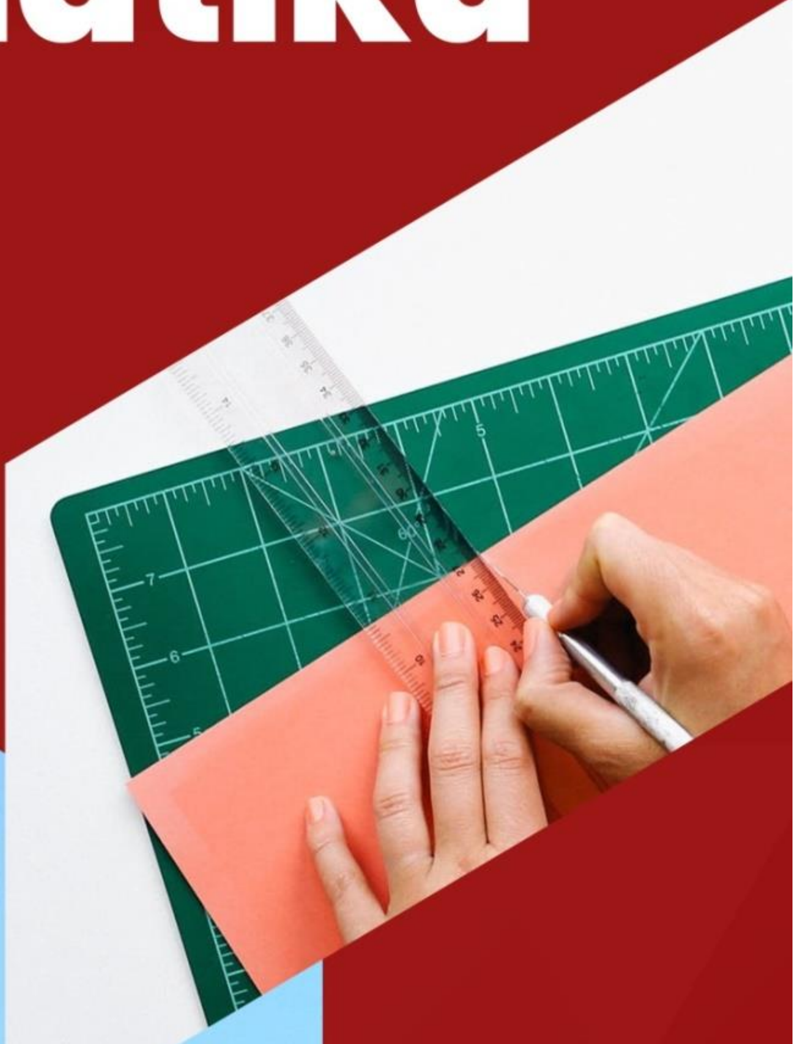
KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI, PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS X

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK LINEAR SATU VARIABEL

MATEMATIKA UMUM KELAS X

PENYUSUN
Yenni Dian Anggraini, S.Pd.,M.Pd.,MBA.
SMA Negeri 9 Kendari

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Variabel : adalah lambang pengganti suatu bilangan yang belum diketahui nilainya dengan jelas, variabel disebut juga peubah.

Kalimat terbuka : adalah sebuah kalimat yang memiliki variabel atau memuat variabel.

Persamaan : adalah kalimat terbuka yang memuat tanda sama dengan.

Pertidaksamaan : adalah kalimat terbuka yang menggunakan relasi tidak sama ($>$, $<$, $\leq$, atau $\geq$).

Persamaan linear : adalah persamaan yang setiap sukunya mengandung konstanta dengan variabel berderajat satu.

Pertidaksamaan linear : adalah pertidaksamaan yang setiap sukunya mengandung konstanta dengan variabel berderajat satu atau tunggal.

Nilai Mutlak : adalah nilai suatu bilangan rill atau asli tanpa tanda $\pm$.

Persamaan linear satu variabel : adalah persamaan linear yang memiliki satu variabel.

Pertidaksamaan linear satu variabel : adalah pertidaksamaan linear yang memiliki satu variabel.

PETA KONSEP


PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK LINEAR SATU VARIABEL
Konsep Nilai Mutlak
Defenisi Nilai Mutlak
Menggambar Grafik Fungsi Nilai Mutlak
Persamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel
Sifat-sifat Persamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel
Penerapan Persamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel
Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel
Sifat-sifat Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel
Penerapan Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	X (Sepuluh)
Alokasi Waktu	:	12 JP
Judul Modul	:	Persamaan dan Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

B. Kompetensi Dasar

3.1 Mengintepretasi persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel dengan persamaan dan pertidaksamaan linear Aljabar lainnya.

4.1 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel.

C. Deskripsi Singkat Materi

Pada modul ini peserta didik akan mempelajari konsep, penyelesaian dan penerapan nilai mutlak. Untuk mempelajari modul ini, para peserta didik diharapkan telah menguasai dasar-dasar garis bilangan, penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian bilangan real. Selain penjelasan mengenai materi yang ditampilkan, modul ini juga dilengkapi dengan latihan untuk menguji pemahaman dan penguasaan dari peserta didik terhadap materi yang telah dipelajari. Modul ini disusun dengan bahasa yang sederhana, contoh-contoh yang kontekstual, dan dibuat berurutan sesuai dengan urutan materi yang terlebih dahulu perlu dikuasai. Setelah memahami materi ini peserta didik diharapkan dapat menentukan penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel dan menerapkan pada permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini hal-hal yang perlu dilakukan oleh peserta didik adalah sebagai berikut.

1. Baca pendahuluan modul untuk mengetahui arah pengembangan modul.
2. Membaca kompetensi dasar dan tujuan yang ingin dicapai melalui modul.
3. Agar memperoleh gambaran yang utuh mengenai modul, maka pengguna perlu membaca dan memahami peta konsep.
4. Mempelajari modul secara berurutan agar memperoleh pemahaman yang utuh.
5. Memahami contoh-contoh soal yang ada, dan mengerjakan semua soal latihan yang ada.
6. Jika dalam mengerjakan soal menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
7. Ikuti semua tahapan dan petunjuk yang ada pada modul ini.
8. Mempersiapkan alat tulis untuk mengerjakan soal-soal latihan.
9. Selamat belajar menggunakan modul ini, semoga bermanfaat.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **3** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Konsep Nilai Mutlak

Kedua : Persamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

Ketiga : Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
KONSEP NILAI MUTLAK

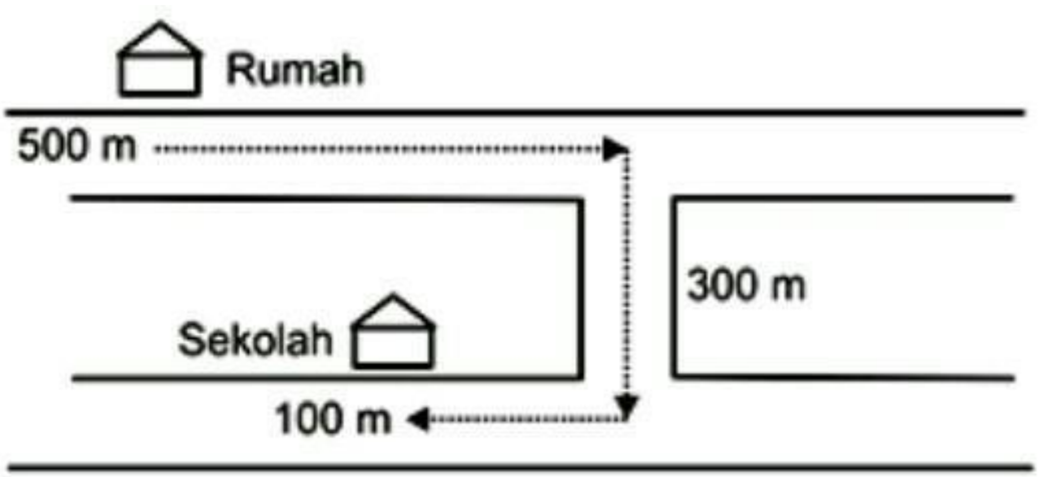
A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan peserta didik mampu:
1. Memahami konsep nilai mutlak.
2. Menggambar grafik fungsi nilai mutlak.

B. Uraian Materi

1. Konsep Nilai Mutlak

Peserta didik sekalian, pernahkah kalian memikirkan berapa jarak antara rumah ke sekolah? Pada saat kalian memikirkan jarak tersebut, pernahkah terlintas dalam pikiran kalian bahwa jarak tersebut bernilai positif, negatif, atau mungkin selalu positif, atau selalu negatif? Mengapa demikian? Tentu kalian penasaran bukan? Untuk menjawab rasa penasaran kalian marilah menyimak konsep jarak yang berkaitan dengan nilai mutlak. Simaklah ilustrasi berikut.



Gambar 1. Ilustrasi Jarak
(Sumber: https://brainly.co.id/tugas/22118492)

Seorang anak akan menempuh perjalanan pergi pulang dari rumah ke sekolah setiap hari. Untuk itu Ia harus menempuh jarak tertentu, baik itu searah maupun berlawanan arah dari rumah ke sekolahnya. Kalian dapat memperhatikan Gambar 1 di atas, bahwa semua jarak yang mungkin akan ditempuh oleh anak tersebut dinyatakan dalam bilangan postif. Apakah kalian sudah mulai memahami konsep jarak?

Dalam kehidupan sehari-hari, seringkali kita dihadapkan pada permasalahan yang berhubungan dengan jarak. Misalnya kita ingin menghitung jarak antara rumah dengan sekolah atau kota yang satu dengan kota yang lainya. Dalam kaitannya dengan pengukuran jarak antara dua tempat ini, terlihat sesuatu keistimewaan, bahwa jarak ini nilainya selalu positif. Dengan kata lain pengukuran jarak antara dua tempat nilainya tidak pernah negatif. Sehingga diperlukan konsep nilai mutlak, yaitu nilai non negatif dari suatu bilangan.

Definisi Nilai Mutlak

Misalkan x bilangan real, |x| dibaca nilai mutlak x, dan didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x, & jika\ x \geq 0 \\ -x, & jika\ x < 0 \end{cases}$$

Definisi di atas dapat diungkapkan dengan kalimat sehari-hari seperti berikut ini. Nilai mutlak suatu bilangan positif atau nol adalah bilangan itu sendiri, sedangkan nilai mutlak dari suatu bilangan negatif adalah lawan dari bilangan negatif itu. Berdasarkan definisi tersebut maka:

a) $|5| = 5$, karena $5 > 0$ (5 adalah bilangan positif).
b) $|-3| = -(-3) = 3$, karena $-3 < 0$ (-3 adalah bilangan negatif).

Contoh 1:
Tentukan $|x + 2|$ untuk x bilangan real dengan menggunakan definisi nilai mutlak!

Alternatif Penyelesaian:
Berdasarkan definisi nilai mutlak maka:

$$\begin{cases} x + 2 & \text{jika } x + 2 \geq 0 \\ -(x + 2) & \text{jika } x + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 & \text{jika } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{jika } x < -2 \end{cases}$$

Contoh 2:
Pada musim penghujan beberapa waktu yang lalu, telah terjadi kenaikan debit air di sungai Citarum. Ambang batas normal debit air di sungai tersebut berkisar 400 m^3/detik, sebagai acuan untuk menentukan status kewaspadaan banjir di sungai itu. Tentukan fungsi nilai mutlak peningkatan dan penurunan debit air tersebut dengan perubahan dalam liter/detik.

Alternatif Penyelesaian:
Misalkan: x adalah debit air sungai, ambang batas normal debit air = 400 m^3/detik. Maka fungsi nilai mutlak peningkatan dan penurunan debit air tersebut dengan perubahan dalam liter/detik adalah: $f(x) = y = |x - 400|$.

Peserta didik sekalian, apakah kalian mulai memahami konsep jarak? Apakah kalian telah memahami konsep nilai mutlak? Bagaimana pula pemahaman kalian tentang konsep jarak yang berkaitan dengan nilai mutlak? Jika kalian belum memahami kosep-konsep tersebut sepenuhnya silahkan kalian membaca kembali materi ini, kalian juga dianjurkan untuk membaca dari sumber bacaan lain. Selain bermanfaat untuk menambah wawasan dan pengetahuan kalian, kegiatan tersebut juga akan meningkatkan kemampuan literasi kalian.

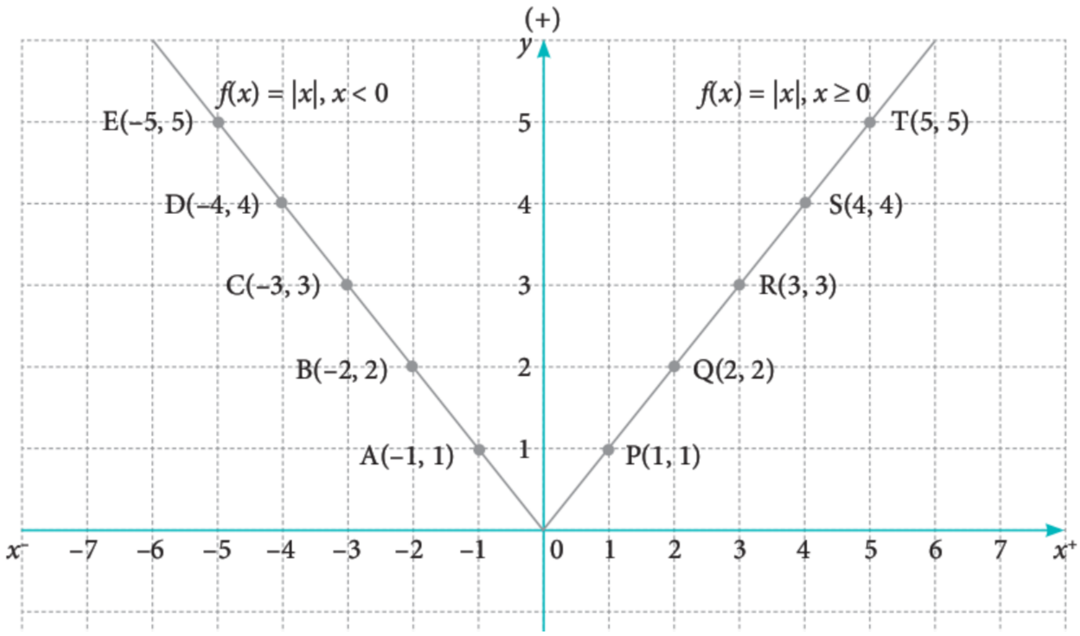
2. Menggambar Grafik Fungsi Nilai Mutlak

Untuk lebih memperjelas konsep nilai mutlak dan memberikan gambaran secara geometris, akan lebih baik jika kita dapat membuat gambar grafik fungsi nilai mutlak. Sebelumnya kita buat tabel nilai-nilai fungsi nilai mutlak dari beberapa titik bantu. Silahkan mencermati tabel berikut.

Tabel 1. Koordinat titik bantu yang memenuhi fungsi y = |x|

	Untuk x < 0						Untuk x ≥ 0						
x	...	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	...
(x,y)	...	(−5,5)	(−4,4)	(−3,3)	(−2,2)	(−1,1)	(0,0)	(1,1)	(2,2)	(3,3)	(4,4)	(5,5)	...

Sebagaimana yang telah diuraikan sebelumnya, maka kita mengisi nilai y = |x| sesuai dengan definisi nilai mutlak. Titik-titik yang kita peroleh pada tabel, kemudian disajikan dalam sistem koordinat kartesius sebagai berikut.



Gambar 2. Grafik Fungsi y = f(x) = |x|

Bagaimana sekarang? Apakah kalian mulai memahami gambar grafik fungsi nilai mutlak? Apakah kalian mampu menggambarnya sendiri? Untuk menambah kemampuan kalian dalam menggambar grafik fungsi nilai mutlak, marilah cermati contoh selanjutnya.

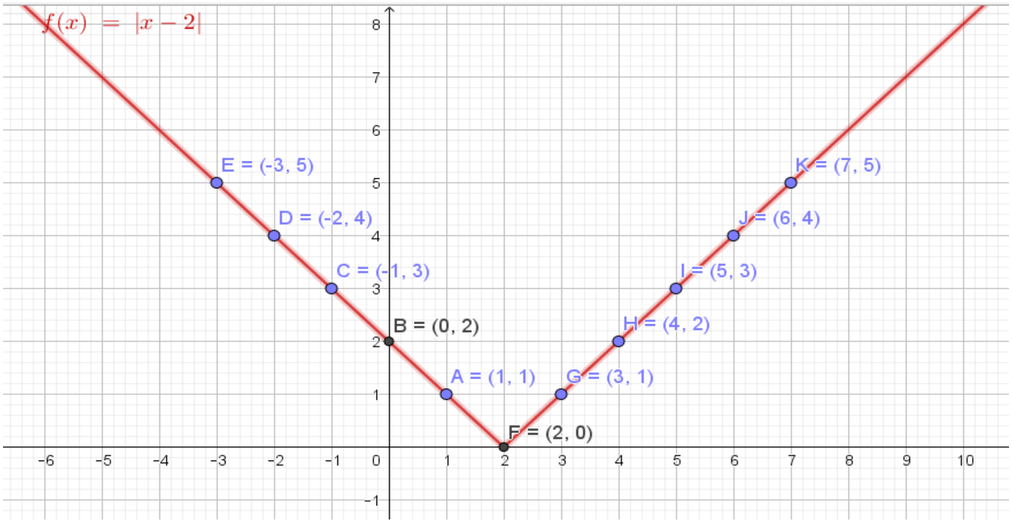
Contoh: Gambarlah grafik y = |x − 2|.

Alternatif Penyelesaian:
Langkah pertama kalian harus membuat tabel nilai fungsi mutlak y = |x − 2| dari beberapa titik bantu.

Tabel 2. Koordinat titik bantu yang memenuhi fungsi y = |x − 2|

	Untuk x < 2					Untuk x ≥ 2					
x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
y = |x − 2|	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
(x,y)	(−3,5)	(−2,4)	(−1,3)	(0,2)	(1,1)	(2,0)	(3,1)	(4,2)	(5,3)	(6,4)	(7,5)

Langkah kedua, kita mengisi nilai y = |x − 2| sesuai dengan definisi nilai mutlak. Langkah selanjutnya, titik-titik yang kita peroleh pada tabel, kemudian disajikan dalam sistem koordinat kartesius sebagai berikut.



Gambar 3. Grafik Fungsi y = f(x) = |x – 2|

Gambar 3 di atas adalah gambar grafik fungsi $y = |x - 2|$ untuk interval nilai $-3 \leq x \leq 7$. Bagaimana, mudah bukan? Jika kalian masih belum memahami, silahkan mengulang kembali langkah-langkah menggambar grafik fungsi nilai mutlak ini. Kalian pasti mampu mengerjakan sendiri dengan baik dan benar. Menurut kalian bagaimana penerapan materi ini dalam kehidupan sehari-hari selain permasalahan jarak dan waktu?

C. Rangkuman

1. Nilai mutlak adalah nilai bilangan yang selalu positif. Nilai mutlak suatu bilangan positif atau nol adalah bilangan itu sendiri, sedangkan nilai mutlak dari suatu bilangan negatif adalah lawan dari bilangan negatif itu.
2. Langkah-langkah untuk membuat grafik fungsi nilai mutlak adalah, (1) membuat tabel fungsi nilai mutlak dari beberapa titik bantu, (2) mengisi tabel fungsi nilai mutlak sesuai dengan definisi nilai mutlak, (3) titik-titik yang diperoleh pada tabel kemudian disajikan dalam sistem koordinat kartesius.

D. Latihan Soal

Soal Essay

1. Tentukan $|-2x + 5|$ untuk x bilangan real dengan menggunakan definisi nilai mutlak!
2. Tentukanlah nilai mutlak untuk bentuk $\left|\frac{3}{7} - \frac{2}{5}\right|$.
3. Apakah nilai x ada untuk persamaan $-5|3x - 7| + 4 = 14$? Jika ada jelaskan cara mencarinya, jika tidak ada mengapa?
4. $|k| = k$, untuk setiap k bilangan asli, apakah pernyataan tersebut bernilai benar? Mengapa? Berikanlah alasan yang logis atas jawaban tersebut.
5. Suatu grup musik merilis album, penjualan per minggu (dalam ribuan) dinyatakan dengan model $s(t) = |2t - 3|$, t waktu (dalam minggu).
   (a) Gambarkan grafik fungsi penjualan s(t).
   (b) Hitunglah total penjualan album selama 44 minggu pertama.

Pembahasan Soal Latihan

1. Alternatif Penyelesaian:

$$|-2x+5| = \begin{cases} -2x+5, & \text{jika } -2x+5 \geq 0 \\ -(-2x+5), & \text{jika } -2x+5 < 0 \end{cases}$$

$$|-2x+5| = \begin{cases} -2x+5, & \text{jika } x \geq \dfrac{5}{2} \\ 2x-5, & \text{jika } x < \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

(Skor 15)

2. Alternatif Penyelesaian:

$$\left|\frac{3}{7} - \frac{2}{5}\right| = \left|\frac{15}{35} - \frac{14}{35}\right| = \frac{1}{35}$$

(Skor 15)

3. Alternatif Penyelesaian:

$-5|3x - 7| + 4 = 14$
$-5|3x - 7| = 14 - 4$
$-5|3x - 7| = 10$
$|3x - 7| = -50$

$-50 < 0$, sesuai definisi nilai mutlak, jika $c < 0$ maka persamaan tersebut tidak memiliki penyelesaian.
(Skor 20)

4. Alternatif Penyelesaian:

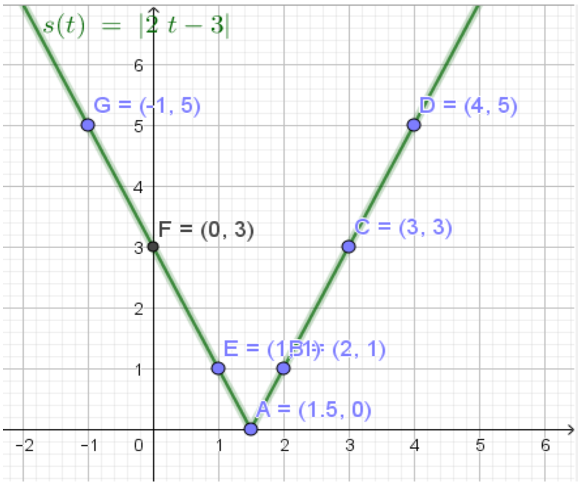
$|k| = k$, untuk setiap k bilangan asli adalah benar. Karena bilangan asli adalah bilangan bulat positif yang dimulai dari angka 1.
(Skor 15)

5. Alternatif Penyelesaian:

(a) Tabel 3. Koordinat titik bantu yang memenuhi fungsi $s(t) = |2t - 3|$, t waktu (dalam minggu)

	t < 0			***t ≥ 0***						
t	...	–2	–1	0	1	2	3	4	5	...
S(t)	...	2	5	0	1	2	3	4	5	...
(t, s(t))	...	(–2,2)	(–1,1)	(0,0)	(1,1)	(2,2)	(3,3)	(4,4)	(5,5)	...

Grafik fungsi $s(t) = |2t - 3|$



(b). Total penjualan album selama 44 minggu pertama:

s(t) = |2t – 3|, t (dalam minggu) = 44
s(44) = |2(44) – 3|
s(44) = |88 – 3|
s(44) = |85| = 85

(Skor 35)

Nilai Latihan soal ini adalah: jumlah semua skor dari setiap nomor

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah Saya telah memahami konsep nilai mutlak?	Ya	Tidak
2	Apakah Saya dapat menerapkan definisi nilai mutlak untuk menentukan variabel dari suatu fungsi nilai mutlak ?	Ya	Tidak
3	Apakah Saya dapat menggambar grafik fungsi nilai mutlak?	Ya	Tidak
4	Apakah Saya dapat menyusun fungsi nilai mutlak dari sebuah soal cerita?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segeralah kalian lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PERSAMAAN NILAI MUTLAK LINEAR SATU VARIABEL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan peserta didik mampu:
1. memahami sifat-sifat suatu persamaan nilai mutlak linear satu variabel,
2. menggunakan sifat-sifat nilai mutlak untuk menyelesaikan persamaan nilai mutlak linear satu variabel,
3. melakukan operasi aljabar yang melibatkan persamaan nilai mutlak linear satu variabel serta penggunaannya untuk menyelesaikan masalah kontekstual dalam kehidupan sehari-hari dengan terampil.

