^2\,A} = \frac{2\left(\frac{4}{3}\right)}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}} = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = \frac{8}{3}$ x $\left(-\frac{9}{7}\right) =$ $-\frac{24}{7}$	10
TOTAL SKOR		100

E. Penilaian Diri

Isilah oleh Ananda sesuai dengan kenyataannya

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami proses menurunkan rumus-rumus trigonometri sudut rangkap?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menggunakan rumus-rumus trigonometri tersebut untuk menyelesaikan soal yang berkaitan dengan sinus, cosinus dan tangen sudut rangkap?		
3.	Apakah Ananda telah mampu membedakan rumus trigonometri sudut rangkap untuk sinus, cosinus maupun tangen?		

Jika Jawaban Ananda tidak maka Ananda dapat berdiskusi dengan teman atau guru matematika Ananda secara daring maupun tatap muka asal tetap memperhatikan protokol kesehatan yaa...

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

Rumus Perkalian, Penjumlahan dan Pengurangan sinus dan cosinus

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan Ananda dapat menurunkan dan menggunakan rumus perkalian, penjumlahan maupun pengurangan dari sinus dan kosinus dan dapat menyelesaikan amsalah yang berkaitan dengan rumus tersebut.

B. Uraian Materi

1. Rumus Konversi Perkalian ke Penjumlahan atau Pengurangan

Pada pembelajaran pertama telah dipelajari rumus fungsi trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut. Pada bagian ini, kita akan menggunakan rumus-rumus tersebut untuk menemukan rumus konversi perkalian ke penjumlahan atau pengurangan dan sebaliknya.

- **Rumus perkalian sinus dan kosinus**

$$\begin{array}{rcl} \sin(\alpha+\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \hline \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) & = & 2\sin\alpha\cos\beta \end{array} \; +$$

Jadi,

$$\boxed{2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$$

Atau

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]}$$

$$\begin{array}{rcl} \sin(\alpha+\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \hline \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) & = & 2\cos\alpha\sin\beta \end{array} \; -$$

Jadi,

$$\boxed{2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$$

atau

$$\boxed{\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]}$$

- **Rumus perkalian kosinus dan kosinus**

$$\begin{array}{rcl} \cos(\alpha+\beta) &=& \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &=& \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &=& 2\cos\alpha\cos\beta \end{array} \; +$$

Jadi,

$$\boxed{2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$$

atau

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]}$$

- **Rumus perkalian sinus dan sinus**

$$\begin{array}{rcl} \cos(\alpha+\beta) &=& \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &=& \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \hline \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) &=& -2\sin\alpha\sin\beta \end{array} \; -$$

Jadi,

$$\boxed{\mathbf{-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}}$$

atau

$$\boxed{\mathbf{\sin\alpha\sin\beta} = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]}$$

Contoh Soal

1. Nyatakan bentuk perkalian berikut sebagai penjumlahan/pengurangan
   a. $4\cos 2x\cos 3x$
   b. $3\sin 4x\sin 6x$
   Penyelesaian :

   a. $4\cos 2x\cos 3x = 2(2\cos 2x\cos 3x) = 2[\cos(2x+3x)+\cos(2x-3x)]$
   $= 2[\cos 5x+\cos(-x)] = 2\cos 5x + 2\cos x$

   b. $3\sin 4x\sin 6x = -\frac{3}{2}(-2\sin 4x\sin 6x) = -\frac{3}{2}[\cos(4x+6x)-\cos(4x-6x)]$
   $= -\frac{3}{2}[\cos 10x - \cos(-2x)] = -\frac{3}{2}\cos 10x + \frac{3}{2}\cos 2x$

2. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah nilai eksak dari :
   a. $\cos 52{,}5°\sin 7{,}5°$
   b. $2\sin 127{,}5°\sin 97{,}5°$
   Penyelesaian :

   a. $\cos 52{,}5°\sin 7{,}5° = \frac{1}{2}[\sin(52{,}5°+7{,}5°)-\sin(52{,}5°-7{,}5°)] = \frac{1}{2}(\sin 60° - \sin 45°)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

b. $2 \sin 127{,}5° \sin 97{,}5° = -[\cos(127{,}5° + 97{,}5°) - \cos(127{,}5° - 97{,}5°)]$
$= -(\cos 225° - \cos 30°) = -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$

2. Rumus Konversi Penjumlahan atau Pengurangan ke Perkalian

Untuk menemukan rumus konversi penjumlahan/pengurangan ke perkalian, maka perhatikan rumus konversi perkalian ke penjumlahan/pengurangan pada bagian pertama :

- $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
- $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$
- $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
- $-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$

Misalkan $P = \alpha + \beta$ dan $Q = \alpha - \beta$
Maka diperoleh :

$$P + Q = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(P + Q)$$

dan

$$P - Q = (\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}(P - Q)$$

Jika kita substitusikan pemisalan di atas pada rumus konversi perkalian ke penjumlahan atau pengurangan, maka diperoleh rumus konversi penjumlahan/pengurangan ke perkalian sebagai berikut :

- $\sin P + \sin Q = 2 \sin \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$
- $\sin P - \sin Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \sin \frac{1}{2}(P - Q)$
- $\cos P + \cos Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$
- $\cos P - \cos Q = -2 \sin \frac{1}{2}(P + Q) \sin \frac{1}{2}(P - Q)$

Contoh Soal

1. Ubahlah setiap bentuk di bawah ini ke dalam bentuk perkalian !

   a. $\cos 3P + \cos 7P$
   b. $\sin 8x - \sin 2x$

   Penyelesaian :
   a. $\cos 3P + \cos 7P = 2 \cos \frac{1}{2}(3P + 7P) \cos \frac{1}{2}(3P - 7P)$
   $= 2 \cos 5P \cos(-2P) = 2 \cos 5P \cos 2P$
   b. $\sin 8x - \sin 2x = 2 \cos \frac{1}{2}(8x + 2x) \sin \frac{1}{2}(8x - 2x) = 2 \cos 5x \sin 3x$

2. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah nilai eksak dari :

   a. $\sin 15° + \sin 75°$
   b. $\cos 195° - \cos 105°$

   Penyelesaian :
   a. $\sin 15° + \sin 75° = 2 \sin \frac{1}{2}(15° + 75°) \cos \frac{1}{2}(15° - 75°) = 2 \sin 45° \cos(-30°)$
   $= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

b. $\cos 195° - \cos 105° = -2 \sin \frac{1}{2}(195° + 105°) \sin \frac{1}{2}(195° - 105°) = -2 \sin 150°$ $\sin 45°$

$$= -2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

3. Identitas Trigonometri

Langkah – langkah yang dapat digunakan untuk membuktikan suatu identitas trigonometri atau persamaan trigonometri :

1) Selesaikan salah satu ruas (pilih ruas yang bentuknya kompleks/tidak sederhana)
2) Pergunakan operasi aljabar yang sesuai dan rumus – rumus trigonometri yang telah dipelajari sebelumnya.
3) Samakan hasilnya dengan ruas yang lain.

Contoh Soal

1. Buktikan identitas di bawah ini :

a. $\frac{\cos x+\cos y}{\sin x-\sin y} = \cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$

b. $\sin(45° + x) - \sin(45° - x) = \sqrt{2}\ \sin x$

Penyelesaian **:**

a. Ruas kiri $= \frac{\cos x+\cos y}{\sin x-\sin y}$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$= \cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$ = Ruas kanan (terbukti)

b. Ruas kiri $= \sin(45° + x) - \sin(45° - x)$

$$= 2\cos\left(\frac{(45^o+x)+(45^o-x)}{2}\right)\sin\left(\frac{(45^o+x)-(45^o-x)}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{90^o}{2}\right)\sin\left(\frac{2x}{2}\right)$$

$$= 2\cos 45^o \sin x$$

$$= 2.\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).\sin x$$

$= \sqrt{2}\ \sin x$ = Ruas kanan (terbukti)

2. Misalkan $P + Q + R = 180^o$, buktikan bahwa $\sin 2P + \sin 2Q + \sin 2R = 4 \sin P . \sin Q . \sin R$!

***Penyelesaian* :**

Ruas kiri = sin 2P + sin 2Q + sin 2R

= (sin 2P + sin 2Q) + sin 2R

= $2\,sin\left(\frac{2P+2Q}{2}\right) cos\left(\frac{2P-2Q}{2}\right)$ + sin 2R

= 2 sin (P + Q) cos (P – Q) + 2 sin R cos R

= 2 sin R cos (P – Q) + 2 sin R cos R

= 2 sin R (cos (P – Q) + cos R)

= 2 sin R (cos (P – Q) – cos (P + Q))

= 2 sin R $\left(-2\,sin\left(\frac{(P-Q)+(P+Q)}{2}\right) sin\left(\frac{(P-Q)-(P+Q)}{2}\right)\right)$

= 2 sin R $\left(-2\,sin\left(\frac{2P}{2}\right) sin\left(\frac{-2Q}{2}\right)\right)$

= 2 sin R (2 sin P sin Q)

= 4 sin P sin Q sin R

= Ruas kanan (terbukti)

> *Catatan* :
> P + Q + R = 180°
> R = 180° – (P + Q)
> P + Q = 180° – R
> sin (P + Q) = sin (180° – R)
> = sin R
> cos R = cos (180° – (P + Q))
> = – cos (P + Q)

C. Rangkuman

Rumus-rumus di atas dapat kita rangkum sebagai berikut:

1. $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
2. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
3. $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$
4. $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$
5. $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
6. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
7. $-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$
8. $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$
9. $\sin P + \sin Q = 2 \sin \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$
10. $\sin P - \sin Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \sin \frac{1}{2}(P - Q)$
11. $\cos P + \cos Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$
12. $\cos P - \cos Q = -2 \sin \frac{1}{2}(P + Q) \sin \frac{1}{2}(P - Q)$

D. Latihan Soal

Kerjakan soal latihan ini yaa...

1. Nyatakan bentuk perkalian berikut sebagai penjumlahan/pengurangan !
   a. $2 \sin 3x \cos 2x$
   b. $\cos x \sin 5x$

2. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah nilai eksak dari :
   a. $\sin 75° \cos 15°$
   b. $3 \cos 105° \cos 15°$

3. Buktikan identitas $\sin(A + B) \sin (A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

4. Hitunglah nilai dari $\sin 10° \sin 50° \sin 70°$!

5. Ubahlah setiap bentuk di bawah ini ke dalam bentuk perkalian !
   a. $\sin 3A + \sin A$
   b. $\cos 6x - \cos 2x$

6. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah nilai eksak dari :
   $\frac{\sin 75^o - \sin 15^o}{\cos 75^o + \cos 15^o}$

7. Buktikan bahwa :
   a. $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4\,x$
   b. $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = \cos 2\alpha\,(1 + 2 \cos \alpha)$

Pembahasan

Nomor	Pembahasan	Skor
1	*Penyelesaian* : a. $2 \sin 3x \cos 2x = \sin (3x + 2x) + \sin (3x - 2x)$ $= \sin 5x + \sin x$ b. $\cos x \sin 5x = \frac{1}{2}(2 \cos x \sin 5x)$ $= \frac{1}{2}[\sin (x + 5x) - \sin (x - 5x)]$ $= \frac{1}{2}[\sin 6x - \sin(-4x)] = \frac{1}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 4x$	**5** **5**
2	*Penyelesaian* : a. $\sin 75° \cos 15° = \frac{1}{2}[\sin(75° + 15°) + \sin (75° - 15°)]$ $= \frac{1}{2}(\sin 90° + \sin 60°)$ $= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}$ b. $3 \cos 105° \cos 15° = \frac{3}{2}(2 \cos 105° \cos 15°)$ $= \frac{3}{2}[\cos (105° + 15°) + \cos (105° - 15°)]$ $= \frac{3}{2}(\cos 120° + \cos 90°) = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2} + 0\right) = -\frac{3}{4}$	**5** **5**
3	*Penyelesaian* : $\sin(A + B) \sin (A - B)$ $= -\frac{1}{2}[\cos ((A + B) + (A - B)) - \cos ((A + B) - (A - B))]$ $= -\frac{1}{2}[\cos 2A - \cos 2B]$ $= -\frac{1}{2}[(1 - 2 \sin^2 A) - (1 - 2 \sin^2 B)]$ $= -\frac{1}{2}[-2 \sin^2 A + 2 \sin^2 B]$ $= \sin^2 A - \sin^2 B$ (terbukti)	**15**
4	*Penyelesaian* : $\sin 10° \sin 50° \sin 70°$ $= \sin 10°\left[-\frac{1}{2}(\cos(50^o + 70^o) - \cos(50^o - 70^o))\right]$ $= \sin 10°\left[-\frac{1}{2}\cos 120^o + \frac{1}{2}\cos(-20^o)\right]$ $= \sin 10°\left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos 2 \cos 20^o\right]$ $= \frac{1}{4}\sin 10° + \frac{1}{2}\sin 10^o \cos 20^o$ $= \frac{1}{4}\sin 10° + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\sin(10^o + 20^o) + \sin(10^o - 20^o))\right]$ $= \frac{1}{4}\sin 10° + \frac{1}{4}[\sin 30^o + \sin(-10^o)]$ $= \frac{1}{4}\sin 10° + \frac{1}{4}\sin 30^o - \frac{1}{4}\sin 10^o$ $= \frac{1}{4}\sin 30° = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$	**20**

5	*Penyelesaian* : a. $\sin 3A + \sin A = 2 \sin \frac{1}{2}(3A + A) \cos \frac{1}{2}(3A - A) = 2 \sin 2A \cos A$ b. $\cos 6x - \cos 2x = -2 \sin \frac{1}{2}(6x + 2x) \sin \frac{1}{2}(6x - 2x) = -2 \sin 4x \sin 2x$	**5** **5**
6	*Penyelesaian* : $\frac{\sin 75^o - \sin 15^o}{\cos 75^o + \cos 15^o} = \frac{2 \cos\frac{1}{2}(75^o+15^o) \sin\frac{1}{2}(75^o-15^o)}{2 \cos\frac{1}{2}(75^o+15^o) \cos\frac{1}{2}(75^o-15^o)}$ $= \frac{2 \cos 45^o \sin 30^o}{2 \cos 45^o \cos 30^o}$ $= \frac{\sin 30^o}{\cos 30^o} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$	**15**
7	*Penyelesaian* : a. $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \frac{2 \sin\frac{1}{2}(5x+3x) \cos\frac{1}{2}(5x-3x)}{2 \cos\frac{1}{2}(5x+3x) \cos\frac{1}{2}(5x-3x)}$ $= \frac{2 \sin 4x \cos x}{2 \cos 4x \cos x} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \tan 4x$ b. $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = (\cos 3\alpha + \cos \alpha) + \cos 2\alpha$ $= [\, 2 \cos \frac{1}{2}(3\alpha + \alpha) \cos \frac{1}{2}(3\alpha - \alpha)\,] + \cos 2\alpha$ $= 2 \cos 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha$ $= \cos 2\alpha\,(1 + 2 \cos \alpha)$	**10** **10**
TOTAL SKOR		**100**

E. Penilaian Diri

Isilah oleh Ananda sesuai dengan kenyataannya

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami proses menurunkan rumus-rumus trigonometri pada kegiatan pembelajaran ketiga ini?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menggunakan rumus-rumus trigonometri tersebut untuk menyelesaikan soal yang berkaitan dengan perkalian, penjumlahan dan pengurangan sinus, cosinus dan tangen?		
3.	Apakah Ananda telah mampu membedakan rumus trigonometri tersebut?		

Jika Jawaban Ananda tidak maka Ananda dapat berdiskusi dengan teman atau guru matematika Ananda secara daring maupun tatap muka asal tetap memperhatikan protokol kesehatan yaa...

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat

1. Jika $\cos 2A = -\frac{7}{25}\ untuk\ 180^0 \leq 2A \leq 270^0$ maka
   A. $\sin A = \pm\frac{4}{5}$
   B. $\cos A = \frac{3}{5}$
   C. $\tan A = \frac{4}{3}$
   D. $\sin A = -\frac{4}{5}$
   E. $\csc A = \frac{5}{4}$

2. Nilai dari cos 265^0 – cos 95^0 adalah
   A. - 2
   B. – 1
   C. 0
   D. 1
   E. 2

3. Nilai dari sin 75^0 – sin 165^0 = ...
   A. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$
   B. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$
   C. $\frac{1}{4}\sqrt{6}$
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

4. Diketahui $\cos x = \frac{3}{5}\ untuk\ 0^0 < x < 90^0\ nilai\ dari \sin 3x + \sin x = \cdots$
   A. $\frac{75}{125}$
   B. $\frac{96}{125}$
   C. $\frac{108}{125}$
   D. $\frac{124}{125}$
   E. $\frac{144}{125}$

5. Diketahui sin A + sin B = 1 dan cos A + cos B = $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ nilai dari cos (A - B) =...
   A. 1
   B. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   D. $\frac{1}{2}$
   E. $\frac{1}{3}$

6. Diketahui x dan y sudut lancip dengan $x - y = \frac{\pi}{6}$ jika $\tan x = 3\tan\ y, maka\ x + y = \cdots$
   A. $\frac{\pi}{2}$
   B. $\frac{\pi}{3}$
   C. $\frac{\pi}{6}$
   D. $\frac{2\pi}{3}$
   E. π

7. Diketahui $\sin\alpha = \frac{3}{5}\ dan \cos\beta = \frac{12}{13}\ (\alpha\ dan\ \beta\ sudut\ lancip)$. Nilai dari $\sin(\alpha + \beta) =$..
   A. $\frac{56}{65}$
   B. $\frac{48}{65}$
   C. $\frac{36}{65}$
   D. $\frac{20}{65}$
   E. $\frac{16}{65}$

8. Diketahui $\cos x = \frac{12}{13} nilai \tan\frac{1}{2}x =$
   A. $\frac{1}{26}$
   B. $\frac{1}{5}$
   C. $\frac{1}{\sqrt{26}}$
   D. $\frac{5}{\sqrt{26}}$
   E. $\frac{5}{13}$

9. Bentuk lain dari $\frac{1+\cos 2A}{\sin 2A}$ adalah
   A. Sin A
   B. Cos A
   C. Cot A
   D. Tan A
   E. 1 + sin A

10. Diketahui $\tan\alpha = 1\ dan\ tan\beta = \frac{1}{3}\ \alpha, \beta\ sudut\ lancip, maka \sin(\alpha - \beta) = \cdots$
   A. $\frac{2}{3}\sqrt{5}$
   B. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
   C. $\frac{1}{2}$
   D. $\frac{2}{5}$
   E. $\frac{1}{5}$

11. Jika tan (A + B) = 5 dan tan (A – B) = 2 maka tan 2A = ...
    A. 7
    B. $\frac{7}{9}$
    C. $-\frac{7}{9}$
    D. $\frac{9}{7}$
    E. $-\frac{9}{7}$

12. Jika $A = 20^0\ dan\ B = 25^0$ maka nilai dari (1 + tan A)(1 + tan B) adalah...
    A. 0
    B. 1
    C. 2
    D. 3
    E. 4

13. Nilai dari 20 cos 20^0 cos 40^0 cos 80^0 adalah ...
    A. $\frac{1}{2}$
    B. $\frac{3}{2}$
    C. $\frac{5}{2}$
    D. $\frac{7}{2}$
    E. $\frac{9}{2}$

14. Pada segitiga siku-siku ABC berlaku cos A cosB = $\frac{1}{3}$ nilai dari cos 2A =
    A. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$
    B. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
    C. 1
    D. $\frac{1}{9}$
    E. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$

Kunci Jawaban Evaluasi

1. E
2. C
3. D
4. E
5. E
6. A
7. A
8. B
9. C
10. B
11. C
12. C
13. C
14. E

DAFTAR PUSTAKA

Tim. (2019). Belajar Praktis Matematika. Klaten : Viva Pakarindo

Matematika Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (2014). Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Siswanto. (2005). *Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya*. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Willa Adrian. (2008). *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya.

https://mathcyber1997.com/soal-dan-bahas-penerapan-identitas-trigonometri/ diakses tanggal 6 Oktober 2020 pkl 22.30 WIB

http://likha-ika.blogspot.com/2013/04/babi-pendahuluan-a.html diakses tanggal 6 Oktober 2020 pkl 21.30 WIB
s

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Peminatan

KELAS XI

LINGKARAN

MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XI

PENYUSUN
Asmar Achmad

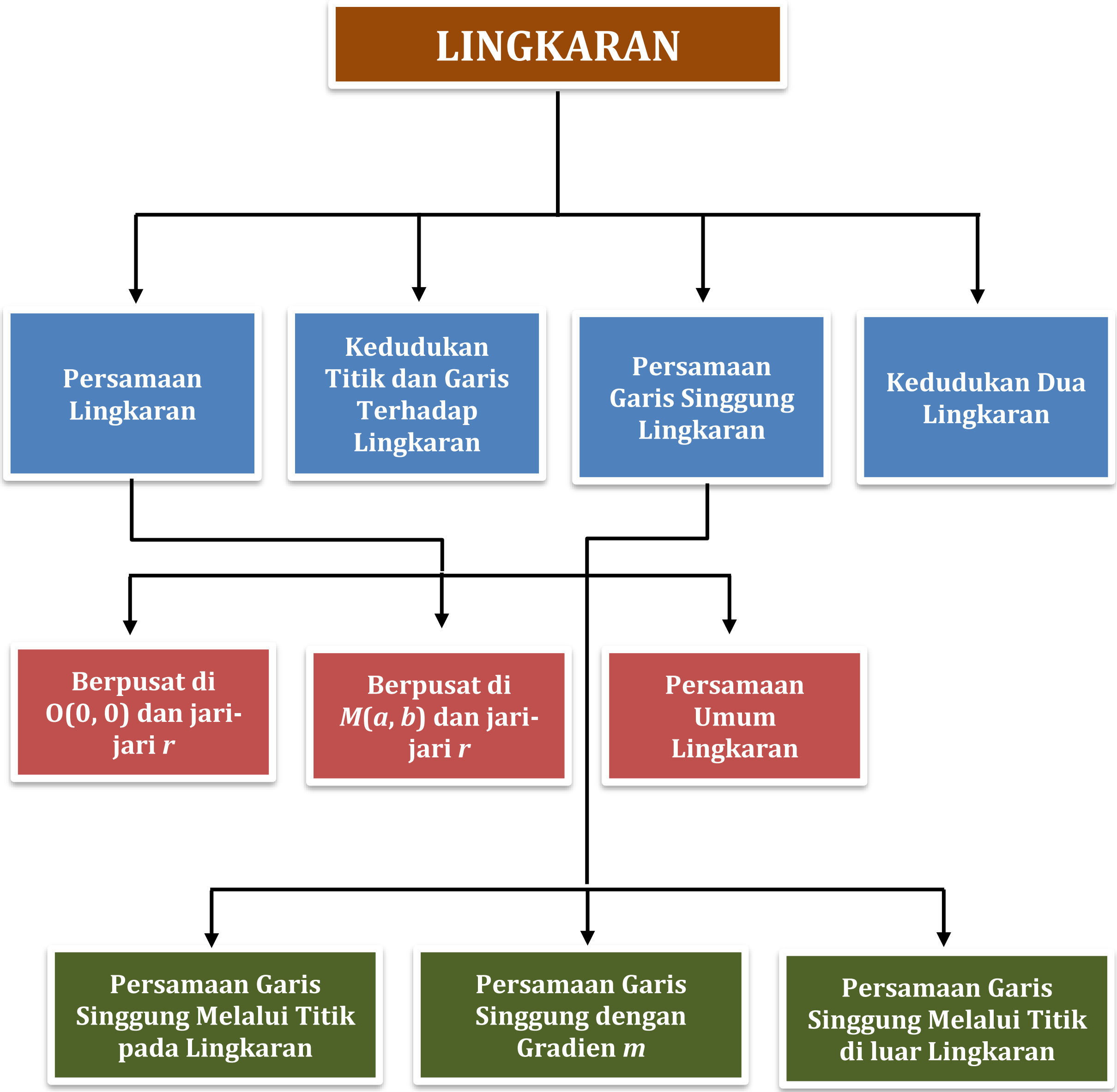
SMA Negeri 17 Makassar

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Lingkaran	:	Tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu yang disebut pusat lingkaran.
Jari-jari lingkaran	:	Jarak titik pusat ke titik pada lingkaran.
Garis singgung lingkaran	:	Garis yang melalui atau memotong di satu titik pada lingkaran.
Berkas lingkaran	:	Lingkaran-lingkaran yang dibuat melalui dua titik potong lingkaran yang diketahui.
Tali busur sekutu	:	Tali busur yang melalui titik potong dua lingkaran

PETA KONSEP


LINGKARAN
Persamaan Lingkaran
Kedudukan Titik dan Garis Terhadap Lingkaran
Persamaan Garis Singgung Lingkaran
Kedudukan Dua Lingkaran
Berpusat di $O(0, 0)$ dan jari-jari r
Berpusat di $M(a, b)$ dan jari-jari r
Persamaan Umum Lingkaran
Persamaan Garis Singgung Melalui Titik pada Lingkaran
Persamaan Garis Singgung dengan Gradien m
Persamaan Garis Singgung Melalui Titik di luar Lingkaran

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Peminatan
Kelas	:	XI
Alokasi Waktu	:	12 JP (4 Kegiatan Pembelajaran)
Judul Modul	:	Lingkaran

B. Kompetensi Dasar

3.3. Menganalisis lingkaran secara analitik.

4.3. Menyelesaikan masalah yang terkait dengan lingkaran.

C. Deskripsi Singkat Materi

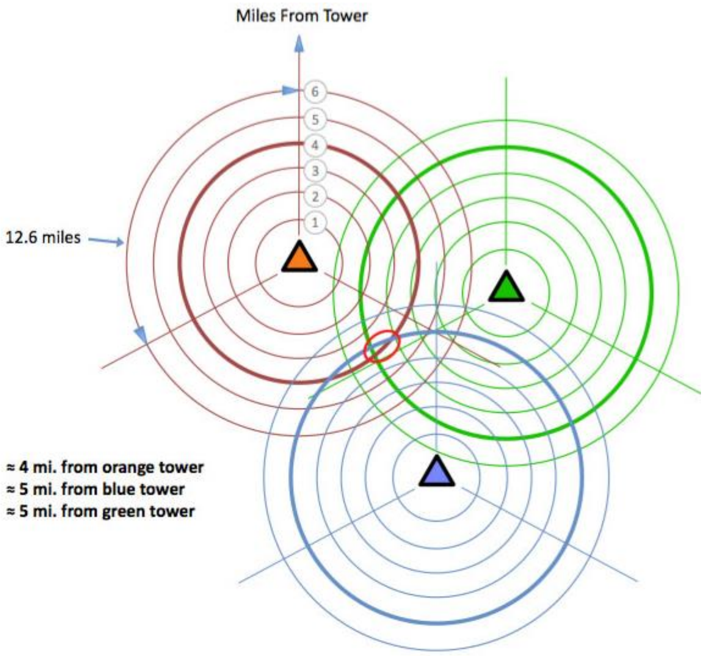
Lingkaran merupakan salah satu objek geometri yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Benda-benda di sekitar kita banyak yang dibuat dalam bentuk lingkaran, seperti jam, koin, ban, cincin, CD-R, kancing baju, dan banyak lagi benda-benda lainnya.

Gambar 1. Benda-benda berbentuk lingkaran
Sumber: www.sangpendidik.com/2020/04/pembahasan-lajaring-sd-melalui-tvri-16.html

Tak jarang dalam kejadian sehari-hari, bahasa lingkaran jadi alat komunikasi yang paling tepat untuk menyampaikan suatu informasi. Misalnya dengan mengatakan suatu gempa mengguncang kota A dengan pusat di titik B dan radius r km. Dengan informasi ini kita bisa mengetahui apakah penduduk di kota C yang tak jauh dari kota A merasakan dampak dari gempa atau tidak.

Gambar 2. Radius gempa
Sumber: https://asset-a.grid.id/crop/0x0:0x0/700x465/photo/2018/09/28/1281976905.jpg

Pengguna telepon selular saat ini dapat menentukan lokasi dengan cepat. Apalagi jika berada di daerah yang padat penduduk. Hal ini dimungkinkan berkat teknologi yang dipasang di telepon selular dan stasiun BTS (base transceiver station) yang sanggup mengukur kekuatan dan waktu tempuh yang diterima. Berdasarkan kedua data ini, jarak telepon selular dan BTS dapat ditentukan. Misalkan sebuah telepon berada di posisi 6 mil dari BTS A, 5 mil dari BTS B, dan 7 mil dari BTS C, maka dapat diidentifikasi bahwa telepon tersebut berada pada sebuah titik yang merupakan perpotongan ketiga lingkaran.



Gambar 3. Triangulasi Lokasi Telepon Selular
Sumber: https://globalwrong.files.wordpress.com/2012/06/tower-4.jpg

Informasi di atas memberikan gambaran tentang pemanfaatan lingkaran dalam kehidupan sehari-hari.
Modul ini akan membahas materi lingkaran secara analitik yang terdiri dari persamaan lingkaran, kedudukan titik dan garis terhadap lingkaran, persamaan garis singgung lingkaran, dan kedudukan dua lingkaran.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.

6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **4** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Persamaan Lingkaran (4 JP)

Kedua : Kedudukan Titik dan Garis Terhadap Lingkaran (2 JP)

Ketiga : Persamaan Garis Singgung Lingkaran (4 JP)

Keempat : Irisan Dua Lingkaran (2 JP)

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
PERSAMAAN LINGKARAN

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat menyusun persamaan lingkaran yang diketahui titik pusat dan jari-jarinya, menganalisis lingkaran yang memenuhi kriteria tertentu secara analitik, dan menyelesaikan masalah yang terkait dengan persamaan lingkaran.

B. Uraian Materi

Lingkaran merupakan tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Titik tertentu ini dinamakan sebagai pusat lingkaran. Jarak titik pusat ke titik pada lingkaran dinamakan sebagai jari-jari.

Konsep lingkaran yang meliputi luas, keliling, panjang tali busur, luas juring, serta menghitung panjang garis singgung lingkaran telah kalian pelajari di SMP. Sekarang, kita akan mempelajari konsep lingkaran secara analitik meliputi persamaan lingkaran, kedudukan titik dan garis terhadap lingkaran, persamaan garis singgung lingkaran, dan berkas lingkaran.

1. Persamaan Lingkaran yang Berpusat di O(0, 0) dan Berjari-jari *r*

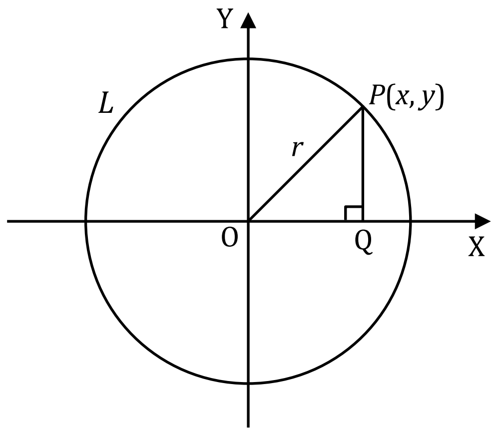
Perhatikan gambar di samping.
Lingkaran L berpusat di O(0, 0) dan berjari-jari r.

Misalkan titik P(x, y) adalah sembarang titik yang terletak pada lingkaran L.
Jari-jari OP = r

Segitiga POQ siku-siku di Q, berdasarkan Theorema Phytagoras diperoleh:

$OQ^2 + PQ^2 = OP^2$

$x^2 + y^2 = r^2$



Gambar 1.1. Lingkaran berpusat di O(0, 0)

Titik P(x, y) yang diambil adalah sembarang, sehingga persamaan tersebut juga berlaku umum untuk persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan memiliki jari-jari r.

Persamaan lingkaran yang berpusat di titik O(0, 0) dan memiliki jari-jari r

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$$

Contoh 1.

a. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan memiliki jari-jari
i). $r = 4$ ii). $r = 4\sqrt{3}$

b. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan melalui titik (6, –8).

c. Tentukan jari-jari lingkaran dengan persamaan :
i). $x^2 + y^2 = 121$ ii). $x^2 + y^2 = 128$

Jawab

a. Persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan berjari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$
i). $r = 4$, maka persamaannya adalah $x^2 + y^2 = 4^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$
ii). $r = 4\sqrt{3}$, maka persamaannya adalah $x^2 + y^2 = (4\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 48$

b. Persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) adalah $x^2 + y^2 = r^2$
Lingkaran melalui titik (6, –8), sehingga diperoleh $6^2 + (-8)^2 = r^2$
$\Leftrightarrow 36 + 64 = r^2$
$\Leftrightarrow r^2 = 100$
Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat O(0, 0) dan melalui titik (6, –8) adalah $x^2 + y^2 = 100$.

c. i). $x^2 + y^2 = 121$
$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 121$
$\Leftrightarrow r = \sqrt{121} = 11$
ii). $x^2 + y^2 = 128$
$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 128$
$\Leftrightarrow r = \sqrt{128} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2}$

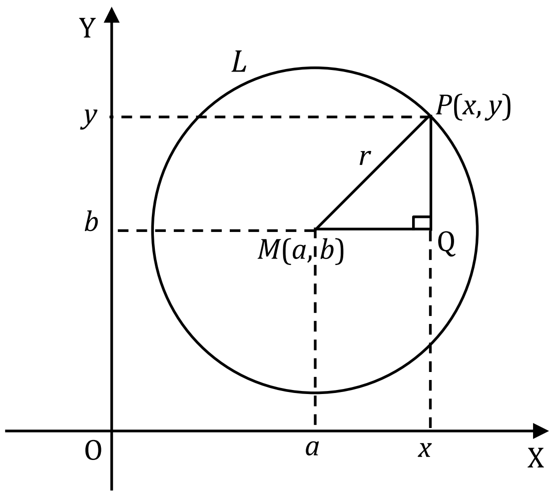
2. Persamaan Lingkaran yang Berpusat di M(a, b) dan Berjari-jari r

Perhatikan gambar di samping. Lingkaran L berpusat di M(a, b) dan berjari-jari r.

Misalkan P(x, y) adalah sembarang titik yang terletak pada lingkaran L.
Jari-jari MP = r
MQ = $x - a$
PQ = $y - b$
Segitiga PMQ siku-siku di Q, maka berdasarkan Theorema Phytagoras berlaku :

$MQ^2 + PQ^2 = MP^2$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$



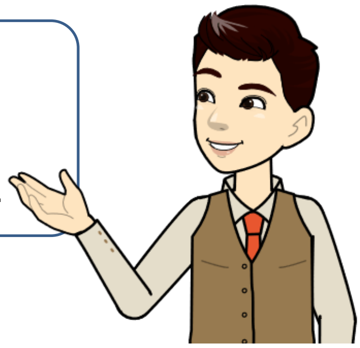
Gambar 1.2. Lingkaran berpusat di M(a, b)

Karena titik P(x, y) diambil sembarang, maka persamaan tersebut juga berlaku umum untuk persamaan lingkaran yang berpusat di titik M(a, b) dan memiliki jari-jari r. Bentuk persamaan ini disebut *bentuk baku persamaan lingkaran*.

persamaan lingkaran yang berpusat di titik $M(a, b)$ dan memiliki jari-jari r

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{r}^2$$

disebut sebagai bentuk baku persamaan lingkaran.



Contoh 2.