B. Uraian Materi

1. Sifat-sifat Nilai Mutlak

Peserta didik sekalian, apakah kalian masih penasaran dengan penggunaan fungsi nilai mutlak? Apakah kalian tertarik untuk memahami lebih lanjut tentang fungsi nilai mutlak? Baiklah kita akan melanjutkan kegiatan pembelajaran dengan membahas tentang sifat-sifat fungsi nilai mutlak. Ada dua macam penerapan fungsi nilai mutlak linear satu variabel, yaitu persamaaan dana pertidaksamaan. Kali ini kita akan membahas tentang sifat-sifat nilai mutlak linear satu variabel yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan nilai mutlak linear satu variabel. Selain dari definisi nilai mutlak yang sudah kalian pelajari sebelumnya, terdapat beberapa sifat nilai mutlak yang sering digunakan dalam menyelesaikan masalah yang melibatkan persamaan nilai mutlak linear satu variabel ialah sebagai berikut.

sifat nilai mutlak yang melibatkan persamaan nilai mutlak linear satu variabel

1. $|x| = \sqrt{x^2}$
2. $|a.b| = |a|.\,|b|$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0$

Selain sifat-sifat di atas, ada hal lain yang perlu kalian ketahui pada bentuk persamaan nilai mutlak linear satu variabel, yaitu persamaan tersebut dapat diperoleh dari persamaan atau fungsi nilai mutlak yang diberikan. Misalnya, jika diketahui $|ax + b| = c$, untuk $a, b, c \in R$, maka menurut definisi nilai mutlak diperoleh persamaan $ax + b = c$ atau $ax + b = -c$.
Untuk lebih jelasnya bagaimana menerapkan sifat-sifat di atas, marilah mencermati contoh soal berikut.

Contoh 1.
Berdasarkan salah satu sifat nilai mutlak, selesaikanlah persamaan nilai mutlak linear satu variabel $|2x - 1| = 7$.

Alternatif Penyelesaian:
Berdasarkan sifat (1) maka:

$\sqrt{(2x-1)^2} = 7$
$(\sqrt{(2x-1)^2})^2 = 7^2$
$(2x-1)^2 = 7^2$
$4x^2 - 4x + 1 = 49$
$4x^2 - 4x - 48 = 0$

Semua ruas dibagi 4, diperoleh:

$x^2 - x - 12 = 0$, faktorkan persamaan kuadrat di ruas kiri
$(x - 4)(x + 3) = 0$, diperoleh
$x = 4$ atau $x = -3$

Jadi penyelesaiannya adalah $x = 4$ atau $x = -3$

Nah, mudah bukan? Ternyata penerapan salah satu sifat nilai mutlak tidak terlalu sulit ya. Tentu kalian dapat mencermati bahwa untuk menyelesaikan soal ini kemampuan pra syarat yang harus kalian kuasai adalah kemampuan operasi dasar perhitungan dan pemfaktoran persamaan kuadrat. Bagaimana, apakah masih diperlukan contoh soal lain untuk memperjelas pemahaman kalian? Baiklah, silahkan cermati contoh soal berikut.

Contoh 2.
Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $|2x - 1| = |x + 3|$.

Alternatif Penyelesaian:

$\sqrt{(2x-1)^2} = \sqrt{(x+3)^2}$
$(\sqrt{(2x-1)^2})^2 = (\sqrt{(x+3)^2})^2$
$(2x-1)^2 = (x+3)^2$
$4x^2 - 4x + 1 = x^2 + 6x + 9$
$x^2 - 10x - 8 = 0$, faktorkan persamaan kuadrat di ruas kiri
$(x - 4)(3x + 2) = 0$, diperoleh
$x = 4$ atau $x = -2/3$

Jadi penyelesaiannya adalah $x = 4$ atau $x = -2/3$

Bagaimana dengan contoh kedua ini? Pasti kalian sudah lebih memahami penggunaan sifat-sifat nilai mutlak untu menyelesaikan persamaan nilai mutlak linear satu variabel ya. Jika pun kalian belum memahami dengan baik, jangan ragu untuk mengulang kembali materi yang telah dipelajari sampai kalian betul-betul memahami dengan baik.

2. Penerapan Persamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

Peserta didik sekalian, tahukah kalian bahwa persamaan nilai mutlak sangat banyak manfaat dan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari. Tentu saja penerapannya harus menggunakan sifat-sifat nilai mutlak yang akan membantu menyelesaikan persamaan nilai mutlak linear satu variabel. Jadi sebelum kalian menggunakan persamaan nilai mutlak linear satu variabel untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari, kalian harus memahami sifat-sifat nilai mutlak. Nah, bagaimana penerapan persamaan nilai mutlak linear satu variabel dalam kehidupan sehari-hari? Marilah mencermati contoh berikut.

Contoh 3.

Waktu rata-rata yang diperlukan seorang siswa untuk menyelesaikan soal-soal matematika adalah 3 menit. Catatan waktu pengerjaan siswa lebih cepat atau lebih lambat 1 menit dari waktu rata-rata. Tulislah sebuah persamaan untuk menampilkan situasi ini, kemudian selesaikan persamaan itu untuk menentukan waktu tercepat dan waktu terlamanya.

Gambar 3. Ilustrasi Siswa Belajar
(Sumber: https://cerdasnurani.com/ppdb/cerdas-nurani-batujajar/waktu-jam-belajar-2/)

Alternatif Penyelasaian:

Misalkan catatan waktu pengerjaan siswa adalah x menit. Karena catatan waktu siswa bisa lebih cepat atau lebih lambat 1 menit dari waktu rata-rata, yaitu 3 menit, dan lamanya waktu itu tidak mungkin bernilai negatif, maka model dalam bentuk persamaan nilai mutlak adalah:

$|x - 3| = 1$.

Untuk menentukan waktu tercepat dan waktu terlama, kita tinggal menyelesaikan persamaan nilai mutlak tersebut. Kuadratkan kedua ruas dari persamaan $|x - 3| = 1$ untuk menghilangkan tanda nilai mutlak, sehingga diperoleh

$|x - 3| = 1$

$(x - 3)^2 = 1^2$

$x^2 - 6x + 9 = 1$

$x^2 - 6x + 9 - 1 = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x - 2)(x - 4) = 0$

$x - 2 = 0$ atau $x - 4 = 0$

$x = 2 \qquad\qquad x = 4$

Dengan menguji setiap nilai x ke dalam persamaan $|x - 3| = 1$, maka:

untuk $x = 2$

$|x - 3| = 1$

$|2 - 3| = 1$

$|-1| = 1$

$1 = 1$ (benar)

untuk $x = 4$

$|x - 3| = 1$

$|4 - 3| = 1$

$|1| = 1$

$1 = 1$ (benar)

Jadi catatan waktu tercepat siswa dalam mengerjakan soal adalah 2 menit dan waktu terlama adalah 4 menit. Jika kalian adalah seorang guru, apakah informasi ini penting? Tindakan apakah yang dapat kalian lakukan dengan informasi tersebut untuk meningkatkan prestasi siswa?

Contoh 4.

Gambar 4. Ilustrasi Jarak
(Sumber: https://blog.ruangguru.com/menyelesaikan-persamaan -linear-mutlak)

Sepulang sekolah, Rogu ingin ke rumah Rangga. Namun ia juga ingin membeli buku. Tapi, Rogu lupa letak toko bukunya. Ia hanya tahu bahwa ada toko buku di sekitar rumahnya. Padahal jika toko bukunya lebih dekat dari rumah Rangga, Rogu pasti memilih membeli buku terlebih dahulu. Rogu ingat, sewaktu jam istirahat, Rangga bercerita bahwa jarak sekolah ke rumahnya adalah 5 km. Rangga juga memberi tahukan bahwa memang ada toko buku pada jarak 1 km dari rumahnya. Tapi di mana tepatnya letak toko buku itu bila dihitung dari sekolah?

Alternatif Penyelesaiannya:

Misalkan jarak toko buku dari sekolah adalah x, maka persamaan linear mutlaknya yaitu:

$$|x - 5| = 1$$
$$(x - 5)^2 = 1^2$$
$$x^2 - 10x + 25 = 1$$
$$x^2 - 10x + 25 - 1 = 0$$
$$x^2 - 10x + 24 = 0$$
$$(x - 6)(x - 4) = 0$$
$$x = 6 \quad \text{atau} \quad x = 4$$

Jadi, ada dua kemungkinan letak toko buku. Pertama yaitu 6 km dari sekolah Rogu dan yang kedua yaitu 4 km dari sekolahnya. Jika kalian sebagai Rogu, apa yang akan kalian lakukan? Mengapa?

Apakah kalian semakin memahami materi ini? Dapatkah kalian membuat penerapan materi ini dalam permasalahan lain selain dari dua contoh di atas? Jika kalian masih kesulitan untuk membuatnya cobalah mengulang kembali mempelajari materi di atas. Jangan mudah menyerah dan putus asa, tetap semangat.

C. Rangkuman

1. Sifat-sifat nilai mutlak yang melibatkan persamaan nilai mutlak linear satu variabel adalah sebagai berikut.
   i. $|x| = \sqrt{x^2}$
   ii. $|a.b| = |a|.\,|b|$
   iii. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0$
2. Persamaan linear satu variabel dapat diperoleh dari persamaan atau fungsi nilai mutlak yang diberikan. Misalnya, jika diketahui $|ax + b| = c$, untuk $a, b, c \in R$, maka menurut definisi nilai mutlak diperoleh persamaan $ax + b = c$ atau $ax + b = -c$.
3. Penyelesaian persamaan nilai mutlak $|ax + b| = c$ ada, jika $c \geq 0$.

D. Latihan Soal

Soal Pilihan Ganda

1. Jika $|x|=2$, maka nilai x yang memenuhi adalah… .
   A. 1 atau 2
   B. −1 atau 2
   C. −2 atau 2
   D. −2
   E. 2

2. Himpunan penyelesaian dari $|2x + 3| = 9$ adalah… .
   A. {−6, 3}
   B. {−3, 3}
   C. {−3, 6}
   D. {2, 3}
   E. {−3, 2}

3. Jika $|x + 1| + 2x = 7$, maka nilai x yang memenuhi adalah … .
   A. {-1, 4}
   B. {-4, 1}
   C. {-4, -1}
   D. {4, 1}
   E. {4, -1}

4. Nilai x yang memenuhi persamaan $|2x-6| = -2$ adalah… .
   A. 2
   B. 2 atau 4
   C. −2 atau 4
   D. 4
   E. tidak ada yang memenuhi.

5. Himpunan penyelesaian dari $|4x - 2| = |x + 7|$ adalah… .
   A. {−3,1}
   B. {− 2, 7}
   C. {−1,3}
   D. {−1,5}
   E. {−5,−1}

6. Nilai x yang memenuhi $|3x - 6| - |x + 2| = 0$ adalah… .
   A. 2 atau 3
   B. 1 atau 4
   C. 2 atau 4
   D. 1 atau 3
   E. 1 atau 2

7. Himpunan penyelesaian dari $\left|\frac{x+7}{2x-1}\right| = 2$ adalah… .
   A. $\{-1,0\}$
   B. $\{-1,3\}$
   C. $\{1,3\}$
   D. $\{2,3\}$
   E. $\{-1,-3\}$

8. Tentukan nilai *x* yang yang memenuhi persamaan $|2x - 5| = 3 + 2\,|7 - x|$.
   A. 11/2
   B. – 3/2
   C. – 11/2
   D. 7/2
   E. 3/2

9. Perhatikan gambar 5 berikut.

Gambar 5. Ilustrasi Jarak Minimarket
(Sumber: https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-soal-cerita-nilai-mutlak/)

   Sebuah perusahaan sudah mendirikan minimarket A di kilometer ke-20 pada suatu jalan dan minimarket B di kilometer ke-50 pada jalan yang sama. Perusahaan tersebut ingin mendirikan sebuah minimarket lagi di jalan tersebut. Jika perusahaan menginginkan minimarket yang baru memiliki jarak lebih dari 20 km terhitung dari minimarket B, pada kilometer berapakah minimarket yang baru mungkin didirikan?
   A. Lebih dari km-70.
   B. Kurang dari km-30.
   C. Kurang dari km-20 atau lebih dari km-70.
   D. Kurang dari km-30 atau lebih dari km-70.
   E. Antara km-30 dan km-70.

10. Ketinggian normal permukaan air Sungai Bengawan adalah 120 cm. Ketinggian permukaan air Sungai Bengawan dapat berubah-ubah pada musim kemarau atau musim penghujan. Jika penyimpangan ketinggian permukaan air sungai tersebut kurang dari 11 cm, maka interval ketinggian Sungai Bengawan adalah… .
    A. kurang dari 109 cm
    B. lebih dari 120 cm
    C. lebih dari 131 cm
    D. antara 109 cm dan 131 cm
    E. antara 109 cm dan 120 cm

Kunci dan Pembahasan

Kunci Latihan Soal Pilihan Ganda

1. C
2. A
3. B
4. E
5. C
6. B
7. B
8. A
9. D
10. D

Pembahasan

1. Alternatif Penyelesaian:
   $|x|=2$, sesuai definisi nilai mutlak maka diperoleh:
   Untuk $x \geq 0$, maka $x = 2$
   Untuk $x < 0$, maka $-x = 2$ atau $x = -2$
   Jadi nilai x yang memenuhi adalah 2 atau -2.

2. Alternatif Penyelesaian:
   $|2x + 3| = 9$, sesuai definisi nilai mutlak maka diperoleh:
   Untuk $x \geq 0$, maka $2x + 3 = 9$
   $2x = 9 - 3$
   $2x = 6$
   $x = 3$
   Untuk $x < 0$, maka $-(2x + 3) = 9$
   $-2x - 3 = 9$
   $-2x = 9 + 3$
   $-2x = 12$
   $x = -6$
   Jadi nilai x yang memenuhi adalah 2 atau -6.

3. Alternatif Penyelesaian:
   Pada bentuk ini ada dua penyelesaian.
   (*) $2x + 3 = 5$
   $2x = 5 - 3$
   $2x = 2 \iff x = 1$

   (**) $2x + 3 = -5$
   $2x = -5 - 3$
   $2x = -8 \iff x = -4$
   Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-4, 1\}$

4. Alternatif Penyelesaian:
   Sesuai definisi, terdapat nilai x yang memenuhi persamaan nilai mutlak jika $c \geq 0$, karena $c = -2 < 0$, maka tidak ada nilai x yang memenuhi persamaan $|2x-6| = -2$.

5. Alternatif Penyelesaian:
   Untuk menyelesaikan persamaan diatas, menggunakan dua kemungkinan peyelesaian yaitu:
   (i) $4x - 2 = x + 7$
   $x = 3$

   (ii) $4x - 2 = -(x + 7)$
   $x = -1$
   Jadi penyelesian persamaan $|4x - 2| = |x + 7|$ adalah $x = 3$ atau $x = -1$

6. Alternatif Penyelesaian:
   $|3x - 6| - |x + 2| = 0$
   $|3x - 6| = |x + 2|$
   $(3x - 6)^2 = (x + 2)^2$
   $9x^2 - 36x + 36 = x^2 + 4x + 4$
   $8x^2 - 40x + 32 = 0$ (masing – masing ruas dibagi 8)
   $x^2 - 5x + 4 = 0$
   $(x - 4)(x - 1) = 0$
   $x = 4$ atau $x = 1$
   Jadi nilai x yang memenuhi $|3x - 6| - |x + 2| = 0$ adalah $x = 4$ atau $x = 1$

7. Alternatif Penyelesaian:
   $\left|\frac{x+7}{2x-1}\right| = 2$ Berdasarkan sifat-sifat pertidaksamaan nilai mutlak diperoleh
   $\frac{|x+7|}{|2x-1|} = 2$
   $|x + 7| = 2\,|2x - 1|$
   $|x + 7| = |4x - 2|$
   $(x + 7)^2 = (4x - 2)^2$
   $x^2 + 14x + 49 = 16x^2 - 16x + 4$
   $15x^2 - 30x - 45 = 0$ (masing-masing ruas dibagi 15)
   $x^2 - 2x - 3 = 0$
   $(x - 3)(x + 1) = 0$
   $x = 3$ atau $x = -1$
   Jadi himpunan penyelesaian dari $\left|\frac{x+7}{2x-1}\right| = 2$ adalah $\{-1, 3\}$

8. Alternatif Penyelesaian:
   $|2x + 5| = 3 + 2|7-x|$
   $(2x - 5)^2 = (3 + 2[7 - x])^2$
   $(4x^2 - 20x + 25) = (9 + 12[7 - x] + 4[49 - 14x + x^2])$
   $(4x^2 - 20x + 25) = (9 + [84 - 12x] + [196 - 56x + 4x^2])$
   $(4x^2 - 20x + 25) = (289 - 68x + 4x^2)$
   $0x^2 + 48x + 264 = 0$
   $12(4x - 22) = 0$
   $x = 11/2$

9. Alternatif Penyelesaian:
   Diketahui minimarket B terletak pada km-50. Misalkan x menyatakan letak minimarket baru pada jalan tersebut. Karena minimarket ini dibangun dalam jarak lebih dari 20 km terhitung dari minimarket B, maka kita peroleh pertidaksamaan nilai mutlak:
   $|x-50| > 20$.
   Berdasarkan sifat pertidaksamaan nilai mutlak, diperoleh $x-50 > 20 \Leftrightarrow x > 70$ atau $x-50 < -20 \Leftrightarrow x < 30$.

Jadi, minimarket baru tersebut dapat dibangun di jalan dengan letak kurang dari km-30 atau lebih dari km-70.

10. Alternatif Penyelesaian:
    Diketahui ketinggian normalnya 120 cm dan penyimpangan ketinggian kurang dari 11 cm. Misalkan x menyatakan ketinggian air yang mungkin tercapai dalam satuan cm. Kita peroleh pertidaksamaan nilai mutlak:
    $|x-120| < 11$
    Berdasarkan sifat pertidaksamaan nilai mutlak, $-11 < x-120 < 11$ Tambahkan 120 pada ketiga ruas sehingga menjadi: $109 < x < 131$. Jadi, interval ketinggian air di Sungai Bengawan adalah antara 109 cm dan 131 cm.

Nilai Latihan soal ini adalah: $\frac{\textit{Jumlah jawaban benar}}{10} x\ 100$

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah Saya telah memahami sifat-sifat nilai mutlak?	Ya	Tidak
2	Apakah Saya dapat menerapkan sifat-sifat nilai mutlak untuk menyelesaikan persamaan linear nilai mutlak satu variabel?	Ya	Tidak
3	Apakah Saya dapat menyusun persamaan linear nilai mutlak satu variabel dari sebuah soal cerita?	Ya	Tidak
4	Apakah Saya dapat menyelesaikan persamaan linear nilai mutlak satu variabel dari sebuah soal cerita?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segeralah kalian lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak".

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK LINEAR SATU VARIABEL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan peserta didik mampu:
1. memahami sifat-sifat suatu pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel,
2. menggunakan sifat-sifat nilai mutlak untuk menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel,
3. melakukan operasi aljabar yang melibatkan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel serta penggunaannya untuk menyelesaikan masalah kontekstual dalam kehidupan sehari-hari dengan terampil.

B. Uraian Materi

1. Sifat-sifat Nilai Mutlak

Peserta didik sekalian, jika di kegiatan pembelajaran 2 kalian telah mempelajari sifat-sifat persamaan nilai mutlak linear satu variabel dan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari, maka pada kegiatan pembelajaran 3 kali ini kita akan mempelajari sifat-sifat pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel dan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari. Pasti kalian penasaran bukan? Baiklah, kali ini kita akan membahas tentang sifat-sifat nilai mutlak linear satu variabel yang sering digunakan untuk menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel. Selain dari definisi nilai mutlak yang sudah kalian pelajari sebelumnya, terdapat beberapa sifat nilai mutlak yang sering digunakan dalam menyelesaikan masalah yang melibatkan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel ialah sebagai berikut.

sifat nilai mutlak yang melibatkan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel

Untuk setiap a, b, x bilangan real, berlaku:

2. Jika $a \geq 0$ dan $|x| \leq a$, maka $-a \leq x \leq a$.
3. Jika $a < 0$ dan $|x| \leq a$, maka tidak ada bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan.
4. Jika $|x| \geq a$, dan $a > 0$ maka $x \geq a$ atau $x \leq -a$.
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$ dan $|a - b| \geq |a| - |b|$

Selain sifat-sifat di atas, ada hal lain yang perlu kalian ketahui pada bentuk pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel, yaitu pertidaksamaan tersebut dapat diperoleh dari persamaan atau fungsi nilai mutlak yang diberikan. Untuk lebih jelasnya bagaimana menerapkan sifat-sifat di atas, marilah mencermati contoh soal berikut.

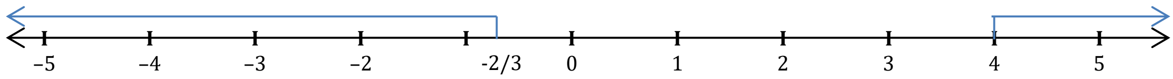
Contoh 1:
Berdasarkan salah satu sifat nilai mutlak, selesaikanlah persamaan nilai mutlak linear satu variabel $|2x - 1| < 7$.

Alternatif Penyelesaian:
Berdasarkan sifat (1) maka:
$-7 < (2x - 1) < 7$
$-7 + 1 < 2x < 7 + 1$
$-6 < 2x < 8$ Semua ruas dibagi 2, diperoleh:
$-3 < x < 4$
Jadi penyelesaiannya adalah
$-3 < x < 4$

Nah, mudah bukan? Ternyata penerapan salah satu sifat nilai mutlak tidak terlalu sulit ya. Tentu kalian dapat mencermati bahwa untuk menyelesaikan soal ini kemampuan pra syarat yang harus kalian kuasai adalah kemampuan operasi dasar perhitungan. Bagaimana, apakah masih diperlukan contoh soal lain untuk memperjelas pemahaman kalian? Baiklah, silahkan cermati contoh soal berikut.

Contoh 2:
Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $|2x - 1| \geq |x + 3|$.

Alternatif Penyelesaian:
$\sqrt{(2x-1)^2} \geq \sqrt{(x+3)^2}$
$(\sqrt{(2x-1)^2})^2 \geq (\sqrt{(x+3)^2})^2$
$(2x-1)^2 \geq (x+3)^2$
$4x^2 - 4x + 1 \geq x^2 + 6x + 9$
$x^2 - 10x - 8 \geq 0$, faktorkan persamaan kuadrat di ruas kiri, tentukan pembuat nol nya
$(x - 4)(3x + 2) = 0$, diperoleh
$x = 4$ atau $x = -2/3$



Gambar 6. Garis Bilangan
(Sumber: Dokumentasi Pribadi)

Dari garis bilangan diperoleh interval nilai x yang memenuhi adalah: $x \leq -2/3$ atau $x \geq 4$.

Bagaimana dengan contoh kedua ini? Pasti kalian sudah lebih memahami penggunaan sifat-sifat nilai mutlak untu menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel ya. Jika pun kalian belum memahami dengan baik, jangan ragu untuk mengulang kembali materi yang telah dipelajari sampai kalian betul-betul memahami dengan baik.

2. Penerapan Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

Peserta didik sekalian, tahukah kalian bahwa selain persamaan nilai mutlak, pertidaksamaan nilai mutlak juga sangat banyak manfaat dan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari. Jangan lupa penerapannya harus menggunakan sifat-sifat nilai mutlak yang akan membantu menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel. Jadi sebelum kalian menggunakan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari, kalian harus memahami sifat-sifat nilai mutlak. Nah, bagaimana penerapan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel dalam kehidupan sehari-hari? Marilah mencermati contoh berikut.

Contoh 1:

Gambar 3. Ilustrasi Mobil
(Sumber: https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/20/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-nilai-mutlak/)

Pada mobil-mobil baru, angka kilometer per liternya tergantung pada bagaimana mobil itu digunakan, apakah sering digunakan untuk perjalanan jarak jauh ataukah hanya untuk perjalanan jarak dekat (dalam kota). Untuk suatu merek mobil tertentu, angka kilometer per liternya berkisar di angka 2,8 kurang atau lebihnya dari 12 km/L. Berapakah jangkauan dari angka km/L dari mobil tersebut?

Alternatif Penyelasaian:

Misalkan m adalah angka km/L dari mobil tersebut. Maka, selisih m dan 12 tidak boleh lebih dari 2,8, atau dapat dituliskan ke dalam $|m - 12| \leq 2{,}8$.

$$|m - 12| \leq 2{,}8$$
$$\Leftrightarrow \quad -2{,}8 \leq m - 12 \leq 2{,}8$$
$$9{,}2 \leq m \leq 14{,}8$$

Sehingga jangkauan dari angka km/L mobil tersebut adalah dari angka 9,2 km/L sampai 14,8 km/L. Jika kalian akan membeli mobil baru, apakah informasi tersebut penting untuk diketahui? Mengapa?

Contoh 2:

Gambar 4. Ilustrasi Ikan di Teluk
(Sumber: https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/20/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-nilai-mutlak/)

Terdapat aturan untuk memancing ikan di sebuah Teluk di kota K. Untuk menjaga kelestarian di sekitar teluk, dianjurkan memancing di laut dengan kedalaman optimal (d)

pada saat menangkap jenis ikan tertentu memenuhi pertidaksamaan $8|d - 150| - 432 < 0$ (dalam meter). Tentukan jangkauan kedalaman yang dianjurkan untuk menangkap jenis ikan tersebut. Jawablah dengan pertidaksamaan yang sederhana.

Alternatif Penyelesaiannya:

Diketahui pertidaksamaan $8|d - 150| - 432 < 0$ dengan d adalah kedalaman optimal(dalam meter). Sehingga,

$8|d - 150| - 432 < 0$

$\Leftrightarrow 8|d - 150| < 432$ (masing-masing ruas ditambah 432)

$\Leftrightarrow |d - 150| < 54$ (masing-masing ruas dikali 1/8)

$\Leftrightarrow -54 < d - 150 < 54$

$\Leftrightarrow 96 < d < 204$

Sehingga, kedalaman yang dianjurkan untuk menangkap ikan jenis tersebut adalah di antara 96 meter sampai 204 meter ($96 < d < 204$). Menurut kalian siapakah yang paling membutuhkan informasi ini, nelayan, penduduk di sekitar Teluk, ataukah petugas dari Dinas Kelautan? Mengapa?

C. Rangkuman

Untuk setiap a, b, x bilangan real, berlaku:

i. Jika $a \geq 0$ dan $|x| \leq a$, maka $-a \leq x \leq a$.
ii. Jika $a < 0$ dan $|x| \leq a$, maka tidak ada bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan.
iii. Jika $|x| \geq a$, dan $a > 0$ maka $x \geq a$ atau $x \leq -a$.
iv. $|a + b| \leq |a| + |b|$ dan $|a - b| \geq |a| - |b|$

D. Latihan Soal

Soal Essay

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan pertidaksamaan $\frac{|3x + 2|}{4} \leq 1$.
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan pertidaksamaan $\frac{-1}{3}\left|3 + \frac{x}{2}\right| < -2$.
3. Sebuah pabrik membuat silinder mesin mobil dengan lubang berdiameter 7,9 cm. Silinder itu tidak akan memenuhi syarat apabila ukuran diameter lubangnya menyimpang 0,0025 cm atau lebih. Tentukan panjang diameter lubang maksimum dan diameter lubang minimum pada silinder tersebut.
4. Pintu air Manggarai merupakan bagian dari sistem pengendalian banjir di Jakarta. Fungsi pintu air ini adalah mengalihkan air Sungai Ciliwung ke bagian luar Jakarta. Ketinggian air di pintu air Manggarai dipertahankan sampai 750 cm. Akibat pengaruh cuaca, ketinggian air menyimpang lebih dari 80 cm. Tentukan interval perubahan ketinggian air di pintu air Manggarai tersebut.
5. Pada suatu hari, rata-rata kepadatan lalu lintas di suatu perempatan adalah 726 mobil per jam (mpj). Selama jam sibuk kepadatan lalu lintasnya lebih tinggi, sedangkan selama jam longgar kepadatannya lebih rendah. Tentukan jangkauan dari kepadatan lalu lintas di perempatan tersebut jika kepadatannya tidak pernah lebih atau kurang 235 mpj dari rata-rata.

Pembahasan Soal Latihan

1. Alternatif Penyelesaian:

   Untuk menyelesaikan pertidaksamaan $\frac{|3x+2|}{4} \le 1$, kita harus mengisolasi simbol nilai mutlak di satu ruas.

   $$\frac{|3x + 2|}{4} \le 1$$
   $|3x + 2| \le 4$ (masing-masing ruas dikalikan 4)
   $-4 \le (3x + 2) \le 4$ (Sifat pertidaksamaan)
   $-6 \le 3x \le 2$ (masing-masing ruas ditambah (– 2))
   $-2 \le x \le 2/3$ (masing-masing ruas dikalikan 1/3)

   Sehingga, himpunan selesaian dari pertidaksamaan $\frac{|3x+2|}{4} \le 1$ adalah $\{ x \mid -2 \le x \le 2/3, x \in \mathbb{R} \}$. (Skor: 20).

2. Alternatif Penyelesaian:

   Perhatikan bahwa $\frac{-1}{3}\left|3 + \frac{x}{2}\right| < -2$ merupakan pertidaksamaan kurang dari. Tetapi jika kita mengalikan kedua ruas dengan –3, kita harus membalik tanda pertidaksamaannya menjadi lebih dari.

   $$\frac{-1}{3}\left|3 + \frac{x}{2}\right| < -2$$
   $\left|3 + \frac{x}{2}\right| > 6$ (masing-masing ruas dikalikan (– 3))
   $3 + \frac{x}{2} < -6 \quad atau \quad 3 + \frac{x}{2} > 6$ (berdasarkan sifat nilai mutlak)
   $\frac{x}{2} < -9 \quad atau \quad \frac{x}{2} > 3$ (masing-masing ruas ditambah –3)
   $x < -18 \quad atau\ x > 6$

   Sehingga himpunan selesaian dari pertidaksamaan tersebut adalah $\{ x \mid x < -18$ atau $x > 6, x \in \mathbb{R}\}$. (Skor: 20).

3. Alternatif Penyelesaian:

   Pertidaksamaan nilai mutlak yang sesuai dengan permasalahan di atas dengan x sebagai panjang diameter lubang yang diukur adalah $|x-7{,}9| < 0{,}0025$. Dengan menggunakan sifat pertidaksamaan nilai mutlak, diperoleh

   $|x-7{,}9| < 0{,}0025$
   $-0{,}0025 < x-7{,}9 < 0{,}0025$
   $-0{,}0025+7{,}9 < x < 0{,}0025+7{,}9$
   $7{,}8975 < x < 7{,}9025$

   Jadi, panjang diameter lubang maksimum dan diameter lubang minimum pada silinder tersebut berturut-turut adalah 7,9025 cm dan 7,8975 cm. (Skor: 20).

4. Alternatif Penyelesaian:
   Pertidaksamaan nilai mutlak yang sesuai dengan permasalahan di atas dengan x sebagai ketinggian air atas perubahan yang terjadi adalah $|x-750| < 80$. Dengan menggunakan sifat pertidaksamaan nilai mutlak, diperoleh

   $|x - 750| < 80$
   $-80 < x-750 < 80$
   $-80+750 < x < 80+750$

$670 < x < 830$

Jadi, interval perubahan ketinggian air di pintu air Manggarai tersebut adalah di antara 670 cm dan 830 cm. (Skor: 20).

5. Alternatif Penyelesaian:

   Diketahui kepadatan lalu lintas di perempatan tersebut tidak pernah lebih atau kurang 235 mpj dari rata-rata.
   Misalkan v adalah kepadatan lalu lintas di perempatan tersebut, maka selisih v dan 726 harus kurang dari atau sama dengan 235, atau dapat dimodelkan menjadi $|v - 726| \leq 235$.

   $|v - 726| \leq 235$
   $-235 \leq |v - 726| \leq 235$ (sifat pertidaksamaan)
   $491 \leq v \leq 961$ (masing-masing ruas ditambah 726

   Sehingga, jangkauan kepadatan lalu lintas di perempatan tersebut lebih dari atau sama dengan 491 mpj dan kurang dari atau sama dengan 961 mpj. (Skor: 20).

Nilai Latihan soal ini adalah: jumlah semua skor dari setiap nomor

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah Saya telah memahami sifat-sifat nilai mutlak untuk pertidaksamaan linear nilai mutlak satu variabel?	Ya	Tidak
2	Apakah Saya dapat menerapkan sifat-sifat nilai mutlak untuk menyelesaikan pertidaksamaan linear nilai mutlak satu variabel?	Ya	Tidak
3	Apakah Saya dapat menyusun pertidaksamaan linear nilai mutlak satu variabel dari sebuah soal cerita?	Ya	Tidak
4	Apakah Saya dapat menyelesaikan pertidaksamaan linear nilai mutlak satu variabel dari sebuah soal cerita?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segeralah kalian lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling benar.

1. Nilai p yang memenuhi |p|=10 adalah… .
   A. p = −10
   B. p = −5
   C. p = 10
   D. p = 5 atau p = −5
   E. p = 10 atau p = −10

2. Jika |3k|=6|3k|=6, maka nilai kk yang memenuhi adalah… .
   A. k = −2 atau k = 2
   B. k = −3 atau k = 3
   C. k = −6 atau k = 6
   D. k = −2
   E. k = −3

3. Nilai x yang memenuhi persamaan |3x+2| + 4x = 6 adalah… .
   A. $x = \frac{4}{7}$ atau x = 8
   B. $x = \frac{4}{7}$ atau x = −8
   C. $x = -\frac{4}{7}$
   D. $x = \frac{4}{7}$
   E. $x = 8$

4. Nilai-nilai x yang memenuhi pertidaksamaan |x−1| < 2 adalah… .
   A. x ≤ −1
   B. x ≤ 3
   C. x > −1
   D. −3 < x < 1
   E. −1 < x < 3

5. Himpunan semua nilai x yang memenuhi pertidaksamaan |x + 8| − |3x − 4| ≥0 adalah… .
   A. {x| x ≥ −8}
   B. {x| x ≤ $\frac{4}{3}$}
   C. {x| −1 ≤ x ≤ 6}
   D. {x| −8 ≤ x ≤ $\frac{4}{3}$}
   E. {x| x ≤ −1 atau x ≥ 6}

6. Jika 2|x − 1| < |x + 2|, maka nilai-nilai x yang memenuhi adalah… .
   A. −2<x<0−2<x<0
   B. 0 < x < 2
   C. 0 < x < 4
   D. x < 0 atau x > 4
   E. 0 < x < ∞ atau −∞ < x < 4

7. Penyelesaian pertidaksamaan $|\frac{x+3}{x-3}| \leq 1$ adalah… .
   A. x < 3
   B. x < 0
   C. x ≤ 0

D. $x > 1$
E. $x \geq 1$

8. Sungai X memiliki sifat cepat meluap pada musim hujan dan mengering di musim kemarau. Debit air sungai tersebut sebesar 137 m^3/ s pada cuaca normal. Perubahan debit pada cuaca tidak normal adalah 56 m^3/s. Nilai peningkatan minimum debit air sungai tersebut adalah… .
   A. 60 m^3/s
   B. 75 m^3/s
   C. 81 m^3/s
   D. 125 m^3/s
   E. 193 m^3/s

9. Seekor semut berjalan ke kiri dalam arah sumbu-X sepanjang 5 cm, kemudian berbalik arah sejauh 10 cm, lalu semut itu berjalan lagi ke kanan sepanjang 15 cm dan terakhir berbalik arah sepanjang 12 cm. Tentukan jarak total yang ditempuh semut tersebut.
   A. 12
   B. 15
   C. 30
   D. 37
   E. 42

10. Nilai q yang memenuhi $|-6q-200| = 160$ adalah… .
    A. $q = -60$ atau $q = -523$
    B. $q = -60$ atau $q = -623$
    C. $q = -60$ atau $q = 623$
    D. $q = 60$ atau $q = -623$
    E. $q = 60$ atau $q = 623$

11. Himpunan penyelesaian mewakili nilai x yang memenuhi persamaan $|3x-2|-|x-3| = 4 - |x+2|$ adalah… .
    A. $\{-3, -\frac{7}{3}\}$
    B. $\{-\frac{7}{3}, -\frac{7}{5}\}$
    C. $\{-\frac{7}{3}, 3\}$
    D. $\{-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{5}, 3\}$
    E. $\{-3, -\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{5}\}$

12. Pada orang yang terkena demam berdarah (DB), jumlah hemoglobin per milimeter darah berkurang drastis karena dihancurkan oleh virus. Oleh karena itu, penderita demam berdarah harus dirawat di rumah sakit untuk menaikkan dan mempertahankan jumlah trombosit antara 150.000 mm^3 sampai dengan 400.000^3. Dimisalkan rumah sakit memutuskan untik penderita yang sudah positif DB, jumlah trombositnya harus dinaikkan dan dipertahankan sebesar 175.000 mm^3 dalam beberapa hari untuk mengantisipasi timbulnya virus yang lebih ganas. Jika pengaruh psikologi karena perawatan terjadi penyimpangan jumlah trombosit sebesar 10.000 mm^3, tentukan interval perubahan jumlah trombosit untuk mempertahankan kondisi normal.
    A. 185.000 mm^3 sampai 400.000 mm^3.
    B. 175.000 mm^3 sampai 185.000 mm^3.
    C. 165.000 mm^3 sampai 185.000 mm^3.

D. 165.000 mm^3 sampai 175.000 mm^3.
E. 150.000 mm^3 sampai 165.000 mm^3.

13. Berdasarkan aturan resmi dari olahraga golf, bisbol, biliar, dan boling, (a) ukuran bola golf harus tidak lebih dan kurang 0,03 mm dari d = 42,7 mm, (b) ukuran bola bisbol harus tidak lebih dan kurang 1,01 mm dari d = 73,78 mm, (c) ukuran bola biliar harus tidak lebih dan kurang 0,127 mm dari d = 57,15 mm, dan (d) ukuran bola boling harus tidak lebih dan kurang 12,05 mm dari d = 217,105 mm. Tentukan olahraga mana yang memberikan toleransi t (t = interval lebar/diameter rata-rata) yang paling kecil.
A. Bola golf
B. Bola bisbol
C. Bola biliar
D. Bola boling
E. Semua jawaban benar

14. Harga saham sebuah perusahaan yang telah terdaftar di Bursa Efek Indonesia (BFI) bergerak fluktuatif. Hal ini disebabkan perusahaan tersebut melakukan aksi korporasi. Dalam satu minggu hari bursa, harga saham terendah perusahaan itu adalah Rp. 715,00 dan harga saham tertinggi mencapai Rp. 795,00. Misalkan x adalah pergerakan harga saham selama satu minggu tersebut di atas. Fungsi Pergerakan harga saham ini dalam pertidaksamaan nilai mutlak yang memuat variabel x adalah… .
A. $|x-755| \geq 40$
B. $|x-755| \leq 40$
C. $|x-715| \leq 40$
D. $|x-715| \geq 40$
E. $|x-715| = 40$

15. Harga tiket sebuah konser adalah Rp. 750.000,00 dengan besar biaya pertunjukan Rp. 225.000.000,00. Pertunjukan dianggap gagal jika mengalami kerugian lebih dari 15% dan dianggap sukses jika mengalami keuntungan lebih dari 15%. Jika p dimisalkan sebagai banyak tiket yang terjual, bagaimana interval nilai p?
A. 225 sampai 300
B. 225 sampai 345
C. 255 sampai 345
D. 255 sampai 300
E. 300 sampai 345

Kunci Jawaban Evaluasi

1. E
2. A
3. D
4. E
5. D
6. C
7. C
8. C
9. E
10. B
11. B
12. C
13. A
14. B
15. C

Nilai Latihan soal ini adalah: $\frac{\boldsymbol{Jumlah\ jawaban\ benar}}{\mathbf{15}}\ \boldsymbol{x}\ \mathbf{100}$

KRITERIA PINDAH MODUL

Peserta didik dinyatakan memahami modul ini atau dapat berpindah ke modul berikutnya apabila telah memenuhi salah satu persyaratan berikut.

1. Mampu mengerjakan soal latihan secara lengkap, benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, dengan hasil minimal 75%.
2. Mampu mengerjakan evaluasi untuk modul ini dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, dengan hasil minimal 75%.

Peserta didik dinyatakan belum memahami dan menguasai modul ini serta belum dapat berpindah ke modul berikutnya apabila:

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan dengan hasil di bawah 75%.
2. Mengerjakan evaluasi dengan hasil di bawah 75%.

DAFTAR PUSTAKA

Kemendikbud. 2017. *Modul 1: Belanja Cerdas. Matematika Paket C, Setara Kelas X SMA/MA*. Jakarta: Dirjen PAUD dan DIKMAS. Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan.

Sinaga, Bornok, dkk. 2017. Matematika SMA/MA/SMK/MAK Untuk Kelas X. Jakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

https://cerdasnurani.com/ppdb/cerdas-nurani-batujajar/waktu-jam-belajar-2/. 2020. Diakses pada tanggal 12 September 2020.

https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/20/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-nilai-mutlak/ . 2013. Diakses pada tanggal 12 September 2020.

https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-soal-cerita-nilai-mutlak.2019. Diakses pada tanggal 12 September 2020.

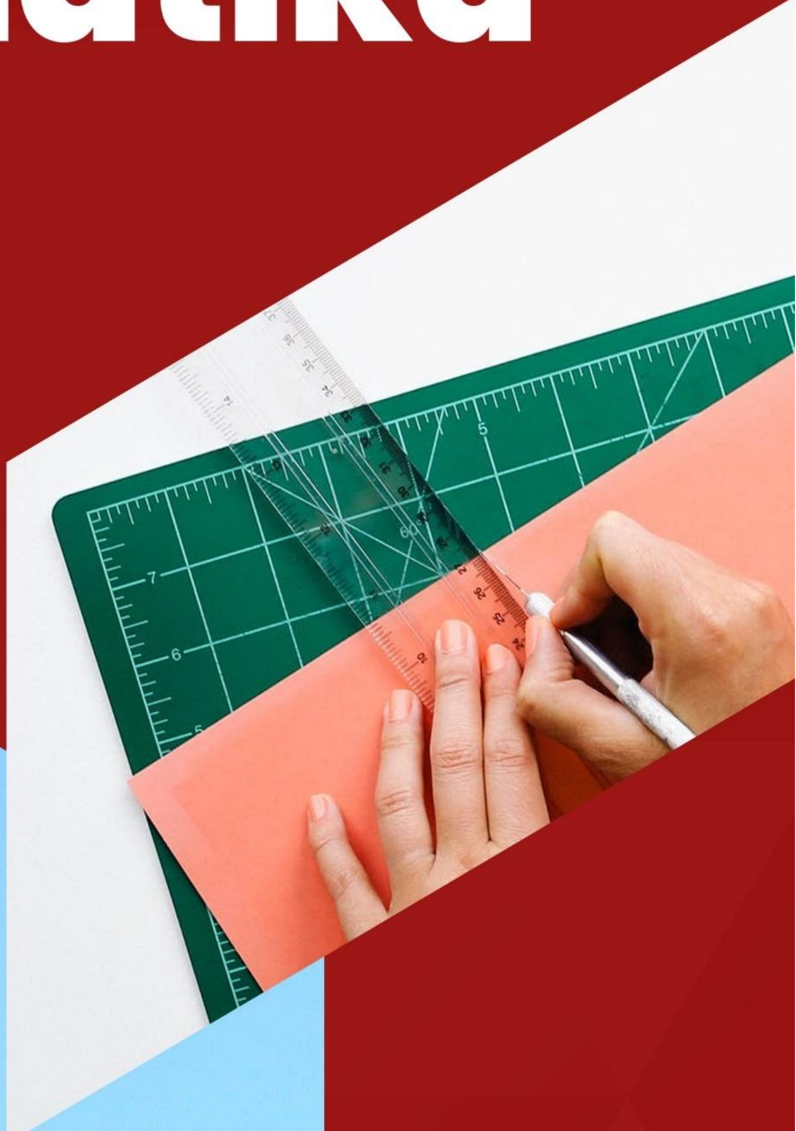
https://blog.ruangguru.com/menyelesaikan-persamaan -linear-mutlak. 2019. Diakses pada tanggal 12 September 2020.

https://brainly.co.id/tugas/22118492 . 2019. Diakses pada tanggal 5 Oktober 2020.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS X

PERTIDAKSAMAAN RASIONAL DAN IRASIONAL
SATU VARIABEL
MATEMATIKA UMUM KELAS X

PENYUSUN

Asmar Achmad, S.Pd

SMA Negeri 17 Makassar

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Irasional : Bentuk akar, merupakan himpunan semua bilangan real yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$.

Pertidaksamaan Kalimat terbuka memuat tanda ketidaksamaan, yaitu $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, dan $\neq$.

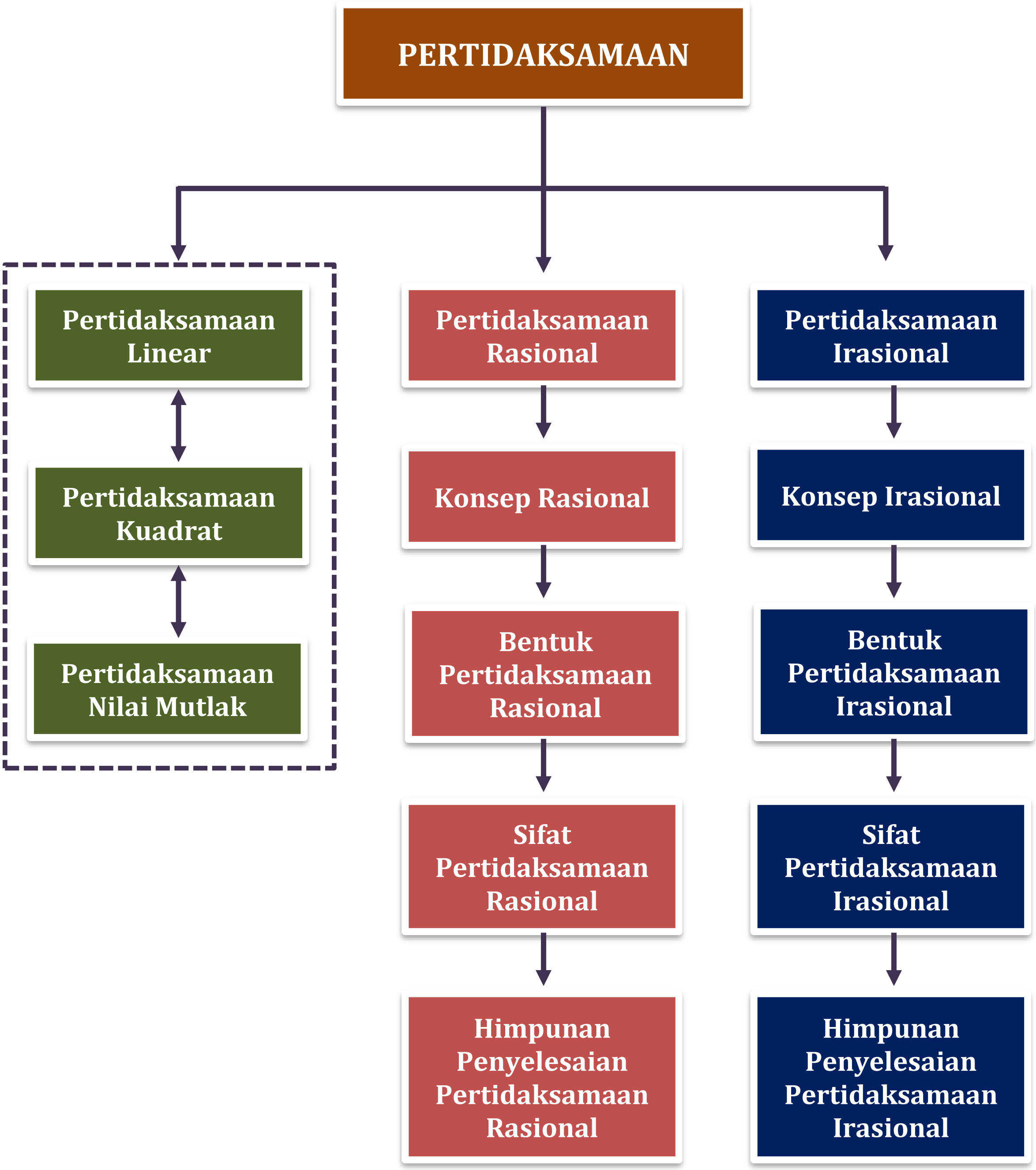
Rasional : Bentuk pecahan, merupakan himpunan semua bilangan real yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ di mana a, b bilangan bulat dan b tidak sama dengan 0.

Titik Kritis : Pembuat nol.

Pertidaksamaan Rasional : Pertidaksamaan berbentuk pecahan dimana pembilang dan menyebutnya mengandung variabel atau penyebutnya saja yang mengandung variabel

Pertidaksamaan Irasional : Pertidaksamaan bentuk akar adalah suatu pertidaksamaan yang mengandung variabel pada bentuk akarnya

PETA KONSEP


PERTIDAKSAMAAN
Pertidaksamaan Linear
Pertidaksamaan Kuadrat
Pertidaksamaan Nilai Mutlak
Pertidaksamaan Rasional
Konsep Rasional
Bentuk Pertidaksamaan Rasional
Sifat Pertidaksamaan Rasional
Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Rasional
Pertidaksamaan Irasional
Konsep Irasional
Bentuk Pertidaksamaan Irasional
Sifat Pertidaksamaan Irasional
Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Irasional

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	X
Alokasi Waktu	:	8 Jam Pelajaran (2 KP)
Judul Modul	:	Pertidaksamaan Rasional dan Irasional Satu Variabel

B. Kompetensi Dasar

3.2 Menjelaskan dan menentukan penyelesaian pertidaksamaan rasional dan irasional satu variabel

4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan rasional dan irasional satu variabel

C. Deskripsi Singkat Materi

Gerak vertikal ke atas adalah gerak benda dengan lintasan berupa garis lurus dalam arah vertikal. Agar dapat bergerak ke atas, benda harus mempunyai kecepatan awal. Kecepatan benda yang bergerak vertikal ke atas berubah secara beraturan. Perubahan tersebut berupa penurunan kecepatan akibat pengaruh gaya gravitasi. Setelah mencapai ketinggian tertentu, yang disebut tinggi maksimum, bola tidak dapat naik lagi. Tinggi maksimum (h) dari benda bergerak ke atas dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$h_{maks} = \frac{{v_o}^2}{2g}$ dengan v_0 adalah kecepatan awal dan g gaya gravitasi bumi.