Tentukan persamaan lingkaran

a. berpusat di (4, –5) dan memiliki jari-jari 6.
b. berpusat di (–2, –6) dan memiliki jari-jari $3\sqrt{2}$.

Jawab

a. Titik pusat lingkaran (4, –5) dan jari-jari $r = 6$, maka persamaannya adalah
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
$\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - (-5))^2 = 6^2$
$\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 36$

b. Titik pusat lingkaran (–2, –6) dan jari-jari $r = 3\sqrt{2}$, maka persamaannya adalah
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
$\Leftrightarrow (x - (-2))^2 + (y - (-6))^2 = (3\sqrt{2})^2$
$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 18$

Contoh 3.

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan

a. $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 81$
b. $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 72$

Jawab

a. $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 81$
$\Leftrightarrow (x - (-1))^2 + (y - (-3))^2 = 81$
maka pusat lingkaran (–1, –3) dan jari-jari $r = \sqrt{81} = 9$

b. $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 72$
$\Leftrightarrow (x - (-5))^2 + (y - 2)^2 = 72$
maka pusat lingkaran (–5, 2) dan jari-jari $r = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

Contoh 4.

Diketahui sebuah lingkaran dengan pusat M(7, –2). Lingkaran tersebut melalui titik A(–2, 10). Hitung jari-jari lingkaran, kemudian tentukan persamaannya.

Jawab

Jari-jari r adalah jarak antara titik M(7, –2) dan titik A(–2, 10).
Dengan menggunakan rumus jarak diperoleh :

$$\begin{aligned} r &= \text{MA} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - 7)^2 + (10 - (-2))^2} \\ &= \sqrt{(-9)^2 + (12)^2} = \sqrt{81 + 144} \\ &= \sqrt{225} = 15 \end{aligned}$$

Persamaan lingkaran dengan pusat M(7, –2) dan jari-jari $r = 15$ adalah

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow\ (x - 7)^2 + (y - (-2))^2 = 15^2$

$\Leftrightarrow\ (x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 225$

3. Persamaan Umum Lingkaran

Dari bentuk baku persamaan lingkaran, kita dapat menentukan bentuk umum persamaan lingkaran sebagai berikut.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (-2a)x + (-2b)y + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$

Misalkan: $A = -2a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}A$

$B = -2b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}B$

$C = a^2 + b^2 - r^2 \quad \Leftrightarrow r^2 = a^2 + b^2 - C$

$\Leftrightarrow r^2 = \left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - C$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

Diperoleh persamaan umum lingkaran: $\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}}$

dengan pusat $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dan jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

Contoh 5.

Tuliskan persamaan umum lingkaran yang berpusat di M(–4, 3) dan berjari-jari 7.

Jawab

Pusat (–4, 3) dan $r = 7$, maka persamaannya:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow (x - (-4))^2 + (y - 3)^2 = 7^2$

$\Leftrightarrow (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 49$

$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 49$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 6y - 24 = 0$

atau dengan menentukan $A = -2a$, $B = -2b$, dan $C = a^2 + b^2 - r^2$

diperoleh $A = -2(-4) = 8$

$B = -2(3) = -6$

$C = (-4)^2 + 3^2 - 7^2 = 16 + 9 - 49 = -24$

maka persamaan lingkaran adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 6y - 24 = 0$

Contoh 6.

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

Jawab

Dari soal diperoleh A = –6, B = 4, dan C = –3.

Pusat lingkaran $\left(-\frac{1}{2}\text{A}, -\frac{1}{2}\text{B}\right) = \left(-\frac{1}{2}(-6), -\frac{1}{2}(4)\right) = (3, -2)$

jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} = \sqrt{\frac{1}{4}(-6)^2 + \frac{1}{4}(4)^2 - (-3)}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}(36) + \frac{1}{4}(16) + 3} = \sqrt{9 + 4 + 3} = \sqrt{16} = 4$

Contoh 7.

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan
$4x^2 + 4y^2 - 80x + 12y + 265 = 0$

Jawab

Pertama, koefisien x^2 dan y^2 harus dijadikan satu dengan cara mengalikan persamaan dengan $\frac{1}{4}$, sehingga persamaan menjadi $x^2 + y^2 - 20x + 3y + \frac{265}{4} = 0$

Dari persamaan tersebut diperoleh A = –20, B = 3, dan C = $\frac{265}{4}$.

Pusat lingkaran $\left(-\frac{1}{2}\text{A}, -\frac{1}{2}\text{B}\right) = \left(-\frac{1}{2}(-20), -\frac{1}{2}(3)\right) = (10, -\frac{3}{2})$

jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} = \sqrt{\frac{1}{4}(-20)^2 + \frac{1}{4}(3)^2 - (\frac{265}{4})}$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(400) + \frac{1}{4}(9) - \frac{265}{4}} = \sqrt{\frac{400}{4} + \frac{9}{4} - \frac{265}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{144}{4}} = \frac{12}{2} = 6$$

4. Persamaan Lingkaran yang Memenuhi Kriteria Tertentu

Untuk menentukan persamaan suatu lingkaran dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu:

a. Tentukan pusat dan jari-jarinya, kemudian substitusikan ke persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
b. Tentukan nilai A, B, dan C kemudian substitusikan ke persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Contoh 8.

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan menyinggung garis $3x - 4y + 5 = 0$

Jawab

Untuk menentukan persamaan lingkaran tersebut, kita harus tahu nilai r. Jari-jari lingkaran adalah jarak titik pusat ke garis yang menyinggung lingkaran.
Jarak sembarang titik (x_1, y_1) ke sebarang garis $Ax + By + C = 0$ adalah

$$r = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

berarti jarak antara titik O(0, 0) dengan garis $3x - 4y + 5 = 0$ adalah :

$$r = \frac{|3(0) - 4(0) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{5}{5} = 1$$

Jadi, persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan menyinggung garis $3x - 4y + 5 = 0$ adalah $x^2 + y^2 = 1$

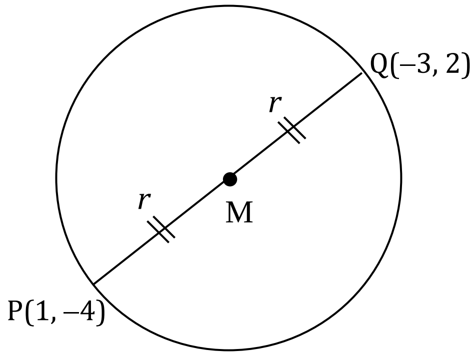
Contoh 9.

Tentukan persamaan lingkaran yang diameternya merupakan ruas garis yang menghubungkan titik P(1, –4) dan Q(–3, 2).

Jawab

Sketsa di samping menunjukkan titik pusat M adalah titik tengah garis PQ.
Koordinat titik tengah dari sebuah garis PQ dengan $P(x_P, y_P)$ dan $Q(x_Q, y_Q)$ adalah

$$\left(\frac{x_P + x_P}{2}, \frac{y_Q + y_Q}{2}\right)$$



Gambar 1.3

Sehingga koordinat titik M adalah :

$M\left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{(-4)+2}{2}\right) = M\left(\frac{-2}{2}, \frac{-2}{2}\right) = M(-1, -1)$

Panjang garis PQ = $\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (2 - (-4)^2}$

$= \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$

Jari – jari $r = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}\sqrt{52}$

Persamaan lingkaran dengan pusat M(–1, –1) dan jari – jari $r = \frac{1}{2}\sqrt{52}$ adalah

$(x - (-1))^2 + (y - (-1))^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{52}\right)^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{52}{4}$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 13$

Contoh 10.

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (5, –3) dan menyinggung sumbu Y.

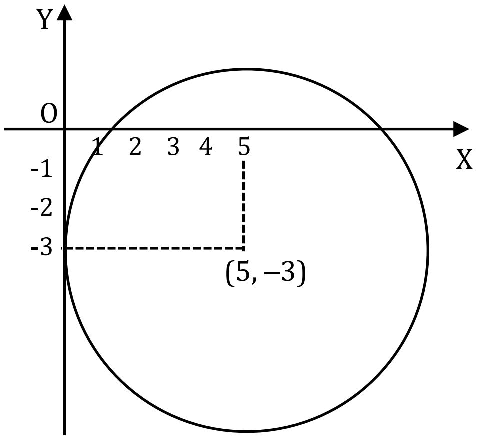
Jawab

Berdasarkan gambar diketahui bahwa jari-jari lingkaran adalah 5.
Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat (5, –3) dan jari – jari r = 5 adalah

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - (-3))^2 = 5^2$

$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$



Gambar 1.4

Contoh 11.

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (2, 1) dan menyinggung garis $4x + 3y + 4 = 0$.

Jawab

Jari-jari lingkaran adalah jarak titik (2, 1) dengan garis $4x + 3y + 4 = 0$, sehingga

$$r = \frac{|4(2) + 3(1) + 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|\ 15\ |}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat (2, 1) dan jari-jari 3 adalah

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

$\Leftrightarrow \ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

Contoh 12.

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik (0, 4), (1, 3), dan (1, –1).

Jawab

Misalkan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik tersebut adalah

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Kita akan menentukan nilai A, B, dan C sebagai berikut.

(0, 4) pada lingkaran, maka $0^2 + 4^2 + A(0) + B(4) + C = 0$

$4B + C = -16$ .... (1)

(1, 3) pada lingkaran, maka $1^2 + 3^2 + A(1) + B(3) + C = 0$

$A + 3B + C = -10$ .... (2)

(1, –1) pada lingkaran, maka $1^2 + (-1)^2 + A(1) + B(-1) + C = 0$

$A - B + C = -2$ .... (3)

Eliminasi C pada persamaan (2) dan (3) diperoleh

$$\begin{array}{rcl} A + 3B + C &=& -10 \\ A - B + C &=& -2 \\ \hline 4B &=& -8 \\ B &=& -2 \end{array} \ -$$

Substitusi B = –2 ke persamaan (1)
diperoleh $4(-2) + C = -16 \Rightarrow C = -16 + 8 \Rightarrow C = -8$

Substitusi B = –2 dan C = –8 ke persamaan (2)
diperoleh $A + 3(-2) + (-8) = -10 \Rightarrow A - 14 = -10 \Rightarrow A = 4$

Jadi, persamaan lingkaran yang melalui titik (0, 4), (1, 3), dan (1, –1) adalah

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$$

C. Rangkuman

- Persamaan lingkaran yang berpusat di titik O(0, 0) dan jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$.
- Persamaan lingkaran yang berpusat di titik M(a, b) dan jari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, disebut persamaan lingkaran bentuk baku.
- Persamaan umum lingkaran adalah $x^2 + y^2 + A\,x + By + C = 0$ dengan titik pusat $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dan jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$.
- Jarak titik P(x_1, y_1) ke garis Ax + By + C = 0 dirumuskan oleh $$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

D. Latihan Soal

1. Tentukan persamaan lingkaran yang:
   a. Berpusat di O(0, 0) dan berjari-jari $4\sqrt{5}$.
   b. Berpusat di M(–3, 6) dan berjari-jari $2\sqrt{7}$.
2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan :
   a. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 20$
   b. $4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y - 3 = 0$
3. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan melalui titik A(–5, 12).
4. Diketahui sebuah lingkaran dengan pusat M(1, 6). Lingkaran tersebut melalui titik P(2, 3). Hitung jari-jari lingkaran, kemudian tentukan persamaannya.
5. Tentukan persamaan lingkaran yang diameternya merupakan ruas garis yang menghubungkan titik A(0, –2) dan B(4, 4).
6. Tentukan persamaan lingkaran yang sepusat dengan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ dan menyinggung garis $3x - 4y + 7 = 0$.
7. Diketahui lingkaran L_1 konsentris (sepusat) dengan lingkaran L_2 dan melalui titik (2, 8). Jika persamaan lingkaran L_2 adalah $x^2 + y^2 - x + 2y - 5 = 0$, maka tentukan persamaan lingkaran L_1.
8. Tentukan persamaan umum lingkaran yang melalui titik P(6, –2), Q(–3, –5), dan R(1, 3).

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

1. a. Persamaan lingkaran berpusat di O(0, 0) dan berjari-jari $4\sqrt{5}$ adalah
$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (4\sqrt{5})^2$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 80$
b. Persamaan lingkaran berpusat di M(–3, 6) dan berjari-jari $2\sqrt{7}$ adalah
$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (2\sqrt{7})^2$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 28$

2. a. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 20$
Pusat = (1, –3)
Jari-jari $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
b. $4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0$
Pusat = $\left(-\frac{1}{2}(-2), -\frac{1}{2}(3)\right) = (1, -\frac{3}{2})$
Jari-jari $r = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - (-\frac{3}{4})} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1+3} = 2$

3. Alternatif Penyelesaian

Persamaan lingkaran yang berpusat di O(0, 0) dan jari-jari r adalah

$x^2 + y^2 = r^2$

Lingkaran melalui titik A(–5, 12), sehingga $(-5)^2 + 12^2 = r^2$
$25 + 144 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 169$
Jadi, persamaan lingkaran tersebut adalah $x^2 + y^2 = 169$.

4. Alternatif Penyelesaian

Jari-jari lingkaran adalah jarak titik pusat M(1, 6) ke titik P(2, 3) yang dilalui lingkaran.

$r = MP = \sqrt{(2-1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$

Persamaan lingkaran dengan pusat M(1, 6) dan jari-jari $r = \sqrt{10}$ adalah

$(x-1)^2 + (y-6)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$

$(x-1)^2 + (y-6)^2 = 10$

5. Alternatif Penyelesaian

Titik pusat lingkaran merupakan titik tengah dari ruas garis AB, yaitu

$P = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (2, 1)$

Jari-jari lingkaran r = ½ AB

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(4-0)^2 + \left(4-(-2)\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16+36} = \frac{1}{2}\sqrt{52} = \sqrt{13}$$

Lingkaran dengan pusat P(2, 1) dan jari-jari $r = \sqrt{13}$ adalah

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{13})^2$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$

atau $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$

6. Alternatif Penyelesaian

Lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$, diperoleh A = –4 dan B = 6

Pusat lingkaran adalah P = $\left(-\frac{1}{2}(-4), -\frac{1}{2}(6)\right) = (2, -3)$

Jari-jari lingkaran r adalah jarak titik pusat P ke garis $3x - 4y + 7 = 0$, sehingga

$$r = \frac{|3(2) - 4(-3) + 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|6 + 12 + 7\ |}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{25}{5} = 5$$

Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat (2, –3) dan jari-jari 5 adalah

$(x - 2)^2 + \left(y - (-3)\right)^2 = 5^2$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$

atau $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

7. Alternatif Penyelesaian

lingkaran L_2: $x^2 + y^2 - x + 2y - 5 = 0$, berarti A = –1 dan B = 2.

Pusat lingkaran L_1 sama dengan pusat lingkaran L_2 (konsentris), sehingga

$P_1 = \left(-\frac{1}{2}(-1), -\frac{1}{2}(2)\right) = (\frac{1}{2}, -1)$

Persamaan lingkaran L_1 yang berpusat di titik $(\frac{1}{2}, -1)$

$(x - \frac{1}{2})^2 + \left(y - (-1)\right)^2 = r^2$

Lingkaran L_1 melalui titik (2, 8), sehingga

$(2 - \frac{1}{2})^2 + (8 + 1)^2 = r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9^2 = r^2$

$\Leftrightarrow \frac{9}{4} + 81 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{333}{4}$

Jadi, persamaan lingkaran L_1 adalah

$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 = \frac{333}{4}$ atau $x^2 + y^2 - x + 2y - 82 = 0$

8. Alternatif Penyelesaian

Misalkan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik tersebut adalah

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Kita akan menentukan nilai A, B, dan C sebagai berikut.

P(6, –2) pada lingkaran, maka $6^2 + (-2)^2 + A(6) + B(-2) + C = 0$

$6A - 2B + C = -40$ .... (1)

Q(–3, –5) pada lingkaran, maka $(-3)^2 + (-5)^2 + A(-3) + B(-5) + C = 0$

$-3A - 5B + C = -34$ .... (2)

R(1, 3) pada lingkaran, maka $1^2 + 3^2 + A(1) + B(3) + C = 0$

$A + 3B + C = -10$ .... (3)

Eliminasi C pada persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\begin{array}{rcl} 6A - 2B + C &=& -40 \\ -3A - 5B + C &=& -34 \\ \hline 9A + 3B &=& -6 \\ 3A + B &=& -2 \end{array} \quad - $$

atau $B = -2 - 3A$ ………….. (4)

Eliminasi C pada persamaan (2) dan (3) diperoleh

$$\begin{array}{rcl} -3A - 5B + C &=& -34 \\ A + 3B + C &=& -10 \\ \hline -4A - 8B &=& -24 \\ A + 2B &=& 6 \end{array} \quad - $$

………….. (5)

Substitusi $B = -2 - 3A$ ke persamaan (5), diperoleh

$A + 2(-2 - 3A) = 6 \Leftrightarrow A - 4 - 6A = 6 \Leftrightarrow -5A = 10 \Leftrightarrow A = -2$

Substitusi $A = -2$ ke persamaan (4), diperoleh
$B = -2 - 3(-2) = -2 + 6 = 4$

Substitusi $A = -2$ dan $B = 4$ ke persamaan (3)
diperoleh $(-2) + 3(4) + C = -10 \Rightarrow -2 + 12 + C = -10 \Rightarrow C = -10 - 10 = -20$

Jadi, persamaan lingkaran yang melalui titik P(6, –2), Q(–3, –5), dan R(1, 3) adalah

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda dapat menyusun persamaan lingkaran yang berpusat di titik O(0, 0) dan jari-jari r?	◯	◯
2	Apakah Anda dapat menyusun persamaan lingkaran yang berpusat di titik (a, b) dan jari-jari r?	◯	◯
3	Apakah Anda dapat menyusun persamaan lingkaran lingkaran dalam bentuk umum?	◯	◯
4	Apakah Anda dapat menentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran jika persamaannya diketahui?	◯	◯
5	Apakah Anda dapat menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi kriteria tertentu?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
KEDUDUKAN TITIK DAN GARIS TERHADAP LINGKARAN

A. Tujuan Pembelajaran

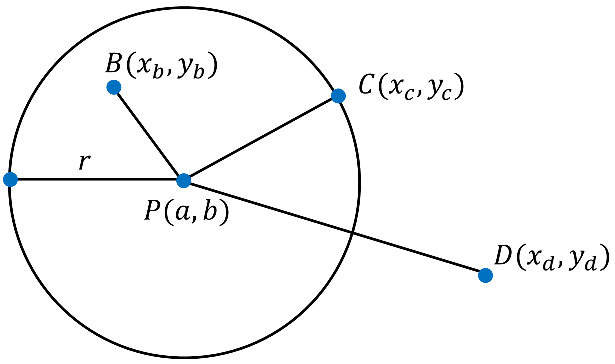
Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan kalian dapat menentukan kedudukan suatu titik dan garis terhadap lingkaran, serta menganalisis secara analitik kedudukan suatu titik dan garis terhadap lingkaran.

B. Uraian Materi

1. Kedudukan Titik Terhadap Lingkaran

Jika titik P(x_1 , y_1) sembarang dan L adalah lingkaran dengan jari-jari r, maka ada tiga posisi titik P terhadap lingkaran L, yaitu P terletak pada lingkaran, P di dalam lingkaran, dan P di luar lingkaran.

Perhatikan gambar.



Gambar 2.1. Kedudukan titik terhadap lingkaran

Perhatikan ilustrasi di atas. Titik B terletak di dalam lingkaran, C pada lingkaran, dan D di luar lingkaran. Kedudukan sebuah titik terhadap lingkaran dapat kita tentukan dengan cara membandingkan jarak titik tersebut ke pusat lingkaran dengan panjang jari-jari lingkaran.

PB < r	$(x_b - a)^2 + (y_b - b)^2 < r^2$	Titik B di dalam lingkaran
PC = r	$(x_c - a)^2 + (y_c - b)^2 = r^2$	Titik C pada lingkaran
PD > r	$(x_d - a)^2 + (y_d - b)^2 > r^2$	Titik D di luar lingkaran

Dengan menguraikan persamaan di atas, dalam persamaan umum diperoleh hubungan

PB < r	$x_b^2 + y_b^2 + Ax_b + By_b + C < r^2$	Titik B di dalam lingkaran
PC = r	$x_c^2 + y_c^2 + Ax_c + By_c + C = r^2$	Titik C pada lingkaran
PD > r	$x_d^2 + y_d^2 + Ax_d + By_d + C > r^2$	Titik D di luar lingkaran

Contoh 1.

Tentukan kedudukan titik A(–3, 5), B(7, 6), dan C(1, –2) terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 34$.

Jawab

Kedudukan titik A, B, dan C terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 34$ dapat ditentukan dengan cara mensubstitusikan titik A, B, dan C ke ruas kiri persamaan lingkaran ($x^2 + y^2$), kemudian membandingkan dengan nilai $r^2 = 34$ (di ruas kanan).

A(–3, 5) = A(x_a, y_a) sehingga $x_a = -3$ dan $y_a = 5$

$$x_a^2 + y_a^2 = (-3)^2 + 5^2$$

$$x_a^2 + y_a^2 = 9 + 25 = 34 = r^2$$

Berarti titik A(–3, 5) terletak pada lingkaran.

B(7, 6) = B(x_b, y_b) sehingga $x_b = 7$ dan $y_b = 6$

$$x_b^2 + y_b^2 = 7^2 + 6^2$$

$$x_b^2 + y_b^2 = 49 + 36 = 85 > r^2 = 34$$

Berarti titik B(7, 6) terletak di luar lingkaran.

C(1, –2) = C(x_c, y_c) sehingga $x_c = 1$ dan $y_c = -2$

$$x_c^2 + y_c^2 = 1^2 + (-2)^2$$

$$x_c^2 + y_c^2 = 1 + 4 = 5 < r^2 = 34$$

Berarti titik C(1, –2) terletak di dalam lingkaran.

Contoh 2.

Tentukan kedudukan titik A(4, 6), B(6, 2), dan C(1, 1) terhadap lingkaran $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

Jawab

Substitusi titik A, B, dan C ke ruas kiri $(x - 3)^2 + (y + 2)^2$ kemudian bandingkan dengan $r^2 = 25$.

A(4, 6) = A(x_a, y_a) sehingga $x_a = 4$ dan $y_a = 6$

$$(x_a - 3)^2 + (y_a + 2)^2 = (4 - 3)^2 + (6 + 2)^2$$
$$(x_a - 3)^2 + (y_a + 2)^2 = 1^2 + 8^2 = 1 + 64 = 65 > r^2$$

Berarti titik A(4, 6) terletak di luar lingkaran.

B(6, 2) = B(x_b, y_b) sehingga $x_b = 6$ dan $y_b = 2$

$$(x_b - 3)^2 + (y_b + 2)^2 = (6 - 3)^2 + (2 + 2)^2$$
$$(x_b - 3)^2 + (y_b + 2)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = r^2$$

Berarti titik B(6, 2) terletak pada lingkaran.

C(1, 1) = C(x_c, y_c) sehingga $x_c = 1$ dan $y_c = 1$

$$(x_c - 3)^2 + (y_c + 2)^2 = (1 - 3)^2 + (1 + 2)^2$$
$$(x_c - 3)^2 + (y_c + 2)^2 = (-2)^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 < r^2$$

Berarti titik C(1, 1) terletak di dalam lingkaran.

Contoh 3.

Tentukan kedudukan titik P(2, 1), Q(6, 6), dan R(7, 2) terhadap lingkaran
$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

Jawab

Substitusi titik P, Q, dan R ke ruas kiri $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12$ kemudian bandingkan dengan 0 di ruas kanan.

P(2, 1) = P(x_p, y_p) sehingga x_p = 2 dan y_p = 1

$$x_p^2 + y_p^2 - 4x_p - 6y_p - 12 = 2^2 + 1^2 - 4(2) - 6(1) - 12$$
$$x_p^2 + y_p^2 - 4x_p - 6y_p - 12 = 4 + 1 - 8 - 6 - 12 = -21 < 0$$

Berarti titik P(2, 1) terletak di dalam lingkaran.

Q(6, 6) = Q(x_q, y_q) sehingga x_q = 6 dan y_q = 6

$$x_q^2 + y_q^2 - 4x_q - 6y_q - 12 = 6^2 + 6^2 - 4(6) - 6(6) - 12$$
$$x_p^2 + y_p^2 - 4x_p - 6y_p - 12 = 36 + 36 - 24 - 36 - 12 = 0$$

Berarti titik Q(6, 6) terletak pada lingkaran.

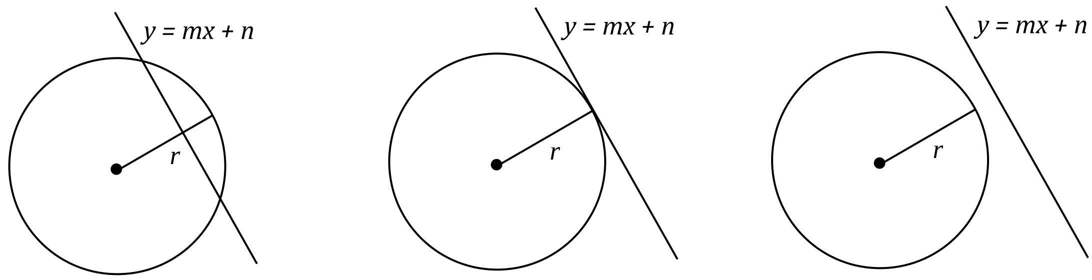
R(7, 2) = R(x_r, y_r) sehingga x_r = 7 dan y_r = 2

$$x_r^2 + y_r^2 - 4x_r - 6y_r - 12 = 7^2 + 2^2 - 4(7) - 6(2) - 12$$
$$x_p^2 + y_p^2 - 4x_p - 6y_p - 12 = 49 + 4 - 28 - 12 - 12 = 1 > 0$$

Berarti titik R(7, 2) terletak di luar lingkaran.

2. Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran

Jika garis $y = mx + n$ sembarang dan L adalah lingkaran dengan jari-jari r, maka ada tiga kedudukan garis terhadap lingkaran L sebagaimana ditunjukkan pada gambar berikut.



garis memotong lingkaran pada dua titik | *garis menyinggung lingkaran (memotong pada 1 titik)* | *garis tidak memiliki titik potong dengan lingkaran.*

Gambar 2.2. Kedudukan garis terhadap lingkaran

Langkah-langkah menentukan kedudukan garis $y = mx + n$ terhadap lingkaran L sebagai berikut:

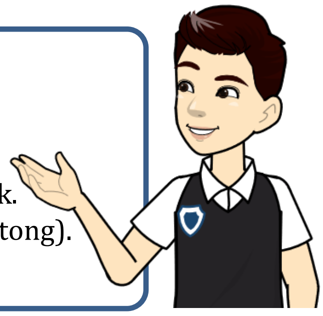
a. Substitusi y dari persamaan garis $y = mx + n$ ke persamaan lingkaran L.
b. Susun persamaan kuadrat sekutu dalam variabel x (bentuk $ax^2 + bx + c = 0$).
c. Hitung nilai diskriminan persamaan kuadrat sekutu dengan rumus $D = b^2 - 4ac$.
d. Periksa tanda diskriminan D dengan kriteria:

- Jika D > 0 maka garis memotong lingkaran pada dua titik.
- Jika D = 0 maka garis menyinggung lingkaran (ada satu titik potong)
- Jika D < 0 maka garis tidak memiliki titik potong dengan lingkaran.

Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

Kedudukan garis terhadap lingkaran ditentukan oleh nilai diskriminan persamaan kuadrat sekutu antara garis dan lingkaran.

- Jika D > 0, maka garis memotong lingkaran pada dua titik.
- Jika D = 0, maka garis menyinggung lingkaran (1 titik potong).
- Jika D < 0, maka garis tidak memotong lingkaran.



Contoh 4.

Tentukan kedudukan garis $x + y - 2 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.

Jawab

Garis $x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -x + 2$
Substitusikan $y = -x + 2$ ke persamaan lingkaran, sehingga diperoleh:

$x^2 + (-x + 2)^2 - 4x + 2(-x + 2) - 20 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x^2 + x^2 - 4x + 4 - 4x - 2x + 4 - 20 = 0$
$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 10x - 12 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x - 6 = 0$
Diperoleh nilai $a = 1$, $b = -5$, dan $c = -6$.

Dari persamaan kuadrat sekutu tersebut di atas diperoleh nilai diskriminan

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-6) = 25 + 24 = 49 > 0$

Karena nilai D > 0, maka garis $x + y - 2 = 0$ memotong lingkaran pada dua titik.

Untuk menentukan titik potong antara garis dan lingkaran, maka kita memfaktorkan persamaan kuadrat sekutu sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x - 6 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x + 1)(x - 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \text{ atau } x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \text{ atau } x = 6 \end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusi nilai $x = -1$ dan $x = 6$ ke persamaan garis $y = -x + 2$.
untuk $x = -1 \quad \Rightarrow y = -x + 2 = -(-1) + 2 = 3$
untuk $x = 6 \quad \Rightarrow y = -x + 2 = -(6) + 2 = -4$

sehingga diperoleh titik potong antara garis dan lingkaran pada titik (−1, 3) dan titik (6, −4).

Contoh 5.

Tentukan kedudukan garis $3x + y + 10 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 20 = 0$.

Jawab

Garis $3x + y + 10 = 0 \Rightarrow y = -3x - 10$
Substitusikan $y = -3x - 10$ ke persamaan lingkaran, sehingga diperoleh:

$x^2 + (-3x - 10)^2 - 8x + 4(-3x - 10) - 20 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x^2 + 9x^2 + 60x + 100 - 8x - 12x - 40 - 20 = 0$
$\Leftrightarrow \quad 10x^2 + 40x + 40 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 0$
diperoleh nilai $a = 1$, $b = 4$, dan $c = 4$.

Dari persamaan kuadrat sekutu tersebut di atas diperoleh nilai diskriminan
$D = b^2 - 4ac$
$= (4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$

Karena nilai $D = 0$, maka garis $3x + y + 10 = 0$ memotong lingkaran di satu titik, atau dikatakan garis menyinggung lingkaran.

Titik singgung dapat diperoleh dari penyelesaian persamaan kuadrat sekutu.

$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

selanjutnya nilai $x = -2$ disubstitusikan ke persamaan garis, diperoleh
$y = -3x - 10 \Leftrightarrow y = -3(-2) - 10 = -4$

sehingga diperoleh titik singgung garis dan lingkaran pada titik $(-2, -4)$.

Contoh 6.

Tentukan kedudukan garis $x + y = 4$ terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 3$

Jawab

Garis $x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$
Substitusikan $y = 4 - x$ ke persamaan lingkaran, diperoleh :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 3 &\Leftrightarrow x^2 + (4 - x)^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 16 - 8x + x^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 13 = 0 \end{aligned}$$

diperoleh nilai $a = 2$, $b = -8$, $c = 13$.

Dari persamaan kuadrat sekutu tersebut di atas diperoleh nilai diskriminan

$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(2)(13) = 64 - 104 = -40 < 0$

Karena nilai $D < 0$, berarti garis $x + y = 4$ tidak memiliki titik potong dengan lingkaran (garis berada di luar lingkaran).

Contoh 7.

Tentukan nilai m agar garis $y = mx + 3$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 9$.

Jawab

Substitusikan $y = mx + 3$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$, diperoleh :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 9 &\Leftrightarrow x^2 + (mx + 3)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 + m^2x^2 + 6mx + 9 = 9 \\ &\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + 6mx + 9 - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + 6mx = 0 \end{aligned}$$

diperoleh nilai $a = (1 + m^2)$, $b = 6m$, $c = 0$.

Dari persamaan kuadrat sekutu tersebut di atas diperoleh nilai diskriminan

$D = b^2 - 4ac = (6m)^2 - 4(1 + m^2)(0) = 36m^2 - 0 = 36m^2$

Diketahui garis $y = mx + 3$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 9$, berarti nilai diskriminan $D = 0$
$\Leftrightarrow 36m^2 = 0$
$\Leftrightarrow m = 0$

Jadi, garis $y = mx + 3$ akan menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ jika nilai $m = 0$ atau persamaan garis adalah $y = 3$.

C. Rangkuman

- Kedudukan titik $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

  $P(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 = r^2$

  $P(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 > r^2$

  $P(x_1, y_1)$ terletak di dalam lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 < r^2$

- Kedudukan titik $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

  $P(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$

  $P(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$

  $P(x_1, y_1)$ terletak di dalam lingkaran jika $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$

- Kedudukan titik $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

  $P(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$

  $P(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$

  $P(x_1, y_1)$ terletak di dalam lingkaran jika $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C < 0$

- Kedudukan garis terhadap lingkaran ditentukan oleh nilai diskriminan persamaan kuadrat sekutu antara garis dan lingkaran.

  Jika D > 0, maka garis memotong lingkaran pada dua titik.

  Jika D = 0, maka garis menyinggung lingkaran (1 titik potong).

  Jika D < 0, maka garis tidak memotong lingkaran.

D. Latihan Soal

1. Tentukan kedudukan titik-titik berikut terhadap lingkaran berpusat di titik (1, 3) dengan jari-jari 5.
   a. A(7, 5)
   b. B(6, 3)
2. Tentukan nilai n jika titik A(−3, n) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$.
3. Tentukan kedudukan titik-titik berikut terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 36 = 0$.
   a. P(1, 2)
   b. Q(4, −2)
4. Jika titik (1, 3) terletak pada lingkaran $3x^2 + 3y^2 + ax - 6y - 9 = 0$, tentukan:
   a. nilai a
   b. pusat dan jari-jari lingkaran.
5. Tentukan kedudukan garis $y = x + 6$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$
6. Tentukan kedudukan garis $y - x + 2 = 0$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 20 = 0$.
7. Tentukan kedudukan garis $y = 2x + 8$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$. Kemudian tentukan titik potongnya jika ada.
8. Tentukan nilai c sehingga garis $y = -2x + c$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - y + 3 = 0$.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

1. Alternatif Penyelesaian
   Persamaan lingkaran berpusat di titik (1, 3) dengan jari-jari 5 adalah
   $(x-1)^2+(y-3)^2=5^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=25$

   a. $\mathrm{A}(7,5) \Rightarrow (7-1)^2+(5-3)^2=6^2+2^2=36+4=40>25$
   berarti titik A terletak di luar lingkaran.

   b. $\mathrm{B}(6,3) \Rightarrow (6-1)^2+(3-3)^2=5^2+0^2=25+0=25$
   berarti titik B terletak pada lingkaran.

2. Alternatif Penyelesaian

   Titk A(–3, n) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$, berarti

   $(-3)^2+n^2=13 \Leftrightarrow 9+n^2=13$

   $\Leftrightarrow n^2=13-9 \quad \Leftrightarrow n^2=4 \Leftrightarrow n=\pm 2$

3. Alternatif Penyelesaian

   a. $\mathrm{P}(1,2) \Rightarrow 1^2+2^2-8(1)+12(2)+36=1+4-8+24+36=57>0$
   berarti titik P(1, 2) terletak di luar lingkaran.

   b. $\mathrm{Q}(4,-2) \Rightarrow 4^2+(-2)^2-8(4)+12(-2)+36=16+4-32-24+36=0$
   berarti titik Q(4, –2) terletak pada lingkaran.