Misalkan sebuah bola dilemparkan ke atas. Berapa tinggi yang dapat dicapai bola jika kecepatan awal lemparan kurang dari 10 m/s? (g = 10 m/s^2).

Oleh karena kecepatan awal lemparan kurang dari 10 m/s, maka diperoleh:

$$v_o < 10 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2g \times h_{maks}} < 10$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{20 \times h_{maks}} < 10$$

Pertidaksamaan seperti $\sqrt{20 \times h_{maks}} < 10$ merupakan salah satu pertidaksamaan irasional atau bentuk akar.

Sumber: https://www.robinage.com/article-images/1368434240-fitness-throw-catch.jpg

Nah, bagaimana cara menentukan penyelesaian dari pertidaksamaan irasional tersebut? Untuk itu kita akan membahas pada modul ini materi tentang pertidaksamaan rasional dan irasional.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi kalian dalam melakukan kegiatan belajar secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan kalian dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan kalian terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar kalian dapat mengukur penguasaan kalian terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan kalian dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan kalian untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi 2 kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Pertidaksamaan Rasional Satu Variabel (4 JP)

Kedua : Pertidaksamaan Irasional Satu Variabel (4 JP)

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
PERTIDAKSAMAAN RASIONAL SATU VARIABEL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat menjelaskan konsep pertidaksamaan rasional dan menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan rasional, serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan rasional satu variabel.

B. Uraian Materi

Pertidaksamaan rasional adalah pertidaksamaan berbentuk pecahan dimana pembilang dan penyebutnya mengandung variabel atau penyebutnya saja yang mengandung variabel.

Perhatikan beberapa pertidaksamaan berikut, manakah yang merupakan pertidaksamaan rasional?

a. $\frac{x-2}{2x+6}<0$

b. $\frac{2x-4}{5}-\frac{3x+9}{7}\geq 0$

c. $\frac{1}{x+1}>\frac{2}{x-1}$

d. $\frac{x^2-3x-10}{2}\leq\frac{1}{3}$

Pertidaksamaan (a) dan (c) merupakan pertidaksamaan rasional karena penyebutnya mengandung variabel *x*. Pertidaksamaan (b) dan (d) walaupun tampak berbentuk pecahan, tetapi bukan pertidaksamaan rasional karena penyebutnya tidak mengandung variabel. Pertidaksamaan (b) merupakan pertidaksamaan linear dan pertidaksamaan (d) merupakan pertidaksamaan kuadrat.

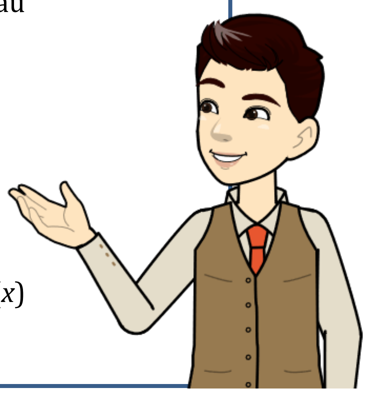
Bentuk Umum Pertidaksamaan Rasional

Bentuk umum dari pertidaksamaan rasional atau pertidaksamaan pecahan adalah:

$\frac{f(x)}{g(x)}<0$ atau $\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0$

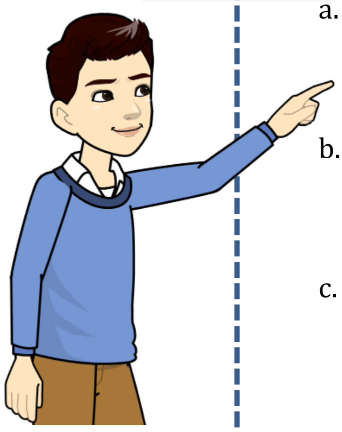
$\frac{f(x)}{g(x)}>0$ atau $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$

dengan $f(x)$ sebagai fungsi pembilang dan $g(x)$ sebagai fungsi penyebut dan $g(x)\neq 0$.



Langkah-langkah menyelesaikan pertidaksamaan rasional sebagai berikut:

1. Buat ruas kanan pertidaksamaan menjadi nol (bentuk umum).
2. Faktorkan fungsi pembilang dan penyebut ke dalam faktor-faktor linear apabila fungsi pembilang atau penyebut berupa polinomial derajat lebih dari 1.
3. Tentukan titik-titik kritis (pembuat nol) pada fungsi pembilang dan penyebut.
4. Gambar letak titik-titik kritis (pembuat nol) fungsi pembilang dan penyebut pada pada garis bilangan, sehingga diperoleh beberapa daerah (interval).
5. Tentukan daerah (interval) bertanda positif dan negatif dengan cara mengambil satu titik di setiap daerah sebagai **titik uji**. Substitusikan titik uji ke pertidaksamaan dan tentukan tandanya saja (apakah + atau –)
6. Tulis tanda-tanda titik uji tersebut pada daerah dimana titik uji berada pada garis bilangan.
7. Daerah yang memenuhi penyelesaian adalah daerah yang memiliki tanda sesuai dengan tanda pertidaksamaannya.



Catatan

a. Jika tanda pertidaksamaan rasional < 0 atau > 0 maka semua titik kritis tidak termasuk penyelesaian, sehingga digambar dengan tanda bulat kosong pada garis bilangan.
b. Jika tanda pertidaksamaan ≤ 0 atau ≥ 0 maka titik kritis yang diperoleh dari fungsi pembilang termasuk penyelesaian, sehingga digambar dengan tanda bulat hitam pada garis bilangan.
c. Ingat fungsi penyebut tidak boleh bernilai 0 ($g(x) \neq 0$), sehingga titik kritis dari penyebut tidak termasuk penyelesaian dan selalu digambar dengan bulatan kosong.

Contoh 1

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{x-1}{x+5} \leq 0$.

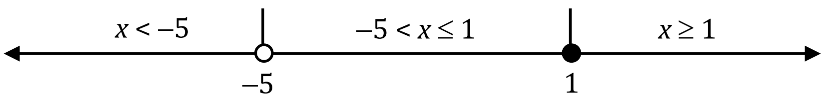
Jawab

Pada soal di atas, ruas kanan pertidaksamaan sudah sama dengan nol. Pembilang dan penyebut sudah dalam bentuk linear, sehingga kita dapat langsung menentukan titik kritis atau pembuat nolnya sebagai berikut.

Titik kritis (pembuat nol):

Pada pembilang: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
Pada penyebut: $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ (ingat, $x = -5$ tidak termasuk penyelesaian).

Selanjutnya kita akan menggambar letak titik kritis (pembuat nol) pada garis bilangan. Ingat, titik kritis yang diperoleh dari penyebut digambar dengan tanda bulat kosong.

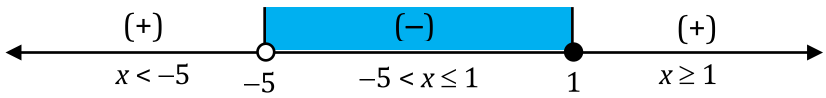


Pada garis bilangan di atas, kita peroleh tiga daerah (interval), yaitu daerah $x < -5$, daerah $-5 < x \leq 1$, dan daerah $x \geq 1$.

Pada masing-masing daerah kita ambil sembarang bilangan sebagai titik uji untuk menentukan tanda dari setiap daerah seperti pada tabel berikut.

Interval	Titik Uji yang diambil	Tanda dari Pembilang $(x-1)$	Tanda dari Penyebut $(x+5)$	Tanda dari $\frac{x-1}{x+5}$
$x < -5$	$x = -6$	$-6 - 1$ $(-)$	$-6 + 5$ $(-)$	$\frac{(-)}{(-)} = (+)$
$-5 < x \le 1$	$x = 0$	$0 - 1$ $(-)$	$0 + 5$ $(+)$	$\frac{(-)}{(+)} = (-)$
$x \ge 1$	$x = 2$	$2 - 1$ $(+)$	$2 + 5$ $(+)$	$\frac{(+)}{(+)} = (+)$

Sehingga diperoleh tanda untuk setiap daerah seperti gambar berikut.



Langkah terakhir adalah menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan dengan memperhatikan tanda pertidaksamaan pada soal.

Pertidaksamaan $\frac{x-1}{x+5} \le 0$ memiliki tanda ≤ 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda negatif atau nol.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid -5 < x \le 1,\ x \in R\}$

Contoh 2

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{2x-6}{x^2-2x-8} > 0$.

Jawab

Pada soal di atas, ruas kanan pertidaksamaan sudah sama dengan nol. Pembilang dalam bentuk linear sedangkan penyebut dalam bentuk kuadrat, sehingga penyebut perlu difaktorkan ke bentuk linear.

$$\frac{2x-6}{x^2-2x-8} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6}{(x+2)(x-4)} > 0$$

Titik kritis (pembuat nol):

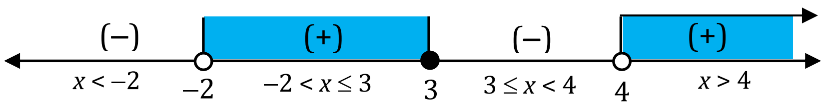
Pada pembilang: $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

Pada penyebut: $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

(ingat, $x = -2$ dan $x = 4$ tidak termasuk penyelesaian).

Gambar letak titik kritis (pembuat nol) pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap daerah (interval)



Pada garis bilangan di atas, kita peroleh empat daerah (interval), yaitu daerah $x < -2$, daerah $-2 < x \leq 3$, daerah $3 \leq x < 3$, dan daerah $x > 4$.

Pengujian tanda setiap daerah pada tabel berikut.

Interval	Titik Uji yang diambil	$(2x - 6)$	$(x + 2)(x - 4)$	$\frac{2x-6}{(x+2)(x-4)}$
$x < -2$	$x = -3$	$(-)$	$(-)(-) = (+)$	$(-)$
$-2 < x \leq 3$	$x = 0$	$(-)$	$(+)(-) = (-)$	$(+)$
$3 \leq x < 4$	$x = 3\frac{1}{2}$	$(+)$	$(+)(-) = (-)$	$(-)$
$x > 4$	$x = 5$	$(+)$	$(+)(+) = (+)$	$(+)$

Pertidaksamaan $\frac{2x-6}{x^2-2x-8} > 0$ memiliki tanda > 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda positif.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid -2 < x \leq 3 \text{ atau } x > 4,\ x \in R\}$

Contoh 3.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{6}{x+3} \leq \frac{2}{x-5}$.

Jawab

Pada soal di atas, ruas kanan pertidaksamaan tidak sama dengan nol, sehingga perlu diubah ke bentuk umum berikut ini.

$$\frac{6}{x+3} \leq \frac{2}{x-5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6}{x+3} - \frac{2}{x-5} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6(x-5)-2(x+3)}{(x+3)(x-5)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6x-30-2x-6}{(x+3)(x-5)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4x-36}{(x+3)(x-5)} \leq 0$$

Titik kritis (pembuat nol):

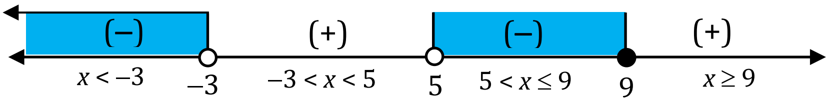
Pada pembilang: $4x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = 9$
Pada penyebut: $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ (tidak termasuk penyelesaian)
$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis (pembuat nol) pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap daerah (interval)

- untuk daerah $x < -3$, ambil $x = -4$ $\Rightarrow \frac{4(-4)-36}{(-4+3)(-4-5)} \Leftrightarrow \frac{(-)}{(-)(-)} = (-)$
- untuk daerah $-3 < x < 5$, ambil $x = 0$ $\Rightarrow \frac{4(0)-36}{(0+3)(0-5)} \Leftrightarrow \frac{(-)}{(+)(-)} = (+)$
- untuk daerah $5 < x \leq 9$, ambil $x = 6$ $\Rightarrow \frac{4(6)-36}{(6+3)(6-5)} \Leftrightarrow \frac{(-)}{(+)(+)} = (-)$

- untuk daerah $x \ge 9$, ambil $x = 10$ $\Rightarrow \dfrac{4(10)-36}{(10+3)(10-5)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)}{(+)(+)} = (+)$

Sehingga diperoleh tanda untuk setiap daerah seperti gambar berikut.



Pertidaksamaan $\dfrac{6}{x+3} \le \dfrac{2}{x-5} \Leftrightarrow \dfrac{4x-36}{(x+3)(x-5)} \le 0$ memiliki tanda ≤ 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda negatif atau nol.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < -3 \text{ atau } 5 < x \le 9,\ x \in R\}$

Catatan

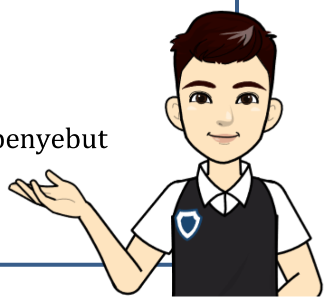
Hal yang **tidak dibenarkan** dalam penyederhanaan bentuk pertidaksamaan rasional karena akan mengubah domain fungsi, yaitu:

1. Perkalian silang ruas kiri dan ruas kanan

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le k \quad \not\equiv \quad f(x) \le k \times g(x)$$

2. Mencoret faktor yang sama pada pembilang dan penyebut

$$\frac{p(x).q(x)}{h(x).q(x)} \le 0 \quad \not\equiv \quad \frac{p(x)}{h(x)} \le 0$$



Pertidaksamaan Rasional yang Memuat Faktor Persekutuan Pembilang dan Penyebut

Apabila terdapat faktor persekutuan pada pembilang dan penyebut dari suatu pertidaksamaan rasional, maka kita tidak boleh menyederhanakan pertidaksamaan tersebut dengan cara mencoret faktor persekutuan itu.

Contoh 4.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\dfrac{x^2+2x-15}{x-3} \ge 0$.

Jawab

Faktorkan pembilang ke faktor linear

$$\frac{x^2+2x-15}{x-3} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+5)}{x-3} \ge 0$$

Pada pertidaksamaan di atas, terdapat faktor persekutuan pada pembilang dan penyebut, yaitu $(x - 3)$. Kita tidak boleh menyederhanakan dengan mencoret faktor persekutuan tersebut.

$$\frac{\cancel{(x-3)}(x+5)}{\cancel{x-3}} \ge 0 \quad \cancel{\Leftrightarrow} \quad (x-5) \ge 0$$

Lalu bagaimana solusinya? Nah, untuk masalah ini kita dapat selesaikan dengan cara mengalikan kedua ruas pertidaksamaan dengan bentuk kuadrat dari faktor persekutuan tersebut, yaitu $(x - 3)^2$ dengan syarat $x \ne 3$.

Bentuk $(x-3)^2$ dimana $x \neq 3$ sudah jelas bernilai positif, sehingga perkalian kedua ruas dengan bentuk $(x-3)^2$ dimana $x \neq 3$ tidak akan mengubah tanda pertidaksamaan.

Sehingga diperoleh:

$$\frac{x^2+2x-15}{x-3} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x-3)(x+5)}{x-3} \geq 0$$

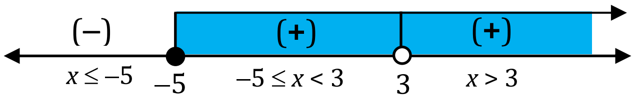
$$\Leftrightarrow\; \frac{(x-3)(x+5)}{x-3} \times (x-3)^2 \geq 0 \times (x-3)^2 \text{, dimana } x \neq 3$$

$$\Leftrightarrow\; (x+5)(x-3)^2 \geq 0 \text{, dimana } x \neq 3$$

Nilai kritis : $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$
$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (ingat, nilai $x = 3$ tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis (pembuat nol) pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap daerah (interval)

- untuk daerah $x \leq -5$, ambil $x = -6$ $\Rightarrow$ $(-6+5)(-6-3)^2 \Leftrightarrow (-).(+) = (-)$
- untuk daerah $-5 \leq x < 3$, ambil $x = 0$ $\Rightarrow$ $(0+5)(0-3)^2 \Leftrightarrow (+).(+) = (+)$
- untuk daerah $x > 3$, ambil $x = 4$ $\Rightarrow$ $(4+5)(4-3)^2 \Leftrightarrow (+).(+) = (+)$



Pertidaksamaan $\frac{x^2+2x-15}{x-3} \geq 0$ memiliki tanda ≥ 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda positif atau nol.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x \geq -5 \text{ dan } x \neq 3,\ x \in R\}$

Pertidaksamaan Rasional yang Memuat Fungsi Definit

Pada materi fungsi kuadrat, kita mengenal ada fungsi yang selalu bernilai positif untuk setiap x bilangan real, disebut **definit positif**. Demikian juga ada fungsi yang selalu bernilai negatif untuk setiap x bilangan real, disebut **definit negatif**.

Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan nilai diskriminan D = $b^2 - 4ac$ dikatakan definit positif jika $a > 0$ dan D < 0. Fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ dikatakan definit negatif jika $a < 0$ dan D < 0.

Nah, jika suatu pertidaksamaan rasional memuat fungsi definit, maka kita dapat menentukan penyelesaiannya dengan menggunakan cara berikut.

Pertidaksamaan rasional memuat fungsi definit

- Fungsi definit positif dalam suatu pertidaksamaan rasional dapat dihilangkan (diabaikan) dan tanda pertidaksamaan tetap.
- Fungsi definit negatif dalam suatu pertidaksamaan rasional dapat dihilangkan (diabaikan) tetapi dengan syarat tanda pertidaksamaan harus dibalik.

Contoh 5.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{x-2}{x^3+2x}<0$.

Jawab

$$\frac{x-2}{x^3+2x}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-2}{x(x^2+2)}<0$$

(x^2 + 2) merupakan fungsi definit positif. Ini dapat dilihat dari nilai a = 1 > 0 dan D = 0^2 – 4(1)(2) = –8 < 0. (Ingat, syarat definit positif adalah a > 0 dan D < 0)

Jadi, (x^2 + 1) dapat dihilangkan dan tanda pertidaksamaan tetap, sehingga diperoleh:

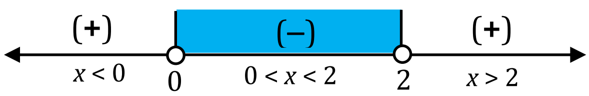
$$\frac{x-2}{x^3+2x}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-2}{x}<0$$

Titik kritis (pembuat nol)

Pada pembilang: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (tidak termasuk penyelesaian karena tanda "<")
Pada penyebut: $x = 0$ (tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap interval:

- untuk daerah $x < 0$, ambil $x = –1$ $\Rightarrow \frac{(-1)-2}{(-1)} \Leftrightarrow \frac{(-)}{(-)}=(+)$
- untuk daerah $0 < x < 2$, ambil $x = 1$ $\Rightarrow \frac{1-2}{1} \Leftrightarrow \frac{(-)}{(+)}=(-)$
- untuk daerah $x > 2$, ambil $x = 3$ $\Rightarrow \frac{3-2}{3} \Leftrightarrow \frac{(+)}{(+)}=(+)$



Pertidaksamaan $\frac{x-2}{x^3+2x}<0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x}<0$ memiliki tanda < 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda negatif.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid 0 < x < 2,\ x \in R\}$.

Contoh 6.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{-x^2+x-1}{x^2-3x-4}\ge 0$.

Jawab

$$\frac{-x^2+x-1}{x^2-3x-4}\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-x^2+x-1}{(x+1)(x-4)}\ge 0$$

($-x^2 + x$ – 1) merupakan fungsi definit negatif. Ini dapat dilihat dari nilai a = –1 < 0 dan D = 1^2 – 4(–1)(–1) = –3 < 0. (Ingat, syarat definit negatif adalah a < 0 dan D < 0)

Jadi, ($-x^2 + x$ – 1) dapat dihilangkan tetapi tanda pertidaksamaan harus dibalik, sehingga diperoleh:

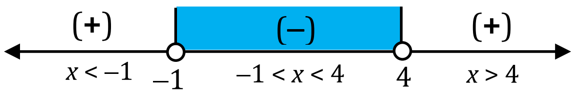
$$\frac{-x^2+x-1}{(x+1)(x-4)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(x+1)(x-4)} \leq 0$$

Titik kritis (pembuat nol)

Pada penyebut: $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (tidak termasuk penyelesaian)
$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap interval:

- untuk daerah $x < -1$, ambil $x = -2$ $\Rightarrow \dfrac{1}{(-2+1)(-2-4)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)}{(-)(-)} = (+)$
- untuk daerah $-1 < x < 4$, ambil $x = 0$ $\Rightarrow \dfrac{1}{(0+1)(0-4)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)}{(+)(-)} = (-)$
- untuk daerah $x > 4$, ambil $x = 5$ $\Rightarrow \dfrac{1}{(5+1)(5-4)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)}{(+)(+)} = (+)$



Pertidaksamaan $\dfrac{-x^2+x-1}{x^2-3x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+1)(x-4)} \leq 0$ memiliki tanda $\leq$ 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda negatif atau nol.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid -1 < x < 4,\ x \in R\}$.

Contoh 7.

Ketika suatu telepon genggam (*handphone*) baru diluncurkan di pasar, penjualan mingguan umumunya meningkat secara cepat dalam suatu periode waktu tertentu. Selanjutnya penjualan mingguan mulai menurun. Misalnya penjualan mingguan telepon genggam tersebut t minggu setelah diluncurkan dinyatakan oleh $P = \dfrac{200t}{t^2+100}$ dengan P dalam ratusan. Kapan penjualan mencapai 800 unit atau lebih per minggu?

Jawab

Banyak penjualan per minggu adalah $P = \dfrac{200t}{t^2+100}$ dengan P dalam ratusan.

Penjualan mencapai 800 unit atau lebih per minggu, berarti diperoleh pertidaksamaan:

$$P \geq 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{200t}{t^2+100} \geq 8$$

Interval waktu penjualan mencapai 800 unit atau lebih per minggu dapat diperoleh dengan mencari himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\dfrac{200t}{t^2+100} \geq 8$.

$$\frac{200t}{t^2+100} \geq 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{200t}{t^2+100} - 8 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{200t - 8(t^2+100)}{t^2+100} \geq 0 \qquad \text{.............. (samakan penyebut)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-8t^2+200t-800}{t^2+100} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-t^2+25t-100}{t^2+100} \geq 0 \quad \text{......... (kedua ruas dikali } \frac{1}{8}\text{)}$$

(t^2 + 100) merupakan fungsi definit positif. Ini dapat dilihat dari nilai a = 1 > 0 dan D = 0^2 – 4(1)(100) = –400 < 0. (Ingat, syarat definit positif adalah a > 0 dan D < 0)

Jadi, (t^2 + 1) dapat dihilangkan dan tanda pertidaksamaan tetap, sehingga diperoleh:

$$\frac{-t^2+25t-100}{t^2+100} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -t^2+25t-100 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2-25t+100 \leq 0 \quad \text{........ kedua ruas dikali } (-1)$$

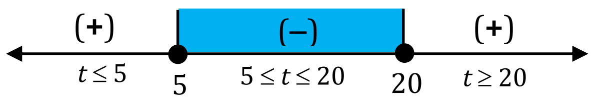
$$\Leftrightarrow \quad (t-5)(t-20) \leq 0$$

Titik kritis (pembuat nol)

$t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 5$
$t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = 20$

Gambar letak titik kritis pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap interval:

- untuk daerah $t \leq 5$, ambil t = 4 $\Rightarrow$ $(4-5)(4-20) \Leftrightarrow (-)(-) = (+)$
- untuk daerah $5 \leq t < 20$, ambil t = 6 $\Rightarrow$ $(6-5)(6-20) \Leftrightarrow (+)(-) = (-)$
- untuk daerah $t \geq 20$, ambil t = 21 $\Rightarrow$ $(21-5)(21-20) \Leftrightarrow (+)(+) = (+)$



Pertidaksamaan $(t-5)(t-20) \leq 0$ memiliki tanda ≤ 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda negatif atau nol, yaitu $5 \leq t < 20$.

Jadi, penjualan telepon genggam mencapai 800 unit atau lebih setelah diluncurkan di pasar antara 5 minggu sampai 20 minggu.

C. Rangkuman

- Pertidaksamaan rasional adalah pertidaksamaan berbentuk pecahan dimana pembilang dan menyebutnya mengandung variabel atau penyebutnya saja yang mengandung variabel.
- Bentuk umum dari pertidaksamaan rasional atau pertidaksamaan pecahan adalah:

  $$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \text{ atau } \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

  $$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ atau } \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

  dengan $f(x)$ sebagai fungsi pembilang dan g(x) sebagai fungsi penyebut dan g(x)$\neq$ 0.
- Hal yang tidak dibenarkan dalam penyederhanaan bentuk pertidaksamaan rasional karena akan mengubah domain fungsi, yaitu:

a. Perkalian silang ruas kiri dan ruas kanan

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq k \quad \not\equiv \quad f(x) \leq k \times g(x)$$

b. Mencoret faktor yang sama pada pembilang dan penyebut

$$\frac{p(x).q(x)}{h(x).q(x)} \leq 0 \quad \not\equiv \quad \frac{p(x)}{h(x)} \leq 0$$

- Pertidaksamaan rasional yang memuat fungsi definit dapat diselesaikan dengan cara:
  a. Fungsi definit positif dapat dihilangkan dan tanda pertidaksamaan tetap.
  b. Fungsi definit negatif dapat dihilangkan tetapi dengan syarat tanda pertidaksamaan harus dibalik.

D. Latihan Soal

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut:

1. $\frac{x+1}{x-2} > 0$
2. $\frac{2x-7}{x-5} \leq 3$
3. $\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2x+1}$
4. $\frac{x^2-3x+2}{(x+1)^2(x+2)} < 0$
5. $\frac{x^2-5x+6}{x-1} \leq x+2$
6. Tentukan interval nilai *x* agar grafik dari $y = \frac{x^2-9}{x^2-6x+5}$ terletak di atas sumbu X.
7. Misalkan sebuah partikel bergerak dengan mengikuti lintasan $y = \frac{3}{x-1}$ dengan *y* menyatakan ketinggian yang dicapai dengan satuan meter dan *x* untuk bilangan real positif. Tentukan batas interval *x* agar ketinggian yang dicapai tidak melebihi 12 meter.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

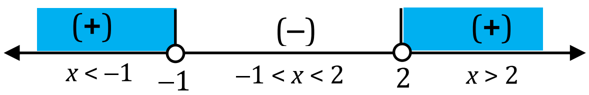
1. Alternatif Penyelesaian

$$\frac{x+1}{x-2} > 0$$

Titik kritis
Pada pembilang: $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (tidak termasuk penyelesaian karena tanda ">")
Pada penyebut: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap interval:

- untuk daerah $x < -1$, ambil $x = -2$ $\Rightarrow \frac{(-2)+1}{(-2)-2} \Leftrightarrow \frac{(-)}{(-)} = (+)$
- untuk daerah $-1 < x < 2$, ambil $x = 0$ $\Rightarrow \frac{0+1}{0-2} \Leftrightarrow \frac{(+)}{(-)} = (-)$
- untuk daerah $x > 2$, ambil $x = 3$ $\Rightarrow \frac{3+1}{3-2} \Leftrightarrow \frac{(+)}{(+)} = (+)$



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < -1 \text{ atau } x > 2,\ x \in R\}$.

2. Alternatif Penyelesaian

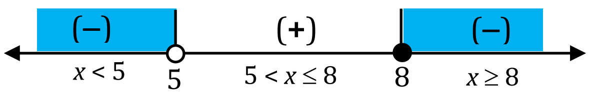
$$\frac{2x-7}{x-5} \le 3 \Leftrightarrow \frac{2x-7}{x-5} - 3 \le 0 \Leftrightarrow \frac{2x-7-3(x-5)}{x-5} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-7-3x+15}{x-5} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-x+8}{x-5} \le 0$$

Titik kritis
Pada pembilang: $-x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$
Pada penyebut: $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap interval:

- untuk daerah $x < 5$, ambil $x = 0$ $\Rightarrow \frac{-(0)+8}{0-5} \Leftrightarrow \frac{(+)}{(-)} = (-)$
- untuk daerah $5 < x \le 8$, ambil $x = 6$ $\Rightarrow \frac{-6+8}{6-5} \Leftrightarrow \frac{(+)}{(+)} = (+)$
- untuk daerah $x \ge 2$, ambil $x = 9$ $\Rightarrow \frac{-9+8}{9-5} \Leftrightarrow \frac{(-)}{(+)} = (-)$



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < 1 \text{ atau } x \ge 8,\ x \in R\}$.

3. Alternatif Penyelesaian

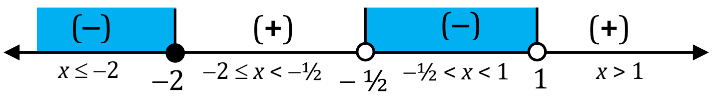
$$\frac{1}{x-1} \le \frac{1}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x+1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{1(2x+1)-1(x-1)}{(x-1)(2x+1)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1-x+1}{(x-1)(2x+1)} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{(x-1)(2x+1)} \le 0$$

Titik kritis
Pada pembilang: $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
Pada penyebut: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (tidak termasuk penyelesaian)
$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -½$ (tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap interval:

- untuk $x \le -2$, ambil $x = -3$ $\Rightarrow \dfrac{(-3)+2}{(-3-1)(2(-3)+1)} \Leftrightarrow \dfrac{(-)}{(-)(-)} = (-)$
- untuk $-2 \le x < -½$, ambil $x = -1$ $\Rightarrow \dfrac{(-1)+2}{(-1-1)(2(-1)+1)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)}{(-)(-)} = (+)$
- untuk $-½ < x < 1$, ambil $x = 0$ $\Rightarrow \dfrac{0+2}{(0-1)(2(0)+1)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)}{(-)(+)} = (-)$
- untuk $x > 1$, ambil $x = 2$ $\Rightarrow \dfrac{2+2}{(2-1)(2(2)+1)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)}{(+)(+)} = (+)$



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x \le -2 \text{ atau } -½ < x < 1,\ x \in R\}$.

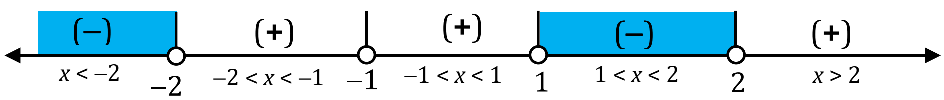
4. Alternatif Penyelesaian

$$\frac{x^2-3x+2}{(x+1)^2(x+2)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)^2(x+2)} < 0$$

Titik kritis
Pada pembilang: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (tidak termasuk penyelesaian)
$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (tidak termasuk penyelesaian)
Pada penyebut: $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (tidak termasuk penyelesaian)
$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap interval:

- untuk $x < -2$, ambil $x = -3$ $\Rightarrow \dfrac{(-3-1)(-3-2)}{(-3+1)^2(-3+2)} \Leftrightarrow \dfrac{(-)(-)}{(+)(-)} = (-)$
- untuk $-2 < x < -1$, ambil $x = -\frac{3}{2}$ $\Rightarrow \dfrac{(-\frac{3}{2}-1)(-\frac{3}{2}-2)}{(-\frac{3}{2}+1)^2(-\frac{3}{2}+2)} \Leftrightarrow \dfrac{(-)(-)}{(+)(+)} = (+)$
- untuk $-1 < x < 1$, ambil $x = 0$ $\Rightarrow \dfrac{(0-1)(0-2)}{(0+1)^2(0+2)} \Leftrightarrow \dfrac{(-)(-)}{(+)(+)} = (+)$
- untuk $1 < x < 2$, ambil $x = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow \dfrac{(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)}{(\frac{3}{2}+1)^2(\frac{3}{2}+2)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)(-)}{(+)(+)} = (-)$
- untuk $x > 2$, ambil $x = 3$ $\Rightarrow \dfrac{(3-1)(3-2)}{(3+1)^2(3+2)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)(+)}{(+)(+)} = (+)$



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < -2 \text{ atau } 1 < x < 2,\ x \in R\}$.

5. Alternatif Penyelesaian

$$\frac{x^2-5x+6}{x-1} \le x+2 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x-1} - (x+2) \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6-(x+2)(x-1)}{x-1} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6-(x^2+x-2)}{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-6x+8}{x-1} \le 0$$

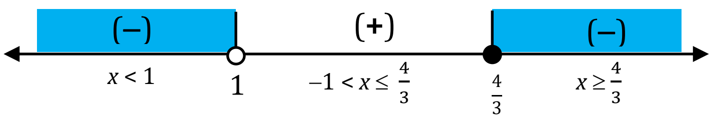
Titik kritis

Pada pembilang: $-6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$

Pada penyebut: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap interval:

- untuk $x < 1$, ambil $x = 0$ $\Rightarrow \frac{-6(0)+8}{0-1} \Leftrightarrow \frac{(+)}{(-)} = (-)$
- untuk $1 < x \le \frac{4}{3}$, ambil $x = \frac{5}{4}$ $\Rightarrow \frac{-6(\frac{5}{4})+8}{\frac{5}{4}-1} \Leftrightarrow \frac{(+)}{(+)} = (+)$
- untuk $x > \frac{4}{3}$, ambil $x = 2$ $\Rightarrow \frac{-6(2)+8}{2-1} \Leftrightarrow \frac{(-)}{(+)} = (-)$



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < 1 \text{ atau } x \ge \frac{4}{3},\ x \in R\}$.

6. Alternatif Penyelesaian

Agar grafik $y = \frac{x^2-9}{x^2-6x+5}$ terletak di atas sumbu X, maka $y > 0$

$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x^2-6x+5} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-3)}{(x-1)(x-5)} > 0$$

Titik kritis

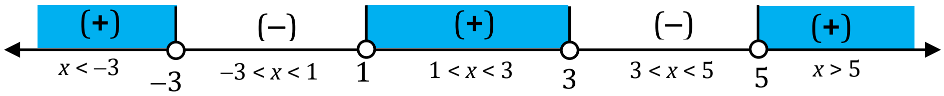
Pada pembilang: $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ (tidak termasuk penyelesaian)
$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (tidak termasuk penyelesaian)

Pada penyebut: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (tidak termasuk penyelesaian)
$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap interval:

- untuk $x < -3$, ambil $x = -4$ $\Rightarrow \frac{(-4+3)(-4-3)}{(-4-1)(-4-5)} \Leftrightarrow \frac{(-)(-)}{(-)(-)} = (+)$
- untuk $-3 < x < 1$, ambil $x = 0$ $\Rightarrow \frac{(0+3)(0-3)}{(0-1)(0-5)} \Leftrightarrow \frac{(+)(-)}{(-)(-)} = (-)$
- untuk $1 < x < 3$, ambil $x = 2$ $\Rightarrow \frac{(2+3)(2-3)}{(2-1)(2-5)} \Leftrightarrow \frac{(+)(-)}{(+)(-)} = (+)$
- untuk $3 < x < 5$, ambil $x = 4$ $\Rightarrow \frac{(4+3)(4-3)}{(4-1)(4-5)} \Leftrightarrow \frac{(+)(+)}{(+)(-)} = (-)$

- untuk $x > 5$, ambil $x = 6$ $\Rightarrow \dfrac{(6+3)(6-3)}{(6-1)(6-5)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)(+)}{(+)(+)} = (+)$



pertidaksamaan bernilai positif pada interval $x < -3$ atau $1 < x < 3$ atau $x > 5$.

Jadi, interval nilai x agar grafik dari $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 5}$ terletak di atas sumbu X adalah $x < -3$ atau $1 < x < 3$ atau $x > 5$.

7. Alternatif penyelesaian

Ketinggian lintasan $y = \dfrac{3}{x-1}$

Ketinggian lintasan tidak melebihi 12 m, berarti $y \le 12$.

$$
\begin{aligned}
& y \le 12 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3}{x-1} \le 12 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3}{x-1} - 12 \le 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3}{x-1} - \frac{12(x-1)}{x-1} \le 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3 - 12x + 12}{x-1} \le 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{-12x + 15}{x-1} \le 0
\end{aligned}
$$

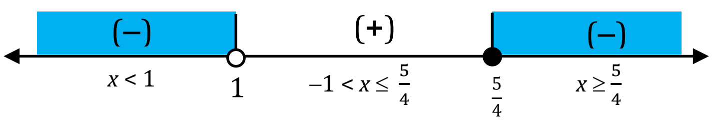
Titik kritis

Pada pembilang: $-12x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{15}{12} = \dfrac{5}{4}$

Pada penyebut: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap interval:

- untuk $x < 1$, ambil $x = 0$ $\Rightarrow \dfrac{-12(0)+15}{0-1} \Leftrightarrow \dfrac{(+)}{(-)} = (-)$
- untuk $1 < x \le \frac{5}{4}$, ambil $x = \frac{7}{6}$ $\Rightarrow \dfrac{-12(\frac{7}{6})+15}{\frac{7}{6}-1} \Leftrightarrow \dfrac{(+)}{(+)} = (+)$
- untuk $x > \frac{5}{4}$, ambil $x = 2$ $\Rightarrow \dfrac{-15(2)+15}{2-1} \Leftrightarrow \dfrac{(-)}{(+)} = (-)$



Jadi, batas interval x agar ketinggian yang dicapai tidak melebihi 12 meter untuk x real positif adalah $0 \le x < 1$ atau $x \ge \frac{5}{4}$, $x \in R\}$.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu yang dimaksud pertidaksamaan rasional?	◯	◯
2	Apakah Anda tahu bentuk umum pertidaksamaan rasional?	◯	◯
3	Apakah Anda tahu sifat-sifat dari pertidaksamaan rasional?	◯	◯
4	Apakah Anda tahu prosedur menyelesaikan pertidaksamaan rasional?	◯	◯
5	Apakah Anda dapat menentukan penyelesaian pertidaksamaan rasional?	◯	◯
6	Apakah Anda dapat menyelesaikan permasalahan yang terkait pertidaksamaan rasional	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PERTIDAKSAMAAN IRASIONAL SATU VARIABEL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan kalian dapat menjelaskan konsep pertidaksamaan irasional dan menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan irasional, serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan irasional satu variabel.

B. Uraian Materi

Pertidaksamaan irasional atau pertidaksamaan bentuk akar adalah suatu pertidaksamaan yang mengandung variabel pada bentuk akarnya.

Untuk semesta bilangan real, pertidaksamaan irasional akan terdefinisi jika syarat akar terpenuhi yaitu fungsi yang berada dibawah tanda akar bernilai lebih dari atau sama dengan nol.

Contoh pertidaksamaan irasional:

- $\sqrt{x-1} < 3$
- $\sqrt{x+3} \geq \sqrt{2x-4}$
- $\sqrt{4x^2+1} \leq 6-x$
- $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} < 9$

Bentuk-bentuk pertidaksamaan irasional (bentuk akar) dan cara menentukan himpunan penyelesaiannya sebagai berikut:

1. Bentuk $\sqrt{f(x)} > c$ atau $\sqrt{f(x)} < c$

a. Bentuk $\sqrt{f(x)} > c$ dengan $c > 0$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $f(x) > a^2$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i) dan (ii).

Bentuk $\sqrt{f(x)} > c$ dengan $c < 0$ cukup diselesaikan dengan $f(x) \geq 0$.

Contoh 1.

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{2x-2} > 4$

Jawab
Syarat:
(i). $2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x \geq 1}$
(ii). $2x - 2 > 4^2 \Leftrightarrow 2x > 16 + 2$
$\Leftrightarrow 2x > 18 \Leftrightarrow \boldsymbol{x > 9}$

Irisan dari (i) dan (ii) adalah $x > 9$.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x > 9, x \in R\}$

Contoh 2.

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{2x-6} > -1$

Jawab

Karena ruas kanan < 0, maka penyelesaiannya adalah $2x - 6 \geq 0 \iff 2x \geq 6$
$\iff x \geq 3$
Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$

b. Bentuk $\sqrt{f(x)} < c$ dengan $c > 0$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $f(x) < a^2$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i) dan (ii).

Contoh 3.

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{3x+1} \leq 4$

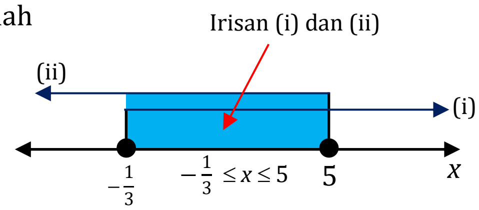
Jawab

Syarat:

(i). $3x + 1 \geq 0 \iff 3x \geq -1 \iff \boldsymbol{x \geq -\frac{1}{3}}$

(ii). $3x + 1 \leq 4^2 \iff 3x + 1 \leq 16$
$\iff 3x \leq 16 - 1$
$\iff 3x \leq 15 \iff \boldsymbol{x \leq 5}$

Irisan dari (i) dan (ii) adalah



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 5, x \in R\}$

2. Bentuk $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ atau $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

a. Bentuk $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $g(x) \geq 0$
(iii). $f(x) > g(x)$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

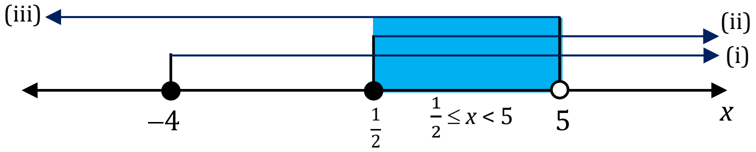
Contoh 4.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{x+4} > \sqrt{2x-1}$
Jawab
Syarat:
(i). $x + 4 \geq 0 \iff x \geq -4$

(ii). $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq ½$
(iii). Kuadratkan kedua ruas:

$$\sqrt{x+4} > \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x + 4 > 2x - 1$$
$$\Leftrightarrow x - 2x > -1 - 4$$
$$\Leftrightarrow -x > -5$$
$$\Leftrightarrow x < 5$$

Irisan dari (i), (ii), dan (iii) diperoleh:



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid ½ \leq x < 5, x \in R\}$

b. Bentuk $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $g(x) \geq 0$
(iii). $f(x) < g(x)$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

Contoh 5.

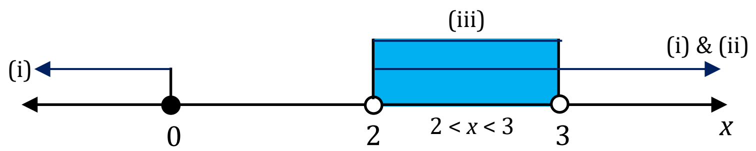
Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{x^2 - 2x} < \sqrt{3x-6}$

Jawab

Syarat:
(i). $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ atau $x \geq 2$
(ii). $3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2$
(iii). Kuadratkan kedua ruas:

$$\sqrt{x^2 - 2x} < \sqrt{3x-6} \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3x - 6$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) < 0$$
$$\Leftrightarrow 2 < x < 3$$

Irisan dari (i), (ii), dan (iii) diperoleh:



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid 2 < x < 3, x \in R\}$

3. Bentuk $\sqrt{f(x)} > g(x)$ atau $\sqrt{f(x)} < g(x)$

a. Bentuk $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $g(x) > 0$
(iii). $f(x) < (g(x))^2$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

Contoh 6.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{4-x^2} < x+2$

Jawab

Syarat:

(i). $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2-4 \leq 0$ .... kedua ruas dikali dengan (-1)

$\Leftrightarrow (x+2)(x-2) \leq 0$

$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

(ii). $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

(iii). Kuadratkan kedua ruas

$4-x^2 < (x+2)^2 \Leftrightarrow 4-x^2 < x^2+4x+4$

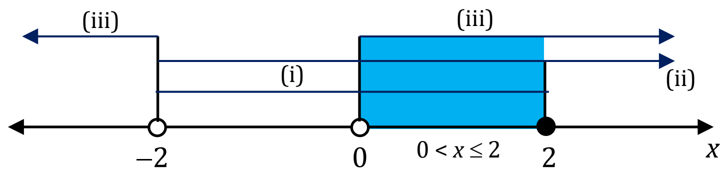
$\Leftrightarrow 0 < x^2+4x+4+x^2-4$

$\Leftrightarrow 2x^2+4x > 0$

$\Leftrightarrow x(x+2) > 0$

$\Leftrightarrow x < -2$ atau $x > 0$

Irisan dari (i), (ii), dan (iii) diperoleh:



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid 0 < x \leq 2, x \in R\}$

b. Bentuk $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:

Solusi (1)

(i). $f(x) \geq 0$

(ii). $g(x) \geq 0$

(iii). $f(x) > (g(x))^2$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi (1) adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

Solusi (2)

(iv). $f(x) \geq 0$

(v). $g(x) < 0$

Solusi (2) adalah irisan dari (iv) dan (v).

Solusi dari pertidaksamaan adalah **gabungan dari solusi (1) dan (2)**.

Contoh 7.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{x+15} > x+3$

Jawab

Solusi (1)

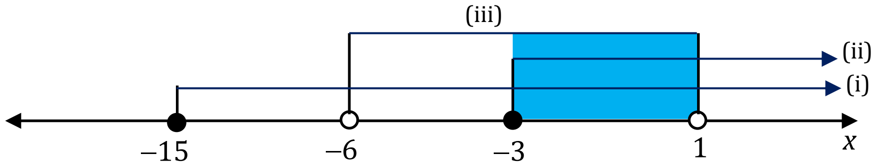
(i). $x + 15 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -15$

(ii). $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

(iii). Kuadratkan kedua ruas

$$
\begin{aligned}
x+15>(x+3)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x+15>x^2+6x+9 \\
&\Leftrightarrow \quad 0>x^2+6x+9-x-15 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2+5x-6<0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+6)(x-1)<0 \\
&\Leftrightarrow \quad -6<x<1
\end{aligned}
$$

Irisan dari (i), (ii), dan (iii) adalah



Diperoleh Solusi (1) yaitu $\{-3 \le x < 1\}$

Solusi (2)

(iv). $x + 15 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -15$

(v). $x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$

Irisan dari (iv) dan (v) adalah

Diperoleh Solusi (2) yaitu $\{-15 \le x < -3\}$

Solusi pertidaksamaan adalah gabungan dari Solusi (1) dan (2) yaitu
$\{-3 \le x < 1\} \cup \{-15 \le x < -3\} = \{-15 \le x < 1\}$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid -15 \le x < 1, x \in R\}$

Contoh 8.

Sebuah sepeda melaju di jalan raya selama t menit dengan panjang lintasan (dalam meter) ditentukan oleh persamaan berikut :

$$S(t) = \sqrt{t^2 - 20t + 550}$$

Jika panjang lintasan sepeda sekurang-kurangnya adalah 25 meter, tentukan nilai t yang memenuhi!

Jawab

Karena panjang lintasan sepeda diketahui sekurang-kurangnya adalah 25 meter, maka $S(t)$ lebih besar atau sama dengan 25, sehingga berlaku

$$
\begin{aligned}
S(t) \ge 25 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{t^2-20t+550} \ge 25 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2-20t+550 \ge (25)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2-20t+550 \ge 625 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2-20t-75 \ge 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t-5)(t-15) \ge 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t \le 5 \text{ atau } t \ge 15
\end{aligned}
$$

diperoleh $t \le 5$ atau $t \ge 15$.

Syarat tambahan: $t^2 - 20t + 550 \geq 0$

Pertidaksamaan $t^2 - 20t + 550 \geq 0$ selalu positif untuk setiap nilai t, karena definit positif (a = 1 > 0 dan Diskriminan D = $(-20)^2 - 4(1)(550) = -1.800 < 0$).

Dengan demikian, nilai t yang memenuhi agar panjang lintasan sepeda sekurang-kurangnya adalah 25 meter adalah $t \leq 5$ menit atau $t \geq 15$ menit.

C. Rangkuman

- Pertidaksamaan irasional atau pertidaksamaan bentuk akar adalah suatu pertidaksamaan yang mengandung variabel pada bentuk akarnya.
- Bentuk-bentuk pertidaksamaan irasional dan solusinya:

a. Bentuk $\sqrt{f(x)} > c$ dengan $c > 0$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $f(x) > a^2$ (kuadratkan kedua ruas)
Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i) dan (ii).

Bentuk $\sqrt{f(x)} > c$ dengan $c < 0$ cukup diselesaikan dengan $f(x) \geq 0$.

b. Bentuk $\sqrt{f(x)} < c$ dengan $c > 0$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $f(x) < a^2$ (kuadratkan kedua ruas)
Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i) dan (ii).

c. Bentuk $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $g(x) \geq 0$
(iii). $f(x) > g(x)$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

d. Bentuk $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $g(x) \geq 0$
(iii). $f(x) < g(x)$ (kuadratkan kedua ruas)
Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

e. Bentuk $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $g(x) > 0$
(iii). $f(x) < (g(x))^2$ (kuadratkan kedua ruas)
Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

f. Bentuk $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:

Solusi (1)

(iv). $f(x) \geq 0$

(v). $g(x) \geq 0$

(vi). $f(x) > (g(x))^2$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi (1) adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

Solusi (2)

(vi). $f(x) \geq 0$

(vii). $g(x) < 0$

Solusi (2) adalah irisan dari (iv) dan (v).

Solusi dari pertidaksamaan adalah **gabungan dari solusi (1) dan (2)**.

D. Latihan Soal

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan di bawah ini.