4. Alternatif Penyelesaian

   a. (1, 3) terletak pada lingkaran $3x^2 + 3y^2 + ax - 6y - 9 = 0$, berarti
   $3(1)^2 + 3(3)^2 + a(1) - 6(3) - 9 = 0$
   $\Leftrightarrow 3 + 27 + a - 18 - 9 = 0$
   $\Leftrightarrow 3 + a = 0$ atau $a = -3$

   a. Persamaan lingkaran $3x^2 + 3y^2 - 3x - 6y - 9 = 0$, diperoleh A = –3 dan B = –6

   Pusat = $\left(-\frac{1}{2}(-3),-\frac{1}{2}(-6)\right)=(\frac{3}{2},3)$

   Jari-jari r = $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2-(-9)}=\sqrt{\frac{9}{4}+9+9}=\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}$

5. Alternatif Penyelesaian

   Substitusi $y = x + 6$ ke lingkaran $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$, diperoleh

   $x^2 + (x + 6)^2 - 8x - 4(x + 6) - 4 = 0$

   $\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 12x + 36 - 8x - 4x - 24 - 4 = 0$

   $\Leftrightarrow 2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 0$

   $a = 1$, $b = 0$, dan $c = 4$

   Diskriminan persamaan kuadrat sekutu adalah

   $D = 0^2 - 4(1)(4) = -16 < 0$

   Karena D < 0, maka garis $y = x + 6$ tidak mempunyai titik potong dengan lingkaran $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$.

6. Alternatif Penyelesaian

   Substitusi $y - x + 2 = 0 \Leftrightarrow y = x - 2$ ke lingkaran $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 20 = 0$, diperoleh

   $x^2 + (x - 2)^2 - 12x + 8(x - 2) + 20 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2 - 4x + 4 - 12x + 8x - 16 + 20 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$a = 1$, $b = -4$, dan $c = 4$

Diskriminan persamaan kuadrat sekutu adalah

$D = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$

Karena $D = 0$, maka garis $y - x + 2 = 0$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 20 = 0$.

7. Alternatif Penyelesaian

Substitusi $y = 2x + 8$ ke lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$, diperoleh

$x^2 + (2x + 8)^2 + 4x + 2(2x + 8) - 20 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 + 32x + 64 + 4x + 4x + 16 - 20 = 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 40x + 60 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 + 8x + 12 = 0$

$a = 1$, $b = 8$, dan $c = 12$

Diskriminan persamaan kuadrat sekutu adalah

$D = 8^2 - 4(1)(12) = 64 - 48 = 16 > 0$

Karena $D > 0$, maka garis $y = 2x + 8$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$ pada dua titik.

Persamaan kuadrat sekutu adalah $x^2 + 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 6) = 0$

$x = -2$ atau $x = -6$

Untuk $x = -2$, maka $y = 2x + 8 = 2(-2) + 8 = 4$, diperoleh titik $(-2, 4)$

Untuk $x = -6$, maka $y = 2x + 8 = 2(-6) + 8 = -4$, diperoleh titik $(-2, -4)$

Jadi, garis $y = 2x + 8$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$ memotong lingkaran pada titik $(-2, 4)$ dan $(-2, -4)$.

8. Alternatif Penyelesaian

Substitusi $y = -2x + c$ ke lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - y + 3 = 0$, diperoleh

$x^2 + (-2x + c)^2 - 4x - (-2x + c) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - 4cx + c^2 - 4x + 2x - c + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 - (4c + 2)x + (c^2 - c + 3) = 0$

$A = 5$, $B = -(4c + 2)$, dan $C = (c^2 - c + 3)$

Diskriminan persamaan kuadrat sekutu adalah

$D = (-(4c + 2))^2 - 4(5)(c^2 - c + 3)$

$= 16c^2 + 16c + 4 - 20c^2 + 20c - 60$

$= -4c^2 + 36c - 56$

Garis menyinggung lingkaran, berarti nilai $D = 0$, sehingga diperoleh:

$-4c^2 + 36c - 56 = 0 \Leftrightarrow c^2 - 9c + 14 = 0 \Leftrightarrow (c - 2)(c - 7) = 0$

$c - 2 = 0$ atau $c - 7 = 0$

$c = 2$ atau $c = 7$.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu yang dimaksud kedudukan suatu titik terhadap lingkaran?	◯	◯
2	Apakah Anda tahu yang dimaksud kedudukan suatu garis terhadap lingkaran?	◯	◯
3	Apakah Anda dapat menentukan kedudukan suatu titik terhadap lingkaran tertentu?	◯	◯
4	Apakah Anda dapat menentukan kedudukan suatu garis terhadap lingkaran tertentu?	◯	◯
5	Apakah Anda dapat menentukan unsur yang belum diketahui dari suatu garis jika garis menyinggung lingkaran?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
PERSAMAAN GARIS SINGGUNG LINGKARAN

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan kalian dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui suatu titik pada lingkaran, persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien m, dan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik di luar lingkaran.

B. Uraian Materi

1. Persamaan Garis Singgung Melalui Sebuah Titik pada Lingkaran

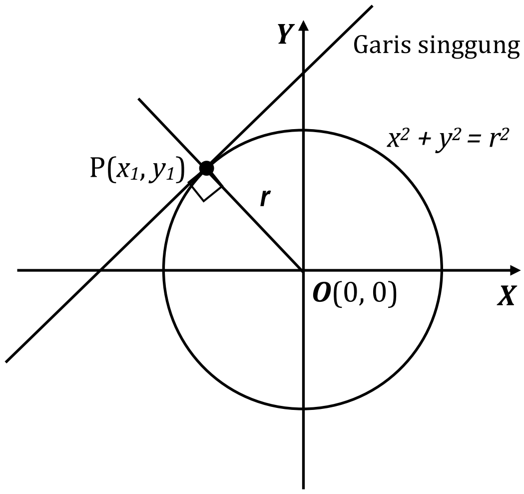
Misalkan titik P(x_1, y_1) terletak pada lingkaran dengan pusat O(0, 0) dan berjari-jari r. Kemudian dibuat suatu garis singgung yang melalui titik P seperti pada gambar.
Persamaan umum garis singgung tersebut adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$.
Gradien garis yang menghubungkan titik O(0, 0) dan titik P(x_1, y_1) adalah

$$m_{OP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{y_1}{x_1}$$

Garis singgung lingkaran dan garis OP saling tegak lurus sehingga

$$m \times m_{OP} = -1$$

$$m = \frac{-1}{m_{OP}} = \frac{-1}{\frac{y_1}{x_1}} = \frac{-x_1}{y_1}$$



Gambar 3.1. Garis singgung lingkaran

$m = \frac{-x_1}{y_1}$ disubstitusikan ke persamaan umum garis singgung $y - y_1 = m(x - x_1)$, sehingga diperoleh :

$$(y - y_1) = \frac{-x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$y_1(y - y_1) = -x_1(x - x_1)$$

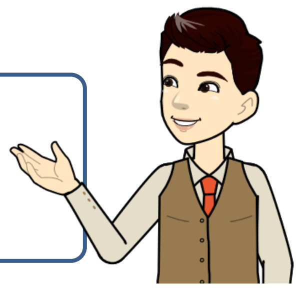
$$y_1 y - {y_1}^2 = -x_1 x + {x_1}^2$$

$$x_1 x + y_1 y = {x_1}^2 + {y_1}^2$$

$$\boldsymbol{x_1 x + y_1 y = r^2}$$

Jadi, persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah

$$x_1 x + y_1 y = r^2.$$



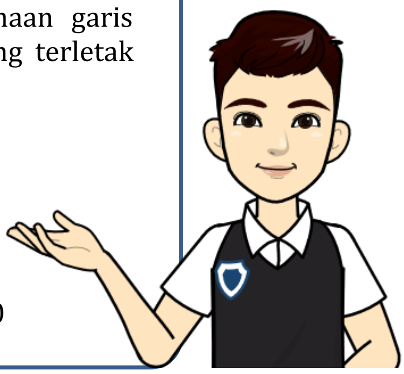
Dengan cara penurunan yang sama, persamaan garis singgung melalui titik singgung $P(x_1, y_1)$ yang terletak pada lingkaran dengan persamaan:

a. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ adalah

$(x_1 - a)(x-a) + (y_1 - b)(y-b) = r^2$

b. $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah

$x_1 x + y_1 y + \frac{A}{2}(x_1 + x) + \frac{B}{2}(y_1 + y) + C = 0$



Contoh 1.

Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $P(8, -6)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$.

Jawab

Kita periksa dahulu apakah titik $P(8, -6)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$.

$P(8, -6) \quad \Rightarrow \quad 8^2 + (-6)^2 \ ? \ 100$

$\qquad\qquad\qquad 64 + 36 = 100$ (benar)

Berarti titik $P(8, -6)$ terletak pada lingkaran dan merupakan titik singgung.

Persamaan garis singgung melalui titik $P(8, -6)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ dapat ditentukan dengan rumus

$x_1 x + y_1 y = 100$ dengan $x_1 = 8$ dan $y_1 = -6$

$8x + (-6)y = 100$

$8x - 6y = 100$

$4x - 3y = 50$ atau $4x - 3y - 50 = 0$

Jadi, persamaan garis singgung yang melalui titik $P(8, -6)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ adalah $4x - 3y - 50 = 0$.

Contoh 2.

Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $Q(10, 9)$ pada lingkaran $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 169$.

Jawab

Kita periksa dahulu apakah titik $Q(10, 9)$ terletak pada lingkaran $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 169$.

$Q(10, 9) \quad \Rightarrow \quad (10 + 2)^2 + (9 - 4)^2 \ ? \ 169$

$\qquad\qquad\qquad 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$ (benar)

Berarti titik $Q(10, 9)$ terletak pada lingkaran dan merupakan titik singgung.

Persamaan garis singgung melalui titik $Q(10, 9)$ pada lingkaran $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 169$ dapat ditentukan dengan rumus

$(x_1 + 2)(x+2) + (y_1 - 4)(y-4) = 169$ dengan $x_1 = 10$ dan $y_1 = 9$

$(10+2)(x+2) + (9-4)(y-4) = 169$

$12(x+2) + 5(y-4) = 169$

$12x + 24 + 5y - 20 = 169 \quad \Leftrightarrow \quad 12x + 5y - 165 = 0$

Jadi, persamaan garis singgung yang melalui titik $Q(10, 9)$ pada lingkaran $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 169$ adalah $12x + 5y - 165 = 0$.

Contoh 3.

Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $R(7, -2)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 27 = 0$.

Jawab

Kita periksa dahulu apakah titik $R(7, -2)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 27 = 0$.

$R(7, -2) \quad \Rightarrow \quad 7^2 + (-2)^2 - 8(7) + 12(-2) + 27 \ ? \ 0$

$49 + 4 - 56 - 24 + 27 \ ? \ 0$

$0 = 0$ (benar)

Berarti titik $R(7, -2)$ terletak pada lingkaran dan merupakan titik singgung.

Persamaan garis singgung melalui titik $R(7, -2)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 27 = 0$ dapat ditentukan dengan rumus

$$x_1x + y_1y - \tfrac{8}{2}(x_1 + x) + \tfrac{12}{2}(y_1 + y) + 27 = 0 \qquad \text{dengan } x_1 = 7 \text{ dan } y_1 = -2$$

$$7x + (-2)y - \frac{8}{2}(7 + x) + \frac{12}{2}(-2 + y) + 27 = 0$$

$$7x - 2y - 4(7 + x) + 6(-2 + y) + 27 = 0$$

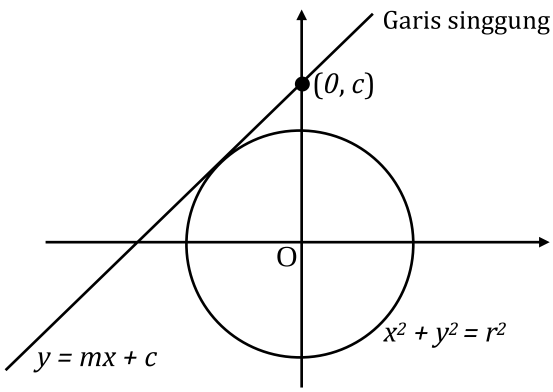
$$7x - 2y - 28 - 4x - 12 + 6y + 27 = 0$$

$$3x + 4y - 13 = 0$$

Jadi, persamaan garis singgung yang melalui titik $R(7, -2)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 27 = 0$ adalah $3x + 4y - 13 = 0$.

2. Persamaan Garis Singgung Yang Gradiennya Diketahui

Sebuah garis yang mempunyai gradien m dan melalui titik $(0, c)$ dinyatakan dengan $y = mx + c$. Jika garis tersebut menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, maka persamaan garis singgung lingkaran tersebut dapat diperoleh dengan langkah-langkah berikut.



Gambar 3.2. Garis singgung lingkaran gradien m

Substitusikan $y = mx + c$ ke dalam persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, sehingga diperoleh

$$x^2 + (mx + c)^2 = r^2$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 = r^2$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 - r^2 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - r^2 = 0$$

Garis menyinggung lingkaran (memotong lingkaran pada satu titik) jika nilai diskriminan persamaan kuadrat di atas sama dengan 0 ($D = b^2 - 4ac = 0$)

$$D = 0$$
$$(2mc)^2 - 4(1 + m^2)(c^2 - r^2) = 0$$
$$4m^2c^2 - 4(c^2 + m^2c^2 - r^2 - m^2r^2) = 0$$
$$4m^2c^2 - 4c^2 - 4m^2c^2 + 4r^2 + 4m^2r^2 = 0$$
$$-4c^2 + 4r^2 + 4m^2r^2 = 0$$
$$4c^2 = 4r^2 + 4m^2r^2$$
$$c^2 = r^2 + m^2r^2$$
$$c^2 = r^2(1 + m^2)$$
$$c = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

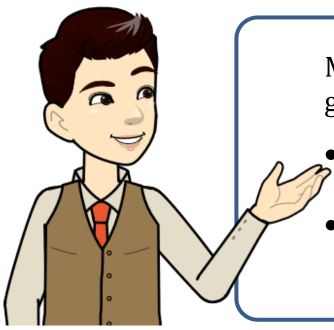
Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ yang mempunyai gradien m adalah

$$\boxed{y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}}$$

Dengan cara yang sama, persamaan garis singgung dengan gradien m pada lingkaran dengan persamaan baku $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dirumuskan oleh

$$\boxed{y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}}$$

Untuk persamaan lingkaran dalam bentuk umum $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, maka terlebih dahulu diubah ke dalam bentuk baku $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ atau langsung menentukan pusat lingkaran $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dan jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$, kemudian menentukan persamaan garis singgungnya dengan rumus di atas.



Hubungan Antara Gradien 2 Garis

Misalkan m_1 adalah gradien garis g_1 dan m_2 adalah gradien garis g_2.

- Jika garis g_1 ***sejajar*** dengan garis g_2, maka berlaku $\boldsymbol{m_1 = m_2}$
- Jika garis g_1 ***tegak lurus*** garis g_2, maka berlaku $\boldsymbol{m_1 \times m_2 = -1}$ atau $m_1 = \frac{-1}{m_2}$

Contoh 4.

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ yang bergradien 2.

Jawab

Diketahui $r = 6$ dan $m = 2$, maka persamaan garis singgungnya adalah

$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

$\Leftrightarrow\ y = 2x \pm 6\sqrt{2^2 + 1}$

$\Leftrightarrow \; y = 2x \pm 6\sqrt{5}$

Jadi, persamaan garis lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ yang bergradien 2 adalah

$y = 2x + 6\sqrt{5}$ dan $y = 2x - 6\sqrt{5}$.

Contoh 5.

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 169$ yang sejajar dengan garis $y = 3x + 5$.

Jawab

Garis $y = 3x + 5$ mempunyai gradien $m_1 = 3$. Garis singgung lingkaran **sejajar** garis $y = 3x + 5$, berarti gradien garis singgung adalah $m = 3$. (sejajar, maka $m = m_1$)

Jari-jari lingkaran $r = \sqrt{169} = 13$, maka persamaan garis singgungnya adalah

$$(y-b) = m(x-a) \pm r\sqrt{m^2+1}$$

$$(y-4) = 3(x+2) \pm 13\sqrt{3^2+1}$$

$$y = 3x + 6 + 4 \pm 13\sqrt{10}$$

$$y = 3x + 10 \pm 13\sqrt{10}$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 169$ yang sejajar dengan garis $y = 3x + 5$ adalah $y = 3x + 10 + 13\sqrt{10}$ dan $y = 3x + 10 - 13\sqrt{10}$.

Contoh 6.

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ yang tegak lurus dengan garis $3x + 4y - 8 = 0$

Jawab

Garis $3x + 4y - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \; 4y = -3x + 8$

$\Leftrightarrow \; y = -\frac{3}{4}x + \frac{8}{4}$, berarti gradien $m_1 = -\frac{3}{4}$.

Garis singgung lingkaran tegak lurus garis $3x + 4y - 8 = 0$, sehingga berlaku :

$$m = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{\frac{-3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Pusat lingkaran $\left(-\frac{1}{2}A,\; -\frac{1}{2}B\right) = \left(-\frac{1}{2}(-6),\; -\frac{1}{2}(8)\right) = (3, -4)$

Jari-jari $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} = \sqrt{\frac{1}{4}(-6)^2 + \frac{1}{4}(8)^2 - 0} = \sqrt{9+16} = 5$

maka persamaan garis singgungnya adalah

$$(y-b) = m(x-a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$(y+4) = \frac{4}{3}(x-3) \pm 5\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1}$$

$$(y+4) = \frac{4}{3}(x-3) \pm 5\sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{9}}$$

$$(y+4) = \frac{4}{3}(x-3) \pm 5\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$3(y+4) = 4(x-3) \pm 25$$

$$3y + 12 = 4x - 12 \pm 25$$

$$3y = 4x - 24 \pm 25$$
$$4x - 3y - \ 24 \pm 25 = 0$$

Jadi, persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ yang tegak lurus dengan garis $3x + 4y - 8 = 0$ adalah $4x - 3y + 1 = 0$ dan $4x - 3y - 49 = 0$.

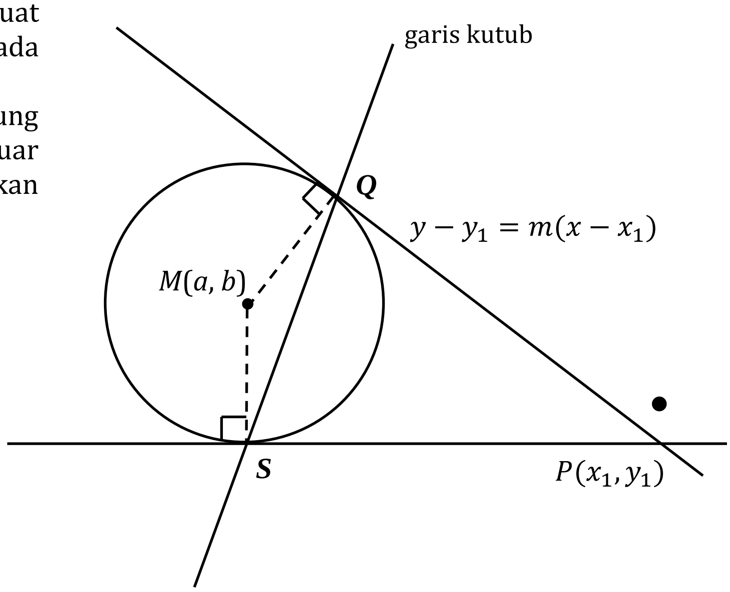
3. Persamaan Garis Singgung Melalui Suatu Titik Di Luar Lingkaran

Dari sebuah titik $P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran selalu dapat dibuat dua buah garis singgung pada lingkaran (lihat gambar).
Persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran dapat ditentukan dengan 3 cara :

a. Menggunakan diskriminan persamaan kuadrat sekutu.

b. Menggunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien diketahui.

c. Mencari titik singgung dengan cara menentukan persamaan garis kutub (polar) dari titik P dan memotongkannya dengan lingkaran.



Gambar 3.3. Garis singgung lingkaran melalui titik di luar lingkaran

Contoh

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ yang melalui titik $P(8, 0)$ di luar lingkaran.

Jawab

a. Dengan menggunakan diskriminan persamaan kuadrat sekutu

Titik $P(8, 0)$ terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 36$, karena $8^2 + (0)^2 = 64 > 36$.
Persamaan garis singgung melalui titik $P(8, 0)$ dimisalkan

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = m(x - 8) \Leftrightarrow y = mx - 8m \quad \text{.........} (*)$$

Persamaan $y = mx - 8m$ disubstitusikan ke dalam persamaan lingkaran, diperoleh persamaan kuadrat sekutu,

$$x^2 + y^2 = 36$$
$$x^2 + (mx - 8m)^2 = 36$$
$$x^2 + m^2x^2 - 16m^2x + 64m^2 = 36$$
$$(1 + m^2)x^2 - 16m^2x + (64m^2 - 36) = 0$$

diperoleh $a = (1 + m^2)$, $b = -16m^2$, dan $c = 64m^2 - 36$

Agar garis menyinggung lingkaran, maka diskriminan persamaan kuadrat sekutu sama dengan nol ($D = 0$)

$$D = b^2 - 4ac$$
$$(-16m^2)^2 - 4(1 + m^2)(64m^2 - 36) = 0$$

$256m^4 - 4(64m^2 - 36 + 64m^4 - 36m^2) = 0$
$256m^4 - 4(28m^2 - 36 + 64m^4) = 0$
$256m^4 - 112m^2 + 144 - 256m^4 = 0$
$-112m^2 + 144 = 0$
$112m^2 = 144$
$7m^2 = 9$ ………………… (*kedua ruas dibagi dengan* 16)

$$m^2 = \frac{9}{7}$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{9}{7}} = \pm\frac{3}{\sqrt{7}} = \pm\frac{3}{7}\sqrt{7}$$

$$m = \frac{3}{7}\sqrt{7} \quad \text{atau} \quad m = -\frac{3}{7}\sqrt{7}$$

Nilai gradien m yang diperoleh disubstitusikan ke dalam persamaan (*) sehingga diperoleh dua garis singgung, yaitu:

$y = mx - 8m$	dan	$y = mx - 8m$
$y = \frac{3}{7}\sqrt{7}x - 8(\frac{3}{7}\sqrt{7})$		$y = -\frac{3}{7}\sqrt{7}x - 8(-\frac{3}{7}\sqrt{7})$
$y = \frac{3}{7}\sqrt{7}x - \frac{24}{7}\sqrt{7}$		$y = -\frac{3}{7}\sqrt{7}x + \frac{24}{7}\sqrt{7}$
$3\sqrt{7}x - 7y - 24\sqrt{7} = 0$		$3\sqrt{7}x + 7y - 24\sqrt{7} = 0$

b. Menggunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien m

Persamaan garis singgung melalui titik $P(8, 0)$ dimisalkan
$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 0 = m(x - 8) \Leftrightarrow y = mx - 8m$ ……… (*)

Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ dengan gradien m adalah

$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ dengan $r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$

$y = mx \pm 6\sqrt{m^2 + 1}$ …………….. (**)

Selanjutnya *ruas kanan* persamaan (*) dan (**) disamakan, sehingga diperoleh,

$mx \pm 6\sqrt{m^2 + 1} = mx - 8m$

$\pm 6\sqrt{m^2 + 1} = -8m$

$36(m^2 + 1) = 64m^2$ ……………….. (*kedua ruas dikuadratkan*)

$36m^2 + 36 = 64m^2$

$28m^2 = 36$

$7m^2 = 9$ ………………….. (*kedua ruas dibagi* 7)

$$m^2 = \frac{9}{7}$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{9}{7}} = \pm\frac{3}{\sqrt{7}} = \pm\frac{3}{7}\sqrt{7}$$

$$m = \frac{3}{7}\sqrt{7} \quad \text{atau} \quad m = -\frac{3}{7}\sqrt{7}$$

Selanjutnya nilai m disubstitusikan ke dalam persamaan (*) sehingga diperoleh dua garis singgung seperti pada cara diskriminan, yaitu

$$y = \frac{3}{7}\sqrt{7}x - \frac{24}{7}\sqrt{7} \quad \text{dan} \quad y = -\frac{3}{7}\sqrt{7}x + \frac{24}{7}\sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow\ 3\sqrt{7}x - 7y - 24\sqrt{7} = 0 \ \text{ dan } \ 3\sqrt{7}x + 7y - 24\sqrt{7} = 0$$

c. *Menggunakan Persamaan Garis Kutub*

Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 36$
Karena $P(x_1, y_1) = P(8, 0)$ di luar lingkaran maka persamaan garis kutubnya adalah

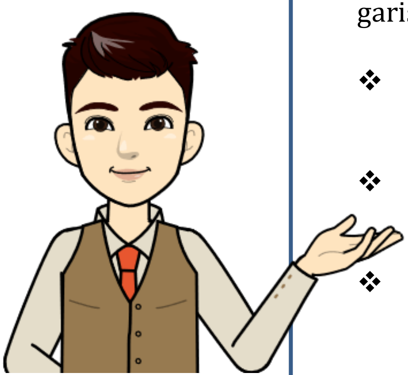
$$x_1 x + y_1 y = 36$$
$$8x + 0y = 36$$
$$x = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

Untuk menentukan titik singgungnya, substitusikan $x = \frac{9}{2}$ ke persamaan lingkaran, diperoleh:

$$x^2 + y^2 = 36$$
$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 + y^2 = 36$$
$$y^2 = 36 - \frac{81}{4}$$
$$y^2 = \frac{63}{4} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{63}{4}} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{7}$$

Diperoleh titik singgung lingkaran $\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$ dan $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$

Persamaan garis singgung lingkaran : $x_1 x + y_1 y = 36$.
Untuk $\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$ diperoleh persamaan $\frac{9}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{7}y = 36 \Leftrightarrow 3x + \sqrt{7}\,y - 24 = 0.$
Untuk $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$ diperoleh persamaan $\frac{9}{2}x - \frac{3}{2}\sqrt{7}y = 36 \Leftrightarrow 3x - \sqrt{7}y - 24 = 0.$



Persamaan Garis Kutub

Apabila titik $P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran, maka persamaan garis kutub (polar) sebagai berikut.

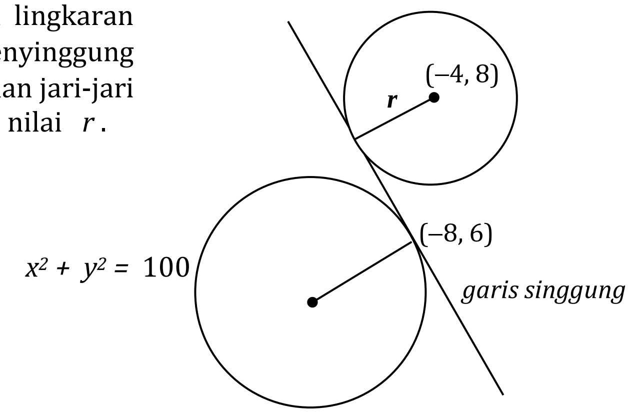
- ❖ $x^2 + y^2 = r^2$ persamaan garis kutub adalah
  $x_1 x + y_1 y = r^2$
- ❖ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ persamaan garis kutub adalah $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$
- ❖ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ persamaan garis kutub adalah
  $x_1 x + y_1 y + \frac{A}{2}(x_1 + x) + \frac{B}{2}(y_1 + y) + C = 0$

C. Rangkuman

- Persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $x_1x + y_1y = r^2$.
- Persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$.
- Persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah $x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x_1 + x) + \frac{B}{2}(y_1 + y) + C = 0$.
- Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ yang mempunyai gradien m adalah $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$.
- Persamaan garis singgung lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ yang mempunyai gradien m adalah $(y - b) = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$.
- Persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1, y_1)$ di luar lingkaran dapat ditentukan dengan 3 cara, yaitu:
  1. menggunakan diskriminan persamaan kuadrat sekutu.
  2. menggunakan rumus persamaan garis singgung dengan gradien diketahui.
  3. mencari titik singgung dengan cara menentukan persamaan garis kutub (polar) dari titik P dan memotongkannya dengan lingkaran.

D. Latihan Soal

1. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $K(-5, 7)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 74$.
2. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $M(2, 4)$ pada lingkaran $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 40$.
3. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $P(8, 2)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 20 = 0$.
4. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ di titik $(-8, 6)$ menyinggung lingkaran dengan pusat $(-4, 8)$ dan jari-jari r seperti pada gambar. Tentukan nilai r.



5. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 20$ yang bergradien 2.
6. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ yang tegak lurus garis $2x - y - 8 = 0$.
7. Tentukan persamaan garis singgung yang sejajar garis $y + 2x - 1 = 0$ pada lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

8. Garis $x = 5$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ di dua titik.
   a. Tentukan koordinat kedua titik tersebut
   b. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui dua titik tersebut.
9. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $T(7, 0)$ di luar lingkaran.
10. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $(-1, 7)$ di luar lingkaran.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

1. Alternatif Penyelesaian
   Persamaan garis singgung yang melalui titik $K(-5,\ 7)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 74$ adalah
   $x_1x + y_1y = 74$ dengan $x_1 = -5$ dan $y_1 = 7$
   $-5x + 7y = 74$
   $-5x + 7y - 74 = 0$ atau $5x - 7y + 74 = 0$

2. Alternatif Penyelesaian
   persamaan garis singgung yang melalui titik $M(2, 4)$ pada lingkaran $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 40$ adalah
   $(x_1 + 4)(x + 4) + (y_1 - 2)(y - 2) = 40$ dengan $x_1 = 2$ dan $y_1 = 4$
   $(2 + 4)(x + 4) + (4 - 2)(y - 2) = 40$
   $6(x + 4) + 2(y - 2) = 40$
   $6x + 24 + 2y - 4 = 40$
   $6x + 2y - 20 = 0 \iff 3x + y - 10 = 0$

3. Alternatif Penyelesaian
   Persamaan garis singgung yang melalui titik $P(8, 2)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 20 = 0$ adalah
   $x_1x + y_1y - \frac{12}{2}(x_1 + x) + \frac{4}{2}(y_1 + y) + 20 = 0$ dengan $x_1 = 8$ dan $y_1 = 2$
   $$8x + 2y - \frac{12}{2}(8 + x) + \frac{4}{2}(2 + y) + 20 = 0$$
   $8x + 2y - 48 - 6x + 4 + 2y + 20 = 0$
   $2x + 4y - 24 = 0$ atau $x + 2y - 12 = 0$

4. Alternatif Penyelesaian
   Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ di titik $(-8, 6)$ adalah
   $x_1x + y_1y = 100$ dengan $x_1 = -8$ dan $y_1 = 6$
   $-8x + 6y = 100$
   $-4x + 3y - 50 = 0$

   Jari-jari r lingkaran kedua adalah jarak titik pusat $(-4, 8)$ ke garis singgung $-4x + 3y - 50 = 0$
   $$r = \frac{|-4(-4) + 3(8) - 50|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{|16 + 24 - 50|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|-10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

5. Alternatif Penyelesaian
   Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 20$ yang bergradien 2.
   Diketahui $r = \sqrt{20}$ dan $m = 2$, maka persamaan garis singgungnya adalah
   $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
   $\iff y = 2x \pm \sqrt{20}\sqrt{2^2 + 1}$
   $\iff y = 2x \pm \sqrt{100} \iff y = 2x \pm 10$
   Jadi, persamaan garis lingkaran $x^2 + y^2 = 20$ yang bergradien 2 adalah
   $y = 2x + 10$ dan $y = 2x - 10$.

6. Alternatif Penyelesaian
   Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ yang tegak lurus garis $2x - y - 8 = 0$.
   Garis $2x - y - 8 = 0 \iff y = 2x - 8$ berarti gradien $m_1 = 2$.

Garis singgung lingkaran tegak lurus garis $2x - y - 8 = 0$, sehingga berlaku :

$$m = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Jari-jari lingkaran $r = \sqrt{16} = 4$ maka persamaan garis singgungnya adalah

$y = mx \pm r\ \sqrt{m^2 + 1}$

$\Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{2}x \pm 4\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$

$\Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{2}x \pm 4\sqrt{\frac{1}{4} + 1}$

$\Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{2}x \pm 4\sqrt{\frac{5}{4}}\quad \Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{2}x \pm 2\sqrt{5}$

Jadi, persamaan garis lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ yang tegak lurus garis $2x - y - 8 = 0$ adalah $y = -\frac{1}{2}x + 2\sqrt{5}$ dan $y = -\frac{1}{2}x - 2\sqrt{5}$.

7. Alternatif Penyelesaian

Persamaan garis singgung yang sejajar garis $y + 2x - 1 = 0$ pada lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Garis $y + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 1$ mempunyai gradien $m_1 = -2$. Garis singgung lingkaran **sejajar** garis $y + 2x - 1 = 0$, berarti gradien garis singgung adalah $m = -2$. (sejajar, maka $m = m_1$)

Jari-jari lingkaran $r = \sqrt{25} = 5$, maka persamaan garis singgungnya adalah

$$(y - b) = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$(y - 1) = -2(x - 2) \pm 5\sqrt{(-2)^2 + 1}$$

$$y = -2x + 4 + 1 \pm 5\sqrt{5}$$

$$y = -2x + 5 \pm 5\sqrt{5}$$

Jadi, persamaan garis lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ yang sejajar garis $y + 2x - 1 = 0$ adalah $y = -2x + 5 + 5\sqrt{5}$ dan $y = -2x + 5 - 5\sqrt{5}$.

8. Alternatif Penyelesaian

a. substitusi $x = 5$ ke lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, diperoleh

$5^2 + y^2 - 4(5) - 6y - 12 = 0$
$25 + y^2 - 20 - 6y - 12 = 0$
$y^2 - 6y - 7 = 0$
$(y + 1)(y - 7) = 0$
$y + 1 = 0$ atau $y - 7 = 0$
$y = -1$ atau $y = 7$

sehingga diperoleh koordinat titik potong garis $x = 5$ dengan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ adalah $(5, -1)$ dan $(5, 7)$

b. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

melalui titik $(5, -1)$ pada lingkaran:

$x_1x + y_1y - \frac{4}{2}(x_1 + x) - \frac{6}{2}(y_1 + y) - 12 = 0$ dengan $x_1 = 5$ dan $y_1 = -1$

$5x - 1y - 2(5 + x) - 3(-1 + y) - 12 = 0$
$5x - y - 10 - 2x + 3 - 3y - 12 = 0$
$3x - 4y - 19 = 0$

melalui titik $(5, 7)$ pada lingkaran:

$x_1x + y_1y - \frac{4}{2}(x_1 + x) - \frac{6}{2}(y_1 + y) - 12 = 0$ dengan $x_1 = 5$ dan $y_1 = 7$

$5x + 7y - 2(5 + x) - 3(7 + y) - 12 = 0$
$5x + 7y - 10 - 2x - 21 - 3y - 12 = 0$
$3x + 4y - 43 = 0$

9. Alternatif Penyelesaian
Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $T(7, 0)$ di luar lingkaran.

Karena $T(x_1, y_1) = T(7, 0)$ di luar lingkaran maka persamaan garis kutubnya adalah
$x_1 x + y_1 y = 25$
$7x + 0y = 25$
$x = \frac{25}{7}$

Untuk menentukan titik singgungnya, substitusikan $x = \frac{25}{7}$ ke persamaan lingkaran, diperoleh:
$x^2 + y^2 = 25$
$\left(\frac{25}{7}\right)^2 + y^2 = 25$
$y^2 = 25 - \frac{625}{49}$
$y^2 = \frac{600}{49} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{600}{49}} = \pm\frac{10}{7}\sqrt{6}$

Diperoleh titik singgung lingkaran $\left(\frac{25}{7}, \frac{10}{7}\sqrt{6}\right)$ dan $\left(\frac{25}{7}, -\frac{10}{7}\sqrt{6}\right)$

Persamaan garis singgung lingkaran : $x_1 x + y_1 y = 25$.
Untuk $\left(\frac{25}{7}, \frac{10}{7}\sqrt{6}\right)$ diperoleh persamaan garis singgung $\frac{25}{7}x + \frac{10}{7}\sqrt{6}y = 25$
$\Leftrightarrow 25x + 10\sqrt{6}y - 175 = 0.$
Untuk $\left(\frac{25}{7}, -\frac{10}{7}\sqrt{6}\right)$ diperoleh persamaan garis singgung $\frac{25}{7}x - \frac{10}{7}\sqrt{6}y = 25$
$\Leftrightarrow 25x - 10\sqrt{6}y - 175 = 0.$

10. Alternatif Penyelesaian
Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $(-1, 7)$ di luar lingkaran.

Misalkan garis singgung lingkaran adalah
$y - 7 = m(x + 1) \Leftrightarrow y = mx + m + 7$

Substitusi $y = mx + m + 7$ ke lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, sehingga diperoleh

$x^2 + (mx + m + 7)^2 = 25$
$x^2 + m^2x^2 + 2mx(m + 7) + (m + 7)^2 = 25$
$(1 + m^2)x^2 + (2m^2 + 14m)x + m^2 + 14m + 24 = 0$

Syarat garis menyinggung lingkaran adalah D = 0, sehingga diperoleh:

$(2m^2 + 14m)^2 - 4(1 + m^2)(m^2 + 14m + 24) = 0$
$4m^4 + 56m^3 + 196m^2 - 4m^2 - 56m - 96 - 4m^4 - 56m^3 - 96m^2 = 0$
$96m^2 - 56m - 96 = 0$
$12m^2 - 7m - 12 = 0$
$(3m - 4)(4m + 3) = 0$
$m = \frac{4}{3}$ atau $m = -\frac{3}{4}$

Substitusikan nilai m ke $y = mx + m + 7$, diperoleh

$y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} + 7 \Rightarrow 3y = 4x + 4 + 21 \Leftrightarrow 4x - 3y + 25 = 0$

dan $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 7 \Rightarrow 4y = -3x - 3 + 28 \Leftrightarrow 3x + 4y - 25 = 0$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $(-1, 7)$ di luar lingkaran adalah $4x - 3y + 25 = 0$ dan $3x + 4y - 25 = 0$.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu yang dimaksud garis singgung lingkaran?	○	○
2	Apakah Anda tahu yang dimaksud gradien dari suatu persamaan garis lurus?	○	○
3	Apakah Anda dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik pada lingkaran?	○	○
4	Apakah Anda dapat menentukan persamaan lingkaran yang memiliki gradien m?	○	○
5	Apakah Anda dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik di luar lingkaran?	○	○
6	Apakah Anda dapat menyelesaikan masalah yang terkait persamaan garis singgung lingkaran?	○	○
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 4
KEDUDUKAN DUA LINGKARAN

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan kalian dapat menentukan kedudukan dua lingkaran, menentukan persamaan berkas lingkaran, dan menyelesaikan masalah terkait kedudukan dua lingkaran.

B. Uraian Materi

1. Kedudukan Dua Lingkaran

Misalkan terdapat dua buah lingkaran L_1 dan L_2, dimana

$L_1 \equiv x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dengan pusat P_1 dan jari-jari r_1,

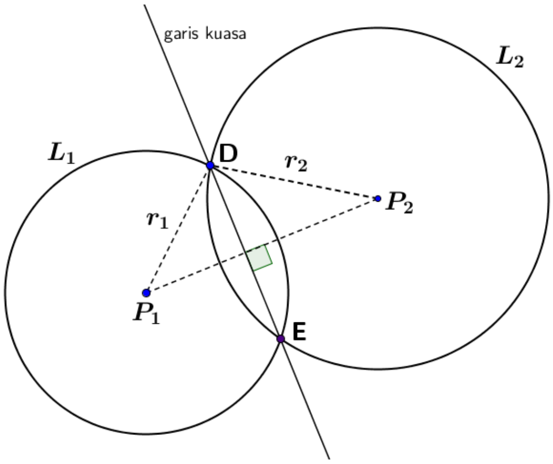
$L_2 \equiv x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$, dengan pusat P_2 dan jari-jari r_2.

Kedudukan dari kedua lingkaran L_1 dan L_2 ada beberapa kemungkinan, yaitu:

a. Dua lingkaran berpotongan

Perhatikan gambar di samping! Lingkaran L_1 dan L_2 berpotongan di dua titik, D dan E. Segmen garis DE disebut *tali busur sekutu*.
Perhatikan segitiga DP_1P_2. Dalam ketaksamaan segitiga diketahui bahwa jumlah dua sisi segitiga selalu lebih besar dari pada sisi ketiganya. Berdasarkan hal tersebut, maka dua lingkaran berpotongan jika jarak

$$P_1P_2 < r_1 + r_2 .$$



Gambar 4.1. Dua lingkaran berpotongan

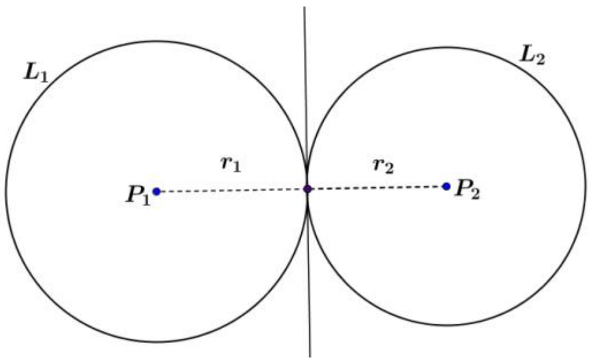
b. Dua lingkaran bersinggungan

Ada dua kemungkinan untuk dua lingkaran saling bersinggungan, yaitu bersinggungan luar atau bersinggungan dalam.

Pada gambar di samping ditunjukkan dua lingkaran yang *saling bersinggungan luar*. Hal ini dapat terjadi jika jarak antara kedua pusat lingkaran sama dengan jumlah jari-jari kedua lingkaran tersebut.

Bersinggungan Luar:

$$P_1P_2 = r_1 + r_2 .$$



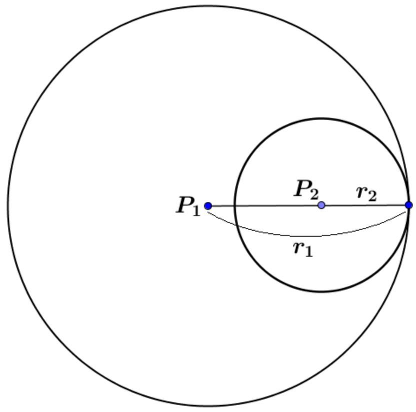
Gambar 4.2. Dua lingkaran bersinggungan luar

Pada gambar di samping ditunjukkan dua lingkaran yang *saling bersinggungan dalam*.

Hal ini dapat terjadi jika jarak antara kedua pusat lingkaran sama dengan selisih jari-jari kedua lingkaran tersebut.

Bersinggungan dalam:

$$P_1P_2 = |r_1 - r_2|$$



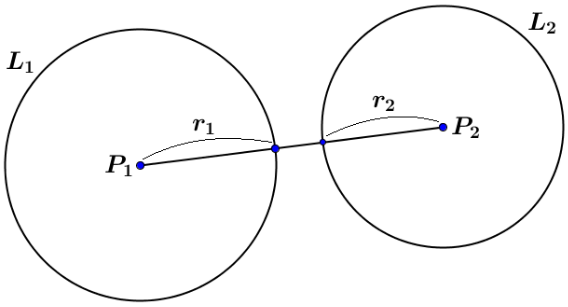
Gambar 4.3. Dua lingkaran bersinggungan dalam

c. *Dua lingkaran tidak berpotongan atau bersinggungan*

Pada gambar di samping ditunjukkan dua lingkaran yang *tidak berpotongan atau bersinggungan*. Hal ini dapat terjadi jika jarak antara kedua pusat lingkaran lebih besar daripada jumlah jari-jari kedua lingkaran tersebut.

Tidak Berpotongan :

$$P_1P_2 > r_1 + r_2$$

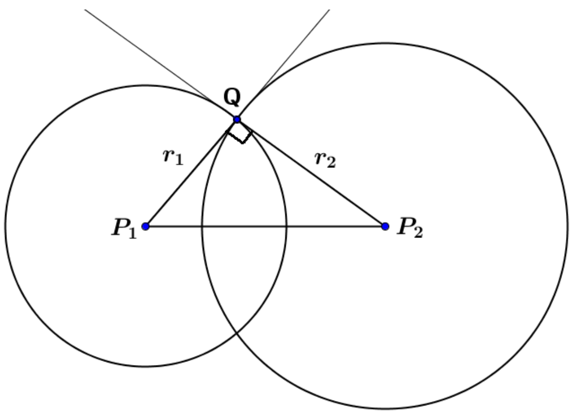


Gambar 4.4. Dua lingkaran tidak berpotongan

d. *Dua lingkaran berpotongan tegak lurus (Orthogonal)*

Dua lingkaran dikatakan berpotongan orthogonal (tegak lurus) jika garis singgung kedua lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran membentuk sudut 90^o (atau saling tegak lurus), seperti yang ditunjukkan pada gambar di samping.

Dua lingkaran berpotongan tegak lurus jika dipenuhi syarat kuadrat jarak antara pusat kedua lingkaran ($P_1P_2^2$) sama dengan jumlah kuadrat jari-jarinya ($r_1^2 + r_2^2$).



Gambar 4.5. Dua lingkaran berpotongan tegak lurus

Dua lingkaran orthogonal : $(P_1P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Catatan:
Jika lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dan lingkaran $L_2 \equiv x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$, maka kedua lingkaran juga akan berpotongan tegak lurus jika memenuhi syarat:

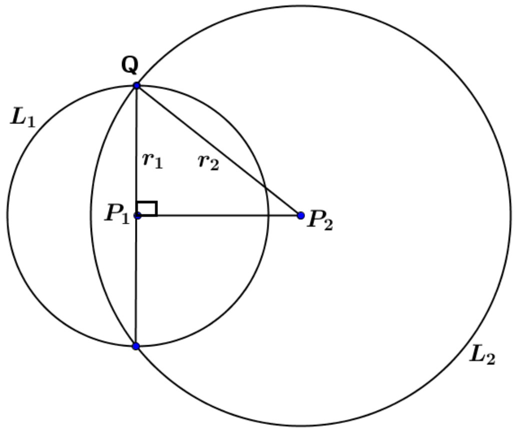
$$2A_1A_2 + 2B_1B_2 = C_1 + C_2$$

e. *Lingkaran L_2 memotong dan membagi dua sama besar lingkaran L_1*

Gambar di samping menunjukkan lingkaran L_2 membagi dua sama besar lingkaran L_1. Hal ini terjadi jika dipenuhi syarat kuadrat jarak antara pusat kedua lingkaran ($\boldsymbol{P_1P_2}^2$) sama dengan selisih kuadrat jari-jarinya ($\boldsymbol{r_2}^2 - \boldsymbol{r_1}^2$).

Lingkaran L_2 memotong dan membagi dua sama besar lingkaran L_1 :

$$(P_1P_2)^2 = r_2^2 - r_1^2$$



Gambar 4.6. Dua lingkaran berpotongan membagi dua sama besar

Contoh 1.

Tunjukkan bahwa lingkaran $x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$ dan lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ saling bersinggungan dan carilah titik singgungnya.

Jawab

Misalkan kedua lingkaran adalah L_1 dan L_2.

$L_1 \equiv x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$

Pusat $P_1\left(-\frac{1}{2}(-16), -\frac{1}{2}(-20)\right) = P_1(8, 10)$

Jari-jari $r_1 = \sqrt{8^2 + 10^2 - 115} = \sqrt{64 + 100 - 115} = \sqrt{49} = 7$

$L_1 \equiv x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$

Pusat $P_2\left(-\frac{1}{2}(8), -\frac{1}{2}(-10)\right) = P_2(-4 , 5)$

Jari-jari $r_2 = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 - 5} = \sqrt{16 + 25 - 5} = \sqrt{36} = 6$

Untuk menentukan jenis kedudukan kedua lingkaran, maka perlu dibandingkan jarak antara pusat P_1P_2 dengan jumlah jari-jari kedua lingkaran $r_1 + r_2$.

Jarak P_1P_2 = jarak antara titik (8, 10) dan (−4 , 5)

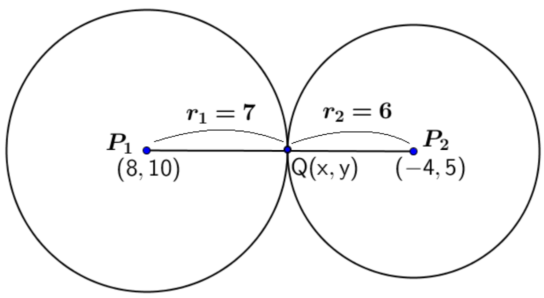
$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{(8-(-4))^2 + (10-5)^2} \\ &= \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} \\ &= \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

Jumlah jari-jari $r_1 + r_2 = 7 + 6 = 13$

Karena $P_1P_2 = r_1 + r_2$, maka kedua lingkaran ***bersinggungan luar***.

Untuk menentukan koordinat titik singgung kedua lingkaran dapat digunakan rumus perbandingan segmen garis berikut ini.

$$\mathbf{P_1Q : QP_2 = 7 : 6}$$



Koordinat Q = (x, y) = $\dfrac{7P_2+6P_1}{7+6}$

$$(x, y) = \frac{7(-4,\ 5)+6(8,\ 10)}{13} = \frac{(-28,\ 35)+(48,\ 60)}{13}$$

$$(x, y) = \frac{(20,\ 95)}{13} = \left(\frac{20}{13},\ \frac{95}{13}\right)$$

Jadi koordinat titik singgung kedua lingkaran adalah $Q\left(\frac{20}{13},\ \frac{95}{13}\right)$.

Contoh 2.

Diketahui lingkaran $L_1 \equiv x^2+y^2+6x+5=0$ dan $L_2 \equiv x^2+y^2-4x=0$. Selidiki, apakah kedua lingkaran tersebut berpotongan?

Jawab

$L_1 \equiv x^2+y^2+6x+5=0$

Pusat $P_1\left(-\frac{1}{2}(6), -\frac{1}{2}(0)\right) = P_1(-3, 0)$

Jari-jari $r_1 = \sqrt{(-3)^2+0^2-5} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$

$L_2 \equiv x^2+y^2-4x=0$

Pusat $P_2\left(-\frac{1}{2}(-4), -\frac{1}{2}(0)\right) = P_2(2, 0)$

Jari-jari $r_2 = \sqrt{2^2+0^2-0} = \sqrt{4} = 2$

Untuk menentukan jenis kedudukan kedua lingkaran, maka perlu dibandingkan jarak antara pusat P_1P_2 dengan jumlah jari-jari kedua lingkaran $r_1 + r_2$.

Jarak P_1P_2 = jarak antara titik (−3, 0) dan (2 , 0)

$P_1P_2 = \sqrt{(-3-2)^2+(0-0)^2}$

$= \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

Jumlah jari-jari $r_1 + r_2 = 2 + 2 = 4$

Karena $P_1P_2 > r_1 + r_2$, maka kedua lingkaran ***tidak saling berpotongan***.

Contoh 3.

Diketahui dua lingkaran $L_1 \equiv x^2+y^2-4x-1=0$ dan lingkaran $L_2 \equiv x^2+y^2-8x+2y-3=0$. Tentukan banyak garis singgung persekutuan dari dua lingkaran tersebut.

Jawab

Untuk mengetahui banyak garis singgung persekutuan dua lingkaran, kita perlu mengetahui kedudukan kedua lingkaran.

$L_1 \equiv x^2+y^2-4x-1=0$

Pusat $P_1\left(-\frac{1}{2}(-4), -\frac{1}{2}(0)\right) = P_1(2, 0)$

Jari-jari $r_1 = \sqrt{2^2+0^2-(-1)} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

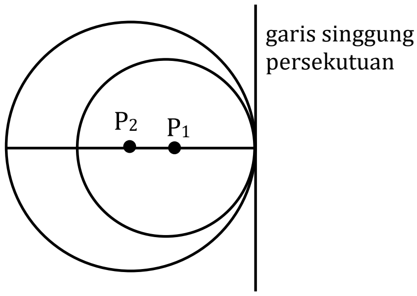
$L_1 \equiv x^2+y^2-8x+2y-3=0$

Pusat $P_2\left(-\frac{1}{2}(-8), -\frac{1}{2}(2)\right) = P_2(4 , -1)$

Jari-jari $r_2 = \sqrt{4^2 + (-1)^2 - (-3)} = \sqrt{16 + 1 + 3} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Untuk menentukan jenis kedudukan kedua lingkaran, maka perlu dihitung jarak antara pusat P_1P_2, $r_1 + r_2$, dan $|r_1 - r_2|$.

Jarak P_1P_2 = jarak antara titik (2, 0) dan (4, –1)



$$P_1P_2 = \sqrt{(2-4)^2 + (0-(-1))^2}$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1}$$
$$= \sqrt{5}$$

$r_1 + r_2 = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

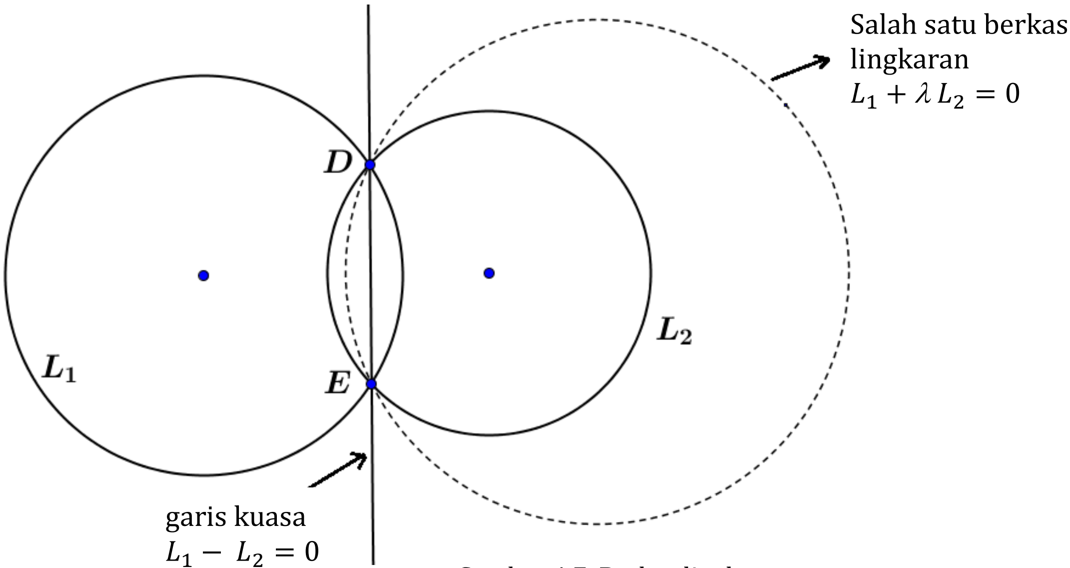
$|r_1 - r_2| = |\sqrt{5} - 2\sqrt{5}| = |-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

Karena $P_1P_2 = |r_1 - r_2|$, maka kedua lingkaran ***bersinggungan dalam*.**

Dua lingkaran yang bersinggungan dalam hanya dapat dibuat satu garis singgung persekutuan.

2. Berkas Lingkaran

Misalkan dua lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ berpotongan dengan lingkaran $L_2 \equiv x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$ pada dua titik potong, D dan E, dengan DE disebut *tali busur sekutu*. Dari tali busur sekutu (DE) ini bisa dibuat sejumlah lingkaran yang disebut sebagai *berkas lingkaran*.



Gambar 4.7. Berkas lingkaran

Gambar di atas menunjukkan salah satu berkas lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran (D dan E), dimana garis DE adalah bagian dari garis kuasa kedua lingkaran yang memenuhi persamaan $L_1 - L_2 = 0$. Berkas lingkaran terdiri atas sejumlah lingkaran yang memenuhi suatu persamaan umum tertentu, dengan parameternya saja yang berbeda.

Misalkan parameter ini diberi simbol λ (dibaca "lamda") maka persamaan berkas lingkaran mirip persamaan garis kuasa $L_1 - L_2 = 0$ dengan menyisipkan parameter λ pada L_2, sehingga persamaan berkas lingkaran untuk kedua lingkaran L_1 dan L_2 adalah ***berkas lingkaran*** $\mathbf{L_1 + \lambda L_2 = 0}$.

Persamaan berkas lingkaran: $\mathbf{L_1 + \lambda L_2 = 0}$

Salah satu persamaan berkas $L_1 + \lambda L_2 = 0$ yang melalui titik potong D dan E ditunjukkan pada gambar di atas. Himpunan semua lingkaran yang memenuhi $L_1 + \lambda L_2 = 0$ disebut ***berkas lingkaran*** dengan L_1 dan L_2 sebagai lingkaran dasar.

Kita akan menganalisis persamaan berkas lingkaran dengan mengubah ke bentuk umum persamaan lingkaran berikut ini.

$L_1 + \lambda L_2 = 0$ ………… (*)

$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2)= 0$ ………… (**)

$\Leftrightarrow$ $(x^2 + \lambda x^2) + (y^2 + \lambda y^2) + (A_1 x + \lambda A_2 x) + (B_1 y + \lambda B_2 y) + (C_1 + \lambda C_2) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(1 + \lambda)x^2 + (1 + \lambda)y^2 + (A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2) = 0$

Bagi kedua ruas di atas dengan $(1 + \lambda)$ diperoleh

$$x^2 + y^2 + \frac{A_1 + \lambda A_2}{1+\lambda}x + \frac{B_1 + \lambda B_2}{1+\lambda}y + \frac{C_1 + \lambda C_2}{1+\lambda} = 0 \quad \text{………… (***)}$$

Persamaan (***) di atas menunjukkan suatu persamaan lingkaran untuk setiap nilai λ. Perhatikan beberapa kasus di bawah ini.

1. Jika $\lambda = 0$, maka dari persamaan berkas lingkaran (*), yaitu $L_1 + \lambda L_2 = 0$ akan diperoleh $L_1 = 0$.
2. Jika $\lambda \to \infty$ maka dari persamaan (***) diperoleh,

$$x^2 + y^2 + \frac{\lambda A_2}{\lambda}x + \frac{\lambda B_2}{\lambda}y + \frac{\lambda C_2}{\lambda} = 0$$

$$x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{atau } L_2 = 0$$

3. Jika $\lambda = -1$, maka dari persamaan berkas lingkaran (*) diperoleh,

$L_1 + \lambda L_2 = 0$
$L_1 + (-1)L_2 = 0$
$L_1 - L_2 = 0$

artinya garis kuasa terhadap lingkaran L_1 dan L_2 termasuk salah satu persamaan berkas lingkaran. Garis kuasa dapat dianggap sebagai lingkaran dengan pusat pada garis hubung titik pusat kedua lingkaran dan terletak di tak hingga, sehingga busurnya berupa garis lurus.

Contoh 4.

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$, serta melalui titik asal (0, 0).

Jawab

Lingkaran yang dicari melalui titik potong lingkaran L_1 dan L_2 , dan ini merupakan salah satu anggota dari berkas lingkaran L_1 dan L_2 yang dirumuskan oleh persamaan $L_1 + \lambda L_2 = 0$.

$L_1 + \lambda L_2 = 0$ dengan λ sebagai parameter

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 + \lambda(x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4) = 0$ ………… (*)

Persamaan (*) melalui titik asal (0, 0), berarti $x = 0$ dan $y = 0$ dapat disubstitusi ke persamaan (*) untuk menghitung parameter λ.

$$0^2 + 0^2 + 2(0) + 2(0) - 2 + \lambda(0^2 + 0^2 + 4(0) - 8(0) + 4) = 0$$

$$-2 + \lambda(4) = 0$$

$$4\lambda = 2$$

$$\lambda = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Substitusi nilai parameter $\lambda = \frac{1}{2}$ ke persamaan (*) untuk memperoleh persamaan lingkaran tersebut.

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4) = 0$ ………. kalikan dengan 2

$\Leftrightarrow$ $2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y - 4 + (x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4) = 0$

$\Leftrightarrow$ $2x^2 + x^2 + 2y^2 + y^2 + 4x + 4x + 4y - 8y - 4 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow$ $3x^2 + 3y^2 + 8x - 4y = 0$

Jadi, persamaan lingkaran yang dimaksud adalah $3x^2 + 3y^2 + 8x - 4y = 0$.

Contoh 5.

Diketahui lingkaran A dengan pusat (0, 1) dan jari-jari 3 satuan, dan lingkaran B dengan pusat (0, −1) dan jari-jari 3. Tentukan persamaan berkas lingkaran yang terbentuk dari kedua lingkaran tersebut dan melalui pusat lingkaran B.

Jawab

Persamaan lingkaran A adalah $L_A \equiv x^2 + (y - 1)^2 = 9$
Persamaan lingkaran B adalah $L_B \equiv x^2 + (y + 1)^2 = 9$

Persamaan berkas lingkaran yang dimaksud adalah,

$L_A + \lambda L_B = 0$

$x^2 + (y - 1)^2 - 9 + \lambda(x^2 + (y + 1)^2 - 9) = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 - 2y + 1 - 9 + \lambda(x^2 + y^2 + 2y + 1 - 9) = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 - 2y - 8 + \lambda(x^2 + y^2 + 2y - 8) = 0$ ……….. (*)

Berkas lingkaran melalui titik pusat lingkaran B, yaitu (0, −1), berarti $x = 0$ dan $y = -1$ dapat disubstitusi ke persamaan (*) untuk menghitung parameter λ.

$\Leftrightarrow$ $(0)^2 + (-1)^2 - 2(-1) - 8 + \lambda((0)^2 + (-1)^2 + 2(-1) - 8) = 0$

$\Leftrightarrow$ $0 + 1 + 2 - 8 + + \lambda(0 + 1 - 2 - 8) = 0$

$\Leftrightarrow$ $- 5 + \lambda(-9) = 0$

$\Leftrightarrow$ $-9\lambda = 5$ $\Leftrightarrow$ $\lambda = -\frac{5}{9}$

Substitusi nilai parameter $\lambda = -\frac{5}{9}$ ke persamaan (*) untuk memperoleh persamaan lingkaran tersebut.

$x^2 + y^2 - 2y - 8 - \frac{5}{9}(x^2 + y^2 + 2y - 8) = 0$ ………… Kalikan dengan 9

$\Leftrightarrow$ $9x^2 + 9y^2 - 18y - 72 - 5(x^2 + y^2 + 2y - 8) = 0$

$\Leftrightarrow$ $9x^2 + 9y^2 - 18y - 72 - 5x^2 - 5y^2 - 10y + 40 = 0$

$\Leftrightarrow$ $4x^2 + 4y^2 - 28y - 32 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 - 7y - 8 = 0$

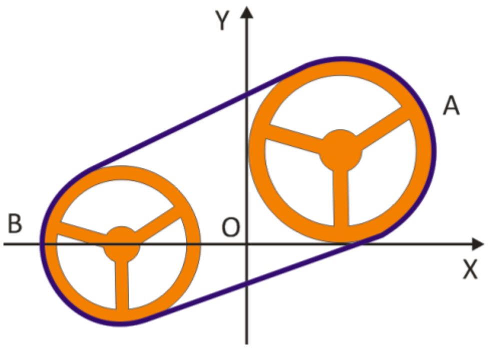
Jadi, persamaan lingkaran yang dimaksud adalah $x^2 + y^2 - 7y - 8 = 0$.

C. Rangkuman

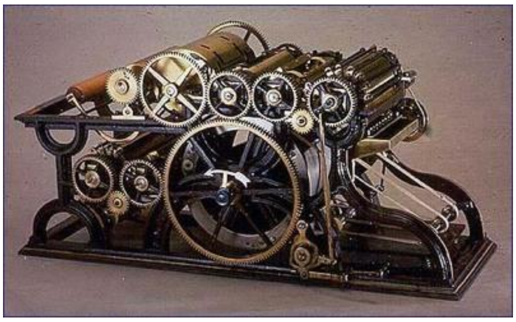
- Misalkan lingkaran L_1 dengan pusat P_1 dan jari-jari r_1, dan lingkaran L_2 dengan pusat P_2 dan jari-jari r_2. Lingkaran L_1 dan L_2 berpotongan pada dua titik jika jarak $P_1P_2 < r_1 + r_2$.
- Misalkan lingkaran L_1 dengan pusat P_1 dan jari-jari r_1, dan lingkaran L_2 dengan pusat P_2 dan jari-jari r_2. Lingkaran L_1 dan L_2 bersinggungan luar jika jarak $P_1P_2 = r_1 + r_2$.
- Misalkan lingkaran L_1 dengan pusat P_1 dan jari-jari r_1, dan lingkaran L_2 dengan pusat P_2 dan jari-jari r_2. Lingkaran L_1 dan L_2 bersinggungan dalam jika jarak $P_1P_2 = |r_1 - r_2|$.
- Misalkan lingkaran L_1 dengan pusat P_1 dan jari-jari r_1, dan lingkaran L_2 dengan pusat P_2 dan jari-jari r_2. Lingkaran L_1 dan L_2 berpotongan tegak lurus jika jarak $(P_1P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$.
- Misalkan lingkaran L_1 dengan pusat P_1 dan jari-jari r_1, dan lingkaran L_2 dengan pusat P_2 dan jari-jari r_2. Lingkaran L_2 memotong dan membagi dua sama besar lingkaran L_1 jika jarak $(P_1P_2)^2 = r_2^2 - r_1^2$.
- Misalkan dua lingkaran L_1 dan L_2. Berkas lingkaran dari L_1 dan L_2 adalah lingkaran-lingkaran yang dibuat melalui titik potong lingkaran L_1 dan L_2 dengan persamaan $L_1 + \lambda L_2 = 0$.

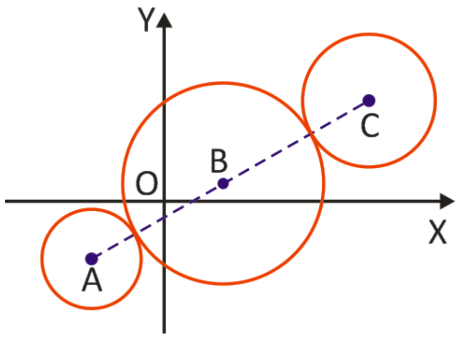
D. Latihan Soal

1. Tunjukkan bahwa lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 10x + 4y - 7 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 18x + 4y + 21 = 0$ bersinggungan luar. Tentukan titik singgung tersebut.
2. Tunjukkan bahwa lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 2y - 54 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 22x - 8y + 112 = 0$ tidak saling berpotongan.
3. Lingkaran-lingkaran $x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$ saling bersinggungan. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik singgung tersebut dan memiliki jari-jari ½.
4. Mesin dalam sebuah pabrik penggilingan tepung memiliki roda A yang menggerakkan roda B melalui sebuah rantai. Dengan sumbu-sumbu koordinat, ditunjukkan roda A memiliki jari-jari 10 unit dan menyentuh kedua sumbu.
   a. Tentukan persamaan roda A.
   b. Jika roda B memiliki persamaan $x^2 + y^2 + 28x + 147 = 0$ dan 1 unit = 10 cm, hitunglah:
      (i) jarak antara pusat kedua roda
      (ii) celah terpendek di antara kedua roda



5. Surat kabar dicetak oleh *lithograph*, cetakan berita yang harus bergerak melalui tiga buah pemutar (*roller*), yang diilustrasikan pada gambar sebagai tiga buah lingkaran. Pusat-pusat A, B, dan C dari ketiga lingkaran adalah *kolinear* (terletak pada suatu garis lurus). Persamaan lingkaran luar masing-masing adalah $(x + 12)^2 + (y + 15)^2 = 25$ dan $(x - 24)^2 + (y - 12)^2 = 100$. Tentukan persamaan lingkaran di tengah.





6. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$, serta melalui titik $(2, -1)$.
7. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik potong lingkaran $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 3y - 7 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 3x - 2y - 1 = 0$, serta melalui titik $(1, 2)$.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 4

1. Alternatif Penyelesaian

   $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 10x + 4y - 7 = 0$

   Pusat $P_1\left(-\frac{1}{2}(10), -\frac{1}{2}(4)\right) = P_1(-5, -2)$

   Jari-jari $r_1 = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 - (-7)} = \sqrt{25 + 4 + 7} = \sqrt{36} = 6$

   $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 18x + 4y + 21 = 0$

   Pusat $P_2\left(-\frac{1}{2}(-18), -\frac{1}{2}(4)\right) = P_2(9, -2)$

   Jari-jari $r_2 = \sqrt{9^2 + (-2)^2 - 21} = \sqrt{81 + 4 - 21} = \sqrt{64} = 8$

   Untuk menentukan jenis kedudukan kedua lingkaran, maka perlu dibandingkan jarak antara pusat P_1P_2 dengan jumlah jari-jari kedua lingkaran $r_1 + r_2$.

   Jarak P_1P_2 = jarak antara titik $(-5, -2)$ dan $(9, -2)$

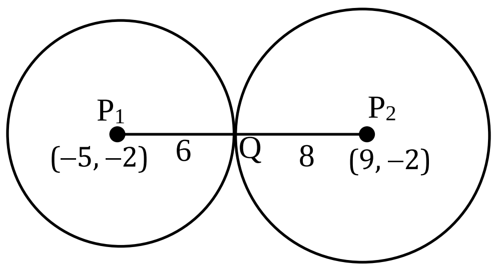
   $$P_1P_2 = \sqrt{(9-(-5))^2 + (-2-(-2))^2}$$
   $$= \sqrt{14^2 + 0^2} = \sqrt{14^2} = 14$$

   Jumlah jari-jari $r_1 + r_2 = 6 + 8 = 14$

   Karena $P_1P_2 = r_1 + r_2$, maka kedua lingkaran bersinggungan luar.

   Untuk menentukan koordinat titik singgung kedua lingkaran dapat digunakan rumus perbandingan segmen garis berikut ini.

   $P_1Q : QP_2 = 6 : 8$



   Koordinat Q = $(x, y) = \frac{6P_2 + 8P_1}{6 + 8}$

   $$(x, y) = \frac{6(9,\ -2) + 8(-5,\ -2)}{14} = \frac{(54,\ -12) + (-40,\ -16)}{14}$$
   $$(x, y) = \frac{(14,\ -28)}{14} = \left(\frac{14}{14}, \frac{-28}{14}\right) = (1, -2)$$

   Jadi koordinat titik singgung kedua lingkaran adalah $Q(1, -2)$.