1. $\sqrt{1-2x} \geq 3$
2. $\sqrt{x^2 - x - 12} \leq x - 2$
3. $\sqrt{3x+1} \geq x - 3$
4. $\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{4x-8}$
5. $\sqrt{x^2 - 2x} < \sqrt{3x-6}$
6. Perusahaan asuransi melakukan perhitungan premi yang akan dibayarkan kepada pemegang polis dalam kurun waktu tertentu. Besar premi yang akan dibayarkan memenuhi persamaan berikut :

$$p(t) = 2 + \sqrt{4t+4}$$

Tentukan batas kurun waktu t (dalam bulan) yang diperlukan oleh pemegang polis agar mendapat premi paling banyak 6 unit.

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

1. Alternatif penyelesaian

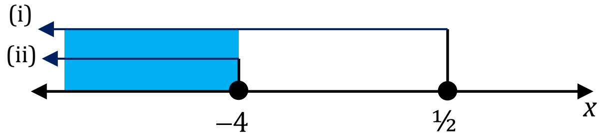
   $\sqrt{1-2x} \geq 3$

   Syarat:

   (i). $1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 1$
   $\Leftrightarrow x \leq ½$

   (ii). $1 - 2x \geq 3^2 \Leftrightarrow 1 - 2x \geq 9$
   $\Leftrightarrow 2x \leq 1 - 9$
   $\Leftrightarrow 2x \leq -8$
   $\Leftrightarrow x \leq -4$

   Irisan (i) dan (ii)



   Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x \leq -4, x \in R\}$

2. Alternatif penyelesaian

   $\sqrt{x^2 - x - 12} \leq x - 2$

   Syarat:

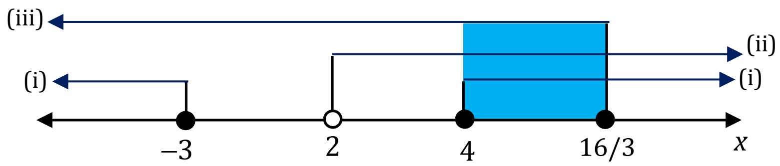
   (i). $x^2 - x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) \geq 0$
   $\Leftrightarrow x \leq -3$ atau $x \geq 4$

   (ii). $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

   (iii). Kuadratkan kedua ruas

   $x^2 - x - 12 \leq (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 \leq x^2 - 4x + 4$
   $\Leftrightarrow -x + 4x \leq 4 + 12$
   $\Leftrightarrow 3x \leq 16$
   $\Leftrightarrow x \leq \frac{16}{3}$

   Irisan dari (i), (ii), dan (iii) diperoleh:



   Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid 4 \leq x \leq \frac{16}{3}, x \in R\}$

3. Alternatif penyelesaian

   $\sqrt{3x+1} \geq x - 3$

   Solusi (1)

   (i). $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -1/3$

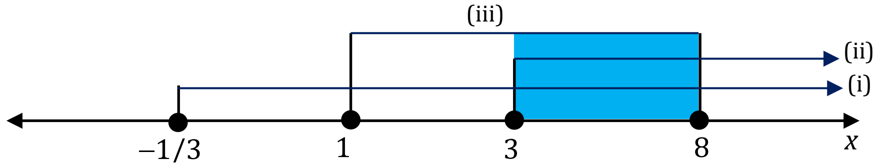
   (ii). $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

   (iii). Kuadratkan kedua ruas

   $3x + 1 \geq (x-3)^2 \Leftrightarrow 3x + 1 \geq x^2 - 6x + 9$
   $\Leftrightarrow 0 \geq x^2 - 6x + 9 - 3x - 1$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 9x + 8 \le 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-8) \le 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 \le x \le 8$$

Irisan dari (i), (ii), dan (iii) adalah



Diperoleh Solusi (1) yaitu $\{3 \le x \le 8\}$

Solusi (2)
(iv). $3x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow 3x \ge -1 \Leftrightarrow x \ge -1/3$
(v). $x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$

Irisan dari (iv) dan (v) adalah

Diperoleh Solusi (2) yaitu $\{-\frac{1}{3} \le x < 3\}$

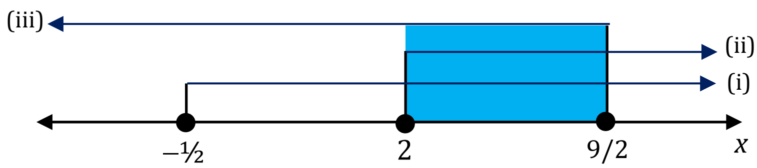
Solusi pertidaksamaan adalah gabungan dari Solusi (1) dan (2) yaitu
$\{3 \le x \le 8\} \cup \{-\frac{1}{3} \le x < 3\} = \{-\frac{1}{3} \le x \le 8\}$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid -\frac{1}{3} \le x \le 8, x \in R\}$

4. Alternatif penyelesaian
   $\sqrt{2x+1} \ge \sqrt{4x-8}$
   Syarat:

   (i). $2x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow 2x \ge -1 \Leftrightarrow x \ge -½$
   (ii). $4x - 8 \ge 0 \Leftrightarrow 4x \ge 8 \Leftrightarrow x \ge 2$
   (iii). Kuadratkan kedua ruas
   $2x + 1 \ge 4x - 8 \Leftrightarrow 2x - 4x \ge -8 - 1$
   $\Leftrightarrow -2x \ge -9$
   $\Leftrightarrow 2x \le 9$
   $\Leftrightarrow x \le 9/2$

   Irisan dari (i), (ii), dan (iii) diperoleh:



   Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid 2 \le x \le \frac{9}{2}, x \in R\}$

5. Alternatif penyelesaian

$\sqrt{x^2 - 2x} < \sqrt{3x - 6}$

Syarat:

(i). $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq 0$ atau $x \geq 2$

(ii). $3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2$

(iii). Kuadratkan kedua ruas

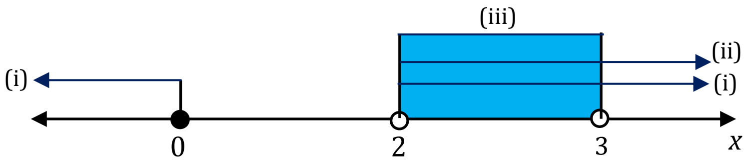
$x^2 - 2x < 3x - 6 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3x + 6 < 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) < 0$

$\Leftrightarrow 2 < x < 3$

Irisan dari (i), (ii), dan (iii) diperoleh:



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid 2 < x < 3, x \in R\}$

6. Alternatif penyelesaian

Perusahaan asuransi melakukan perhitungan premi yang akan dibayarkan kepada pemegang polis dalam kurun waktu tertentu. Besar premi yang akan dibayarkan memenuhi persamaan berikut :

$$p(t) = 2 + \sqrt{4t + 4}$$

Batas kurun waktu t (dalam bulan) yang diperlukan oleh pemegang polis agar mendapat premi paling banyak 6 unit dapat dinyatakan dalam pertidaksamaan:

$P(t) \leq 6 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4t+4} \leq 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{4t+4} \leq 4$

Syarat:

(i). $4t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 4t \geq -4$

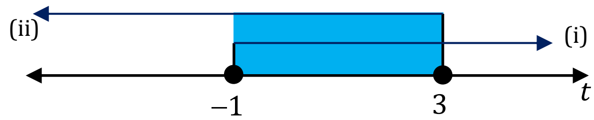
$\Leftrightarrow t \geq -1$

(ii). $4t + 4 \leq 4^2 \Leftrightarrow 4t \leq 16 - 4$

$\Leftrightarrow 4t \leq 12$

$\Leftrightarrow t \leq 3$

Irisan (i) dan (ii) diperoleh daerah penyelesaian adalah $\{x \mid -1 \leq x \leq 3, x \in R\}$



Karena t adalah waktu ($t > 0$), maka batas kurun waktu t (dalam bulan) yang diperlukan oleh pemegang polis agar mendapat premi paling banyak 6 unit adalah 3 bulan.

E. Penilaian Diri

Isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda pada kolom pilihan.

No	Pertanyaan	Ya	Tidak
1	Apakah Anda tahu yang dimaksud pertidaksamaan irasional?	◯	◯
2	Apakah Anda tahu bentuk umum pertidaksamaan irasional?	◯	◯
3	Apakah Anda tahu sifat-sifat dari pertidaksamaan irasional?	◯	◯
4	Apakah Anda tahu prosedur menyelesaikan pertidaksamaan irasional?	◯	◯
5	Apakah Anda dapat menentukan penyelesaian pertidaksamaan irasional?	◯	◯
6	Apakah Anda dapat menyelesaikan permasalahan yang terkait pertidaksamaan irasional	◯	◯
JUMLAH			

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

EVALUASI

1. Nilai-nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{2x-1}{3x+2} \geq 2$ adalah ….
   A. $-\frac{5}{4} \leq x < -\frac{2}{3}$
   B. $\frac{2}{3} < x \leq \frac{5}{4}$
   C. $-\frac{2}{3} < x \leq \frac{5}{4}$
   D. $x \leq -\frac{5}{4}$ atau $x > -\frac{2}{3}$
   E. $x < -\frac{2}{3}$ atau $x \geq \frac{5}{4}$

2. Penyelesaian pertidaksamaan $\frac{2x+7}{x-1} \leq 1$ adalah ….
   A. $-8 \leq x < 1$
   B. $-4 < x \leq 1$
   C. $x \geq -4$ atau $x < 1$
   D. $0 \leq x \leq 1$
   E. $1 \leq x \leq 8$

3. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{2x+1}{x} < 1$ adalah ….
   A. $1 < x < 3$
   B. $0 < x < 1$
   C. $-1 < x < 0$
   D. $-3 < x < 1$
   E. $-3 < x < -1$

4. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\frac{4x-3}{2x+1} \leq 3$ adalah ….
   A. $\{x \mid -3 \leq x \leq -\frac{1}{2}\}$
   B. $\{x \mid -3 \leq x < -\frac{1}{2}\}$
   C. $\{x \mid x \leq -3 \text{ atau } x \geq -\frac{1}{2}\}$
   D. $\{x \mid x < -3 \text{ atau } x > -\frac{1}{2}\}$
   E. $\{x \mid x \leq -3 \text{ atau } x > -\frac{1}{2}\}$

5. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{x+2}{x-1} < 3\left(\frac{x+2}{x-1}\right) - 2$ adalah ….
   A. $x > 1$
   B. $1 < x \leq 2$
   C. $x < 1$ atau $x \geq 4$
   D. $x \neq 1$
   E. $x \geq 4$

6. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-12} \leq 0$ adalah ….
   A. $x < -4$ atau $2 \leq x < 3$
   B. $x < -4$ atau $x > 3$
   C. $-4 < x < 2$
   D. $-4 < x < 3$
   E. $-4 < x < 3$ dan $x \neq 2$

7. Diketahui pertidaksamaan $\frac{3x-27}{x^2-3x-28} \geq 0$. Himpunan penyelesaiannya adalah ….
   A. $\{x \mid x > 7\}$
   B. $\{x \mid -4 < x < 7\}$
   C. $\{x \mid x < -4\}$
   D. $\{x \mid -4 < x < 7 \text{ atau } x \geq 9\}$
   E. $\{x \mid x \geq 9\}$

8. Penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{(x-1)(2x+4)}{x^2+4} \leq 1$ adalah ….
   A. $x \leq -4$ atau $x \geq 2$
   B. $x \leq -2$ atau $x \geq 4$
   C. $-4 \leq x \leq 4$
   D. $-4 \leq x \leq 2$
   E. $-2 \leq x \leq 4$

9. Semua bilangan real x yang memenuhi $\frac{x+2}{x} \leq \frac{x+3}{x-2}$ adalah ….
   A. $x < -\frac{4}{3}$ atau $x > 2$
   B. $-\frac{4}{3} \leq x < 2$
   C. $-\frac{4}{3} \leq x < 0$ atau $x > 2$
   D. $x < -\frac{4}{3}$ atau $0 < x < 2$
   E. $x < 0$ atau $x > 2$

10. Semua nilai x yang memenuhi $\frac{3}{x} - \frac{3}{x+3} \leq 0$ adalah ….
   A. $x < 0$
   B. $-3 \leq x \leq 0$
   C. $-3 < x < 0$
   D. $x < -3$ atau $x > 0$
   E. $x \leq -3$ atau $x \geq 0$

11. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{x^2-4} \leq 3 - x$ adalah ….
   A. $\{x \leq -2 \text{ atau } 2 \leq x \leq \frac{13}{6}\}$
   B. $\{x \leq -2 \text{ atau } x \geq 2\}$
   C. $\{-2 \leq x \leq \frac{13}{6}\}$
   D. $\{x \leq \frac{13}{6}\}$
   E. $\{2 \leq x \leq \frac{13}{6}\}$

12. Penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{3-x} \le x-1$ adalah ....
    A. $-1 \le x \le 2$
    B. $x \le -1$ atau $2 \le x \le 3$
    C. $1 \le x \le 2$
    D. $x \le -1$ atau $x \ge 2$
    E. $2 \le x \le 3$

13. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{x^2-2x} < \sqrt{3x+6}$ adalah ....
    A. $\{x \mid -1 < x < 6\}$
    B. $\{x \mid -2 \le x < 0$ atau $x \ge 2\}$
    C. $\{x \mid x \ge -2\}$
    D. $\{x \mid -2 \le x \le 0$ atau $2 \le x < 6\}$
    E. $\{x \mid -1 < x \le 0$ atau $2 \le x < 6\}$

14. Penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{x+10} - \sqrt{x+2} > 2$ adalah ....
    A. $-2 \le x < -1$
    B. $x > 1$
    C. $-\frac{3}{2} \le x < -1$
    D. $x > 2$
    E. $-1 < x < 6$

15. Penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{2x+6} > 0$ adalah ....
    A. $x < 3$
    B. $x \le -3$
    C. $x \ge -3$
    D. $x > -3$
    E. $x > 6$

16. Nilai $x \in$ bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $\sqrt{x^2+4x-5} < 4$ adalah ....
    A. $-7 < x < -5$ atau $1 < x \le 3$
    B. $-7 < x < -5$ atau $1 \le x \le 3$
    C. $-7 < x \le -5$ atau $1 \le x < 3$
    D. $x < -7$ atau $x > 3$
    E. $x < 5$ atau $x > 3$

17. Jika $\sqrt{3-5x} > \sqrt{x}$, maka nilai x yang memenuhi adalah ....
    A. $x \ge 0$
    B. $x < \frac{1}{2}$
    C. $x \le \frac{3}{5}$
    D. $0 \le x < \frac{1}{2}$
    E. $\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{5}$

18. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{1-x} < \sqrt{2x+6}$ adalah ….
    A. $\left\{x \mid -3 \le x \le 1 \text{ atau } x \ge \frac{5}{3}\right\}$
    B. $\left\{x \mid -3 \le x \le \frac{5}{3} \text{ atau } x \ge 1\right\}$
    C. $\left\{x \mid -3 \le x < \frac{5}{3}\right\}$
    D. $\left\{x \mid -\frac{5}{3} < x \le -1\right\}$
    E. $\left\{x \mid -\frac{5}{3} < x \le 1\right\}$

19. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{x^2-3x+2} \le \sqrt{x+7}$ adalah ….
    A. $\{x \mid x \ge 5, x \in R\}$
    B. $\{x \mid -1 \le x \le 5, x \in R\}$
    C. $\{x \mid -7 \le x \le 7 \text{ atau } 2 \le x \le 5, x \in R\}$
    D. $\{x \mid -1 \le x \le 1 \text{ atau } 2 \le x \le 5, x \in R\}$
    E. $\{x \mid -1 \le x < 0 \text{ atau } 2 \le x \le 5, x \in R\}$

20. Himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $\sqrt{x^2-x-2} < \sqrt{x^2+3x+2}$ adalah….
    A. $x \ge 2$
    B. $x > -1$
    C. $-2 \le x \le 1$
    D. $x \le -2$ atau $x \ge 2$
    E. $-2 \le x \le -1$ atau $x \ge 2$

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. A
2. A
3. C
4. E
5. A
6. D
7. D
8. D
9. C
10. C
11. A
12. E
13. E
14. A
15. D
16. C
17. D
18. E
19. D
20. A

DAFTAR PUSTAKA

B.K. Noormandiri. 2016. *Matematika Jilid I untuk SMA/MA Kelas X Kelompok Wajib*. Jakarta: Erlangga.

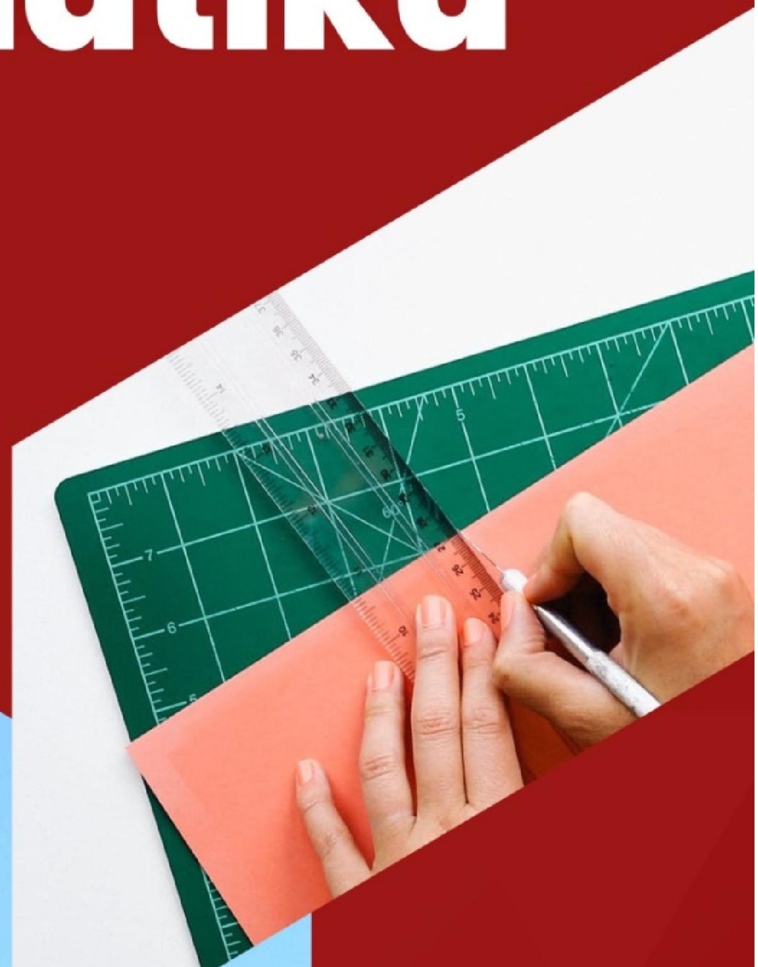
Markaban, Sigit, T.G, Puji Iryanti, 4. Untung T.S, Wiworo. 2018. *Relasi, Fungsi, Persamaan, dan Pertidaksamaan*. Modul Pengembangan Keprofesian Berkelanjutan Guru Matematika SMA. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Marthen Kangingan, 2014. *Matematika untuk SMA/MA Kelas X Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam*. Bandung: Yrama Widya

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS
X

SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL

MATEMATIKA UMUM KELAS X

PENYUSUN
Yenni Dian Anggraini, S.Pd., M.Pd., MBA.

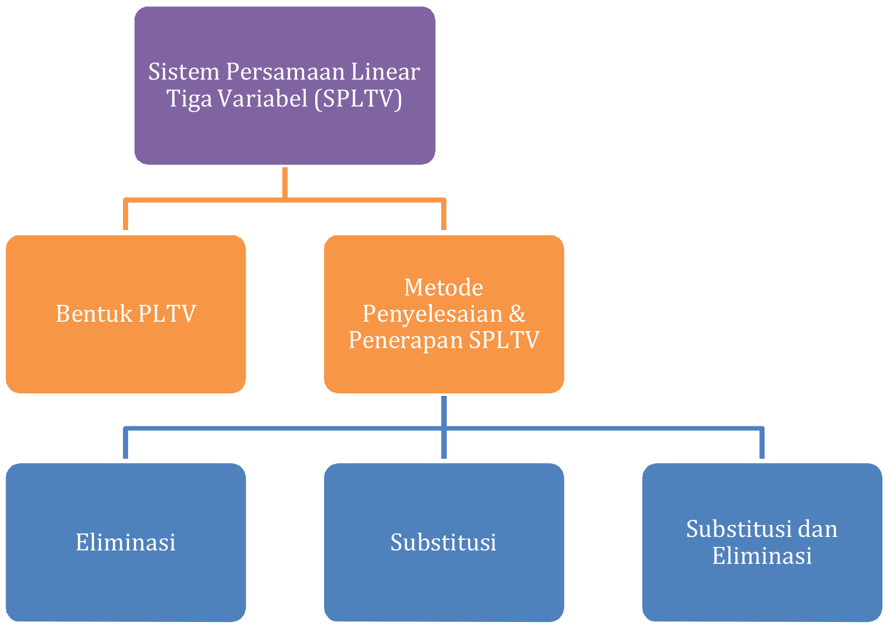
SMA Negeri 9 Kendari

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Kalimat terbuka	:	sebuah kalimat yang memiliki variabel atau memuat variabel.
Persamaan	:	kalimat terbuka yang memuat tanda sama dengan.
Persamaan linear	:	persamaan yang setiap sukunya mengandung konstanta dengan variabel berderajat satu atau tunggal.
Persamaan linear tiga variabel	:	persamaan linear yang memiliki tiga variabel.
Sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV)	:	sistem persamaan yang memuat lebih dari satu persamaan linear tiga variabel dengan himpunan variabel yang sama.
Penyelesaian SPLTV	:	bilangan pengganti dari variabel pada daerah definisi persamaan yang membuat persamaan menjadi pernyataan yang benar.
Metode subsitusi	:	sebuah metode pengerjaan persamaan linear dengan cara mengganti salah satu variabelnya dari salah satu persamaan dengan variabel yang diperoleh dari persamaan linear yang lainnya.
Metode eliminasi	:	sebuah metode pengerjaan sistem persamaan linear dengan cara menghilangkan salah satu variabelnya dengan cara menambahkan atau mengurangkan dengan menyamakan koefisien yang akan dihilangkan tanpa memperhatikan nilai positif maupun nilai negatif.
Metode campuran	:	sebuah metode pengerjaan SPLTV dengan menggunakan eliminasi dan subsitusi.

PETA KONSEP


Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)
Bentuk PLTV
Metode Penyelesaian & Penerapan SPLTV
Eliminasi
Substitusi
Substitusi dan Eliminasi

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	X (Sepuluh)
Alokasi Waktu	:	8 JP
Judul Modul	:	Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)

B. Kompetensi Dasar

3.3 Menyusun sistem persamaan linear tiga variabel dari masalah kontekstual.

4.3 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan sistem persamaan linear tiga variabel.

C. Deskripsi Singkat Materi

Pada modul ini peserta didik akan mempelajari konsep, penyelesaian dan penerapan sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV). Untuk mempelajari modul ini, para peserta didik diharapkan telah menguasai dasar-dasar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian bilangan real. Selain penjelasan mengenai materi yang ditampilkan, modul ini juga dilengkapi dengan latihan untuk menguji pemahaman dan penguasaan dari peserta didik terhadap materi yang telah dipelajari. Modul ini disusun dengan bahasa yang sederhana, contoh-contoh yang kontekstual, dan dibuat berurutan sesuai dengan urutan materi yang terlebih dahulu perlu dikuasai. Setelah memahami materi ini peserta didik diharapkan dapat menentukan penyelesaian SPLTV dan menerapkan pada permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Materi ini merupakan salah satu prasyarat untuk mempelajari beberapa materi yang lain diantaranya materi Program Linear serta Barisan dan Deret.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini hal-hal yang perlu dilakukan oleh peserta didik adalah sebagai berikut.

1. Membaca pendahuluan modul untuk mengetahui arah pengembangan modul.
2. Membaca kompetensi dasar dan tujuan yang ingin dicapai melalui modul.
3. Membaca dan memahami peta konsep agar memperoleh gambaran yang utuh mengenai modul.
4. Mempelajari modul secara berurutan agar memperoleh pemahaman yang utuh.
5. Memahami contoh-contoh soal yang ada, dan mengerjakan semua soal latihan yang ada.
6. Mempelajari kembalih materi yang terkait jika dalam mengerjakan soal menemui kesulitan.
7. Mengikuti semua tahapan dan petunjuk yang ada pada modul ini.
8. Mempersiapkan alat tulis untuk mengerjakan soal-soal latihan.
9. Selamat belajar menggunakan modul ini, semoga bermanfaat.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan, dan soal evaluasi.

Pertama : Bentuk Persamaan Linear Tiga Variabel (PLTV)

Kedua : Metode Penyelesaian dan Penerapan SPLTV

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
BENTUK PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL (PLTV)

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan peserta didik mampu:

1. Memahami konsep persamaan linear tiga variabel dan penggunaannya dalam menyelesaikan kehidupan sehari-hari.
2. Menyusun sistem persamaan linear tiga variabel dari permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

B. Uraian Materi

Bentuk Umum SPLTV

Peserta didik sekalian, sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) merupakan sistem persamaan yang disusun oleh tiga persamaan linear dengan tiga variabel yang sama. Seperti halnya sistem persamaan linear satu variabel dan dua variabel yang telah kalian pelajari sebelumnya, sistem persamaan linear tiga variabel juga dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. SPLTV dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan berbagai masalah kontekstual yang berkaitan dengan permodelan secara matematis. Untuk lebih jelasnya marilah kita menyimak ilustrasi berikut.

Gambar 1. Ilustrasi Kios Buah
(Sumber: https://ezhpe.files.wordpress.com/2013/02/jual-buah.jpg)

Seorang pedagang buah hendak memenuhi persediaan buah di kiosnya. Berdasarkan penjualan sehari-hari ada tiga jenis buah yang banyak dicari oleh pembeli, yaitu buah nanas, pisang, dan mangga. Namun karena keterbatasan modal dia tidak dapat sekaligus membeli buah-buahan yang banyak diminati tersebut. Oleh karenanya pedagang tersebut hanya dapat membeli jika modal sudah terkumpul. Hari pertama modal yang terkumpul adalah Rp 2.640.000,00 sehingga pedagang tersebut dapat membeli 3 dus buah nanas, 2 dus buah pisang, dan 5 dus buah mangga. Untuk hari kedua pedagang tersebut memperoleh modal Rp 1.510.000,00 dan dapat membeli 1 dus buah nanas, 3 dus buah pisang, serta 2 dus buah mangga. Sedangkan untuk hari ketiga dengan modal Rp 2.750.000,00 pedagang tersebut dapat membeli 4 dus buah nanas, 5 dus buah pisang, dan 3 dus buah mangga. Jika variabel x menunjukkan harga per dus buah nanas, variabel y menunjukkan harga per dus buah pisang dan variabel z menunjukkan harga per dus buah mangga. Bagaimana persamaan matematis yang dapat kalian bentuk dari permasalahan ini? Silahkan kalian menyimak penjelasan berikut ini.

Untuk menyelesaikan masalah kontekstual di atas, variabel x, y dan z sudah menunjukkan harga per dus buah masing-masing. Jika diuraikan:
x = harga per dus buah nanas
y = harga per dus buah pisang
z = harga per dus buah mangga
Maka, persamaan yang terbentuk

Hari pertama	:	$3x + 2y + 5z = 2640000$	persamaan (1)
Hari kedua	:	$x + 3y + 2z = 1510000$	persamaan (2)
Hari ketiga	:	$4x + 5y + 3z = 2750000$	persamaan (3)

Ketiga persamaan tersebut adalah persamaan matematis yang dapat terbentuk dari permasalahan pedagang buah di atas. Dari ilustrasi tersebut dapat dibuat sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV).

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 2640000 \\ x + 3y + 2z = 1510000 \\ 4x + 5y + 3z = 2750000 \end{cases}$$

Peserta didik sekalian, mudah bukan? Apakah kalian sudah memahami penjelasan di atas? Jika sudah marilah kita menyimpulkan materi yang telah dipelajari dalam kesimpulan di bawah ini. Kesimpulan bentuk umum dari persamaan linear tiga variabel adalah sebagai berikut.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

Sedangkan bentuk umum dari SPLTV adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Keterangan:
- Variabel adalah x, y dan z
- Koefisien adalah a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3
- Konstanta adalah d_1, d_2, d_3

Jika d_1, d_2, d_3 masing-masing bernilai nol, maka dinamakan sistem persamaan linear homogen, sedangkan jika tidak semuanya bernilai nol, maka sistem persamaan linearnya dinamakan sistem persamaan linear nonhomogen. Sekarang kalian pasti bertanya-tanya apa itu sistem persamaan linear homogen dan non homogen? Untuk menjawab rasa penasaran kalian silahkan membaca berbagai sumber bacaan tentang sistem persamaan linear homogen dan nonhomogen. Kegiatan membaca ini pasti sangat menarik karena sekaligus dapat meningkatkan kemampuan literasi kalian, betul demikian bukan?

Jika x = x_0, y = y_0, z = z_0 memenuhi sistem persamaan tersebut, maka akan berlaku hubungan:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1 \\ a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_2 \\ a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_3 \end{cases}$$

Pasangan berurutan (x_0 ,y_0, z_0) disebut penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel dan {(x_0 ,y_0, z_0)} disebut himpunan penyelesaian.

Berdasarkan pemaparan di atas beberapa *langkah dalam menyusun model matematika yang berbentuk SPLTV* adalah sebagai berikut.

1. Menyatakan atau menerjemahkan masalah ke dalam bahasa yang mudah dipahami. Ini adalah problem real.
2. Mengidentifikasi berbagai konsep matematika dan asumsi yang digunakan dan berkaitan dengan masalah. Ini adalah problem matematika.
3. Merumuskan model matematika atau kalimat matematika yang berkaitan dengan masalah. Ini adalah proses matematisasi.
4. Merumuskan SPLTV yang merupakan model matematika dari masalah tersebut.

Contoh 1:
Jika umur ibu, 5 tahun yang akan datang mempunyai umur 3 tahun kurangnya dari 10 kali lipat umur adik yang paling kecil. Ubahlah kalimat tersebut dalam bentuk persamaan matematika!

Alternatif Penyelesaian:
- ✓ Permasalahan di atas adalah umur ibu dan adik yang paling kecil. (Ini adalah problem real).
- ✓ Untuk menyederhanakan dan memudahkan langkah-langkah penyelesaiannya, maka digunakan permisalan. (Ini adalah problem matematika).

  Misalkan: x = umur ibu
  y = umur adik

- ✓ Persamaan matematikanya menjadi (Ini adalah proses matematisasi):

$$x + 5 = 10y - 3$$

Contoh 2:
Masa kehamilan rata-rata (dalam hari) dari gajah, badak, dan kerbau apabila dijumlahkan adalah 1.520 hari. Masa kehamilan badak adalah 58 hari lebih lama daripada kerbau. Dua kali masa kehamilan kerbau kemudian dikurangi 162 merupakan masa kehamilan gajah. Buatlah sistem persamaan linear tiga variabel dari informasi tersebut!

Alternatif Penyelesaian:
- ✓ Permasalahan di atas adalah masa kehamilan rata-rata (dalam hari) dari gajah, badak, dan kerbau. (Ini adalah problem real).
- ✓ Untuk menyederhanakan dan memudahkan langkah-langkah penyelesaiannya, maka digunakan permisalan. (Ini adalah problem matematika).

  Misalkan: p = masa kehamilan gajah

q = masa kehamilan badak
r = masa kehamilan kerbau

- ✓ Persamaan matematikanya menjadi (Ini adalah proses matematisasi):

$p + q + r = 1520$	$p + q + r = 1520$	persamaan (1)
$q = r + 58$	$q - r = 58$	persamaan (2)
$2r - 162 = p$	$-p + 2r = 162$	persamaan (3)

- ✓ SPLTV nya adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 2640000 \\ x + 3y + 2z = 1510000 \\ 4x + 5y + 3z = 2750000 \end{cases}$$

Dari dua contoh di atas, dapatkah kalian mencari contoh-contoh lain penerapan SPLTV dalam kehidupan sehari-hari. Menurut kalian apakah SPLTV bermanfaat untuk dipelajari? Mengapa?

C. Rangkuman

1. Persamaan linear tiga variabel merupakan persamaan linear yang memiliki atau memuat 3 jenis variabel. Bentuk umum persamaan linear tiga variabel dapat dinyatakan sebagai $ax + by + cz = d$, di mana a, b, c konstan dengan a, b, dan c tidak keduanya nol.
2. Dua atau lebih persamaan linear tiga variabel dengan jenis variabel yang sama dapat membentuk sistem persamaan linear tiga variabel. Bentuk umum sistem persamaan linear tiga variabel dapat dinyatakan sebagai
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
3. Pasangan terurut (a, b, c) adalah penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel apabila nilai a, b dan c disubtitusikan ke dalam setiap persamaan menghasilkan pernyataan yang benar.

D. Latihan Soal

Soal Pilihan Ganda

Pilihlah satu jawaban yang paling benar.

1. Rani hendak membeli beberapa jenis buah-buahan yaitu, 5 kg buah apel, 2 kg buah jeruk dan 3 kg buah anggur dengan uang sebesar Rp 125.000,00. Ubahlah kalimat tersebut dalam bentuk persamaan matematis.
   A. $5x + 2y + 3z = 125000$
   B. $125000 + 5x + 2y + 3z = 0$
   C. $5x + 2y = 125000 + 3z$
   D. $5x = 125000 + 2y + 3z$
   E. $5x + 3z = 125000 + 2y$
2. Yang merupakan bentuk persamaan linear tiga variabel adalah… .
   A. $2y + y + 8 = 16$
   B. $3x + 2y = -z$
   C. $x + y + 5y = 20$

D. $-4z + z - 6 = 0$
E. $x + 7x + 18 = 0$

3. Sebuah bilangan terdiri atas 3 angka. Jumlah ketiga angkanya sama dengan 16. Jumlah angka pertama dan angka kedua sama dengan angka ketiga dikurangi dua. Persamaan matematika yang sesuai dengan soal adalah… .
A. $x + y + z = 16; x + y - z = -2$
B. $x + y + z = -2; x + y - z = 16$
C. $x + y + z = 3; x + y + z = 16$
D. $x + y - z = -2; x + y + z = 3$
E. $x + y + z = 3; x + y - z = -2$
4. sebuah tempat tisu terbuat dari kawat dengan panjang 48 cm. Kerangka tempat tisue tersebut memenuhi ketentuan khusus. Jika panjang kerangka ditambah tiga kali lebarnya dan dikurangi dua kali tingginya sama dengan 14 cm. Lebar balok ditambah dengan tingginya sama dengan panjang kerangka. Persamaan matematika yang sesuai adalah… .
A. $x + y + z = 48; x + 2y - 2z = 14; x = y + z$
B. $2x + 2y + 2z = 48; x + 2y - 2z = 14; x = y + z$
C. $x + y + z = 12; x + 2y - 2z = 14; x = y + z$
D. $2x + 2y + 2z = 12; x + 2y - 2z = 14; x = y + z$
E. $x + y + z = 48; x + y - z = 14; x = y + z$
5. Bentuk-bentuk berikut merupakan bentuk persamaan linear tiga variabel.
I. $3x - 2y + 6 = z$
II. $x + y + 4y = 0$
III. $-z + 4z + 7 = 8$
IV. $x + 7x - 5z = y$
V. $x + 7x + 18 = z$
A. V dan II
B. III dan IV
C. II dan V
D. I dan IV
E. IV dan V
6. Sebuah kotak berisi 58 karcis yang berwarna merah, kuning dan hijau. Dua kali karcis merah ditambah karcis kuning kemudian dikurangi dua kali karcis hijau sama dengan 30. Karcis merah dikurangi dua kali karcis kuning dan ditambah tiga kali karcis hijau sama degan 52. PLTV dari soal ini adalah sebagai berikut.
A. $x + y + z = 58; 2x + 2y - 2z = 30; x - 2y + 3z = 52$
B. $x + y + z = 52; 2x + 2y - 2z = 30; x - 2y + 3z = 58$
C. $x + y + z = 58; 2x + 2y - 2z = 52; x - 2y + 3z = 30$
D. $x + y + z = 52; 2x + 2y - 2z = 58; x - 2y + 3z = 30$
E. $x + y + z = 58; 2x + 2y - 3z = 30; x - 2y + 2z = 52$
7. Pada bulan Agustus pak Ahmad, pak Yudi dan pak Fauzi panen raya untuk buah jeruk. Hasil panen jeruk dari pak Fauzi lebih sedikit 15 kg dari pak Ahmad dan lebih banyak dari 15 kg dari pak Yudi. Persamaan matematis yang dapat menggambarkan kondisi tersebut adalah… .
A. $x + y = 15; x + z = 15$
B. $x + y = 15; y + z = 15$
C. $x = 15 - y; x + y = 15$
D. $x = y - 15; x = z + 15$
E. $x = y - 15; x = 15 - z$

8. Ibu Ira membeli 5 kg telur, 2 kg daging, dan 1 kg ikan dengan harga Rp 305.000,00. Ibu Budi membeli 3 kg telur dan 1 kg daging dengan harga Rp 131.000,00. Ibu Shifa membeli 3 kg daging dan 2 kg ikan dengan harga Rp 360.000,00. SPLTV dari permasalahan kontekstual ini adalah… .
   A. $\begin{cases} 5x + 2y + z = 305000 \\ 2x + y = 131000 \\ 3y + 2z = 360000 \end{cases}$
   B. $\begin{cases} 5x + 2y + z = 305000 \\ 3x + y = 131000 \\ 3y + z = 360000 \end{cases}$
   C. $\begin{cases} 5x + 2y + z = 305000 \\ 3x + y = 131000 \\ 3y + 2z = 360000 \end{cases}$
   D. $\begin{cases} 5x + 2y + z = 305000 \\ 3y + 2z = 131000 \\ 3x + 2z = 360000 \end{cases}$
   E. $\begin{cases} 5x + 2y + z = 305000 \\ 3x + z = 131000 \\ 3y + z = 360000 \end{cases}$
9. Ali, Badar, dan Carli berbelanja di sebuah toko buku. Ali membeli dua buah buku tulis, sebuah pensil, dan sebuah penghapus. Ali harus membayar Rp 4.700,00. Badar membeli sebuah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus. Badar harus membayar Rp 4.300,00. Carli membeli tiga buah buku tulis, dua buah pensil, dan sebuah penghapus. Carli harus membayar Rp 7.100,00. SPLTV yang sesuai untuk soal cerita ini adalah… .
   A. $\begin{cases} 2x + y + z = 4.300 \\ x + 2y + z = 4.700 \\ 3x + 2y + z = 7.100 \end{cases}$
   B. $\begin{cases} 2x + y + z = 4.700 \\ x + 2y + z = 7.100 \\ 3x + 2y + z = 4.300 \end{cases}$
   C. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 4.700 \\ 2x + y + z = 4.300 \\ 3x + 2y + z = 7.100 \end{cases}$
   D. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 4.300 \\ x + 2y + z = 4.700 \\ x + y + z = 7.100 \end{cases}$
   E. $\begin{cases} 2x + y + z = 4.700 \\ x + 2y + z = 4.300 \\ 3x + 2y + z = 7.100 \end{cases}$
10. Soal cerita berikut yang sesuai dengan SPLTV $\begin{cases} x + 3y + 2z = 33.000 \\ 2x + y + z = 23.500 \\ x + 2y + 3z = 36.500 \end{cases}$ adalah…
    A. Sebuah kios menjual bermacam-macam buah di antaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 3 kg apel harus membayar Rp 33.000,00. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak, dan 1 kg apel harus membayar Rp 23.500,00. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 3 kg apel harus membayar Rp 36.500,00. Berapakah harga per kilogram salak, harga per kilogram jeruk, dan harga per kilogram apel?
    B. Sebuah kios menjual bermacam-macam buah di antaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 3 kg apel harus membayar Rp 33.000,00. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak, dan 1 kg apel harus membayar Rp 23.500,00. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 3 kg salak,

dan 2 kg apel harus membayar Rp 36.500,00. Berapakah harga per kilogram salak, harga per kilogram jeruk, dan harga per kilogram apel?

C. Sebuah kios menjual bermacam-macam buah di antaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 1 kg jeruk, 3 kg salak, dan 2 kg apel harus membayar Rp 33.000,00. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak, dan 1 kg apel harus membayar Rp 23.500,00. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 3 kg apel harus membayar Rp 36.500,00. Berapakah harga per kilogram salak, harga per kilogram jeruk, dan harga per kilogram apel?

D. Sebuah kios menjual bermacam-macam buah di antaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 1 kg jeruk, 3 kg salak, dan 2 kg apel harus membayar Rp 36.500,00. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak, dan 1 kg apel harus membayar Rp 23.500,00. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 3 kg apel harus membayar Rp 33.000,00. Berapakah harga per kilogram salak, harga per kilogram jeruk, dan harga per kilogram apel?

E. Sebuah kios menjual bermacam-macam buah di antaranya jeruk, salak, dan apel. Seseorang yang membeli 1 kg jeruk, 3 kg salak, dan 2 kg apel harus membayar Rp 23.500,00. Orang yang membeli 2 kg jeruk, 1 kg salak, dan 1 kg apel harus membayar Rp 33.000,00. Orang yang membeli 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 3 kg apel harus membayar Rp 36.500,00. Berapakah harga per kilogram salak, harga per kilogram jeruk, dan harga per kilogram apel?

Kunci dan Pembahasan

1. A
   Misal: x = buah apel, y = buah jeruk, dan z = buah anggur
   Jumlah uang Rp 125.000,00, sehingga persamaan matematikanya menjadi
   $5x + 2y + 3z = 125000$
2. B
   Sesuai definisi persamaan linear tiga variabel adalah persamaan linear yang memiliki tiga variabel. Dari pilihan yang ada hanya persamaan $3x + 2y = -z$ yang memiliki tiga variabel yaitu: x, y, dan z.
3. A
   Misal: x = angka pertama, y = angka kedua, dan z = angka ketiga, sehingga bentuk persamaannya menjadi:
   $x + y + z = 16$; $x + y - z = -2$
4. C
   Misal: x = panjang kotak tisue, y = lebar kotak tisue, dan z = tinggi kotak tisue, sehingga dari yang diketahui bentuk persamaannya menjadi:
   4x + 4y + 4z = 48 (karena panjang, lebar, dan tinggi kotak tisue masing-masing terdiri dari 4 sisi) yang disederhanakan menjadi $x + y + z = 12$; $x + 2y - 2z = 14$; $x = y + z$
5. D
   Sesuai definisi persamaan linear tiga variabel adalah persamaan linear yang memiliki tiga variabel. Dari pilihan yang ada hanya persamaan I: $3x - 2y + 6 = z$ dan IV: $x + 7x - 5z = y$ yang memiliki tiga variabel yaitu: x, y, dan z.
6. A
   Misal: x = kartu merah, y = kartu kuning, dan z = kartu hijau. Sesuai dengan yang diketahui pada soal cerita, maka diperoleh PLTV berikut.
   $x + y + z = 58$; $2x + 2y - 2z = 30$; $x - 2y + 3z = 52$
7. D
   Misal: x = panen jeruk Pak Ahmad, y = Panen jeruk Pak Yudi, dan z = Panen jeruk Pak Fauzi. Sesuai dengan yang diketahui pada soal cerita, maka diperoleh persamaan matematikanya adalah:
   $x = y - 15$; $x = z + 15$
8. C
   Misal: x = telur, y = daging, dan z = ikan. Sesuai dengan yang diketahui pada soal cerita dibuatlah persamaan matematika sebagai berikut.
   $5x + 2y + z = 305000$; $3x + y = 131000$; $3y + 2z = 360000$.
   Dari persamaan tersebut diperoleh SPLTV $\begin{cases} 5x + 2y + z = 305000 \\ 3x + y = 131000 \\ 3y + 2z = 360000 \end{cases}$
9. E
   Misal: x = buku tulis, y = pensil, dan z = penghapus. Sesuai dengan yang diketahui pada soal cerita dibuatlah persamaan matematika sebagai berikut.
   $2x + y + z = 4.700$; $x + 2y + z = 4.300$; $3x + 2y + z = 7.100$
   Dari persamaan tersebut diperoleh SPLTV $\begin{cases} 2x + y + z = 4.700 \\ x + 2y + z = 4.300 \\ 3x + 2y + z = 7.100 \end{cases}$
10. C
    Diketahui SPLTV $\begin{cases} x + 3y + 2z = 33.000 \\ 2x + y + z = 23.500 \\ x + 2y + 3z = 36.500 \end{cases}$.

Misal: x = jeruk, y = salak, dan z = apel. Dari SPLTV diketahui persamaan 1 berbunyi 1 kg jeruk, 3 kg salak, dan 2 kg apel seharga Rp 33.000,00. Persamaan 2 berbunyi 2 kg jeruk, 1 kg salak, dan 1 kg apel seharga Rp 23.500,00. Persamaan 2 berbunyi 1 kg jeruk, 2 kg salak, dan 3 kg apel seharga Rp 36.500,00.

Nilai Latihan soal ini adalah: $\frac{\boldsymbol{Jumlah\ jawaban\ benar}}{\mathbf{10}}\boldsymbol{x}\ \mathbf{100}$

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah Saya dapat menentukan permasalahan dalam sebuah soal cerita?	Ya	Tidak
2	Apakah Saya dapat menggunakan konsep variabel dalam sebuah soal cerita?	Ya	Tidak
3	Apakah Saya dapat membuat persamaan matematika dari sebuah soal cerita?	Ya	Tidak
4	Apakah Saya dapat menyusun SPLTV dalam sebuah soal cerita?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segeralah kalian lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
METODE PENYELESAIAN DAN PENERAPAN SPLTV

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan peserta didik:
1. Terampil melakukan operasi aljabar yang melibatkan sistem persamaan linear tiga variabel serta penggunaannya untuk menyelesaikan masalah kontekstual dalam kehidupan sehari-hari.
2. Terbentuk dan memiliki sikap kemandirian, bertindak logis, tidak mudah menyerah dan percaya diri menggunakan matematika untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

B. Uraian Materi

1. Metode Penyelesaian SPLTV

Para peserta didik sekalian, tentu kalian ingat dengan ilustrasi penjual buah yang telah dipelajari pada Kegiatan Pembelajaran 1. Apakah kalian merasa bahwa materi yang dipelajari pada Kegiatan Pembelajaran 1 belum lengkap? Jika iya, apakah kalian tahu penyebabnya? Ya, betul sekali pada Kegiatan Pembelajaran 1 kalian belum mempelajari bagaimana mencari penyelesaian dari SPLTV. Pasti kalian sudah penasaran bukan? Baiklah mari kita melanjutkan pada Kegiatan Pembelajaran 2.

Pada Kegiatan Pembelajaran 2 ini kalian akan mempelajari metode atau teknik dalam menyelesaikan SPLTV. Kita akan mulai dengan melanjutkan mencari penyelesaian permasalahan penjual buah. Tentu kalian masih ingat bukan masalah yag dihadapi oleh penjual buah tersebut?
Ilustrasi masalah di kios buah. Seorang pedagang buah hendak memenuhi persediaan buah di kiosnya. Berdasarkan penjualan sehari-hari ada tiga jenis buah yang banyak dicari oleh pembeli, yaitu buah nanas, pisang, dan mangga. Namun karena keterbatasan modal dia tidak dapat sekaligus membeli buah-buahan yang banyak diminati tersebut. Oleh karenanya pedagang tersebut hanya dapat membeli jika modal sudah terkumpul. Hari pertama modal yang terkumpul adalah Rp 2.640.000,00 sehingga pedagang tersebut dapat membeli 3 dus buah nanas, 2 dus buah pisang, dan 5 dus buah mangga. Untuk hari kedua pedagang tersebut memperoleh modal Rp 1.510.000,00 dan dapat membeli 1 dus buah nanas, 3 dus buah pisang, serta 2 dus buah mangga. Sedangkan untuk hari ketiga dengan modal Rp 2.750.000,00 pedagang tersebut dapat membeli 4 dus buah nanas, 5 dus buah pisang, dan 3 dus buah mangga. Variabel x menunjukkan harga per dus buah nanas, variabel y menunjukkan harga per dus buah pisang dan variabel z menunjukkan harga per dus buah mangga. Untuk merapikan pembukuan keuangannya penjual buah harus membuat laporan pengeluaran setiap hari. Jika pengeluaran yang ditulis pada pembukuan dinyatakan dalam satuan dus, apa yang harus dilakukan oleh penjual buah tersebut? Dapatkah kalian membantu penjual buah menyelesaikan laporan keuangannya? Untuk membantu penjual buah menyelesaikan masalahnya, silahkan menyimak penjelasan berikut ini.

Hal pertama yang harus dilakukan oleh penjual buah tersebut adalah menentukan harga per dus buah nanas, pisang, dan mangga. Bagaimana caranya? Apakah kalian tahu?

Ada beberapa metode untuk menenentukan penyelesaian SPLTV. Pada kegiatan kali ini ada tiga metode yang dapat dipelajari, ialah sebagai berikut.

1. Metode Substitusi
2. Metode Eliminasi
3. Metode Substitusi dan Eliminasi (Campuran)

Berikut adalah penjelasan dari ketiga metode penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV).

1. Metode Substitusi

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dengan menggunakan metode substitusi, digunakan langkah-langkah sebagai berikut.

- Langkah 1
  Pilihlah salah satu persamaan yang sederhana kemudian nyatakan salah satu variabel ke dalam dua variabelnya lainnya. Misalkan dipilih persamaan linear kedua dan kita nyatakan x ke dalam variabel y dan z.
- Langkah 2
  Substitusikan/masukkan persamaan di langkah 1 kedalam kedua persamaan yang lain sehingga terbentuk sistem persamaan linear dua variabel yang baru.
- Langkah 3
  Selesaikan sistem persamaan linear dua variabel yang baru untuk menentukan nilai y dan z. Substitusikan kedua nilai ini untuk menentukan nilai x sehingga diperoleh penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel.