2. Alternatif Penyelesaian

   $L_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x - 2y - 54 = 0$

   Pusat $P_1\left(-\frac{1}{2}(6), -\frac{1}{2}(-2)\right) = P_1(-3, 1)$

   Jari-jari $r_1 = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 - (-54)} = \sqrt{9 + 1 + 54} = \sqrt{64} = 8$

   $L_2 \equiv x^2 + y^2 - 22x - 8y + 112 = 0$

   Pusat $P_2\left(-\frac{1}{2}(-22), -\frac{1}{2}(-8)\right) = P_2(11, 4)$

   Jari-jari $r_2 = \sqrt{11^2 + 4^2 - 112} = \sqrt{121 + 16 - 112} = \sqrt{25} = 5$

   Untuk menentukan jenis kedudukan kedua lingkaran, maka perlu dibandingkan jarak antara pusat P_1P_2 dengan jumlah jari-jari kedua lingkaran $r_1 + r_2$.

   Jarak P_1P_2 = jarak antara titik $(-3, 1)$ dan $(11, 4)$

   $$P_1P_2 = \sqrt{(11-(-3))^2 + (4-1)^2}$$
   $$= \sqrt{14^2 + 3^2} = \sqrt{196 + 9} = \sqrt{205} = 14{,}32$$

   Jumlah jari-jari $r_1 + r_2 = 8 + 5 = 13$

Karena $P_1P_2 > r_1 + r_2$, maka kedua lingkaran tidak saling berpotongan.

3. Alternatif Penyelesaian

L_1: $x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0$

Pusat $P_1\left(-\frac{1}{2}(-16), -\frac{1}{2}(-20)\right) = P_1(8, 10)$

Jari-jari $r_1 = \sqrt{8^2 + 10^2 - 115} = \sqrt{64 + 100 - 115} = \sqrt{49} = 7$

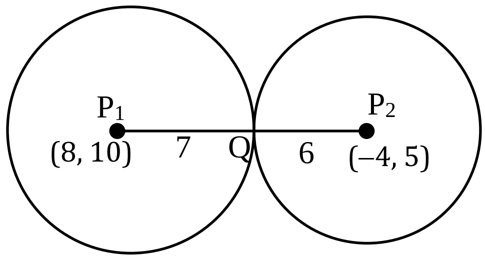
L_2: $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$

Pusat $P_2\left(-\frac{1}{2}(8), -\frac{1}{2}(-10)\right) = P_2(-4, 5)$

Jari-jari $r_2 = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 - 5} = \sqrt{16 + 25 - 5} = \sqrt{36} = 6$

Untuk menentukan koordinat titik singgung kedua lingkaran dapat digunakan rumus perbandingan segmen garis berikut ini.

$P_1Q : QP_2 = 7 : 6$



Koordinat Q = (x, y) = $\frac{7P_2 + 6P_1}{7 + 6}$

$(x, y) = \frac{7(-4,\ 5) + 6(8,\ 10)}{13} = \frac{(-28,\ 35) + (48,\ 60)}{13}$

$(x, y) = \frac{(20,\ 95)}{13} = \left(\frac{20}{13}, \frac{95}{13}\right)$.

Jadi koordinat titik singgung kedua lingkaran adalah $Q\left(\frac{20}{13}, \frac{95}{13}\right)$.

Persamaan lingkaran yang berpusat di titik $Q\left(\frac{20}{13}, \frac{95}{13}\right)$ dan memiliki jari-jari ½ adalah

$$\left(x - \frac{20}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{95}{13}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{20}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{95}{13}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

4. Alternatif Penyelesaian
   a. Persamaan roda A

   Jari-jari roda A adalah $r_A = 10$. Roda A menyinggung kedua sumbu, berarti titik pusat roda A adalah $P_A = (10, 10)$.

   Jadi, persamaan roda A adalah

   $(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 10^2$

   $(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$

   b. Persamaan roda B adalah $x^2 + y^2 + 28x + 147 = 0$

   Pusat roda B adalah $P_B = \left(-\frac{1}{2}(28), -\frac{1}{2}(0)\right) = (-14, 0)$

   Jari-jari roda B adalah $r_B = \sqrt{(-14)^2 + 0^2 - 147} = \sqrt{196 - 147} = \sqrt{49} = 7$.

   (i) Jarak antara pusat kedua roda adalah Jarak P_AP_B = jarak antara titik (10, 10) dan (–14, 0)

   $P_AP_B = \sqrt{(10 - (-14))^2 + (10 - 0)^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100}$

   $= \sqrt{676} = 26$

   Jadi, jarak antara kedua pusat roda adalah 26 × 10 cm = 260 cm.

   (ii) celah terpendek di antara kedua roda adalah

   $P_AP_B - (r_A + r_B)$ unit = 26 – (10 + 7) = 26 – 17 = 9 unit.

   Jadi, celah terpendek di antara kedua roda adalah 9 × 10 cm = 90 cm.

5. Alternatif Penyelesaian

Lingkaran A: $(x + 12)^2 + (y + 15)^2 = 25$

Pusat lingkaran A yaitu $P_A = (-12, -15)$

Jari-jari lingkaran A yaitu $r_A = \sqrt{25} = 5$

Lingkaran C: $(x - 24)^2 + (y - 12)^2 = 100$

Pusat lingkaran C yaitu $P_C = (24, 12)$

Jari-jari lingkaran C yaitu $r_C = \sqrt{100} = 10$

Jarak antara pusat lingkaran A dan C adalah P_AP_C

$$P_AP_C = \sqrt{(24-(-12))^2 + (12-(-15))^2} = \sqrt{36^2 + 27^2}$$
$$= \sqrt{1296 + 729} = \sqrt{2025} = 45$$

Lingkaran A, B, dan C terletak pada suatu garis lurus, sehingga diameter lingkaran B adalah $P_AP_C - (r_A + r_C) = 45 - (5 + 10) = 30$.

Sehingga diperoleh jari-jari lingkaran B yaitu $r_B = ½(30) = 15$.

Titik pusat lingkaran B dapat diperoleh dari perbandingan AB : BC = 20 : 25

$$\text{Koordinat B} = (x, y) = \frac{20P_C + 25P_A}{20 + 25}$$
$$(x, y) = \frac{20(24,\ 12) + 25(-12, -15)}{45} = \frac{(480,\ 240) + (-300,\ -375)}{45}$$
$$(x, y) = \frac{(180,\ -135)}{45} = \left(\frac{180}{45}, \frac{-135}{45}\right) = (4, -3)$$

Jadi, persamaan lingkaran B dengan pusat $P_B = (4, -3)$ dan jari-jari $r_B = 15$ adalah

$$(x-4)^2 + (y-(-3))^2 = 15^2$$
$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 225$$

6. Alternatif Penyelesaian

$L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$

$L_1 + \lambda L_2 = 0$ dengan λ sebagai parameter

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 + \lambda(x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4) = 0$ ………... (*)

Persamaan (*) melalui titik (2, −1), berarti $x = 2$ dan $y = -1$ dapat disubstitusi ke persamaan (*) untuk menghitung parameter λ.

$2^2 + (-1)^2 + 2(2) + 2(-1) - 2 + \lambda(2^2 + (-1)^2 + 4(2) - 8(-1) + 4) = 0$

$4 + 1 + 4 - 2 - 2 + \lambda(4 + 1 + 8 - 8 + 4) = 0$

$5 + \lambda(9) = 0$

$9\lambda = -5$

$\lambda = \frac{-5}{9}$

Substitusi nilai parameter $\lambda = \frac{-5}{9}$ ke persamaan (*) untuk memperoleh persamaan lingkaran tersebut.

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 + \left(\frac{-5}{9}\right)(x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4) = 0$ ………. kalikan dengan 9

$\Leftrightarrow$ $9x^2 + 9y^2 + 18x + 18y - 18 - 5(x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4) = 0$

$\Leftrightarrow$ $9x^2 + 9y^2 + 18x + 18y - 18 - 5x^2 - 5y^2 - 20x + 40y - 20 = 0$

$\Leftrightarrow$ $4x^2 + 4y^2 - 2x + 58y - 38 = 0$

$\Leftrightarrow$ $2x^2 + 2y^2 - x + 29y - 19 = 0$

Jadi, persamaan lingkaran yang dimaksud adalah $2x^2 + 2y^2 - x + 29y - 19 = 0$.

7. Alternatif Penyelesaian

$L_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 3y - 7 = 0$ dan $L_2 \equiv x^2 + y^2 + 3x - 2y - 1 = 0$

$L_1 + \lambda L_2 = 0$ dengan λ sebagai parameter

$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 7 + \lambda(x^2 + y^2 + 3x - 2y - 1) = 0$ ………… (*)

Persamaan (*) melalui titik (1, 2), berarti $x = 1$ dan $y = 2$ dapat disubstitusi ke persamaan (*) untuk menghitung parameter λ.

$1^2 + 2^2 + 2(1) + 3(2) - 7 + \lambda(1^2 + 2^2 + 3(1) - 2(2) - 1) = 0$

$1 + 4 + 2 + 6 - 7 + \lambda(1 + 4 + 3 - 4 - 1) = 0$

$6 + \lambda(3) = 0$

$3\lambda = -6$

$\lambda = -2$

Substitusi nilai parameter $\lambda = -2$ ke persamaan (*) untuk memperoleh persamaan lingkaran tersebut.

$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 7 + 2(x^2 + y^2 + 3x - 2y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 3y - 7 + 2x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 8x - y - 9 = 0$

Jadi, persamaan lingkaran yang dimaksud adalah $3x^2 + 3y^2 + 8x - y - 9 = 0$.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu yang dimaksud kedudukan dua lingkaran?	◯	◯
2	Apakah Anda tahu yang dimaksud berkas lingkaran?	◯	◯
3	Apakah Anda dapat menentukan kedudukan dua lingakaran yang diketahui persamaannya?	◯	◯
4	Apakah Anda dapat menentukan persamaan berkas lingkaran?	◯	◯
5	Apakah Anda dapat menyelesaikan masalah yang terkait kedudukan dua lingkaran?	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

1. Pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ berturut-turut adalah ….
   B. $(-2, 3)$ dan 4
   C. $(-2, 3)$ dan 5
   D. $(-2, 3)$ dan 6
   E. $(2, -3)$ dan 4
   F. $(2, -3)$ dan 5

2. Lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + by - 12 = 0$ melalui titik (1, 7). Titik pusat lingkaran itu adalah ….
   A. $(-2, -3)$
   B. $(-2, 3)$
   C. $(2, 3)$
   D. $(2, 4)$
   E. $(2, 6)$

3. Persamaan lingkaran dengan pusat (–1, 3) dan menyinggung sumbu Y adalah ….
   A. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$
   B. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$
   C. $x^2 + y^2 - x + 3y + 1 = 0$
   D. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$
   E. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$

4. Diketahui lingkaran $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3py - 30 = 0$ melalui titik (–2, 1). Persamaan lingkaran yang sepusat tapi panjang jari-jarinya dua kali panjang jari-jari lingkaran tersebut adalah ….
   A. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y - 90 = 0$
   B. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 90 = 0$
   C. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 90 = 0$
   D. $x^2 + y^2 - x + 6y + 90 = 0$
   E. $x^2 + y^2 - x - 6y - 90 = 0$

5. Persamaan lingkaran dengan pusat P(3, 1) dan menyinggung garis $3x + 4y + 7 = 0$ adalah ….
   A. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$
   B. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$
   C. $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$
   D. $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 9 = 0$
   E. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

6. Persamaan lingkaran yang pusatnya terletak pada garis $2x - 4y - 4 = 0$ serta menyinggung sumbu X negatif dan sumbu Y negatif adalah ….
   A. $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$
   B. $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8 = 0$
   C. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4 = 0$
   D. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
   E. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$

7. Diketahui lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + mx + 4y + 3 = 0$ dan titik P(4, 1) terletak pada lingkaran. Titik A dan B yang masing-masing terletak di dalam lingkaran tersebut adalah ....
   A. A(2, -1) dan B(4, -4)
   B. A(2, -1) dan B(2, 1)
   C. A(1, 1) dan B(4, -4)
   D. A(0,-3) dan B(4, -5)
   E. A(0, -3) dan B(1, 1)

8. Diketahui lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0$. Kedudukan garis $y = -2x + 17$ terhadap lingkaran tersebut adalah ....
   A. garis memotong lingkaran pada dua titik
   B. garis tidak memotong lingkaran
   C. garis menyinggung lingkaran
   D. garis terletak pada lingkaran
   E. garis membagi dua lingkaran sama besar

9. Diketahui lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 5$. Jika garis $y = mx + 5$ menyinggung lingkaran, maka nilai m adalah ....
   A. 2
   B. 1
   C. ½
   D. –½
   E. –2

10. Lingkaran $x^2 + y^2 - Ax - 10y + 4 = 0$ menyinggung sumbu X. Nilai A yang memenuhi adalah ....
    A. –8 dan 8
    B. –6 dan 6
    C. –5 dan 5
    D. –4 dan 4
    E. –2 dan 2

11. Persamaan salah satu garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 12$ yang melalui titik P(0, 4) adalah ....
    A. $x\sqrt{3} + 3y = 12$
    B. $x\sqrt{3} + 3y = 4$
    C. $-x\sqrt{3} + 3y = 6$
    D. $-x\sqrt{3} + 3y = 4$
    E. $x\sqrt{3} + y = 12$

12. Garis singgun di titik (12, –5) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 169$ menyinggung lingkaran $(x - 5)^2 + (y - 12)^2 = p$. Nilai p sama dengan ....
    A. 207
    B. 169
    C. 117
    D. 19
    E. 13

13. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ yang melalui titik (3, –2) adalah ….
    A. $2x - 3y = -13$
    B. $2x - 3y = 13$
    C. $3x - 2y = -14$
    D. $3x - 2y = 13$
    E. $3x + 2y = 13$

14. Persamaan garis singgung lingkaran $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 40$ yang tegak lurus garis $x + 3y + 5 = 0$ adalah ….
    A. $y = 3x + 1$ dan $y = 3x - 30$
    B. $y = 3x + 2$ dan $y = 3x - 32$
    C. $y = 3x - 2$ dan $y = 3x - 32$
    D. $y = 3x + 5$ dan $y = 3x - 35$
    E. $y = 3x - 5$ dan $y = 3x - 35$

15. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ di titik P(5, 3) adalah ….
    A. $3x - 4y + 27 = 0$
    B. $3x + 4y - 27 = 0$
    C. $3x + 4y - 7 = 0$
    D. $7x + 4y - 17 = 0$
    E. $7x + 4y - 7 = 0$

16. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang tegak lurus garis $2y - x + 3 = 0$ adalah ….
    A. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\sqrt{5}$
    B. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\sqrt{5}$
    C. $y = 2x - 5$
    D. $y = -2x + 5\sqrt{5}$
    E. $y = 2x + 5$

17. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 7 = 0$ di titik yang berabsis 5 adalah ….
    A. $4x - y - 18 = 0$
    B. $4x - y + 4 = 0$
    C. $4x - y + 10 = 0$
    D. $4x + y - 4 = 0$
    E. $4x + y - 15 = 0$

18. Diketahui dua lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 26 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$. Kedudukan kedua lingkaran tersebut adalah ….
    A. berpotongan pada dua titik
    B. bersinggungan luar
    C. bersinggungan dalam
    D. tidak berpotongan
    E. berpotongan tegak lurus

19. Diketahui dua lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 18x - 12y + 65 = 0$. Jarak pusat kedua lingkaran tersebut adalah ….
    A. 25
    B. 24
    C. 13
    D. 12
    E. 10

20. Diketahui dua lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 20 = 0$. Persamaan lingkaran yang melalui titik potong kedua lingkaran tersebut dan melalui titik A(4, 2) adalah ….
    A. $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$
    B. $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$
    C. $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$
    D. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$
    E. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. B
2. B
3. D
4. C
5. C
6. A
7. A
8. C
9. E
10. D
11. A
12. E
13. D
14. D
15. B
16. D
17. A
18. C
19. C
20. A

DAFTAR PUSTAKA

Marthen K, Hadi N, Ghany A. 2019. *Matematika untuk Siswa SMA/MA Kelas XI Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam*. Bandung: Yrama Widya.

Noormandiri, B.K. 2005. *Matematika SMA untuk Kelas XI Program Ilmu Alam Jilid 2A*. Jakarta: Erlangga

Untung Trisna Suwaji. 2019. *Lingkaran*. Unit Pembelajaran Program Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan (PKB) Melalui Peningkatan Kompetensi Pembelajaran (PKP) Berbasis Zonasi. Jakarta: Kemendikbud.

Untung Trisna Suwaji, Himmawati. 2018. *Geometri dan Irisan Kerucut*. Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA. Jakarta: Kemendikbud.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Peminatan

KELAS
XI

POLINOMIAL (SUKU BANYAK)

MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XI

PENYUSUN
Istiqomah, S.Pd

SMAN 5 Mataram

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Akar rasional	:	nilai-nilai penyelesaian pada persamaan polinomial yang dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan p dan q bilangan bulat
Derajat	:	pangkat tertinggi suatu variabel pada polinomial
Diskriminan	:	nilai $b^2 - 4ac$ pada persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$
Eliminasi	:	proses penghilangan salah satu variabel dari dua atau lebih bentuk persamaan untuk mendapat nilai variabel lain
Faktor	:	satu atau dua polinomial atau lebih yang hasil kalinya merupakan polinomial yang diketahui
Hasil Bagi	:	bentuk aljabar yang dihasilkan dari pembagian suatu polinomial oleh polinomial lain
Persamaan	:	bentuk aljabar yang disamakan dengan 0
Polinomial	:	bentuk aljabar yang berbentuk $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ dengan a_i menyatakan bilangan kompleks dan $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$
Substitusi	:	proses penggantian nilai variabel ke bentuk aljabar

PETA KONSEP


Polinomial
Pengertian
Operasi Aljabar
Pembagian
Persamaan
Bentuk Umum
Contoh Polinomial
Penjumlahan
Pengurangan
Perkalian
Kesamaan
Nilai Polinomial
Skema Horner
Skema Horner-Kino
Teorema Sisa
Teotema Faktor
Akar-akar rasional
Teorema Vieta

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	: Matematika Peminatan
Kelas	: XI
Alokasi Waktu	: 12x45 Menit (12 JP)
Judul Modul	: Polinomial

B. Kompetensi Dasar

3. 4 Menganalisis keterbagian dan faktorisasi polinom

4.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan faktorisasi polinomial

C. Deskripsi Singkat Materi

Kemampuan menghitung dan menggunakan polinomial banyak digunakan dalam menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari. Menghitung jarak atau kecepatan benda yang jatuh dari ketinggian tertentu merupakan salah satu penerapan polinomial bentuk sederhana. Selain itu, penerapan polinomial dapat kita temui saat menghitung banyak barang, fungsi biaya untuk menafsirkan dan memprediksi kecenderungan harga pasar berbagai barang dan suku bunga bank dalam ekonomi, pengolahan harga dan biaya kirim, menyajikan pola cuaca pada daerah tertentu, mendesain bentuk struktur bangunan bahkan mendesain bentuk kemasan suatu produk seperti ilustrasi berikut.

Sebuah industri rumahan akan mendesain kemasan produknya dari bahan karton berukuran 16 dm $\times$ 24 dm. Kardus itu mempunyai dasar berbentuk persegi dan volume kardus yang diinginkan adalah 640 liter. Berapa ukuran (dimensi) dari kardus berbentuk kotak tersebut?

Gambar 1. Kemasan produk yang terbuat dari karton
Sumber : https://dikemas.com/kemasan/kemasan-kardus-custom-ukuran-dan-desain

Anak-anakku, untuk menentukan ukuran dari kardus tersebut kita dapat menerapkan bentuk polinomial $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ khususnya penyelesaian persamaan polinomial berderajat tiga yang akan dipelajari dalam modul ini. Selain itu, kita akan belajar menentukan nilai operasi aljabar pada polinomial, pembagian polinomial, dan menentukan penyelesaian persamaan polinomial.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Anak-anakku sekalian, modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh soal yang disediakan dan jika memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada modul ini.
5. Jika kalian menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **3** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Pengertian dan Operasi Aljabar pada Polinomial

Kedua : Pembagian Polinomial

Ketiga : Persamaan Polinomial

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
PENGERTIAN DAN OPERASI ALJABAR PADA POLINOMIAL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan siswa dapat :
1. memahami pengertian polinomial,
2. menentukan operasi penjumlahan pada polinomial,
3. menentukan operasi pengurangan pada polinomial,
4. menentukan operasi perkalian pada polinomial,
5. menentukan kesamaan polinomial,
6. menentukan nilai polinomial.

B. Uraian Materi

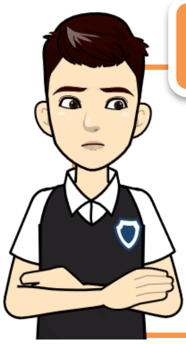
1. Pengertian Polinomial

Polinomial atau suku banyak adalah suatu bentuk aljabar yang terdiri atas beberapa suku dan memuat satu variabel berpangkat bulat positif. Secara umum, polinomial dalam x dan berderajat n dapat dituliskan sebagai berikut.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{x-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dengan :
n merupakan bilangan bulat positif , $a_n \neq 0$
$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1$ bilangan real dan merupakan koefisien-koefisien polinomial
a_0 bilangan real dan merupakan suku tetap (konstanta)
Derajat suatu polinomial dalam x adalah pangkat tertinggi dari x dalam polinomial itu.

Anak-anakku untuk lebih memahami bentuk dari polinomial, mari kita perhatikan contoh soal 1 dan contoh soal 2 berikut.



Contoh Soal 1

Manakah bentuk berikut yang merupakan polinomial !
a. $6x^2 + 3x + 5 + 4x^3$
b. $8x^3 + 4x^2 - 2x + 1 + \frac{3}{x}$
c. $2x^4 - 7x^3 + 8x - 4$
d. $5x^3 + 2x^2 + 3\sqrt{x} + 1$

Pembahasan:
Anak-anakku untuk menentukan yang merupakan polinomial, mari kita ingat kembali bentuk umum polinomial berikut.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{x-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Berdasarkan bentuk umum polinomial, mari kita identifikasi manakan yang termasuk polinomial dari beberapa bentuk aljabar berikut.

a. $6x^2 + 3x + 5 + 4x^3$ merupakan polinomial karena dapat dinyatakan dalam bentuk $4x^3 + 6x^2 + 3x + 5$ dimana semua variabel x berpangkat bilangan asli.
b. $8x^3 + 4x^2 - 2x + 1 + \frac{3}{x}$ bukan merupakan polinomial, karena terdapat variabel x yang berpangkat bukan bilangan bulat positif (bilangan asli), yaitu $\frac{3}{x} = 3x^{-1}$ (x memiliki pangkat negatif)
c. $2x^4 - 7x^3 + 8x - 4$ merupakan polinomial karena dapat dinyatakan dalam bentuk $2x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 8x - 4$ dimana semua variabel x berpangkat bilangan asli
d. $5x^3 + 2x^2 + 5x + 3\sqrt{x} + 1$, bukan polinomial, karena terdapat variabel x yang berpangkat bukan bilangan bulat positif, yaitu $3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$ (x berpangkat pecahan)

Contoh Soal 2

Susun suku banyak $5x + 7 + x^4 - 6x^3$ dalam pangkat turun, kemudian nyatakan :
a. Suku-suku berikut koefisiennya
b. Derajat dan konstantanya.

Pembahasan:
Suku banyak $f(x) = 5x + 7 + x^4 - 6x^3$ dalam pangkat turun dinyatakan $f(x) = x^4 - 6x^3 + 0x^2 + 5x + 7$ x^2 diberi koefisien 0 karena semual tidak terdapat dalam $f(x)$
a. Suku-suku $f(x)$ beserta koefisiennya sebagai berikut :
   Suku x^4 dengan koefisien = 1
   Suku – $6x^3$ dengan koefisien = – 6
   Suku $0x^2$ dengan koefisien = 0
   Suku 5x dengan koefisien = 5
   7 adalah konstanta
b. Suku dengan pangkat variabel paling tinggi adalah suku x^4, sehingga $f(x)$ merupakan suku banyak berderajat empat. Adapun konstantanya = 7.

2. Operasi Aljabar pada Polinomial

Sifat-sifat pada operasi bilangan real juga berlaku pada operasi polinomial karena polinomial memuat variabel yang merupakan suatu bilangan real yang belum diketahui nilainya. Sifat-sifat tersebut meliputi sifat komutatif, asosiatif, dan distributif yang akan membantu kita dalam menyelesaikan operasi aljabar pada polinomial.

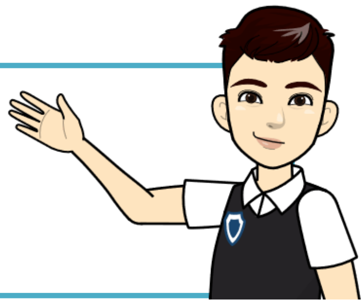
Sifat Distributif :
$$5x^2 - 2x^2 = (5-2)x^2$$
$$= 3x^2$$

Sifat Komutatif dan Asosiatif
$$2x^2 \times 3x^3 = (2 \times 3)x^{2+3}$$
$$= 6x^5$$

a. Penjumlahan dan Pengurangan

Penjumlahan dan pengurangan polinomial dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan antarkoefisien suku-suku sejenis. Suku-suku sejenis yaitu suku-suku yang mempunya variabel berpangkat sama. Untuk lebih memahami penjumlahan dan pengurangan pada polinomial, kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal 1

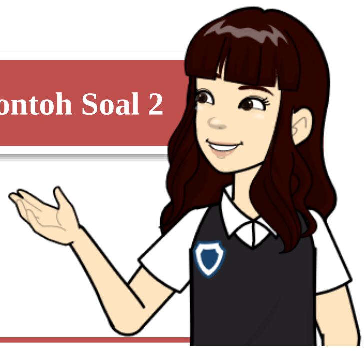


Diketahui polinomial :
$p(x) = 6x^3 - 8x^2 + 7x + 10$
$q(x) = 10x^2 + 11x - 13$
Hasil penjumlahan polinomial $p(x)$ dan $q(x)$ adalah ...

Pembahasan:
Diketahui:
$p(x) = 6x^3 - 8x^2 + 7x + 10$
$q(x) = 10x^2 + 11x - 13$
Penjumlahan $p(x)$ dan $q(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (6x^3 - 8x^2 + 7x + 10) + (10x^2 + 11x - 13) \\ &= 6x^3 + (-8x^2 + 10x^2) + (7x + 11x) + (10 - 13) \rightarrow \boxed{\text{Mengelompokkan suku sejenis}} \\ &= 6x^3 + (-8 + 10)x^2 + (7 + 11)x + (-3) \rightarrow \boxed{\text{Sifat distributif}} \\ &= 6x^3 + 2x^2 + 18x - 3 \end{aligned}$$

Contoh Soal 2



Diketahui polinomial :
$g(y) = 10y^3 + 7y^2 - 4y - 2$
$h(y) = 5y^3 - 2y + 3$
Hasil pengurangan polinomial $g(y)$ dan $h(y)$ adalah ...

Pembahasan:
Diketahui:
$g(y) = 10y^3 + 7y^2 - 4y - 2$
$h(y) = 5y^3 - 2y + 3$
Pengurangan $g(y)$ dan $h(y)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} g(y) - h(y) &= (10y^3 + 7y^2 - 4y - 2) - (5y^3 - 2y + 3) \\ &= 10y^3 + 7y^2 - 4y - 2 - 5y^3 + 2y - 3 \\ &= (10y^3 - 5y^3) + 7y^2 + (-4y + 2y) + (-2 - 3) \rightarrow \boxed{\text{Mengelompokkan suku sejenis}} \\ &= (10 - 5)y^3 + 7y^2 + (-4 + 2)y + (-5) \rightarrow \boxed{\text{Sifat distributif}} \\ &= 5y^3 + 7y^2 + (-2)y - 5 \\ &= 5y^2 + 7y^2 - 2y - 5 \end{aligned}$$

b. Perkalian

Anak-anakku untuk mempermudah kita melakukan perkalian polinomial kita bisa menggunakan sifat distributif seperti berikut.

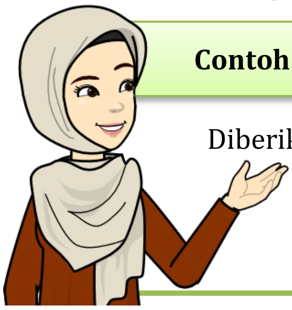
$$a \cdot (b + c + \cdots + k) = a \cdot b + a \cdot c + \cdots + a \cdot k$$
$$(b + c + \cdots + k) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a + \cdots + k \cdot a$$

Secara umum, kita dapat mengalikan polinomial derajat m dengan polinomial derajat n sebagai berikut.

$$\left(a^m + bx^{m-1} + \cdots\right)\left(Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots\right) = a \cdot Ax^{m+n} + b \cdot Bx^{m+n-2} + \cdots$$

Hal ini berarti ketika mengalikan dua polinomial, kita menerapkan sifat-sifat perpangkatan yang telah dipelajari, **yaitu $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$**

Untuk memahami perkalian pada polinomial, yuk kita perhatikan contoh soal berikut.



Contoh Soal

Diberikan dua buah suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$ yang ditentukan oleh

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$$
$$g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

Tentukan $f(x) \cdot g(x)$ serta derajatnya !

Pembahasan:

Diketahui:

$f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$

$g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

Maka $f(x) \cdot g(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (x^3 + x^2 - 3x + 1) \cdot (x^3 - 2x^2 + 2x - 1) \\ &= x^3(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) + x^2(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) - 3x(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) \\ &\quad + 1(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) \\ &= x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^3 + x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 3x + x^3 \\ &\quad - 2x^2 + 2x - 1 \\ &= x^6 + (-2x^5 + x^5) + (2x^4 - 2x^4 - 3x^4) + (-x^3 + 2x^3 + 6x^3 + x^3) \\ &\quad + (-x^2 - 6x^2 - 2x^2) + (3x + 2x) - 1 \\ &= x^6 + (-2 - 1)x^5 + (2 - 2 - 3)x^4 + (-1 + 2 + 6 + 1)x^3 + (-1 - 6 - 2)x^2 \\ &\quad + (3 + 2)x - 1 \\ &= x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 5x - 1 \end{aligned}$$

Jadi, $f(x) \cdot g(x) = x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 5x - 1$ dengan derajat polinomial adalah 6 karena pangkat tertinggi dari variabel adalah 6

Berdasarkan uraian pada contoh soal dapat disimpulkan sebagai berikut.

Misalkan $f(x)$ polinomial berderajat m dan $g(x)$ polinomial berderajat n maka
Derajat dari $[f(x) \cdot g(x)]$ adalah $(m + n)$

3. Kesamaan Polinomial

Dua polinomial berderajat n dalam variabel x yaitu $f(x)$ dan $g(x)$ dikatakan sama jika kedua suku banyak itu mempunyai nilai yang sama untuk variabel x. Kesamaan polinomial $f(x)$ dan $g(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{f(x) \equiv g(x)}$$

Anak-anakku, secara matematis kesamaan suku banyak dapat dituliskan sebagai berikut.

Misalkan dua suku banyak berderajat n,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

$f(x)$ sama dengan $g(x)$, ditulis $f(x) \equiv g(x)$ jika dan hanya jika $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}, a_{n-2} = b_{n-2,} \ldots, a_1 - b_1, a_0 = b_0$

Koefisien dari variabel berpangkat sederajat adalah sama

Untuk lebih memahami kesamaan suku banyak, yuk kita simak beberapa contoh soal berikut.

Contoh Soal 1:

Diketahui suku banyak $Ax^2 + Bx + C$ sama dengan $6x^2 - 4x + 3$. Tentukan nilai koefisien A, B dan C !

Pembahasan:

$Ax^2 + Bx + C \equiv 6x^2 - 4x + 3$ jika dan hanya jika koefisien x^2, x, dan konstanta pada ruas kiri dan ruas kanan adalah sama.

Koefisien x^2: $A = 6$;
koefisien x : $B = -4$ B = – 4 ;
konstanta : $C = 3$
Jadi, $A = 6$, $B = -4$, dan $C = 3$

Contoh Soal 2:

Diketahui $x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \equiv ax(x+1)^2 + b(x-2) + c$ untuk semua x. Nilai a, b, dan c adalah …

Pembahasan:

Samakan koefisien suku sejenis di ruas kiri dan ruas kanan.

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 4x + 7 &= ax(x+1)^2 + b(x-2) + c \\ &= ax(x^2 + 2x + 1) + bx - 2b + c \\ &= (ax \cdot x^2) + (ax \cdot 2x) + (ax \cdot 1) + bx - 2x + c \\ &= ax^3 + 2ax^2 + ax + bx - 2b + c \\ &= ax^3 + 2ax^2 + (a+b)x + (-2b + c) \end{aligned}$$

Jadi kesamaan suku banyak adalah

$x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \equiv ax^3 + 2ax^2 + (a+b)x + (-2b + c)$

Koefisien x^3 : $1 = a \to \boldsymbol{a = 1}$

Koefisien x : $-4 = a + b \to a + b = -4$ mencari nilai b dengan mensubstitusi $a = 1$ ke $a + b = -4$ diperoleh

$1 + b = -4$
$b = -4 - 1$
$\boldsymbol{b = -5}$

Konstanta : $7=-2b+c\rightarrow -2b+c=7$ substitusi $b=-5$ untuk memperoleh nilai c

$$\begin{aligned} -2b+c&=7\\ -2(-5)+c&=7\\ 10+c&=7\\ c&=7-10\\ \boldsymbol{c}&=\mathbf{-3}\end{aligned}$$

Jadi, nilai $a=1, b=-5$, dan $c=-3$

Contoh Soal 3:

Berdasarkan kesamaan berikut tentukan nilai a dan b

$\frac{2x+10}{x^2-2x-8}\equiv\frac{a}{x-4}+\frac{b}{x+2}$

Pembahasan:

Samakan koefisien suku sejenis di ruas kiri dan ruas kanan.

$$\frac{2x+10}{x^2-2x-8}\equiv\frac{a}{x-4}+\frac{b}{x+2}$$
$$\frac{2x+10}{x^2-2x-8}\equiv\frac{a(x+2)}{(x-4)(x+2)}+\frac{b(x-4)}{(x+2)(x-4)}$$

Samakan penyebut menjadi x^2-2x-8

$$\frac{2x+10}{x^2-2x-8}\equiv\frac{ax+2a}{x^2-2x-8}+\frac{bx-4b}{x^2-2x-8}$$
$$\frac{2x+10}{x^2-2x-8}\equiv\frac{ax+bx+2a-4b}{a^2-2x-8}$$

Kelompokkan suku sejenis

$$\frac{2x+10}{x^2-2x-8}\equiv\frac{(a+b)x+(2a-4b)}{a^2-2x-8}$$

Sifat distributif

Berdasarkan kesamaan polinomial di atas diperoleh dua persamaan sebagai berikut.

$2=a+b\rightarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{2}$ persamaan (i)

$10=2a-4b\rightarrow 2a-4b=10\rightarrow \boldsymbol{a}-\mathbf{2}\boldsymbol{b}=\mathbf{5}$ persamaan (ii)

Untuk mencari nilai a dan b eliminasi persamaan (i) dan (ii) sebagai berikut

$$\begin{aligned} a+b&=2\\ \underline{a-2b}&\underline{=5\ -}\\ 3b&=-3\\ \boldsymbol{b}&=\mathbf{-1}\end{aligned}$$

Substitusi $b=-1$ untuk mencari nilai a ke persamaan $a+b=2$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} a+b&=2\\ a+(-1)&=2\\ a-1&=2\\ a&=2+1\\ \boldsymbol{a}&=\mathbf{3}\end{aligned}$$

Jadi, nilai $a=3$ dan $b=-1$

4. Nilai Polinomial

Suatu polinomial atau suku banyak dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x)$, yaitu:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{x-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Jika suatu suku banyak dinyatakan sebagai fungsi $f(x)$ dan nilai x diganti dengan bilangan tetap k, maka bentuk $f(k)$ merupakan nilai suku banyak tersebut untuk $x = k$. Untuk menentukan nilai dari $f(k)$ kita bisa menggunakan metode substitusi dan metode sintetik yaitu skema Horner.

a. Metode Substitusi

Cara menentukan nilai suatu suku banyak dengan metode substitusi adalah sebagai berikut.

Nilai suku banyak

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{x-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Untuk $x = k$ ditentukan oleh

$$f(k) = a_n(k)^n + a_{n-1}(k)^{n-1} + a_{n-2}(k)^{x-2} + \cdots + a_2(k)^2 + a_1(k) + a_0$$

Anak-anakku untuk lebih memahami menentukan nilai suku banyak dengan metode substitusi, yuk kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal :

Diketahui suku banyak $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 5$. Nilai $f(x)$ untuk $x = 3$ adalah ...

Pembahasan:

Substitusi nilai $x = 3$ ke $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 5$ diperoleh

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 2(3)^2 - 3 - 5 \\ &= 27 - 2(9) - 8 \\ &= 27 - 18 - 8 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, nilai $f(x)$ untuk $x = 3$ adalah 1

b. Skema Horner

Misalkan suku banyak $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ akan ditentukan nilainya untuk $x = k$ dengan cara skema.
Terlebih dahulu bentuk suku banyak tersebut disederhanakan sehingga setiap variabel x hanya berpangkat satu (kecuali untuk a_0), sehingga diperoleh,
$f(x) = (a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$
Nilai $f(x)$ untuk $x = k$ dapat ditentukan sebagai berikut :

$$f(k) = (a_3k + a_2)k + a_1)k + a_0$$

Bentuk tersebut dapat disusun dalam suatu bagan sebagai berikut :

$$\begin{array}{c|cccc} k & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & a_3k & (a_3k + a_2)k & ((a_3k + a_2)k + a_1)k \\ \hline & a_3 & (a_3k + a_2) & ((a_3k + a_2)k + a_1) & \underbrace{((a_3k + a_2)k + a_1)k + a_0}_{\text{Nilai f(k)}} \end{array} +$$

Keterangan :

1). Kalikan a_3 dengan k, lalu tambah dengan a_2
2). Kalikan hasil pada no. (1) dengan k, lalu tambah dengan a_1
3). Kalikan hasil pada no. (2) dengan k, lalu tambah dengan a_0. Hasilnya yang terakhir adalah nilai dari suku banyak $f(x)$ untuk $x = k$ atau $f(k)$.
Anak-anakku untuk memahami menentukan nilai suku banyak menggunakan skema Horner, yuk perhatikan contoh berikut.

Contoh Soal 1:

Tentukan nilai suku banyak $f(x) = 5x^4 - 3x^3 - 7x^2 = 2x + 3$ untuk $x = 1$

Pembahasan:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 5 & -3 & -7 & 2 & 3 \\ & & 5(1) & 2(1) & -5(1) & -3(1) \\ \hline & 5 & 2 & -5 & -3 & 0 \end{array} +$$

Jadi, Nilai $f(1) = 1$

Contoh Soal 2:

Tentukan nilai suku banyak $f(x) = 5 - x^2 + 3x^4$ untuk $x = -1$

Pembahasan:
Pertama, ubah $f(x)$ menjadi bentuk pangkat turun sebagai berikut :

$$f(x) = 3x^4 + 0x^3 - x^2 + 0x + 5$$

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ & & 3(-1) & -3(-1) & 2(-1) & -2(-1) \\ \hline & 3 & -3 & 2 & -2 & 7 \end{array} +$$

Jadi, nilai $f(-1) = 7$

C. Rangkuman

1. **Polinomial** atau suku banyak adalah suatu bentuk aljabar yang terdiri atas beberapa suku dan memuat satu variabel berpangkat bulat positif. Secara umum, polinomial dalam x dan berderajat n dapat dituliskan sebagai berikut
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{x-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
dengan :
n merupakan bilangan bulat positif , $a_n \neq 0$
$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$ bilangan real dan merupakan koefisien-koefisien polinomial
a_0 bilangan real dan merupakan suku tetap (konstanta)
2. **Derajat** suatu polinomial dalam x adalah pangkat tertinggi dari x dalam polinomial itu
3. Operasi aljabar pada polinomial terdiri atas penjumlahan, pengurangan dan perkalian.
    a. Penjumlahan dan pengurangan
    Penjumlahan dan pengurangan polinomial dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan antarkoefisien suku-suku sejenis. Suku-suku sejenis yaitu suku-suku yang mempunya variabel berpangkat sama.
    b. Perkalian

Secara umum, kita dapat mengalikan polinomial derajat m dengan polinomial derajat n sebagai berikut.

$$\left(\boldsymbol{a^m + bx^{m-1} + \cdots}\right)\left(\boldsymbol{Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots}\right) = \boldsymbol{a \cdot Ax^{m+n} + b \cdot Bx^{m+n-2} + \cdots}$$

Hal ini berarti ketika mengalikan dua polinomial, kita menerapkan sifat-sifat perpangkatan yang telah dipelajari, **yaitu** $\boldsymbol{x^m \cdot x^n = x^{m+n}}$

4. Kesamaan Polinomial

   Misalkan dua suku banyak berderajat n,

   $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$
   $$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

   $f(x)$ sama dengan $g(x)$, ditulis $f(x) \equiv g(x)$ jika dan hanya jika $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}, a_{n-2} = b_{n-2}, \ldots, a_1 - b_1, a_0 = b_0$

   Koefisien dari variabel berpangkat sederajat adalah sama

5. Nilai Polinomial
   a. Metode Substitusi

      Nilai suku banyak

      $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{x-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

      Untuk $x = k$ ditentukan oleh

      $$f(k) = a_n(k)^n + a_{n-1}(k)^{n-1} + a_{n-2}(k)^{x-2} + \cdots + a_2(k)^2 + a_1(k) + a_0$$

   b. Skema Horner

      Nilai $f(x)$ untuk $x = k$ dapat ditentukan sebagai berikut :

      $$f(k) = (a_3 k + a_2)k + a_1)k + a_0$$

      Bentuk tersebut dapat disusun dalam suatu bagan sebagai berikut :

$$\begin{array}{c|cccc}
k & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & a_3 k & (a_3 k + a_2)k & ((a_3 k + a_2)k + a_1)k \\
\hline
 & a_3 & (a_3 k + a_2) & ((a_3 k + a_2)k + a_1) & \underbrace{((a_3 k + a_2)k + a_1)k + a_0}_{\text{Nilai f(k)}}
\end{array} +$$

      Keterangan :

      1). Kalikan a_3 dengan k, lalu tambah dengan a_2

      2). Kalikan hasil pada no. (1) dengan k, lalu tambah dengan a_1

      3). Kalikan hasil pada no. (2) dengan k, lalu tambah dengan a_0. Hasilnya yang terakhir adalah nilai dari suku banyak $f(x)$ untuk $x = k$ atau $f(k)$.

D. Latihan Soal

Anak- anak untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap polinomial, operasi aljabar pada polinomial, dan menentukan nilai polinomial kerjakan soal latihan berikut:

1. Berikut ini yang merupakan suku banyak adalah …
   A. $\frac{x^3+3x+1}{x^4-5x+2}$
   B. $\sqrt{x^3 - 2x + 1}$
   C. $\sqrt{x}$
   D. $\frac{3}{4}x^5 - x^3 \sin\frac{\pi}{5} + 3$
   E. $\sqrt{\frac{x^3-2}{x^2+1}}$

2. Diketahui polinomial $f(x) = x^5 - 3x^7 + 2x - 7x^4 + 14$. Derajat polinomial $f(x)$ adalah …
   A. 1
   B. 4
   C. 5
   D. 7
   E. 14

3. Koefisien-koefisien pada polinomial $3y^2 - 5y - 10 + 15y - 6y^2$ jika ditulis dalam urutan turun adalah …
   A. $-3, 10, -10$
   B. $-6, 15, -10$
   C. $-9, 10, -10$
   D. $6, 10, -10$
   E. $3, 10, 10$

4. Hasil dari operasi penjumlahan $x^3 + 5x^2 + 6x - 1$ dan $3x^3 - 4x^2 - 8x + 6$ adalah …
   A. $4x^3 + x^2 - 2x + 5$
   B. $4x^3 - 9x^2 + 2x + 5$
   C. $4x^3 + x^2 - 2x - 5$
   D. $4x^3 - 9x^2 - 2x + 5$
   E. $4x^3 - x^2 + 2x - 5$

5. Hail pengurangan polinomial $x^4 - 3x^2 + 6$ oleh $x^3 - 3x^2 - 2$ adalah …
   A. $x^4 + x^3 - 6x^2 + 8$
   B. $x^4 - x^3 + 8$
   C. $x^4 + x^3 - 8$
   D. $x^4 + x^3 + 6x - 8$
   E. $x^4 + x^3 + 6x + 8$

6. Hasil dari perkalian $(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 1)$ adalah …
   A. $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$
   B. $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$
   C. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$
   D. $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3$
   E. $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$

7. Nilai $A \cdot B$ yang memenuhi kesamaan $(x + 5)(Ax + B) \equiv 2x^2 + 7x - 15$ adalah …
   A. -7
   B. -6
   C. 0
   D. 6
   E. 7

8. Diketahui kesamaan $\frac{-x+8}{(x+3)(2x-5)} \equiv \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2x-5}$. Nilai $A + B$ adalah …
   A. -2
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. 2

9. Nilai suku banyak $x^5 + 3x^2 - 8x + 2$ untuk $x = -2$ adalah …
   A. -4
   B. -2
   C. 0
   D. 2
   E. 4

10. Jika nilai polinomial $x^4 + ax^3 - 5x^2 - x + 4$ untuk $x = -1$ adalah -7, nilai $a = \cdots$
   A. 11
   B. 9
   C. 8
   D. -7
   E. -14

Pembahasan dan Kunci Jawaban:

No.	Pembahasan	Skor
1.	Untuk menentukan mana yang merupakan suku banyak, kita perhatikan kembali bentuk umum dari suku banyak sebagai berikut $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{x-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ Pilihan A. $\frac{x^3+3x+1}{x^4-5x+2}$ bukan merupakan suku banyak karena berbentuk pecahan Pilihan B. $\sqrt{x^3-2x+1}$ bukan merupakan suku banyak karena dalam bentuk akar sehingga pangkat dari variabelnya pecahan $(x^3-2x+1)^{\frac{1}{2}}$ Pilihan C. $\sqrt{x}$ bukan merupakan suku banyak karena pangkat varibel pecahan yaitu $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ Pilihan D. $\frac{3}{4}x^5 - x^3 \sin\frac{\pi}{5} + 3$ merupakan suku banyak karena pangkat variabel dari bentuk aljabar ini $\frac{3}{4}x^5 - x^3 \sin\frac{\pi}{5} + 3$ adalah bilangan bulat positif Pilihan E. $\sqrt{\frac{x^3-2}{x^2+1}}$ bukan merupakan suku banyak karena dalam bentuk akar sehingga pangkat dari variabenya pecahan $\left(\frac{x^3-2}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ **Jawaban: D**	10
2.	Diketahui $f(x) = x^5 - 3x^7 + 2x - 7x^4 + 14$ Untuk menentukan derajat suatu polinomial, kita bisa melihat pangkat tertinggi dari variabel pada polinomial. Jika polinomial $f(x) = x^5 - 3x^7 + 2x - 7x^4 + 14$ kita tuliskan dalam urutan turun maka diperoleh $f(x) = -3x^7 + 0x^6 + x^5 - 7x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x + 14$. Berdasarkan urutan turun terlihat pangkat tertinggi dari polinomialnya adalah x^7 sehingga derajat polinomialnya adalah 7. **Jawaban: D**	10
3.	Diketahui polinomial $3y^2 - 5y - 10 + 15y - 6y^2$ Untuk menentukan koefisien dari polinomial $3y^2 - 5y - 10 + 15y - 6y^2$, terlebih dahulu kita sederhanakan bentuk polinomialnya sebagai berikut. $\begin{aligned} 3y^2 - 5y - 10 + 15y - 6y^2 &= (3y^2 - 6y^2) + (-5y + 15y) - 10 \\ &= (3-6)y^2 + (-5+15)y - 10 \\ &= -3y^2 + 10y - 10 \end{aligned}$ Maka koefisein dari masing-masing variabel dapat dituliskan Koefisien y^2 : -3 Koefisien y : 10 Konstanta : -10 **Jawaban: A**	10
4.	$(x^3 + 5x^2 + 6x - 1) + (3x^3 - 4x^2 - 8x + 6)$ $= (x^3 + 3x^3) + (5x^2 - 4x^2) + (6x - 8x) + (-1 + 6)$ $= (1+3)x^3 + (5-4)x^2 + (6-8)x + 5$ $= 4x^3 + x^2 - 2x + 5$ Jadi, hasil penjumlahan polinomial $x^3 + 5x^2 + 6x - 1$ dan $3x^3 - 4x^2 - 8x + 6$ adalah $4x^3 + x^2 - 2x + 5$	10

	Jawaban: A	
5.	$(x^4 - 3x^2 + 6) - (x^3 - 3x^2 - 2)$ $= x^4 - 3x^2 + 6 - x^3 + 3x^2 + 2$ $= x^4 - x^3 + (-3x^2 + 3x^2) + (6 + 2)$ $= x^4 - x^3 + (-3 + 3)x^2 + 8$ $= x^4 - x^3 + 0x^2 + 8$ $= x^4 - x^3 + 8$ Jadi, hail pengurangan polinomial $x^4 - 3x^2 + 6$ oleh $x^3 - 3x^2 - 2$ adalah $x^4 - x^3 + 8$ **Jawaban: B**	10
6.	$(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 1)$ $= x^2(x^2 + 1) + 2x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1)$ $= (x^2 \cdot x^2) + (x^2 \cdot 1) + (2x \cdot x^2) + (2x \cdot 1) - (3 \cdot x^2) - (3 \cdot 1)$ $= x^4 + x^2 + 2x^3 + 2x - 3x^2 - 3$ $= x^4 + 2x^3 + (x^2 - 3x^2) + 2x - 3$ $= x^4 + 2x^3 + (1 - 3)x^2 + 2x - 3$ $= x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ Jadi, hasil dari perkalian $(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 1)$ adalah $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ **Jawaban: B**	10
7.	$(x + 5)(Ax + B) \equiv 2x^2 + 7x - 15$ Samakan koefisien sejenis di ruas kiri dan ruas kanan $x(Ax + B) + 5(Ax + B) \equiv 2x^2 + 7x - 15$ $Ax^2 + Bx + 5Ax + 5B \equiv 2x^2 + 7x - 15$ $Ax^2 + (5A + B)x + 5B \equiv 2x^2 + 7x - 15$ Jadi kesamaan suku banyaknya adalah $Ax^2 + (5A + B)x + 5B \equiv 2x^2 + 7x - 15$ Koefisein x^2 : $A = 2$ Konstanta : $5B = -15$ $B = -\frac{15}{5}$ $B = -3$ Maka nilai $A \cdot B$ adalah $A \cdot B = 2 \cdot (-3)$ $= -6$ Jadi, nilai $A \cdot B$ yang memenuhi kesamaan $(x + 5)(Ax + B) \equiv 2x^2 + 7x - 15$ adalah -6 **Jawaban: B**	10
8.	$\frac{-x + 8}{(x + 3)(2x - 5)} \equiv \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{2x - 5}$ $\frac{-x + 8}{(x + 3)(2x - 5)} \equiv \frac{A(2x - 5)}{(x + 3)(2x - 5)} + \frac{B(x + 3)}{(2x - 5)(x + 3)}$ $\frac{-x + 8}{(x + 3)(2x - 5)} \equiv \frac{2Ax - 5A}{(x + 3)(2x - 5)} + \frac{Bx + 3B}{(2x - 5)(x + 3)}$ $\frac{-x + 8}{(x + 3)(2x - 5)} \equiv \frac{(2Ax + Bx) + (-5A + 3B)}{(x + 3)(2x - 5)}$ $\frac{-x + 8}{(x + 3)(2x - 5)} \equiv \frac{(2A + B)x + (-5A + 3B)}{(x + 3)(2x - 5)}$	10

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Dari kesamaan suku banyak diatas diperoleh:
Koefisein x : $-1 = 2A + B \rightarrow 2A + B = -1$ persamaan 1
Konstanta : $8 = -5A + 3B \rightarrow -5A + 3B = 8$ persamaan 2
Untuk mencari nilai A dan B eliminasi persamaan 1 dan 2
$\begin{array}{r|c|l} 2A + B = -1 & \times 3 & 6A + 3B = -3 \\ -5A + 3B = 8 & \times 1 & -5A + 3B = 8 \quad - \\ \cline{3-3} & & \quad 11A = -11 \\ & & \quad \boldsymbol{A = -1} \end{array}$
Substitusi $A = -1$ ke persamaan 1 diperoleh
$2A + B = -1$
$2(-1) + B = -1$
$-2 + B = -1$
$B = -1 + 2$
$\boldsymbol{B = 1}$
Maka nilai $A + B$ adalah
$A + B = -1 + 1$
$= 0$
Jadi, nilai $A + B = 0$
Jawaban: C</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>9.</td>
<td>Misal suku banyak $f(x) = x^5 + 3x^2 - 8x + 2$
Untuk menentukan nilai suku banyak kita bisa gunakan cara substitusi atau skema
Cara Substitusi:
Substitusi $x = -2$ ke $f(x) = x^5 + 3x^2 - 8x + 2$
$f(-2) = (-2)^5 + 3(-2)^2 - 8(-2) + 2$
$= -32 + 3(4) + 16 + 2$
$= -32 + 12 + 18$
$= -2$
Jadi, nilai $f(x)$ untuk $x = -2$ adalah -2
Cara Skema:
Nyatakan $f(x)$ dalam pangkat turun sebagai berikut
$f(x) = x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 8x + 2$
$\begin{array}{r|cccccc} -2 & 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & 2 \\ & & -2 & 4 & -8 & 10 & -4 \quad + \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -5 & 2 & \boxed{-2} \end{array} \longrightarrow$ Nilai $f(x)$ untuk $x = -2$
Jadi, nilai $f(x)$ untuk $x = -2$ adalah -2
Jawaban: B</td>
<td>10</td>
</tr>
<tr>
<td>10.</td>
<td>Diketahui:
$f(x) = x^4 + ax^3 - 5x^2 - x + 4$
$f(-1) = -7$
Ditanyakan: nila $a = \cdots$
Cara Substitusi:</td>
<td>10</td>
</tr>
</table>

	$-a = -7 - 1$ $-a = -8$ $a = 8$ Jadi, nilai $a = 8$ **Cara Skema:** $f(x) = x^4 + ax^3 - 5x^2 - x + 4$ $\begin{array}{r\|ccccc} -1 & 1 & a & -5 & -1 & 4 \\ & & -1 & -a+1 & a+4 & -a-3 \quad + \\ \hline & 1 & a-1 & -a-4 & a+3 & \boxed{-a+1} \end{array}$ Nilai $f(x)$ untuk $x = -1$ $f(-1) = -7$ $-a + 1 = -7$ $-a = -7 - 1$ $-a = -8$ $a = 8$ Jadi, nilai $a = 8$ **Jawaban: C**	
Skor Total		**100**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

$$\textbf{Rumus Tingkat Penguasaan} = \frac{\textbf{Jumlah Skor}}{\textbf{Jumlah Skor Maksimum}} \times \mathbf{100\%}$$

Kriteria

90% - 100% = baik sekali
80% - 89% = baik
70% - 79% = cukup
<70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami pengertian polinomial?		
2.	Apakah kalian dapat menentukan operasi penjumlahan pada polinomial ?		
3.	Apakah kalian dapat menentukan operasi pengurangan pada polinomial ?		
4.	Apakah kalian dapat menentukan operasi perkalian pada polinomial ?		
5.	Apakah kalian dapat menentukan kesamaan polinomial ?		
6.	Apakah kalian dapat menentukan nilai polinomial?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PEMBAGIAN POLINOMIAL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan siswa dapat :

1. menentukan pembagian polinomial oleh bentuk linear $(x - k)$,
2. menentukan pembagian polinomial oleh bentuk linear $(ax + b)$,
3. menentukan pembagian polinomial oleh bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$,
4. menentukan sisa pembagian dengan teorema sisa,
5. menentukan faktor polinomial dengan teorema faktor.

B. Uraian Materi

Pembagian Polinomial

Pembagian polinomial dapat ditinjau sebagai pembagian bilangan bulat. Perhatikan pembagian bilangan bulat berikut.

85 ← hasil bagi

pembagi → 3) 257 ← bilangan yang dibagi

17

15 −

2 ← sisa

Proses pembagian tersebut berhenti ketika sisa (2) lebih kecil dari pembaginya (3).
Hasil pembagian tersebut dapat dituliskan:

$$257 = (3 \times 85) + 2$$

Secara umum ditulis:

Bilangan yang dibagi = (pembagi × hasil bagi) + sisa

Proses pembagian bilangan bulat di atas juga berlaku pada suku banyak. Misalkan suku banyak f(x) dibagi oleh p(x) menghasilkan h(x) dan sisanya s(x), maka dapat ditulis :

$$\boldsymbol{f(x) = p(x) \cdot h(x) + s(x)}$$

Proses pembagian suku banyak dapat dilakukan dengan 2 cara, yaitu :

a. cara bersusun, dan
b. cara sintetik (cara Horner)

1. Pembagian polinomial oleh bentuk linear $(\boldsymbol{x - k})$

Pembagian polinomial $f(x)$ dengan pembagi $(x - k)$ menghasilkan hasil bagi $h(x)$ dan sisa $s(x)$ berderajat nol atau $s(x) =$ konstanta, dituliskan sebagai berikut.

$$f(x) = (x - k) \cdot h(x) + s(x)$$

Anak-anakku untuk lebih memahami pembagian polinomial oleh $(x - k)$, yuk kita perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh Soal

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari $(3x^3 - 7x^2 - 13x - 8) : (x - 4)$, kemudian nyatakan $f(x)$ dalam bentuk $f(x) = (x - k)\,h(x) + s$ dengan :

a. cara bersusun
b. cara Horner

Pembahasan:

a. Cara bersusun

Hasil bagi $= h(x)$

Pembagi

$$
\begin{array}{r|l}
 & \boxed{3x^2 + 5x + 7} \\
\boxed{x-4} & 3x^3 - 7x^2 - 13x - 8 \\
 & \underline{3x^3 - 12x^2} \quad - \\
 & \quad 5x^2 - 13x \\
 & \quad \underline{5x^2 - 20x} \quad - \\
 & \qquad 7x - 8 \\
 & \qquad \underline{7x - 28} \quad - \\
 & \qquad\quad 20
\end{array}
$$

sisa (s)

Jadi, $3x^3 - 7x^2 - 13x - 8 = (x - 4)(3x^2 + 5x + 7) + 20$

b. Cara Horner

Pembagian suku banyak dengan cara Horner (sintetik) mirip dengan penentuan nilai suku banyak dengan cara bagan /skema, yaitu dengan mendaftar koefisien-koefisien suku banyak yang dibagi secara berurutan dari pangkat yang tertinggi.

$(3x^3 - 7x^2 - 13x - 8) : (x - 4) \Rightarrow$ pembagi $x - 4$, dalam bagan ditulis $x = 4$

$$
\begin{array}{c|cccc}
4 & 3 & -7 & -13 & -8 \\
 & & 12 & 20 & 28 \\
\hline
 & 3 & 5 & 7 & 20
\end{array}
$$

koefisien $f(x)$

hasil kali dengan 4

$+$

Sisa (s) atau $f(4)$

nilai $x = k$

koefisien hasil bagi $h(x)$

Dari pembagian dengan cara Horner diperoleh:
Hasil bagi : $h(x) = 3x^2 + 5x + 7$
Sisa pembagian : $s = 20$
Maka dapat ditulis,

$$3x^3 - 7x^2 - 13x - 8 = (x - 4)(3x^2 + 5x + 7) + 20$$

2. Pembagian Suku Banyak oleh Bentuk Linear $(ax + b)$

Anak-anakku pada uraian materi di atas dijelaskan bahwa jika polinomial $f(x)$ dibagi $(ax + b)$ memberikan hasil bagi $h(x)$ dan sisa s, maka diperoleh hubungan:

$$\boxed{f(x) = (x - k)h(x) + s}$$

Jika $k = -\frac{b}{a}$, hubungan di atas menjadi:

$f(x) = \left(x + \dfrac{b}{a}\right) h(x) + s$

$f(x) = \dfrac{1}{a}(ax + b)h(x) + s$

$f(x) = (ax + b)\dfrac{h(x)}{a} + s$

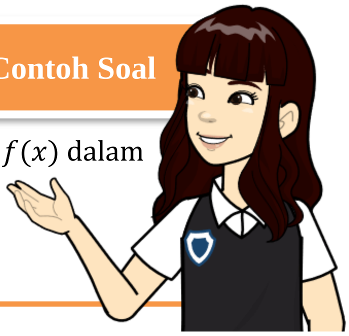
Berdasarkan uraian di atas, diperoleh:

Hasil bagi $f(x)$ oleh $(ax + b)$ adalah $\frac{h(x)}{a}$

Sisa pembagian s adalah $f\left(-\frac{b}{a}\right)$

Untuk lebih memahami pembagian polinomial oleh $(ax + b)$, mari kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal



Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari $f(x)$ $(3x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 5x + 2) : (3x + 1)$, kemudian nyatakan $f(x)$ dalam bentuk $f(x) = (ax + b)\,h(x) + s$ dengan :

a. cara bersusun
b. cara Horner

Pembahasan:

a. Cara bersusun

Hasil bagi $h(x)$: $\boxed{x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}}$

$3x + 1 \; \big) \; 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 5x + 2$

$$\begin{array}{rl}
3x^4 + x^3 & \\
\hline
-6x^3 + 7x^2 & - \\
-6x^3 - 2x^2 & \\
\hline
9x^2 + 5x & - \\
9x^2 + 3x & \\
\hline
2x + 2 & - \\
2x + \frac{2}{3} & \\
\hline
1\frac{1}{3} & -
\end{array}$$

sisa (s): $1\frac{1}{3}$

Dari hasil pembagian secara bersusun, diperoleh hasil bagi $h(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$ dan sisa pembagian $s = 1\frac{1}{3}$, sehingga $f(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$f(x) = (3x + 1)\left(x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}\right) + 1\frac{1}{3}$$

b. Cara Horner

$(3x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 5x + 2) : (3x + 1) \rightarrow$ pembagi $3x + 1 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{c|ccccc}
-\frac{1}{3} & 3 & -5 & 7 & 5 & 2 \\
 & & -1 & 2 & -3 & -\frac{2}{3} \\
\hline
 & 3 & -6 & 9 & 2 & 1\frac{1}{3}
\end{array}$$

Koefisien $f(x)$

Sisa $s = f\left(-\frac{1}{3}\right)$

Koefisien $h(x)$

Diperoleh $h(x) = 3x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ dan $s = 1\frac{1}{3}$

Selanjutnya hasil bagi dan sisa pembagian $f(x)$ oleh $(3x + 1)$ adalah :

Hasil bagi

$$\frac{h(x)}{a} = \frac{3x^3 - 6x^2 + 9x + 2}{3}$$
$$= x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$$

Sisa pembagian

$$s = f\left(-\frac{1}{3}\right) = 1\frac{1}{3}$$

Sehingga $f(x)$ dapat ditulis :

$$(3x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 5x + 2) = (3x + 1)\left(x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}\right) + 1\frac{1}{3}$$

Dari dua contoh di atas, pembagian suku banyak $f(x)$ oleh bentuk linear $(x - k)$ atau $(ax + b)$, dapat disimpulkan bahwa :

- Derajat hasil bagi $h(x)$ maksimum **satu lebih kecil** dari pada derajat suku banyak $f(x)$.
- Derajat sisa s maksimum **satu lebih kecil** dari pada derajat pembagi.

3. Pembagian Suku Banyak oleh Bentuk Kuadrat $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$

Jika polinomial $f(x)$ dibagi dengan $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$, maka hasil bagi dan sisa pembagian polinomial dapat ditentukan dengan cara pembagian bersusun, skema Horner, dan skema Horner kino.

a. Cara Bersusun

Pembagian suku banyak $f(x)$ oleh bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$ dapat dilakukan dengan cara bersusun seperti halnya pada pembagian suku banyak oleh bentuk linear $(x - k)$ atau $(ax + b)$.

Secara umum, algoritma pembagian suku banyak $f(x)$ oleh bentuk kuadrat $(ax^2 + bx + c)$ dapat dinyatakan dengan persamaan :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)\, h(x) + s(x)$$

Anak-anakku untuk lebih memahami pembagian polinomial oleh bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ dengan cara bersusun, mari simak beberapa contoh soal berikut.

Contoh Soal 1

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari $(x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 4x - 15) : (x^2 - x - 6)$ dengan cara bersusun.

Pembahasan:

$$\begin{array}{r|l}
 & \boxed{x^2 + 4x + 3} \longleftarrow \text{Hasil bagi } h(x) \\
x^2 - x - 6 & x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 4x - 15 \\
 & \underline{x^4 - x^3 - 6x^2} \quad - \\
 & \quad 4x^3 - x^2 - 4x \\
 & \quad \underline{4x^3 - 4x^2 - 24x} \quad - \\
 & \qquad 3x^2 + 20x - 15 \\
 & \qquad \underline{3x^2 - 3x - 18} \quad - \\
 & \qquad \boxed{23x + 3} \longleftarrow \text{Sisa } s(x)
\end{array}$$

Berdasarkan pembagian bersusun di atas diperoleh hasil bagi $h(x) = x^2 + 4x + 4$ dan sisa pembagian $s(x) = 23x + 3$ sehingga suku banyak $f(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 4x - 15 = (x^2 - x - 6)(x^2 + 4x + 3) + (23x + 3)$$

Jadi, hasil bagi $h(x) = x^2 + 4x + 4$ dan sisa pembagian $s(x) = 23x + 3$

Contoh Soal 2

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari $(2x^3 - 6x^2 + 5x + 10) : (x^2 - 4)$ dengan cara bersusun.

Pembahasan:

$$\begin{array}{r|l}
 & \boxed{2x - 6} \longleftarrow \text{Hasil bagi } h(x) \\
x^2 - 4 & 2x^3 - 6x^2 + 5x + 10 \\
 & \underline{2x^3 - 8x} \quad - \\
 & \quad -6x^2 + 13x + 10 \\
 & \quad \underline{-6x^2 + 24} \quad - \\
 & \qquad \boxed{13x - 14} \longleftarrow \text{Sisa } s(x)
\end{array}$$

Bersasarkan pembagian bersusun di atas diperoleh hasil bagi $h(x) = 2x - 6$ dan sisa pembagian $s(x) = 13x - 14$ sehingga $f(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$(2x^3 - 6x^2 + 5x + 10) = (x^2 - 4)(2x - 6) + (13x - 14)$$

Jadi, hasil bagi $h(x) = 2x - 6$ dan sisa pembagian $s(x) = 13x - 14$

Catatan

Jika polinomial yang dibagi berderajat n dan pembaginya berderajat m, maka diperoleh:

- Hasil bagi berderajat $n - m$
- Sisa pembagian berderajat $m - 1$ (derajat dari sisa pembagian kurang satu dari derajat pembagi)

b. Cara Skema Horner

Pembagian polinomial dengan cara skema Horner hanya dapat digunakan untuk pembagi yang dapat difaktorkan. Misalkan polinomial $f(x)$ dibagi oleh bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ yang dapat difaktorkan. Kita dapat menentukan hasil bagi dan sisa pembagian dengan cara skema Horner, yuk perhatikan langkah-langkahnya

Langkah-langkah pembagian polinomial dengan cara skema Horner

1. Misalkan $ax^2 + bx + c$ dapat difaktorkan dan ditulis sebagai $a(x - k_1)(x - k_2)$, dengan $a \neq 0$
2. Langkah awal, kita bagi $f(x)$ dengan $(x - k_1)$. Pada langkah ini diperoleh
$$f(x) \equiv (x - k_1)h_1(x) + s_1$$
3. Hasil bagi $h_1(x)$ dibagi lagi dengan $(x - k_2)$. Pada langkah ini diperoleh
$$h_1(x) \equiv (x - k_2)h_2(x) + s_2$$
4. Substitusi $h_1(x)$ ke bentuk persamaan $f(x)$, diperoleh:
$$f(x) \equiv (x - k_1)[(x - k_2)h_2(x) + s_2)] + s_1$$
$$f(x) \equiv (x - k_1)(x - k_2)h_2(x) + s_2(x - k_1) + s_1$$
$$\boldsymbol{f(x) \equiv a(x - k_1)(x - k_2)\frac{h_2(x)}{a} + s_2(x - k_1) + s_1}$$

c. Cara Skema Horner - Kino

Skema Horner – kino dicetuskan oleh Sukino, Horner kino merupakan pengembangan dari skema Horner kino. Pada skema Horner terbatas untuk pembagi yang bias difaktorkan sedangkan untuk skema Horner kino dapat diterapkan untuk pembagi apapun.

Anak-anakku untuk lebih memahami pembagian polinomial oleh bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ dengan cara skema Horner atau skema Horner kino, yuk kita perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh Soal

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari polinomial $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ oleh $x^2 - x - 2$ dengan cara:

a. Skema Horner
b. Skema Horner-Kino

Pembahasan:

Nyatakan polinomial $f(x)$ ke dalam pangkat turun sebagai berikut
$$f(x) = x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

a. Skema Horner

Pembagi $x^2 - x - 2$ dapat difakrokan menjadi $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ hal ini berarti $k_1 = 2$ dan $k_2 = -1$

	1	**0**	**−3**	**2**	**−1**	
2		2	4	2	8	+
	1	2	1	4	7	Sisa pertama s_1
−1		−1	−1	0	+	
	1	1	0	4	Sisa kedua s_2	

Koefisien hasil bagi kedua $h_2(x)$

Berdasarkan pembagian menggunakan skema Horner diperoleh:
Hail bagi : $h(x) = x^2 + x + 0$
Sisa pertama : $s_1 = 7$
Sisa kedua : $s_2 = 4$
Sisa pembagian :

$$\begin{aligned} s(x) &= s_2(x - k_1) + s_1 \\ &= 4(x - 2) + 7 \\ &= 4x - 8 + 7 \\ &= 4x - 1 \end{aligned}$$

Jadi, hasil bagi $h(x) = x^2 + x$ dan sisa pembagian $s(x) = 4x - 1$

b. Skema Horner-Kino

	1	**0**	**−3**	**2**	**−1**
2	*	*	2	2	0
1	*	1	1	0	*
	1	1	0	4	−1

Koefisien $f(x)$

+

Sisa $s(x)$

Koefisien hasil bagi $h(x)$

Keterangan:
- Perhatikan pembagi $x^2 - x - 2$
- Baris 2 kolom paling kiri: $-\left(\frac{-2}{1}\right) = 2$, kolom 1 dan kolom 2 tidak diproses dan diberi tanda *
- Baris 3 kolom paling kiri: $-\left(\frac{-1}{1}\right) = 1$, kolom 1 dan kolom 5 tidak diproses dan diberi tanda *

Jadi, hasil bagi $h(x) = x^2 + x$ dan sisa pembagian $s(x) = 4x - 1$

Teorema Sisa

1. Teorema Sisa untuk Pembagi Bentuk Linier $(x - k)$

Jika suatu polinomial $f(x)$ dibagi oleh $(x - k)$, maka akan diperoleh hasil bagi $h(x)$ dan sisi pembagian s, yang memenuhi hubungan

$$f(x) = (x - k) \cdot h(x) + s$$

Karena pembagi berderajat 1 yaitu $(x - k)$, maka sisa pembagi s maksimum berderajat nol, yaitu sebuah konstanta. Sisa pembagian s dapat ditentukan dengan menggunakan teorema berikut.

> Jika polinomial $f(x)$ berderajat n dibagi dengan $(x - k)$, maka sisa pembagian s ditentukan oleh $s = f(k)$

Bukti :
Anak-anakku untuk membuktikan teorema di atas, kita perhatikan derajat pembagi $(x - k)$ adalah 1, karena derajat pembagi 1 maka sisa pembagiannya berderajat 0 yang merupakan suatu konstanta s sehingga diperoleh:
$f(x) = (x - k)h(x) + s$
Untuk $x = k$ maka

$$\begin{aligned} f(k) &= (k - k)h(k) + s \\ &= 0 \cdot h(k) + s \end{aligned}$$

$= 0 + s$
$= s$
Terbukti sisa $= s = f(k)$
Berikut merupakan contoh soal penggunaan teorema sisa untuk pembagi bentuk linear $(x - k)$, yuk kita simak

Contoh Soal 1

Sisa pembagian jika suku banyak $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 8$ dibagi oleh $(x + 2)$ adalah …

Pembahasan:
Suku banyak $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 8$ dibagi oleh $(x + 2) \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$, karena pembagi berbentuk linear maka menurut teorema sisa diperoleh sisa $s = f(-2)$
Substitusi $x = -2$ ke suku banyak $f(x)$
$s = f(-2)$
$= 2(-2)^3 - 4(-2)^2 + (-2) + 8$
$= 2(-8) - 4(4) - 2 + 8$
$= -16 - 16 - 2 + 8$
$= -26$
Jadi, sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x + 2)$ adalah -26

Contoh Soal 2

Diketahui $f(x) = 3x^3 + (4 + m)x^2 + mx + 6$. Tentukan nilai m agar $f(x)$ dibagi oleh $(x + 2)$ memberikan sisa -10

Pembahasan:
$f(x) = 3x^3 + (4 + m)x^2 + mx + 6$
Jika $f(x)$ dibagi oleh $(x + 2)$, maka menurut teorema sisa berlaku
$s = f(-2)$
$= 3(-2)^3 + (4 + m)(-2)^2 + m(-2) + 6$
$= 3(-8) + (4 + m)(4) - 2m + 6$
$= -24 + 16 + 4m - 2m + 6$
$= -2 + 2m$
Diketahui sisa $s = -10$ maka
$-2 + 2m = -10$
$2m = -10 + 2$
$2m = -8$
$m = -\frac{8}{2}$
$m = -4$
Jadi, nilai m adalah -4

2. Teorema Sisa untuk Pembagi Bentuk Linier $(ax + b)$

Jika suatu polinomial $f(x)$ dibagi oleh $(ax + b)$, maka akan diperoleh hasil bagi $\frac{h(x)}{a}$ dan sisi pembagian s, yang memenuhi hubungan

$$f(x) = (ax + b) \cdot \frac{h(x)}{a} + s$$

Sisa pembagian s ditentukan menggunakan teorema berikut ini.

Jika polinomial $f(x)$ berderajat n dibagi dengan $(ax+b)$, maka sisa pembagian s ditentukan oleh $s = f(-\frac{b}{a})$

Bukti:

Anak-anakku untuk membuktikan teorema di atas, perhatikan derajat pembagi $(ax+b)$ adalah 1. Karena derajat pembagi 1, maka sisa pembagiannya berderajat 0 dan berupa konstanta s sehingga diperoleh:

$$f(x) = (ax+b)h(x) + s$$

Untuk $x = -\frac{b}{a}$, maka berlaku

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{a}\right) &= \left(a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right)\cdot h\left(-\frac{b}{a}\right)+s \\ &= (-b+b)\cdot h\left(-\frac{b}{a}\right)+s \\ &= 0\cdot h\left(-\frac{b}{a}\right)+s \\ &= 0+s \\ &= s \end{aligned}$$

Terbukti, sisa $= s = f\left(-\frac{b}{a}\right)$

Berikut merupakan contoh soal penggunaan teorema sisa untuk pembagi bentuk linear $(ax+b)$, yuk kita simak

Contoh Soal

Sisa pembagian jika suku banyak $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 2$ dibagi oleh $(2x-1)$ adalah …

Pembahasan:

Suku banyak $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 2$ dibagi oleh $(2x-1) \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$, karena pembagi berbentuk linear maka menurut teorema sisa diperoleh sisa $s = f\left(\frac{1}{2}\right)$

Substitusi $x = \frac{1}{2}$ ke suku banyak $f(x)$

$$\begin{aligned} s &= f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 2 \\ &= 2\left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 2 \\ &= \frac{2}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{2} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Jadi, sisa pembagian $f(x)$ oleh $(2x-1)$ adalah $-\frac{3}{2}$

3. Teorema Sisa untuk Pembagi Bentuk $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})$

Jika pembagi bentuk kuadrat tidak dapat difaktorkan, maka sisa pembagian tidak dapat diperoleh dengan teorema sisa, tetapi harus menggunakan cara pembagian bersusun.
Pembagian polinomial $f(x)$ oleh $(x-a)(x-b)$ memberikan hasil bagi $h(x)$ dan sisa pembagian $s(x)$, yang memenuhi hubungan:

$$f(x) = (x-a)(x-b)h(x) + s(x)$$

Karena $(x-a)(x-b)$ berderajat 2, maka sisa pembagiannya maksimal berderajat 1, misalkan $s(x) = px + q$, maka hubungan di atas menjadi

$$f(x) = (x-a)(x-b)h(x) + (px+q)$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh:

> Sisa pembagian polinomial $f(x)$ oleh $(x-a)(x-b)$ adalah $s(x) = px + q$ dengan $f(a) = pa + q$ dan $f(b) = pb + q$

Bukti:
Derajat pembagi polinomial $(x-a)(x-b)$ adalah 2, maka sisa pembagiannya berderajat 1 yaitu $s(x) = px + q$ sehingga diperoleh:
$f(x) = (x-a)(x-b)\ h(x) + s(x)$
$f(x) = (x-a)(x-b)\ h(x) + (px+q)$
Untuk $x = a$ diperoleh

$$\begin{aligned} f(a) &= (a-a)(x-b)h(a) + (pa+q) \\ &= 0(x-b)\ h(a) + (ap+q) \\ &= 0 + (ap+q) \\ &= ap + q \end{aligned}$$

$\therefore \boldsymbol{f(a) = ap + q}$
Untuk $x = b$ diperoleh

$$\begin{aligned} f(b) &= (b-a)(b-b)h(b) + (pb+q) \\ &= (b-a)\cdot 0 \cdot h(b) + (bp+q) \\ &= 0 + (bp+q) \\ &= bp + q \end{aligned}$$

$\therefore \boldsymbol{f(b) = bp + q}$
Terbukti: sisa $s(x) = px + q$ dengan $f(a) = pa + q$ dan $f(b) = pb + q$
Anak-anakku agar kita lebih memahami penggunaan teorema sisa untuk pembagi $(x-a)(x-b)$ mari kita pahami contoh soal berikut.

Contoh Soal

Suku banyak $f(x)$ jika dibagi $(x+2)$ sisanya 12 dan jika dibagi $(x-3)$ sisanya -3. Tentukan sisanya jika $f(x)$ dibagi oleh $(x+2)(x-3)$!

Pembahasan:
Pembagi $(x+2)(x-3)$ berderajat 2, maka sisanya $s(x)$ berderajat 1.
Misal $s(x) = px + q$
$f(x)$ dibagi $(x+2)(x-3)$, maka dapat ditulis :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)(x-3)\cdot h(x) + s(x) \\ &= (x+2)(x-3)\cdot h(x) + (px+q) \end{aligned}$$

$f(x)$ dibagi $(x+2)$ bersisa 12, maka $f(-2) = 12$, sehingga :

$$\begin{aligned} f(-2) &= 12 \\ (-2+2)(-2-3)\cdot h(-2) + (p(-2)+q) &= 12 \\ 0\cdot(-5)\cdot h(-2) + (-2p+q) &= 12 \\ 0 + (-2p+q) &= 12 \\ -2p + q &= 12 \end{aligned}$$

Diperoleh persamaan $-2p + q = 12$ merupakan persamaan (i)

$f(x)$ dibagi $(x-3)$ bersisa -3, maka $f(3)=-3$, sehingga:

$$f(3) = -3$$
$$(3+2)(3-3)h(3) + (p(3)+q) = -3$$
$$5 \cdot 0 \cdot h(3) + (3p+q) = -3$$
$$0 + 3p + q = -3$$
$$3p + q = -3$$

Diperroleh persamaan $3p+q=-3$ merupakan persamaan (ii)

Eliminasi q pada persamaan (i) dan (ii) untuk mencari nilai p

$$-2p + q = 12$$
$$\underline{3p + q = -3 \quad -}$$
$$-5p = 15$$
$$-p = \frac{15}{5}$$
$$-p = 3$$
$$\boldsymbol{p = -3}$$

Substitusi nilai $p=-3$ ke persamaan (i)

$$-2p + q = 12$$
$$-2(-3) + q = 12$$
$$6 + q = 12$$
$$q = 12 - 6$$
$$\boldsymbol{q = 6}$$

Diperoleh sisa pembagian

$$s(x) = px + q$$
$$= -3x + 6$$

Jadi, sisa pembagiannya adalah $s(x) = -3x + 6$

Teorema Faktor

Anda telah mengetahui bahwa faktor-faktor dari 6 adalah 1, 2, 3, dan 6. Bilangan 2 termasuk faktor dari 6 karena **6 dapat dibagi habis oleh 2** atau **pembagian 6 oleh 2 tidak memberikan sisa** (sisanya = 0). Hal ini dapat ditulis :

$$\frac{6}{2} = 3 + 0$$

atau $6 = 2 \times 3 + 0$ dimana 0 adalah sisa pembagian.

Hal tersebut juga berlaku pada suku banyak. Sebagai contoh, $(x+1)$ adalah faktor dari $f(x) = x^2 - 5x - 6$, karena pembagian $f(x) = x^2 - 5x - 6$ oleh $(x+1)$ memberikan sisa 0. Hal ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{x^2 - 5x - 6}{(x+1)} = (x-6) + 0$$

atau

$x^2 - 6x - 6 = (x+1)(x-6) + 0$, dimana 0 adalah sisa

Misalkan suku banyak $f(x)$ dibagi oleh $(x-k)$ memberikan hasil bagi $h(x)$ dan sisa $s(x)$. Jika $(x-k)$ merupakan faktor dari suku banyak $f(x)$, maka pembagian $f(x)$ oleh $(x-k)$ tidak memberikan sisa atau $s(x)=0$. Secara umum disimpulkan bahwa jika $(x-k)$ merupakan faktor dari suku banyak $f(x)$, maka dapat dinyatakan dalam persamaan :

$$f(x) = (x-k) \,.\, h(x)$$

Teorema Faktor

1. Suatu fungsi suku banyak $f(x)$ memiliki faktor $(x-k)$ jika dan hanya jika $f(k) = 0$
2. Suatu fungsi suku banyak $f(x)$ memiliki faktor $(ax+b)$ jika dan hanya jika $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$

Bukti 1 :

Pertama :

Membuktikan bahwa " jika $(x - k)$ merupakan faktor dari $f(x)$, maka $f(k) = 0$ "
$(x - k)$ merupakan faktor dari $f(x)$, maka dari pengertian faktor dapat ditulis :

$$f(x) = (x - k) \, . \, h(x)$$

dimana $h(x)$ adalah hasil bagi.
Untuk $x = k$, maka :

$$\begin{aligned} f(k) &= (k - k) \cdot h(k) \\ &= 0 \cdot h(k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti $f(k) = 0$

Kedua :

Membuktikan bahwa " jika $f(k) = 0$, maka $(x - k)$ merupakan faktor dari $f(x)$"
Menurut teorema sisa, pembagian $f(x)$ oleh $(x - k)$ memberikan sisa $s = f(k)$, sehingga dapat dituliskan :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - k) \, . \, h(x) + s \\ f(x) &= (x - k) \, . \, h(x) + f(k) \end{aligned}$$

Jika $f(k) = 0$, maka :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - k) \, . \, h(x) + 0 \\ f(x) &= (x - k) \, . \, h(x) \end{aligned}$$

artinya $(x - k)$ adalah faktor dari $f(x) \rightarrow$ berdasarkan definisi faktor. (terbukti).

Dari tahap pertama dan kedua, terbukti bahwa "suatu fungsi suku banyak $f(x)$ memiliki faktor $(x - k)$ jika dan hanya jika $f(k) = 0$"

Dengan cara yang sama, kalian dapat membuktikan teorema faktor yang kedua.

Anak-anakku untuk lebih memahami penggunaan teorema faktor, mari kita pahami beberapa contoh soal berikut.

Contoh Soal

Tunjukkan bahwa $(x - 1)$ dan $(x + 1)$ merupakan faktor dari $x^3 - 5x^2 - x + 5$!

Pembahasan:

Misalkan $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$. Untuk menunjukkan bahwa $(x - 1)$ adalah faktor dari $f(x)$, cukup ditunjukkan $f(1) = 0$ berdasarkan teorema faktor

$$\begin{aligned} f(1) &= (1)^3 - 5 \cdot (1)^2 - (1) + 5 \\ &= 1 - 5 \cdot 1 - 1 + 5 \\ &= 1 - 5 - 1 + 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, $(x - 1)$ adalah faktor dari $f(x)$.
Demikian juga untuk $(x + 1)$, cukup ditunjukkan bahwa $f(-1) = 0$ berdasarkan teorema faktor

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 5(-1)^2 - (-1) + 5 \\ &= -1 - 5(1) + 1 + 5 \\ &= -1 - 5 + 1 + 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, $(x + 1)$ adalah faktor dari $f(x)$.

Contoh Soal

Tentukan nilai p sehingga $x^3 - x^2 + px - 15$ mempunyai faktor $(x - 3)$.

Pembahasan:
Misalkan $f(x) = x^3 - x^2 + px - 15$
$(x - 3)$ merupakan faktor dari $f(x)$, berdasarkan teorema faktor $f(3) = 0$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f(3) &= 0 \\ (3)^3 - (3)^2 + p(3) - 15 &= 0 \\ 27 - 9 + 3p - 15 &= 0 \\ 3p + 3 &= 0 \\ 3p &= -3 \\ p &= -\frac{3}{3} \\ p &= -1 \end{aligned}$$

Jadi, nilai p adalah -1.

C. Rangkuman

Berdasarkan uraian materi pada kegiatan pembelajaran 2, dapat disimpulkan:

1. Misalkan suku banyak $f(x)$ dibagi oleh $p(x)$ menghasilkan $h(x)$ dan sisanya $s(x)$, maka dapat ditulis $\boldsymbol{f(x) = p(x) \cdot h(x) + s(x)}$
2. Proses pembagian suku banyak dapat dilakukan dengan 2 cara, yaitu cara bersusun dan cara sintetik (cara Horner)
3. Pembagian polinomial $f(x)$ dengan pembagi $(x - k)$ menghasilkan hasil bagi $h(x)$ dan sisa $s(x)$ berderajat nol atau $s(x)$ = konstanta, dituliskan sebagai berikut.
$$f(x) = (x - k) \cdot h(x) + s(x)$$
4. Jika polinomial $f(x)$ dibagi $(ax + b)$ memberikan hasil bagi $h(x)$ dan sisa s, maka diperoleh hubungan:
$$f(x) = (ax + b)\frac{h(x)}{a} + s$$
Hasil bagi $f(x)$ oleh $(ax + b)$ adalah $\frac{h(x)}{a}$
Sisa pembagian s adalah $f\left(-\frac{b}{a}\right)$
5. Menentukan derajat hasil bagi dan sisa pada pembagian polinomial $f(x)$ dengan pembagi bentuk linear $(x - k)$ atau $(ax + b)$ berlaku:
   - Derajat hasil bagi $h(x)$ maksimum **satu lebih kecil** dari pada derajat suku banyak $f(x)$.
   - Derajat sisa s maksimum **satu lebih kecil** dari pada derajat pembagi.
6. **Pembagian Suku Banyak oleh Bentuk Kuadrat $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ dengan $\boldsymbol{a \neq 0}$**
Jika polinomial $f(x)$ dibagi dengan $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$, maka hasil bagi dan sisa pembagian polinomial dapat ditentukan dengan cara pembagian bersusun, skema Horner, dan skema Horner kino.
   a. Cara Bersusun
   Secara umum, algoritma pembagian suku banyak $f(x)$ oleh bentuk kuadrat $(ax^2 + bx + c)$ dapat dinyatakan dengan persamaan :
$$f(x) = (ax^2 + bx + c)\,h(x) + s(x)$$

b. Cara Skema Horner

Pembagian polinomial dengan cara skema Horner hanya dapat digunakan untuk pembagi yang dapat difaktorkan. Misalkan polinomial $f(x)$ dibagi oleh bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ yang dapat difaktorkan. Kita dapat menentukan hasil bagi dan sisa pembagian dengan cara skema Horner, yuk perhatikan langkah-langkahnya

Langkah-langkah pembagian polinomial dengan cara skema Horner

1. Misalkan $ax^2 + bx + c$ dapat difaktorkan dan ditulis sebagai $a(x - k_1)(x - k_2)$, dengan $a \neq 0$
2. Langkah awal, kita bagi $f(x)$ dengan $(x - k_1)$. Pada langkah ini diperoleh
$$f(x) \equiv (x - k_1)h_1(x) + s_1$$
3. Hasil bagi $h_1(x)$ dibagi lagi dengan $(x - k_2)$. Pada langkah ini diperoleh
$$h_1(x) \equiv (x - k_2)h_2(x) + s_2$$
4. Substitusi $h_1(x)$ ke bentuk persamaan $f(x)$, diperoleh:
$$\boldsymbol{f(x) \equiv a(x - k_1)(x - k_2)\frac{h_2(x)}{a} + s_2(x - k_1) + s_1}$$

c. Cara Skema Horner - Kino

Skema Horner – kino dicetuskan oleh Sukino, Horner kino merupakan pengembangan dari skema Horner kino. Pada skema Horner terbatas untuk pembagi yang bias difaktorkan sedangkan untuk skema Horner kino dapat diterapkan untuk pembagi apapun.

7. Jika polinomial yang dibagi berderajat n dan pembaginya berderajat m, maka diperoleh:
   - Hasil bagi berderajat $n - m$
   - Sisa pembagian berderajat $m - 1$ (derajat dari sisa pembagian kurang satu dari derajat pembagi)
8. **Teorema Sisa untuk Pembagi Bentuk Linier $(x - k)$**

Jika polinomial $f(x)$ berderajat n dibagi dengan $(x - k)$, maka sisa pembagian s ditentukan oleh $s = f(k)$

9. **Teorema Sisa untuk Pembagi Bentuk Linier $(ax + b)$**

Jika polinomial $f(x)$ berderajat n dibagi dengan $(ax + b)$, maka sisa pembagian s ditentukan oleh $s = f(-\frac{b}{a})$

10. **Teorema Sisa untuk Pembagi Bentuk $(x - a)(x - b)$**

Sisa pembagian polinomial $f(x)$ oleh $(x - a)(x - b)$ adalah $s(x) = px + q$ dengan $f(a) = pa + q$ dan $f(b) = pb + q$

11. Teorema Faktor

1. Suatu fungsi suku banyak $f(x)$ memiliki faktor $(x - k)$ jika dan hanya jika $f(k) = 0$
2. Suatu fungsi suku banyak $f(x)$ memiliki faktor $(ax + b)$ jika dan hanya jika $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$

D. Latihan Soal

Anak- anak untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap pembagian pada polinomial, teorema sisa, dan teorema faktor kerjakan soal latihan berikut:

1. Hasil bagi dan sisa pembagian polinomial $(9x^3 + 5x^2 - 2x + 3)$ oleh $(x + 1)$ adalah …
   A. $9x^2 + 4x - 1$ dan 2
   B. $9x^2 + 4x - 1$ dan -2
   C. $9x^2 - 4x + 2$ dan 1
   D. $9x^2 - 4x + 1$ dan 2
   E. $9x^2 - 4x + 1$ dan 1

2. Jika $2x^3 - 5x^2 - kx + 18$ dibagi $x - 1$ mempunyai sisa 5, nilai k adalah …
   A. -15
   B. -10
   C. 0
   D. 5
   E. 10

3. Hasil bagi dan sisa pembagian jika suku banyak $f(x) = 3x^3 + x^2 + x + 2$ dibagi oleh $(3x - 2)$ berturut-turut adalah …
   A. $3x^2 + 3x + 3$ dan 4
   B. $3x^2 - x - 1$ dan 4
   C. $x^2 - x + 1$ dan -4
   D. $x^2 + x + 1$ dan 4
   E. $x^2 + x - 1$ dan 3

4. Hasil bagi dan sisa pembagian jika suku banyak $f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x - 6$ dibagi oleh $x^2 - x - 2$ berturut-turut adalah …
   A. $x^2 + 2x + 5$ dan $-8x - 16$
   B. $x^2 - 2x + 5$ dan $8x + 16$
   C. $x^2 - 2x - 5$ dan $-8x + 16$
   D. $x^2 + 2x + 5$ dan $-8x + 16$
   E. $x^2 - 2x - 5$ dan $-8x - 16$

5. Hasil bagi polinomial $(8x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 9x - 6)$ oleh $(2x^2 - 3x + 5)$ adalah …
   A. $4x^2 + 16x - 6$
   B. $4x^2 + 8x + 3$
   C. $4x^2 + 8x - 3$
   D. $4x^2 - 8x + 3$
   E. $4x^2 - 8x - 3$

6. Sisa pembagian polinomial $2x^4 + 3x^3 - x^2 - 8x + 5$ oleh $(x - 2)$ adalah …
   A. 41
   B. 36
   C. 30
   D. 25
   E. 17

7. Jika $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 20x + 10$ dibagi oleh $(2x - 1)$ bersisa 18, nilai a adalah …
   A. 18
   B. 9
   C. 5

D. -9
E. -19

8. Jika suku banyak $f(x) = x^4 + 3x^2 + x^2 - (p + 1)x + 1$ dibagi oleh $(x - 2)$ sisanya adalah 35. Nilai p adalah …
   A. 4
   B. 3
   C. 0
   D. -3
   E. -4

9. Sebuah polinomial jika dibagi $(x - 4)$ bersisa 5 dan jika dibagi $(x - 3)$ bersisa -2. Jika polinomial tersebut dibagi $x^2 - 7x + 12$, maka sisanya adalah …
   A. $-7x + 23$
   B. $-7x - 23$
   C. $7x + 23$
   D. $7x - 23$
   E. $23x + 7$

10. Salah satu faktor dari $f(x) = x^3 + ax^2 - x - 2$ adalah $(x + 2)$. Salah satu faktor lainnya dari $f(x)$ adalah …
   A. $x - 1$
   B. $x - 2$
   C. $x - 3$
   D. $x + 3$
   E. $x + 4$

Pembahasan dan Kunci Jawaban

<table>
<tr><th>No.</th><th>Pembahasan</th><th>Skor</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Misalkan $f(x) = 9x^3 + 5x^2 - 2x + 3$ dibagi oleh $(x + 1)$
Untuk mencari hasil bagi dan sisa pembagian, kita bisa menggunakan cara skema horner berikut.

$\begin{array}{c|cccc} & 9 & 5 & -2 & 3 \\ -1 & * & -9 & 4 & -2 \quad + \\ \hline & 9 & -4 & 2 & \boxed{1} \end{array}$ ← Sisa (s)

Koefisien hasil bagi $h(x)$

Dari pembagian dengan skema Horner di atas, diperoleh:
Hasil bagi : $h(x) = 9x^2 - 4x + 2$
Sisa pembagian : $s = 1$
Jadi, hasil bagi dan sisa berturut-turut adalah $9x^2 - 4x + 2$ dan 1
Jawaban: C</td><td>10</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Polinomial $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - kx + 18$ dibagi $(x - 1)$ mempunyai sisa 5, artinya $p(1) = 5$
Substitusi $x = 1$ ke $p(x)$
$p(1) = 5$
$2(1)^3 - 5(1)^2 - k(1) + 18 = 5$
$2(1) - 5(1) - k + 18 = 5$
$2 - 5 - k + 18 = 5$
$-k + 15 = 5$
$-k = 5 - 15$
$-k = -10$
$k = 10$
Jadi, nilai k yang memenuhi adalah 10
Jawaban: E</td><td>10</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Diketahui $f(x) = 3x^3 + x^2 + x + 2$ dibagi oleh $(3x - 2)$
Untuk menentukan hasil bagi dan sisa pembagian kita bisa menggunakan skema Horner
Pembagi bentuk linear $(3x - 2)$ artinya $3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 1 & 1 & 2 \\ \frac{2}{3} & & 2 & 2 & 2 \quad + \\ \hline & 3 & 3 & 3 & \boxed{4} \end{array}$ ← Sisa (s)

Koefisien hasil bagi $h(x)$

Dari pembagian dengan skema horner di atas, diperoleh:
Hail bagi : $h(x) = \frac{3x^2+3x+3}{3} = x^2 + x + 1$
Sisa pembagian : $s = 4$</td><td>10</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>No.</th><th>Pembahasan</th><th>Skor</th></tr>
<tr><td></td><td>Jadi, hasil bagi dan sisa berturut-turut adalah $x^2 + x + 1$ dan 1
Jawaban: D</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Diketahui $f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x - 6$ dibagi oleh $x^2 - x - 2$
Karena pembagi berderajat 2 maka untuk mempermudah mencari hasil bagi dan sisa pembagian kita dapat menggunakan skema Horner-Kino berikut.

$$\begin{array}{c|ccc|ccl} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{-6} & \leftarrow \text{Koefisien } f(x) \\ 2 & * & * & 2 & -4 & -10 & \\ & & & & & & + \\ 1 & * & 1 & -2 & -5 & * & \\ \hline & \underbrace{1 \quad -2 \quad -5}_{\text{Koefisien hasil bagi } h(x)} & & & \boxed{-8} & \boxed{-16} & \leftarrow \text{Sisa } s(x) \end{array}$$
Dari proses pembagian dengan skema Horner-Kino diperoleh:
Hasil bagi : $h(x) = x^2 - 2x - 5$
Sisa pembagian : $s(x) = -8x - 16$
Jadi, hasil bagi dan sisa pembagian berturut-turut adalah $x^2 - 2x - 5$ dan $-8x - 16$
Jawaban: E</td><td>10</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Misalkan $f(x) = 8x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 9x - 6$ dibagi oleh $2x^2 - 3x + 5$
Karena pembagi berderajat 2 maka untuk mempermudah mencari hasil bagi dan sisa pembagian kita dapat menggunakan skema Horner-Kino berikut.
Pembagi $2x^2 - 3x + 5$ kita buat menjadi
$2x^2 - 3x + 5 = 0$
$2x^2 = 3x - 5$
$x^2 = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$
Diperoleh $k_1 = -\frac{5}{2}$ dan $k_2 = \frac{3}{2}$
Pembagian $f(x)$ dengan skema Horner-Kino

$$\begin{array}{c|ccc|ccl} & \mathbf{8} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{-9} & \mathbf{-6} & \leftarrow \text{Koefisien } f(x) \\ -\frac{5}{2} & * & * & -20 & -40 & -15 & \\ \frac{3}{2} & * & 12 & 24 & 9 & * & + \\ \hline & \underbrace{8 \quad 16 \quad 6}_{\text{Koefisien hasil bagi } h(x)} & & & \boxed{-40} & \boxed{-21} & \leftarrow \text{Sisa } s(x) \end{array}$$
Dari proses pembagian dengan skema Horner-Kino diperoleh:</td><td>10</td></tr>
</table>

No.	Pembahasan	Skor
	Hasil bagi : $h(x) = \frac{8x^2+16x+6}{2} = 4x^2 + 8x + 3$ hasil bagi dibagi dengan koefisien x^2 dari pembagi Sisa pembagian : $s(x) = -40x - 21$ Jadi, hasil bagi dan sisa pembagian berturut-turut adalah $4x^2 + 8x + 3$ dan $-40x - 21$ **Jawaban: B**	
6.	Diketahui $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 8x + 5$ dibagi oleh $(x - 2)$ Karena derajat pembagi $(x - 2)$ adalah , maka sisa pembagian berderajat 0 yaitu berupa konstanta. Dengan menggunakan teorema sisa $s = p(2)$ artinya substitusi $x = 2$ ke $p(x)$ sebagai berikut $p(2) = 2(2)^4 + 3(2)^3 - (2)^2 - 8(2) + 5$ $= 2(16) + 3(8) - 4 - 16 + 5$ $= 32 + 24 - 4 - 16 + 5$ $= 41$ Jadi, sisa pembagian adalah 41 **Jawaban: A**	10
7.	Diketahui $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 20x + 10$ $f(x)$ dibagi $(2x - 1)$ bersisa 18. Berdasaran teorema sisa, sisa pembagian $f(x)$ oleh $(2x - 1)$ adalah $s = f\left(\frac{1}{2}\right) = 18$ artinya $f\left(\frac{1}{2}\right) = 18$ $2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 20\left(\frac{1}{2}\right) + 10 = 18$ $2\left(\frac{1}{8}\right) + a\left(\frac{1}{4}\right) + 10 + 10 = 18$ $\frac{1}{4} + \frac{a}{4} + 20 = 18$ $\frac{1}{4} + \frac{a}{4} = 18 - 20$ $\frac{1+a}{4} = -2$ $1 + a = (-2) \cdot 4$ $1 + a = -8$ $a = -8 - 1$ $a = -9$ Jadi, nilai $a = -9$ **Jawaban: D**	10
8.	Diketahui $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - (p + 1)x + 1$ dibagi oleh $(x - 2)$ sisanya 35 Berdasarkan teorema sisa, jika $f(x)$ dibagi oleh $(x - 2)$, maka $s = f(2) = 35$ artinya	10

No.	Pembahasan	Skor
	$-2p = -8$ $p = 4$ Jadi, nilai $p = 4$ **Jawaban: A**	
9.	Pembagi $x^2 - 7x + 12 = (x-4)(x-3)$ Pembagi berderajat dua maka sisanya berderajat satu. Berdasrakan teorema sisa maka $s(x) = px + q$ $s(4) = f(4) = 5 \rightarrow 4p + q = 5$ persamaan 1 $s(3) = f(3) = -2 \rightarrow 3p + q = -2$ persamaan 2 Eliminasi q pada persamaan 1 dan 2 untuk mencari nilai p $4p + q = 5$ $\underline{3p + q = -2 \quad -}$ $p = 7$ Substitusi $p = 7$ ke persamaan 1 $4p + q = 5$ $4(7) + q = 5$ $28 + q = 5$ $q = 5 - 28$ $q = -23$ Sisa pembagian $s(x) = px + q \rightarrow s(x) = 7x - 23$ Jadi, sisa pembagian adalah $7x - 23$ **Jawaban: D**	10
10.	Diketahui $f(x) = x^3 + ax^2 - x - 2$ $(x+2)$ faktor dari $f(x)$, berdasarkan teorema faktor $f(-2) = 0$ artinya $x = -2$ disubstitusi ke $f(x)$ sebagai berikut. $f(-2) = 0$ $(-2)^3 + a(-2)^2 - (-2) - 2 = 0$ $(-8) + a(4) + 2 - 2 = 0$ $-8 + 4a = 0$ $4a = 8$ $a = \frac{8}{4}$ $a = 2$ Karena $a = 2$, sehingga $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ Untuk mencari faktor yang lain dari $f(x)$ kita bisa membagi $f(x)$ oleh $(x + 2)$ dengan menggunakan skema Horner berikut. $\begin{array}{c\|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & & & & \\ & * & -2 & 0 & 2 \quad + \\ \hline & \underbrace{1 \quad\quad 0 \quad\quad -1}_{\text{Koefisien hasil bagi } h(x)} & & & \boxed{0} \leftarrow \text{Sisa } (s) \end{array}$ Dari hasil pembagian dengan skema Horner diperoleh: Hasil bagi : $h(x) = (x^2 - 1)$ karena hasil bagi sudah berderajat dua, untuk mencari faktor yang lain, kita bisa memfaktorkan hasil bagi $h(x) = x^2 - 1$ menjadi $(x^2 - 1) = (x-1)(x+1)$ Jadi, faktor yang lain dari $f(x)$ adalah $(x - 1)$ dan $(x + 1)$ **Jawaban: A**	10
Skor Total		**100**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

$$\textbf{Rumus Tingkat Penguasaan} = \frac{\textbf{Jumlah Skor}}{\textbf{Jumlah Skor Maksimum}} \times \mathbf{100}\%$$

Kriteria

90% - 100%	=	baik sekali
80% - 89%	=	baik
70% - 79%	=	cukup
<70%	=	kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian dapat menentukan pembagian polinomial oleh bentuk linear $(x - k)$?		
2.	Apakah kalian dapat menentukan pembagian polinomial oleh bentuk linear $(ax + b)$?		
3.	Apakah kalian dapat menentukan pembagian polinomial oleh bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$?		
4.	Apakah kalian dapat menentukan sisa pembagian dengan teorema sisa?		
5.	Apakah kalian dapat menentukan faktor dari polinomial dengan teorema faktor?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
PERSAMAAN POLINOMIAL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan siswa dapat:
1. Memahami persamaan polinomial
2. Menentukan akar-akar persamaan polinomial
3. Menentukan jumlah akar-akar polinomial
4. Menentukan hasil kali akar-akar polinomial

B. Uraian Materi

Persamaan Polinomial

Persamaan polinomial merupakan kalimat terbuka yang nilai kebenarannya tergantung pada nilai variabel yang diberikan. Secara umum, persamaan polinomial dalam variabel x dapat dituliskan sebagai berikut.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Dengan $a_n \neq 0$ dan n bilangan asli

Penyelesaian polinomial merupakan nilai variabel yang membuat persamaan polinomial bernilai benar. Untuk lebih memahami penyelesaian polinomial mari kita simak contoh berikut

Contoh

Persamaan polinomial $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Untuk $x = 1$

$$(1)^3 - 4(1)^2 + 1 + 6 = 0$$
$$1 - 4 \cdot (1) + 1 + 6 = 0$$
$$1 - 4 + 1 + 6 = 0$$
$$4 = 0 \text{ (salah)}$$

Diperoleh $x = 1$ bukan merupakan penyelesaian persamaan polinomial

Untuk $x = 2$

$$(2)^3 - 4(2)^2 + 2 + 6 = 0$$
$$8 - 4 \cdot 4 + 2 + 6 = 0$$
$$8 - 16 + 2 + 6 = 0$$
$$0 = 0 \text{ (benar)}$$

Diperoleh $x = 2$ merupakan penyelesaian persamaan polinomial

Menentukan Akar-akar Persamaan Rasional

Menentukan akar-akar persamaan rasional dapat diartikan menentukan nilai variabel yang membuat persamaan polinomial bernilai benar. Menentukan akar-akar polinomial berderajat dua dapat dilakukan dengan pemfaktoran, melengkapi kuadrat sempurna, dan rumus abc. Sedangkan untuk menentukan akar-akar polinomial berderajat lebih dari dua, dapat digunakan pengertian dan langkah-lamgkah berikut.

1. Pengertian akar-akar Rasional

- Jika $\frac{b}{c}$ sebuah bilangan rasional pecahan dalam suku terendah, maka $\frac{b}{c}$ merupakan akar persamaan suku banyak:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0$$

dengan koefisien-koefisien bilangan bulat, dimana b adalah faktor bulat dari a_0 dan c adalah faktor bulat dari a_n

> Jika $\frac{b}{c}$ adalah akar rasional dari $6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = 0$, nilai b dibatasi sampai faktor dari 2, yaitu $\pm 1, \pm 2$, sedangkan nilai c dibatasi sampai faktor dari 6, yaitu: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
>
> Jadi, akar rasional yang mungkin hanya: $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}$ dan $\pm \frac{2}{3}$.

- Jika persamaan $f(x) = 0$ mempunyai koefisien-koefisien bulat dengan koefisien pangkat tertinggi adalah satu dan laiinya dalam bentuk p seperti berikut.

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

Maka setiap akar rasional dari $f(x) = 0$ adalah sebagai bilangan bulat dan sebuah faktor dari p_n.

> Jadi, akar-akar rasional (jika ada) dari persamaan $x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$ terbatas sampai faktor-faktor bulat dari 12, yaitu $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$, dan ± 12

2. Menentukan akar-akar rasional persamaan suku banyak $f(x) = 0$

Langkah-langkah menentukan akar-akar rasional persamaan polinomial $f(x) = 0$ adalah sebagai berikut:

Langkah 1
- Selidiki apakah jumlah koefisien-koefisien $f(x) = 0$?
  - Jika ya, maka $x = 1$ merupakan akar dari $f(x) = 0$
  - Jika tidak, lakukan langkah 2

Langkah 2
- Periksa apakah jumlah koefisien-koefisien variabel berpangkat genap sama dengan jumlah koefisien-koefisien berpangkat ganjil?
  - jika ya, maka $x = -1$ merupakan akar dari $f(x) = 0$
  - Jika tidak, lakukan langkah 3

Langkah 3
- Tentukan faktor-faktor dari nilai mutlak a_0 ($a_0 \neq 0$, lakukan dengan cara coba-coba

Anak-anakku, untuk lebih memahami cara menentukan akar-akar rasional dari persamaan polinomial $f(x) = 0$, mari kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan polinomial

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$$

Pembahasan:

Misalkan $f(x) = x^4 + 0x^3 - 15x^2 - 10x + 24$

Untuk menentukan himpunan penyelesaian dari polinomial $f(x)$ ikuti langkah-langkah berikut

- Langkah 1

  Jumlahkan koefisen-koefisien $f(x)$, yaitu:

  Koefisien x^4 : 1

  Koefisien x^3 : 0

  Koefisien x^2 : -15

  Koefisien x : -10

  Koefisien x^0 atau konstanta : 24

  Jumlah koefisien-koefisien $f(x) = 1 + 0 + (-15) + (-10) + 24 = 0$

  Karena jumlah koefisien-koefisien $f(x) = 0$ maka $x = 1$ merupakan akar dari persamaan polinomial $f(x) = 0$

  Untuk mencari akar yang lain, kita bias gunakan skema horner berikut.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & -15 & -10 & 24 & \\ 1 & * & 1 & 1 & -14 & -24 & + \\ \hline & \underbrace{1 \quad 1 \quad -14 \quad -24}_{} & & & & \boxed{0} & \end{array}$$

Koefisien hasil bagi $h(x)$

  Dari pembagian dengan skema horner diperoleh hasil bagi $h(x) = x^3 + x^2 - 14x - 24$

- Lakukan langkah 1 lagi pada hasil bagi $h(x) = x^3 + x^2 - 14x - 24$

  Koefisien-koefisien dari $h(x)$ yaitu:

  Koefisien x^3 : 1

  Koefisien x^2 : 1

  Koefisien x : -14

  Koefisien x^0 atau konstanta : -24

  Jumlahkan koefisien-koefisien pada $h(x)$

  $= 1 + 1 - 14 - 24$

  $= -36$

  Karena jumlah koefisien $h(x) = -36 \neq 0$ maka lakukan langkah 2

- Langkah 2 untuk menentukan faktor dari $h(x)$

  Jumlahkan koefisen berpangkat ganjil dan koefisen berpangkat genap

Koefisien pangkat ganjil yaitu :
Koefisien x^3 : 1
Koefisien x : -14
Jumlah koefisien pangkat ganjil $= 1 + (-14) = -13$
Koefisien pangkat genap yaitu:
Koefisien x^2 : 1
Koefisien x^0 atau konstanta : -24
Jumlah koefisien pangkat genap $= 1 + (-24) = -23$
Karena jumlah koefisien pangkat ganjil $(-13) \neq$ jumlah koefisien pangkat genap (-23) maka lanjutkan ke langkah 3

- Langkah 3
  Perhatikan nilai mutlak konstanta yaitu $a_0 = |a_0| = |24|$
  Faktor dari 24 adalah $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12$, dan $\pm$ 24
  Karena $x = \pm1$ bukan merupakan akar dari $h(x)$, maka nilai $x = \pm1$ tidak perlu dicoba lagi dengan skema horner

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & -14 & -24 \\
-2 & & & & \\
 & * & -2 & 2 & 24 \quad + \\
\hline
 & \underbrace{1 \quad -1 \quad -12}_{\text{Koefisien hasil bagi } h(x)} & & & \boxed{0} \leftarrow \text{Sisa } (s)
\end{array}$$

$\therefore x = -2$ merupakan akar dari $h(x) = 0$ dengan hasil bagi $= x^2 - x - 12$
Untuk mencari akar yang lain, kita dapat memfaktorkan hasil bagi $x^2 - x - 12$ sebagai berikut

$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$(x-4)(x+3) = 0$$
$$x = 4 \text{ atau } x = -3$$

Akar-akar persamaan $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$ adalah $-3, -2, 1$, dan 4
Jadi, HP dari persamaan suku banyak itu adalah $\{-3, -2, 1, 4\}$

Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Polinomial

Jumlah dan hasil kali akar-akar suatu polinomial dapat ditentukan tanpa harus mencari akar-akarnya terlebih dahulu. Jumlah dan hasil kali akar-akar polinomial dijelaskan dalam teorema berikut.
Misalkan x_1, x_2, dan x_3 adalah akar – akar persamaan suku banyak berderajat tiga

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \ldots (1)$$

Maka persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$
$$A[\,x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\,](\,x - x_3\,) = 0$$
$$A[\,x^3 - x^2 x_3 - (x_1 + x_2)x^2 + x_3(x_1 + x_2)x + x_1x_2x - x_1x_2x_3\,] = 0$$
$$A[\,x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3\,] = 0$$
$$Ax^3 - A(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + A(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - Ax_1x_2x_3 = 0 \quad \ldots (2)$$

Ruas kiri persamaan (1) dan (2) disamakan, sehingga diperoleh persamaan :

- $Ax^3 \;=\; Ax^3$
- $-A(x_1 + x_2 + x_3)x^2 = Bx^2$
  $-A(x_1 + x_2 + x_3) = B$
  $$\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A}}$$
- $A(x_1x_2 + \; x_1x_3 \; + \; x_2x_3)x = Cx$
  $A(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = C$
  $$\boldsymbol{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{C}{A}}$$
- $-Ax_1x_2x_3 = D$
  $$\boldsymbol{x_1x_2\,x_3 = -\frac{D}{A}}$$

Dengan cara yang sama, kita dapat menemukan rumus jumlah dan hasil kali akar– akar persamaan suku banyak yang berderajat empat atau lebih menggunakan teorema vieta berikut.

Teorema Vieta

Jika $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adalah akar-akar persamaan polinomial
$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$
maka berlaku:

- $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

  $\cdots$ dan seterusnya
- $x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1}x_n = (-1)^n \times \frac{a_0}{a_n}$

Anak-anakku, untuk lebih memahami jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan polinomial, mari kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal

Akar-akar persamaan suku banyak $5x^3 - 10x^2 + 2x + 3 = 0$ adalah $x_1, x_2,$ dan x_3. Tentukan nilai dari :

a. $x_1 \;+\; x_2 \;+\; x_3$
b. $x_1x_2 \;+\; x_1x_3 \;+\; x_2x_3$
c. $x_1x_2\,x_3$

Pembahasan:
$5x^3 - 10x^2 + 2x + 3 = 0$
Dari persamaan polinomial tersebut diperoleh:
$A = 5, B = -10, C = 2,$ dan $D = 3$
a. $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A} = -\frac{(-10)}{5} = 2$

b. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{C}{A} = \frac{2}{5}$

c. $x_1x_2\,x_3 = -\frac{D}{A} = -\frac{3}{5}$

Contoh Soal

Akar – akar persamaan suku banyak $x^3 - 4x^2 + x + m = 0$ adalah $x_1, x_2,$ dan x_3. Jika $x_1 = 2$, tentukan nilai dari :

a. $x_1 + x_2 + x_3$

b. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

c. $x_1x_2\,x_3$

Pembahasan:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + m = 0$$

dari nilai $x_1 = 2$ dapat diperoleh nilai m dengan cara mensubstitusi $x = 2$ ke $f(x)$

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 \\ (2)^3 - 4(2)^2 + 2 + m &= 0 \\ 8 - 4(4) + 2 + m &= 0 \\ 8 - 16 + 2 + m &= 0 \\ m - 6 &= 0 \\ m &= 6 \end{aligned}$$

Karena $m = 6$ maka $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ diperoleh:

$A = 1, B = -4, C = 1,$ dan $D = 6$

a. $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A} = -\frac{(-4)}{1} = 4$

b. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{C}{A} = \frac{1}{1} = 1$

c. $x_1x_2x_3 = -\frac{D}{A} = -\frac{6}{1} = -6$

C. Rangkuman

Berdasarkan uraian materi pada kegiatan pembelajaran 3, dapat disimpulkan:

1. Persamaan polinomial merupakan kalimat terbuka yang nilai kebenarannya tergantung pada nilai variebel yang diberikan. Secara umum, persamaan polinomial dalam variabel x dapat dituliskan sebagai berikut.

   $$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

   dengan $a_n \neq 0$ dan n bilangan asli

2. Menentukan akar-akar rasional persamaan suku banyak $f(x) = 0$
   Langkah-langkah menentukan akar-akar rasional persamaan polinomial $f(x) = 0$ adalah sebagai berikut:
   Langkah 1 : Selidiki apakah jumlah koefisien-koefisien $f(x) = 0$?
   - Jika ya, maka $x = 1$ merupakan akar dari $f(x) = 0$
   - Jika tidak, lakukan langkah 2

   Langkah 2 : Periksa apakah jumlah koefisien-koefisien variabel berpangkat genap sama dengan jumlah koefisien-koefisien berpangkat ganjil?
   - jika ya, maka $x = -1$ merupakan akar dari $f(x) = 0$
   - Jika tidak, lakukan langkah 3

   Langkah 3 : Tentukan faktor-faktor dari nilai mutlak a_0 ($a_0 \neq 0$, lakukan dengan cara coba-coba

3. Jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan polinomial dapat dicari menggunakan teorema Vieta sebagai berikut:
   Jika $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adalah akar-akar persamaan polinomial
   $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$
   maka berlaku:
   - $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}$
   - $x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

     $\cdots$ dan seterusnya
   - $x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n = (-1)^n \times \frac{a_0}{a_n}$

D. Latihan Soal

Anak- anak untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap persamaan polinomial, jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan polinomial kerjakan soal latihan berikut:

1. Jika salah satu akar persamaan plinomial $x^4 - 5x^3 + ax + 8 = 0$ adalah -2, nilai $a = \cdots$
   A. 30
   B. 20
   C. 10
   D. -10
   E. -30

2. Jika $x = 2$ dan $x = 4$ merupakan akar-akar real persamaan $x^3 + cx + 4 = 0$, maka akar yang ketiga adalah ...
   A. 4
   B. 2
   C. -1
   D. -2
   E. -4

3. Persamaan polinomial $x^3 - x^2 - 32x + p = 0$ memiliki sebuah akar $x = 2$.akar-akar yang lain adalah ...
   A. -6 dan 5
   B. -6 dan 3
   C. -5 dan 6
   D. 2 dan 5
   E. 3 dan 5

4. Akar-akar persamaan polinomial $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ adalah ...
   A. 1, 2, dan 4
   B. 1, 2, dan -4
   C. 1, -2, dan 4
   D. 1, -2, dan -4
   E. -1, 2, dan 4

5. Diketahui akar-akar persamaan polinomial $3x^3 + 2x^2 - 8x - 5 = 0$ adalah $x_1, x_2,$ dan x_3. Nilai $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ adalah ...
   A. $\frac{8}{3}$

B. $\frac{2}{3}$
C. $-\frac{2}{3}$
D. $-\frac{5}{3}$
E. $-\frac{8}{3}$

6. Jumlah akar-akar dari persamaan $3x^3 + 4x^2 - 4x = 0$ adalah …
A. 4
B. $\frac{4}{3}$
C. 0
D. $-\frac{3}{4}$
E. $-\frac{4}{3}$

7. Diketahui persamaan polinomial $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x - 2 = 0$. Jika $p, q, r,$ dan s akar-akar persamaan polinomial, nilai $\frac{1}{pqr} + \frac{1}{pqs} + \frac{1}{prs} + \frac{1}{qrs}$ adalah …
A. 4
B. 2
C. $-\frac{1}{2}$
D. -2
E. -4

8. Diketahui $x_1, x_2,$ dan x_3 adalah akar-akar persamaan polinomial $x^3 - 2x^2 - 5x + p = 0$. Jika $x_3 = x_2 - x_1$, nilai $p = \cdots$
A. 6
B. 5
C. 4
D. -4
E. -6

9. Dua buah kubus mempunyai selisih panjang rusuk 3 cm. jika jumlah volume kedua kubus adalah 637 cm^3, maka jumlah kedua luas permukaan kubus adalah …
A. 610 cm^2
B. 534 cm^2
C. 409 cm^2
D. 384 cm^2
E. 150 cm^2

10. Seorang peneliti merancang sebuah wadah berbentuk balok dari bahan aluminium. Wadah tersebut harus mampu menampung 4.000 ml larutan. Peneliti menginginkan lebar wadah 5 cm lebih pendek dari panjangnya dan tinggi wadah 17 cm lebih pendek dari panjangnya. Dengan memisalkan panjang wadah x cm diperoleh volume wadah $V = 4.000$ ml. panjang wadah tersebut adalah …
A. 8
B. 10
C. 20
D. 25
E. 30

Pembahasan dan Kunci Jawaban

<table>
<tr><th>No.</th><th>Pembahasan</th><th>Skor</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>

Persamaan plinomial $x^4 - 5x^3 + ax + 8 = 0$
$x = -2$ merupakan akar persamaan artinya $x = -2$ memenuhi persamaan polinomial dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{gathered}(-2)^4 - 5(-2)^3 + a(-2) + 8 = 0\\ 16 - 5(-8) - 2a + 8 = 0\\ 16 + 40 - 2a + 8 = 0\\ 60 - 2a = 0\\ -2a = -60\\ a = \frac{60}{2}\\ a = 30\end{gathered}$$

Jadi, nilai $a = 30$
Jawaban: A

</td><td>10</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>

Persamaan polinomial $x^3 + cx + 4 = 0$
Nyatakan persamaan polinomial dalam pangkat turun berikut

$$x^3 + 0x^2 + cx + 4 = 0$$

$x = 2$ dan $x = -4$ merupakan akar real artinya ketika persamaan polinomial dibagi $x = 2$ dan $x = -4$ bersisa 0.
Untuk mencari faktor yang lainnya, kita gunakan skema horner berikut.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & c & 4 \\ 2 & & 2 & 4 & 2c+8 \\ \hline & 1 & 2 & c+4 & \boxed{2c+12} \ \rightarrow \text{sisa 1} \\ -4 & & -4 & 8 & \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{c+12} \ \rightarrow \text{sisa 2} & \end{array}$$

Koefisien hasil bagi

Dari proses pembagian dengan Skema Horner diperoleh
Hail bagi : $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$
Jadi, akar ketiga adalah 2
Jawaban: B

</td><td>10</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>

Persamaan polinomial $x^3 - x^2 - 32x + p = 0$
Salah satu akarnya $x = 2$ artinya ketika persamaan polinomial dibagioleh $x = 2$ maka sisa pembagiannya 0
Untuk mencari akar yang lain kita gunakan skema Horner berikut

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -32 & p \\ 2 & * & 2 & 2 & -60 \quad + \\ \hline & \underbrace{1 \quad\quad 1 \quad\quad -30}_{\text{Koefisien hasil bagi } h(x)} & & & \boxed{p-60} \leftarrow \text{Sisa } (s) \end{array}$$

Dari pembagian dengan skema Horner diperoleh

</td><td>10</td></tr>
</table>

No.	Pembahasan	Skor
	Hail bagi : $h(x) = x^2 + x - 30$ karena hasil bagi berderajat dua, untuk mencari akar-akar yang lainnya kita dapat langsung memfaktorkan $h(x)$ menjadi $$x^2 + x - 30 = (x - 5)(x + 6)$$ Dari faktor tersebut, kita dapat menentukan akar-akar yang lainnya yaitu: $$x - 5 \rightarrow x = 5$$ $$x + 6 \rightarrow x = -6$$ Jadi, akar-akar yang lainnya adalah -6 dan 5 **Jawaban: A**	
4.	Misalkan persamaan polinomial $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ Koefisien x^3 : 1 Koefisien x^2 : -3 Koefisien x : -6 Koefisien atau konstanta : 8 Jumlahkan semua koefisien $= 1 + (-3) + (-6) + 8$ $= 1 - 3 - 6 + 8$ $= 0$ Karena jumlah koefisien = 0, maka $x = 1$ merupakan akar dari persamaan polinomial $f(x)$ Untuk mencari akar-akar yang lainnya, kita bagi $f(x)$ dengan $x = 1$ dengan skema horner $$\begin{array}{c\|ccccc} & 1 & -3 & -6 & 8 & \\ 1 & & & & & \\ & * & 1 & -2 & -8 & + \\ \hline & \underbrace{1 \quad -2 \quad -8}_{\text{Koefisien hasil bagi } h(x)} & & & \boxed{0} \leftarrow \text{Sisa } (s) & \end{array}$$ Dari hasil pembagian dengan skema horner diperoleh hasil bagi $x^2 - 2x - 8$, sehingga $f(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut $$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$$ $$(x - 1)(x^2 - 2x - 8) = 0$$ $$(x - 1)(x + 2)(x - 4) = 0$$ $$x - 1 = 0 \quad \text{atau} \quad x + 2 = 0 \quad \text{atau} \quad x - 4 = 0$$ $$x = 1 \qquad x = -2 \qquad x = 4$$ Jadi, akar-akar persamaan polinomial adalah $1, -2$, dan 4 **Jawaban: C**	10
5.	persamaan polinomial $3x^3 + 2x^2 - 8x - 5 = 0$ Nilai $a_3 = 3, a_2 = 2, a_1 = -8, a_0 = -5$ $$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}$$ $$= -\frac{8}{3}$$ Jadi, nilai $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ adalah $-\frac{8}{3}$ **Jawaban: E**	10

No.	Pembahasan	Skor
6.	Persamaan polinomial $3x^3 + 4x^2 - 4x = 0$ Nilai $a_3 = 3, a_2 = 4, a_1 = -4, a_0 = 0$ Jumlah akar-akar artinya $x_1 + x_2 + x_3$ $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$ $= -\frac{4}{3}$ Jadi, jumlah akar-akar dari persamaan $3x^3 + 4x^2 - 4x = 0$ adalah $\frac{4}{3}$ **Jawaban: E**	10
7.	Persamaan polinomial $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x - 2 = 0$. Nilai $a_4 = 1, a_3 = -4, a_2 = 3, a_1 = -6, a_0 = -2$ Jika $p, q, r,$ dan s akar-akar persamaan polinomial, maka $p + q + r + s = -\frac{a_3}{a_4}$ $= -\frac{(-4)}{1}$ $= 4$ $pqrs = \frac{a_0}{a_4}$ $= \frac{-2}{1}$ $= -2$ $\frac{1}{pqr} + \frac{1}{pqs} + \frac{1}{prs} + \frac{1}{qrs} = \frac{s}{pqrs} + \frac{r}{pqrs} + \frac{q}{pqrs} + \frac{p}{pqrs}$ $= \frac{p + q + r + s}{pqrs}$ $= \frac{4}{-2}$ $= -2$ Jadi, nilai $\frac{1}{pqr} + \frac{1}{pqs} + \frac{1}{prs} + \frac{1}{qrs}$ adalah -2 **Jawaban: D**	10
8.	Persamaan polinomial $x^3 - 2x^2 - 5x + p = 0$. Nilai $a_3 = 1, a_2 = -2, a_1 = -5, a_0 = p$ $x_1, x_2,$ dan x_3 akar-akar persamaan polinomial dan $x_3 = x_2 - x_1 \rightarrow x_1 + x_3 = x_2$, maka $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$ $(x_1 + x_3) + x_2 = -\frac{(-2)}{1}$ $x_2 + x_2 = 2$ $2x_2 = 2$ $x_2 = 1$ $x_2 = 1$ merupakan akar persamaan $f(x) = 0$ maka $f(x_2) = f(1) = 0$ $f(1) = 0$ $(1)^3 - 2(1)^2 - 5(1) + p = 0$ $1 - 2(1) - 5 + p = 0$ $1 - 2 - 5 + p = 0$ $p - 6 = 0$ $p = 6$ Jadi, nilai $p = 6$ **Jawaban: A**	10

No.	Pembahasan	Skor
9.	Misal : y adalah rusuk kubus besar x adalah rusuk kubus kecil selisih rusuk kubus 3 cm dapat dituliskan $y - x = 3 \rightarrow y = x + 3$ Jumlah volume kedua kubus adalah 637 cm^3, volume kubus merupakan hasil pangkat tiga dari panjang rusuk kubus, maka volume kubus dapat dituliskan $x^3 + y^3 = 637$ $x^3 + (x+3)^3 = 637$ $x^3 + x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 637$ $2x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - 637 = 0$ $2x^3 + 9x^2 + 27x - 610 = 0$ Untuk mencari akar-akar rasional dari persamaan polinomial $p(x) = 2x^3 + 9x^2 + 27x - 610 = 0$ kita perhatikan faktor dari koefisien pangkat tertinggi dan konstanta dari persamaan polinomial tersebut. Faktor dari koefisien tertinggi 2 yaitu 1 dan 2 Faktor dari konstanta 610 yaitu 1, 2, 5, dan 61 Kita coba nilai $p(x)$ untuk $x = 1$ dan $x = 5$ Untuk $x = 1$ $p(1) = 2(1)^3 + 9(1)^2 + 27(1) - 610$ $= 2 + 9 + 27 - 610$ $= -572$ Karena $p(1) \neq 0$ maka $x = 1$ bukan merupakan akar dari persamaan polinomial $p(x)$ Untuk $x = 5$ $p(5) = 2(5)^3 + 9(5)^2 + 27(5) - 610$ $= 2(125) + 9(25) + 135 - 610$ $= 250 + 225 + 135 - 610$ $= 0$ Karena $p(5) = 0$ maka $x = 5$ merupakan akar dari persamaan polinomial $p(x)$ Nilai x sudah diketahui dan kita dapat menentukan nilai y dengan mensubtitusi $\boldsymbol{x = 5}$ ke $y = x + 3$ diperoleh $y = x + 3$ $y = 5 + 3$ $\boldsymbol{y = 8}$ Luas permukaan kedua kubus adalah $= 6 \times (x^2 + y^2)$ $= 6 \times (5^2 + 8^2)$ $= 6 \times (25 + 64)$ $= 6 \times 89$ $= 534$ Jadi, jumlah luas kedua permukaan kubus adalah 534 cm^2 **Jawaban: B**	10
10.	Diketahui : Panjang $= x$ Lebar $= x - 5$ Tinggi $= x - 17$ Volume wadah = 4.000 ml = 4.000 cm^3 Volume wadah dapat dinyatakan dalam hasil perkalian panjang, lebar dan tinggi wadah serta dapat dituliskan sebagai berikut.	10

No.	Pembahasan	Skor
	$V = 4.000$ $\text{panjang } \times \text{lebar} \times \text{tinggi} = 4.000$ $x \cdot (x-5) \cdot (x-7) = 4.000$ $x^3 - 22x^2 + 85x = 4.000$ $x^3 - 22x^2 + 85x - 4.000 = 0$ Untuk mencari nilai x kita coba beberapa nilai x untuk fungsi polinomial $V(x) = x^3 - 22x^2 + 85x - 4.000$ Untuk $x = 10$ $V(10) = (10)^3 - 22(10)^2 + 85(10) - 4.000$ $= 1.000 - 2(100) + 850 - 4.000$ $= 1.000 - 200 + 850 - 4.000$ $= -4.350$ Karena $V(10) \neq 0$ maka $x = 10$ bukan akar dari persamaan polinomial Untuk $x = 20$ $V(20) = (20)^3 - 22(20)^2 + 85(20) - 4.000$ $= 8.000 - 22(400) + 1.700 - 4.000$ $= 8.000 - 8.800 + 1.700 - 4.000$ $= -3.100$ Karena $V(20) \neq 0$ maka $x = 20$ bukan akar dari persamaan polinomial Untuk $x = 25$ $V(25) = (25)^3 - 22(25)^2 + 85(25) - 4.000$ $= 15.625 - 22(625) + 2.125 - 4.000$ $= 15.625 - 13.750 + 2.125 - 4.000$ $= 0$ Karena $V(25) = 0$ maka $x = 25$ merupakan akar dari persamaan polinomial Jadi, panjang wadah $= x = 25$ **Jawaban: D**	
	Skor Total	**100**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban kalian dengan kunci jawaban. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

$$\textbf{Rumus Tingkat Penguasaan} = \frac{\textbf{Jumlah Skor}}{\textbf{Jumlah Skor Maksimum}} \times \mathbf{100\%}$$

Kriteria

90% - 100% = baik sekali
80% - 89% = baik
70% - 79% = cukup
<70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Anak-anak isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Apakah kalian memahami persamaan polinomial?		
2.	Apakah kalian dapat menentukan akar-akar persamaan polinomial ?		
3.	Apakah kalian dapat menentukan jumlah akar-akar polinomial ?		
4.	Apakah kalian dapat menentukan hasil kali akar-akar polinomial ?		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya

EVALUASI

Pilih satu jawaban yang paling tepat !

1. Derajat polinomial $(6 - x)(2x^2 - 3x)^3$ adalah …
   A. 4
   B. 5
   C. 6
   D. 7
   E. 8

2. Hasil penjumlahan polinomial $x^3 - 2x + 1$ dan polinomial $x^4 - x^3 + 3x$ adalah …
   A. $x^4 + 2x^3 + 5x + 1$
   B. $x^4 + 2x^3 + x + 1$
   C. $x^4 - x + 1$
   D. $x^4 + x + 1$
   E. $x^4 + x^3 - 5x + 1$

3. Hasil pengurangan polinomial $x^4 - 3x^2 + 6$ oleh $x^3 - 3x^2 - 2$ adalah …
   A. $x^4 + x^3 - 6x^2 + 8$
   B. $x^4 - x^3 + 8$
   C. $x^4 + x^3 - 8$
   D. $x^4 + x^3 + 6x - 8$
   E. $x^4 + x^3 + 6x + 8$

4. Hasil perkalian $(8 - x)(2 - x \mp x^3)$ adalah …
   A. $-x^4 + 6x^3 + x^2 - 10x + 16$
   B. $-x^4 - 6x^3 + x^2 - 10x + 16$
   C. $-x^4 + 8x^3 + x^2 - 10x + 16$
   D. $-x^4 + 8x^3 - x^2 - 10x + 16$
   E. $-x^4 + 8x^3 - x^2 + 10x + 16$

5. Suku banyak $f(x) = x^5 - 25x^4 + 66x^3 - 2x + 50$. Nilai $f(22) = \cdots$
   A. -2
   B. -1
   C. 0
   D. 4
   E. 6

6. Dari bentuk $\frac{5x-1}{x^2-x-2} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$. Nilai $A - B = \cdots$
   A. 2
   B. 1
   C. 0
   D. -1
   E. -2

7. Sisa dari pembagian $(x^3 - x^2 + 5x - 3) : (x + 2)$ adalah …
   A. -25
   B. -18
   C. 10
   D. 15
   E. 19

8. Hasil bagi dari $8x^4 - 20x^2 + 3x - 2$ oleh $(2x - 3)$ adalah …
   A. $8x^3 + 12x^2 - 2x$
   B. $8x^2 + 12x - 2$
   C. $4x^3 + 6x^2 - x$
   D. $4x^2 + 6x - 2$
   E. $4x^3 + 6x^2 + x$

9. Sisa dari pembagian $(2x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$ dibagi $(x^2 - x + 3)$ adalah …
   A. $4 - 2x$
   B. $5 - x$
   C. $3 - 4x$
   D. $5x + 1$
   E. $2x + 5$

10. Sisa dari pembagian $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ oleh $(x^2 - x - 2)$ adalah …
    A. $x - 12$
    B. $x + 14$
    C. $x - 16$
    D. $x + 18$
    E. $x - 20$

11. Jika $f(x) = x^3 + kx^2 + 4x - 5k - 20$ dibagi oleh $(x - 3)$ bersisa 21, maka nilai $k = \cdots$
    A. -7
    B. -2
    C. -1
    D. 3
    E. 5

12. Diketahui suku banyak $f(x) = ax^2 - 2x^2 - 3x + b$. Jika $f(x)$ dibagi $x + 1$ sisanya 2, dan jika dibagi $(x - 1)$ sisanya 4. Nilai $a \cdot b = \cdots$
    A. -30
    B. -10
    C. 20
    D. 25
    E. 9

13. Jika pembagian $(x^2 + 2px - 5)$ dan $(x^3 - 3px^2 + 2p)$ oleh $(x + 1)$ menghasilkan sisa yang sama, maka nilai $p = \cdots$
    A. -7
    B. -5
    C. -3
    D. 4
    E. 8

14. Polinomial $f(x)$ dibagi oleh $x^2 + 5x - 6$ bersisa $2x + 10$. Sisa pembagian $f(x)$ oleh $x + 6$ adalah …
    A. 22
    B. 12
    C. -1
    D. -2
    E. -6

15. Polinomial $f(x)$ habis dibagi oleh $(x - 5)$ dan jika $f(x)$ dibagi $(x + 3)$ bersisa -16, maka $f(x)$ dibagi oleh $x^2 - 2x - 15$ bersisa …

A. $3x - 5$
B. $2x + 12$
C. $2x - 10$
D. $3x + 2$
E. $2x - 7$

16. $F(x)$ dibagi oleh $(x - 3)$ dan $(x - 2)$, sisanya berturut-turut 5 dan 0. $G(x)$ dibagi oleh $(x - 3)$ dan $(x - 2)$, sisanya berturut-turut 2 dan -1. Diketahui $H(x) = 2 \cdot F(x) - 3 \cdot G(x)$. Jika $H(x)$ dibagi oleh $(x - 2)(x - 3)$, maka sisa pembagiannya adalah …
A. $x - 1$
B. $x - 3$
C. $x - 7$
D. $x + 1$
E. $x + 4$

17. $(ax + b)$ merupakan faktor dari $f(x)$ jika dan hanya jika …
A. $f(-b) = a$
B. $f(a) = -b$
C. $f\left(\frac{a}{b}\right) = 0$
D. $f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$
E. $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$

18. Berikut yang merupakan faktor dari $x^4 + 5x^3 - 2x + 2$ adalah …
A. $x - 1$
B. $x + 1$
C. $x - 2$
D. $x + 2$
E. $x - 3$

19. Jika $(x + 2)$ merupakan faktor dari $(x^3 + kx + 3k - 1)$, maka nilai k adalah …
A. 12
B. 9
C. 3
D. -5
E. -8

20. $(x^2 - 3x + 2)$ merupakan faktor dari suku banyak $(x^4 + 2x^3 - 7x^2 + ax + b)$. Nilai a dan b masing-masing adalah …
A. $a = 12$ dan $b = -8$
B. $a = 8$ dan $b = -12$
C. $a = -8$ dan $b = 12$
D. $a = -8$ dan $n = -12$
E. $a = -12$ dan $b = 8$

21. Himpunan penyelesaian dari persamaan $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$ adalah …
A. $\{-5, -2, 1\}$
B. $\{-2, 1, 5\}$
C. $\{-5, -2, -1\}$
D. $\{-1, 2, 5\}$
E. $\{-5, -1, 2\}$

22. Persamaan $7x^3 - 5x^2 + 8x - 12 = 0$ mempunyai akar-akar x_1, x_2, dan x_3.
    Nilai $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \cdots$
    A. $-\frac{3}{2}$
    B. $-\frac{2}{3}$
    C. $\frac{3}{4}$
    D. $\frac{2}{3}$
    E. $\frac{3}{2}$

23. Jika salah satu akar persamaan $4x^4 - 15x^2 + 5x + m = 0$ adalah $-\frac{1}{2}$, maka hasil kali akar-akarnya adalah …
    A. 6
    B. 4
    C. $\frac{3}{2}$
    D. $\frac{2}{3}$
    E. -6

24. Panjang rusuk sebuah balok merupakan 3 bilangan berurutan. Jika volume balok 24 cm^3, maka luas permukaan balok tersebut adalah …
    A. 25 cm^2
    B. 32 cm^2
    C. 48 cm^2
    D. 52 cm^2
    E. 54 cm^2

25. Seorang peneliti mengamati perkembangbiakan bakteri pada makanan yang bersisa. Banyak bakteri pada menit ke-n memenuhi persamaan polinomial derajat 3. Jumlah bakteri pada menit ke-1 sampai menit ke-3 adalah 7, 18, dan 53. Banyak bakteri pada menit ke-4 adalah…
    A. 321
    B. 312
    C. 231
    D. 132
    E. 123

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. D	11. B	21. D
2. D	12. C	22. D
3. B	13. C	23. C
4. C	14. D	24. D
5. E	15. C	25. D
6. D	16. D	
7. A	17. E	
8. C	18. B	
9. B	19. B	
10. B	20. C	

DAFTAR PUSTAKA

Aksin, Nur. dkk. 2017. Matematika Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam SMA/MA kelas XI Semester 2. Yogyakarta: Intan Pariwara

Cunayah, Cucun dan Etsa Indra Irawan. 2013. *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika untuk SMA/Ma*. Bandung : Yrama Widya

Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan. 2017. *Modul 5 Penerapan Polinomial dalam Pengembangan Ilmu dan Teknologi Sehari-hari*. Jakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

Sukino. 2016. *Matematika Jilid 2 untuk SMA/MA kelas XI Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam*. Jakarta: Erlangga