Contoh: dari ilustrasi masalah penjual buah diperoleh SPLTV berikut.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 2640000 \\ x + 3y + 2z = 1510000 \\ 4x + 5y + 3z = 2750000 \end{cases}$$

Dengan menggunakan metode substitusi kita dapat menentukan nilai x, y, dan z.

Alternatif Penyelesaian:

$3x + 2y + 5z = 2640000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$
$x + 3y + 2z = 1510000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$
$4x + 5y + 3z = 2750000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(3)$

Persamaaan (2) diubah kedalam fungsi y dan z, diperoleh:

x = 1510000 – 3y – 2z……………………...(4)

Substitusikan persamaan (4) ke persamaan (1), diperoleh:

3(1510000 – 3y – 2z) + 2y + 5z = 2640000
4530000 – 9y – 6z + 2y + 5z = 2640000
– 7y – z = – 1890000
7y + z = 1890000……………………... (5)

Substitusikan persamaan (4) ke persamaan (3), diperoleh:

4(1510000 – 3y – 2z) + 2y + 5z = 2750000
6040000 – 12y – 8z + 5y + 3z = 2750000
– 7y – 5z = – 3290000
7y + 5z = 3290000……………………... (6)

Persamaaan (5) diubah kedalam fungsi y, diperoleh:

$$z = 1890000 - 7y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Substitusikan persamaan (7) ke persamaan (6), diperoleh:

$$7y + 5(1890000 - 7y) = 3290000$$
$$7y + 9450000 - 35y = 3290000$$
$$-28y = -6160000$$
$$y = \frac{-616000}{-28}$$
$$y = 220000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

Substitusikan persamaan (8) ke persamaan (7), diperoleh:

$$z = 1890000 - 7(220000)$$
$$z = 1890000 - 1540000$$
$$z = 350000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

Substitusikan persamaan (8) dan (9) ke persamaan (4), diperoleh:

$$x = 1510000 - 3(220000) - 2(350000)$$
$$x = 1510000 - 660000 - 700000$$
$$x = 1510000 - 1360000$$
$$x = 150000$$

Dari langkah-langkah penyelesaian di atas diperoleh x = 150000, y = 220000, dan z = 350000. Jika dikembalikan ke permisalan diperoleh harga per dus buah nanas adalah Rp 150.000,00, harga per dus buah pisang adalah Rp 220.000,00, dan harga per dus buah mangga adalah Rp 350.000,00. Bagaimana peserta didik sekalian? Mudah bukan? Apakah di antara kalian masih ada yang kesulitan memahami metode substitusi? Jika iya, kalian dapat membaca kembali dan memahami satu per satu langkah-langkah penyelesaiannya.

2. Metode Eliminasi

Adapun langkah-langkah untuk menyelesaikan SPLTV dengan metode eliminasi adalah sebagai berikut.

- Langkah 1:
  Pilih persamaan yang memuat bentuk variabel yang paling sederhana. Eliminasi atau hilangkan salah satu variabel (misal x) sehingga diperoleh sistem persamaan dua variabel.
- Langkah 2:
  Eliminasi salah satu variabel dalam sistem persamaan dua variabel (misal y) sehingga diperoleh nilai salah satu variabel. Eliminasi variabel lainnya (yaitu z) untuk memperoleh nilai variabel yang kedua.
- Langkah 3:
  Tentukan nilai variabel ketiga (yaitu x) berdasarkan nilai (y dan z) yang diperoleh.

Contoh: dari ilustrasi masalah penjual buah diperoleh SPLTV berikut.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 2640000 \\ x + 3y + 2z = 1510000 \\ 4x + 5y + 3z = 2750000 \end{cases}$$

Dengan menggunakan metode eliminasi kita dapat menentukan nilai x, y, dan z.
Alternatif Penyelesaian:

$3x + 2y + 5z = 2640000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$
$x + 3y + 2z = 1510000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$
$4x + 5y + 3z = 2750000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(3)$

Eliminasi variabel x menggunakan persamaan (2) dan (1):

$$\begin{array}{r|l|l} x + 3y + 2z = 1510000 & \text{x}3 & 3x + 9y + 6z = 4530000 \\ 3x + 2y + 5z = 2640000 & \text{x}1 & \underline{3x + 2y + 5z = 2640000} \; - \\ & & \quad 7y + z = 1890000 \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{array}$$

Eliminasi variabel x menggunakan persamaan (2) dan (3):

$$\begin{array}{r|l|l} x + 3y + 2z = 1510000 & \text{x}4 & 4x + 12y + 8z = 6040000 \\ 4x + 5y + 3z = 2750000 & \text{x}1 & \underline{3x + 2y + 5z \;= 2640000} \; - \\ & & \quad 7y + 5z \;= 3290000 \ldots\ldots\ldots\ldots (5) \end{array}$$

Eliminasi variabel y menggunakan persamaan (4) dan (5):

$$\begin{aligned} 7y + z &= 1890000 \\ \underline{7y + 5z} &\underline{= 3290000} \; - \\ -4z &= -1400000 \\ z &= \frac{-1400000}{-4} \\ z &= 350000 \end{aligned}$$

Eliminasi variabel z menggunakan persamaan (4) dan (5):

$$\begin{array}{r|l|l} 7y + z = 1890000 & \text{x}5 & 35y + 5z = 9450000 \\ 7y + 5z = 3290000 & \text{x}1 & \underline{\;7y + 5z = 3290000} \; - \\ & & \quad 28y = 6160000 \\ & & \quad y = \frac{6160000}{28} \\ & & \quad y = 220000 \end{array}$$

$x = 1510000 - 3(220000) - 2(350000)$
$x = 150000$

Dari langkah-langkah penyelesaian di atas diperoleh x = 150000, y = 220000, dan z = 350000. Jika dikembalikan ke permisalan diperoleh harga per dus buah nanas adalah Rp 150.000,00, harga per dus buah pisang adalah Rp 220.000,00, dan harga per Poll Apakah di antara kalian masih ada yang kesulitan memahami metode eliminasi? Jika iya, kalian dapat membaca kembali dan memahami satu per satu langkah-langkah penyelesaiannya. Bandingkan antara metode substitusi dan eliminasi, manakah di antara keduanya yang menurut kalian lebih mudah?

3. Metode Eliminasi – Substitusi (Campuran)

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dengan menggunakan metode eliminasi, menggunakan langkah-langkah sebagai berikut.

- Langkah 1
  Pilihlah variabel mana dari persamaan yang mau dihilangkan atau dieliminasi, misalkan variabel x yang akan dieliminasi. Samakan koefi sien x pada persamaan pertama dan persamaan kedua, dengan cari mengalikan persamaan dengan bilangan sehingga tetap ekivalen. Kurangkan persamaan dengan persamaan kedua sehingga diperoleh persamaan linear dua variabel baru yang pertama.
- Langkah 2
  Samakan koefi sien x pada persamaan pertama dan persamaan ketiga, dengan cari mengalikan persamaan dengan sebuah sehingga tetap ekivalen. Kurangkan persamaan dengan persamaan ketiga sehingga diperoleh persamaan linear dua variabel baru yang ke dua.
- Langkah 3
  Selesaikan sistem persamaan linear dua variabel yang baru sehingga diperoleh nilai y dan z. Substitusikan nilai y dan x ke salah satu persamaan tiga variabel untuk memperoleh nilai x.

Contoh: dari ilustrasi masalah penjual buah diperoleh SPLTV berikut.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 2640000 \\ x + 3y + 2z = 1510000 \\ 4x + 5y + 3z = 2750000 \end{cases}$$

Dengan menggunakan metode eliminasi – substitusi kita dapat menentukan nilai x, y, dan z.

Alternatif Penyelesaian:

$3x + 2y + 5z = 2640000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$
$x + 3y + 2z = 1510000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$
$4x + 5y + 3z = 2750000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(3)$

Eliminasi variabel x menggunakan persamaan (2) dan (1):

$$\begin{array}{r|l|l} x + 3y + 2z = 1510000 & \text{x3} & 3x + 9y + 6z = 4530000 \\ 3x + 2y + 5z = 2640000 & \text{x1} & \underline{3x + 2y + 5z = 2640000} \; - \\ & & \quad 7y + z = 1890000 \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{array}$$

Eliminasi variabel x menggunakan persamaan (2) dan (3):

$$\begin{array}{r|l|l} x + 3y + 2z = 1510000 & \text{x4} & 4x + 12y + 8z = 6040000 \\ 4x + 5y + 3z = 2750000 & \text{x1} & \underline{3x + 2y + 5z \; = 2640000} \; - \\ & & \quad 7y + 5z \; = 3290000 \ldots\ldots\ldots\ldots (5) \end{array}$$

Eliminasi variabel y menggunakan persamaan (4) dan (5):

$$\begin{aligned} 7y + z &= 1890000 \\ \underline{7y + 5z} &\underline{= 3290000} \; - \\ -4z &= -1400000 \\ z &= \frac{-1400000}{-4} \\ z &= 350000 \ldots\ldots\ldots\ldots (6) \end{aligned}$$

Sustitusikan persamaan (6) ke persamaan (4), diperoleh:

$$7y + 350000 = 1890000$$
$$7y = 1890000 - 350000$$
$$7y = 1540000$$
$$y = \frac{1540000}{7}$$
$$y = 220000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Substitusikan persamaan (6) dan (7) ke pesamaan (2), diperoleh:

$$x = 1510000 - 3(220000) - 2(350000)$$
$$x = 150000$$

Dari langkah-langkah penyelesaian di atas diperoleh x = 150000, y = 220000, dan z = 350000. Jika dikembalikan ke permisalan diperoleh harga per dus buah nanas adalah Rp 150.000,00, harga per dus buah pisang adalah Rp 220.000,00, dan harga per dus buah mangga adalah Rp 350.000,00. Bagaimana peserta didik sekalian? Mudah bukan? Apakah di antara kalian masih ada yang kesulitan memahami metode eliminasi – substitusi? Jika iya, kalian dapat membaca kembali dan memahami satu per satu langkah-langkah penyelesaiannya. Bandingkan antara ketiga metode yang sudah kalian pelajari, manakah di antara ketiganya yang menurut kalian lebih mudah? Dalam kasus lain, dengan SPLTV yang sama, maka dapat dikatakan bahwa penyelesaian SPLTV adalah (150000, 220000, dan 350000). Sedangkan himpunan penyelesaian HP = {(150000, 220000, 350000)}.

2. Penerapan SPLTV

Peserta didik sekalian, bagaimana penjelasan tentang ketiga metode untuk menyelesaikan SPLTV? Cukup mudah bukan? Setelah kalian mempelajari tiga metode tersebut, maka kita boleh menggunakan ketiganya untuk menyelesaikan masalah kontekstual dalam kehidupan sehari-hari terkait dengan SPLTV. Untuk itu silahkan kalian mencermati ilustrasi dan pembahasan berikut.

Contoh:

Gambar 2. Ilustrasi Kegiatan Posyandu
(Sumber: https://www.nusabali.com/index.php/berita/39612/dpmd-gelar-rakor-posyandu)

Di sebuah Puskesmas terdapat beberapa map untuk administrasi kegiatan Posyandu. Dari beberapa map tersebut, terdapat sebuah map berisi 12 Kartu Menuju Sehat (KMS) yang berwarna merah, kuning dan hijau untuk satu kali kegiatan Posyandu. Kartu merah untuk bayi usia 0 – 6 bulan, kartu kuning untuk bayi usia 6 – 12 bulan, sedangkan kartu hijau untuk usia 1 – 2 tahun. Dua kali kartu merah dikurangi satu kartu kuning kemudian ditambah satu kartu hijau sama dengan 6. Tiga kali kartu merah ditambah dua kali kartu kuning dan dikurangi satu kali kartu hijau sama degan 8. Berapakah jumlah bayi usia 0 – 6 bulan, 6 – 12 bulan, dan 1 – 2 tahun pada kegiatan Posyandu tersebut? Setiap bayi yang datang ke Posyandu harus diberi vaksin. Jika vaksin yang tersedia untuk bayi usia 0 – 6 bulan, bayi usia 6 – 12 bulan, dan 1 – 2 tahun masing-masing berjumlah 10 buah, maka berapakah masing-masing sisa vaksin yang tidak digunakan dalam kegiatan Posyandu untuk bayi usia 0 – 6 bulan, bayi usia 6 – 12 bulan, dan 1 – 2 tahun?

Alternatif Penyelesaian:
Misalkan: x = kartu merah
y = kartu kuning
z = kartu hijau
Dari permisalan diperoleh SPLTV:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 2x - y + z = 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ 3x + 2y - z = 8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

Eliminasi variabel z dari persamaan (1) dan (2)

$$\begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ \underline{2x - y + z = 6 \ -} \\ -x + 2y = 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{array}$$

Eliminasi variabel z dari persamaan (1) dan (3) atau (2) dan (3). Misal dipilih persamaan (2) dan (3), maka:

$$\begin{array}{l} 2x - y + z = 6 \\ \underline{3x + 2y - z = 8 \ +} \\ 5x + y = 14 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5) \end{array}$$

Eliminasi persamaan (4) dan (5)

$$\begin{array}{lll} -x + 2y = 6 & |x1| \Leftrightarrow & -x + 2y = 6 \\ 5x + y = 14 & |x2| \Leftrightarrow & \underline{10x + 2y = 28 \ -} \\ & & -11x = -22 \\ & & x = 2 \end{array}$$

Nilai $x = 2$ disubstitusi ke persamaan (4) atau (5). Misal dipilih persamaan (5), maka:

$$\begin{aligned} 5x + y &= 14 \\ 5.2 + y &= 14 \\ y &= 14 - 10 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Nilai $x = 2$ dan $y = 4$ disubstitusi ke (1), (2), atau (3). Misal dipilih persamaan (1), maka:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ 2 + 4 + z &= 12 \\ z &= 12 - 6 = 6 \end{aligned}$$

Dari langkah-langkah penyelesaian di atas diperoleh x = 2, y = 4, dan z = 6. Jika dikembalikan ke permisalan diperoleh:
Jumlah kartu merah adalah 2
Jumlah kartu kuning adalah 4
Jumlah kartu hijau adalah 6.
Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa pada kegiatan Posyandu terdapat:
Jumlah bayi usia 0 – 6 bulan: 2 orang
Jumlah bayi usia 6 – 12 bulan: 4 orang
Jumlah bayi usia 1 – 2 tahun: 6 orang

Lalu bagaimana menentukan banyaknya vaksin yang tersisa? Untuk mencari banyaknya vaksin yang tersisa adalah sebagai berikut.
Banyaknya vaksin masing-masing ada 10 buah, jadi banyaknya vaksin yang tersisa adalah sebagai berikut.
Sisa vaksin untuk bayi usia 0 – 6 bulan = 10 – 2 = 8
Sisa vaksin untuk bayi usia 6 – 12 bulan = 10 – 4 = 6
Sisa vaksin untuk bayi usia 1 – 2 tahun = 10 – 6 = 4

Bagaimana peserta didik sekalian? Mudah bukan? Apakah di antara kalian masih ada yang kesulitan memahami metode untuk menentukan penyelesaian permasalahan kontekstual dalam kehidupan sehari-hari terkait SPLTV? Jika iya, kalian dapat membaca kembali dan memahami satu per satu penjelasan yang telah diuraikan.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian x, y dan z dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut: $\begin{cases} 3x - y + 2z = 15 \\ 2x + y + z = 13 \\ 3x + 2y + 2z = 24 \end{cases}$

Alternatif Jawaban:

$3x - y + 2z = 15$ ………………….. (1)
$2x + y + z = 13$ ………………….. (2)
$3x + 2y + 2z = 24$ ………………….. (3)

Langkah pertama, Gunakan metode eliminasi terhadap salah satu persamaan terlebih dahulu.
Eliminasi persamaan (1) dan (2) :

$$\begin{array}{lll} 3x - y + 2z = 15 & | \times 1 \rightarrow & 3x - y + 2z = 15 \\ 2x + y + z = 13 & | \times 2 \rightarrow & \underline{4x + 2y + 2z = 26} \; - \\ & & -x - 3y = -11 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{array}$$

Eliminasi persamaan (2) dan (3) :

$$\begin{array}{lll} 2x + y + z = 13 & | \times 2 \rightarrow & 4x + 2y + 2z = 26 \\ 3x + 2y + 2z = 24 & | \times 1 \rightarrow & \underline{3x + 2y + 2z = 24} \; - \\ & & x = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5) \end{array}$$

Langkah kedua, Karena dari persamaan (5) sudah didapatkan nilai x, sekarang tinggal menggunakan metode substitusi terhadap persamaan (4)

Substitusi persamaan (5) ke (4) :

$$
\begin{aligned}
-x - 3y &= -11\\
-(2) - 3y &= -11\\
3y &= -11 + 2\\
3y &= 9\\
y &= 3
\end{aligned}
$$

Langkah ketiga, karena sudah didapatkan nilai x dan y. Langsung saja disubtitusikan nilai x dan y pada salah satu persamaan 1, 2, atau 3 untuk mengetahui nilai z:

Substitusi nilai y ke persamaan (2) :

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= 13\\
2(2) + 3 + z &= 13\\
4 + 3 + z &= 13\\
7 + z &= 13\\
z &= 13 - 7\\
z &= 6
\end{aligned}
$$

Maka himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear tersebut adalah {(2, 3, 6)}.

Apakah kalian sudah memahami penjelasan dari kedua contoh yang ada? Ada perbedaan model soal dari contoh pertama dan kedua. Pada contoh pertama soal berbentuk cerita dan bentuk persamaan linear tiga variabelnya belum ada. Jadi kita harus membuat persamaannya terlebih dahulu. Hal ini berbeda dengan contoh kedua, di mana bentuk persamaan linear tiga variabelnya sudah ada. Sehingga kita tidak perlu membuat persamaan linear tiga variabelnya dan dapat langsung menyelesaikan dengan menggunakan metode yang ada. Menurut kalian profesi apa dalam kehidupan sehari-hari yang sering menggunakan penerapan SPLTV ini? Mengapa?

C. Rangkuman

1. Terdapat tiga metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel pada kegiatan pembelajaran kali ini, yaitu: metode subtitusi, metode eliminasi, dan metode eliminasi – substitusi.
2. Secara umum, langkah-langkah penyelesaian masalah kontekstual yang berkaitan dengan sistem persamaan linear tiga variabel adalah sebagai berikut:
   - Menyelesaikan model matematika dengan menggunakan metode penyelesaian dan operasi aljabar secara tepat.
   - Menafsirkan dan memeriksa kesesuaian dan masuk akalnya jawaban dari model matematika terhadap masalah semula, untuk mendapat solusi dari masalah.

D. Latihan Soal

Soal Pilihan Ganda

Pilihlah satu jawaban yang paling benar.

1. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel berikut.
$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 3 \\ 6x + 8y - 5z = 7 \\ -3x + 3y + 4y = 15 \end{cases}$$
A. $\{(1, 2, 3)\}$
B. $\{(3, 7, 15)\}$
C. $\{(2, 6, -3)\}$
D. $\{(1, 3, 2)\}$
E. $\{(15, 7, 3)\}$

2. Tentukan nilai z jika diketahui SPLTV berikut $\begin{cases} x + y + z = -6 \\ x + y - 2z = 3 \\ x - 2y + z = 9 \end{cases}$.
A. – 5
B. – 3
C. – 1
D. 1
E. 2

3. Toko alat tulis pak rudi menjual alat tulis berisi buku, spidol, dan tinta dalam 3 jenis paket sebagai berikut. Paket A: 3 buku, 1 spidol, 2 tinta seharga Rp 17.200,00. Paket B: 2 buku, 2 spidol, 3 tinta seharga Rp 19.700,00. Paket C: 1 buku, 2 spidol, 2 tinta seharga Rp 14.000,00. Hitunglah harga 1 buku + 1 spidol + 1 tinta.
A. Rp 2.800,00
B. Rp 3.000,00
C. Rp 5.800,00
D. Rp 8.500,00
E. Rp 11.500,00

4. Tiga bersaudara Lia, Ria, dan, Via berbelanja di toko buah. Mereka membeli Apel, Jambu, dan Mangga dengan hasil masing-masing sebagai berikut: Lia membeli dua buah Apel, satu buah Jambu, dan satu buah Mangga seharga Rp47.000,00. Ria membeli satu buah Apel, dua buah Jambu, dan satu buah Mangga seharga Rp43.000,00. Via membeli tiga buah Apel, dua buah Jambu, dan satu buah Mangga seharga Rp71.000,00. Ibu memberikan uang sebesar Rp 100.000,00 kepada Lia. Jika Ibu menyuruh Lia untuk membeli 2 Apel, 3 Jambu, dan 1 Mangga, berapakah sisa uang kembalian yang akan diberikan Lia kepada Ibu?
A. Rp 71.000,00
B. Rp 67.000,00
C. Rp 47.000,00
D. Rp 43.000,00
E. Rp 33.000,00

5. Masa kehamilan rata-rata (dalam hari) dari sapi, kuda dan kerbau apabila dijumlahkan adalah 975 hari. Masa kehamilan kerbau lebih lama 85 hari dari masa kehamilan sapi. Dua kali masa kehamilan sapi ditambah masa kehamilan kerbau sama dengan 3 kali masa kehamilan kuda dikurang 65. Berapa hari rata-rata masa kehamilan masing-masing hewan?
   A. kerbau: 330 hari, sapi: 280 hari, kuda: 365 hari
   B. kerbau: 330 hari, sapi: 365 hari, kuda: 280 hari
   C. kerbau: 365 hari, sapi: 330 hari, kuda: 280 hari
   D. kerbau: 365 hari, sapi: 330 hari, kuda: 330 hari
   E. kerbau: 365 hari, sapi: 280 hari, kuda: 330 hari

Kunci dan Pembahasan

1. A

   Alternatif Penyelesaian:

   Dari SPLTV beri nama persamaan yang ada
   $2x + 5y - 3z = 3 \quad \ldots (1)$
   $6x + 8y - 5z = 7 \quad \ldots (2)$
   $-3x + 3y + 4z = 15 \ldots (3)$

   Eliminasikan variabel z menggunakan (1) dan (2):
   $2x + 5y - 3z = 3 \; |\times 5| \Leftrightarrow 10x + 25y - 15z = 15$
   $6x + 8y - 5z = 7 \; |\times 3| \Leftrightarrow 18x + 24y - 15z = 21 \; -$
   $-8x + y = -6 \quad \ldots (4)$

   Eliminasikan variabel z menggunakan (1) dan (3):
   $2x + 5y - 3z = 3 \; |\times 4| \Leftrightarrow 8x + 20y - 12z = 12$
   $-3x + 3y + 4z = 15 \; |\times 3| \underline{\Leftrightarrow -9x + 9y + 12z = 45} \; +$
   $-x + 29y = 57 \quad \ldots (5)$

   Eliminasikan variabel y menggunakan (4) dan (5):
   $-8x + y = -6 \; |\times 29| \Leftrightarrow -232x + 29y = -174$
   $-x + 29y = 57 \; |\times 1| \Leftrightarrow \underline{-x + 29y = 57} \; -$
   $-231x = -231$
   $x = 1$

   Substitusikan x ke (4):
   $-8x + y = -6$
   $-8(1) + y = -6$
   $-8 + y = -6$
   $y = 8 - 6$
   $y = 2$

   Kemudian, subsitusikan x dan y ke persamaan (1), diperoleh:
   $2x + 5y - 3z = 3$
   $2(1) + 5(2) - 3z = 3$
   $2 + 10 - 3z = 3$
   $12 - 3z = 3$
   $-3z = 3 - 12 = -9$
   $z = -9/-3$
   $z = 3$

   Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {(1, 2, 3)}

2. B

   Alternatif Penyelesaian:

   Dari SPLTV yang ada beri nama persamaan, menjadi
   $x + y + z = -6 \ldots (1)$
   $x + y - 2z = 3 \ldots (2)$
   $x - 2y + z = 9 \ldots (3)$

Tentukan persamaan x melalui (1)
$x + y + z = -6 \Leftrightarrow x = -6 - y - z$ … (4)

Substitusikan (4) ke (2)
$x + y - 2z = 3$
$-6 - y - z + y - 2z = 3$
$-6 - 3z = 3$
$3z = -9$
$z = -3$
Sehingga diperoleh nilai $z = -3$

3. D
Alternatif Penyelesaian
Misal: b: harga 1 buah buku
s: harga 1 buah spidol
t: harga 1 buah tinta
Maka, model matematikanya adalah :
$3b + s + 2t = 17.200$ … (1)
$2b + 2s + 3t = 19.700$ … (2)
$b + 2s + 2t = 14.000$ … (3)

Eliminasikan variabel t menggunakan persamaan (1) dan (2):
$3b + s + 2t = 17.200 \ |\times 3| \Leftrightarrow 9b + 3s + 6t = 51.600$
$2b + 2s + 3t = 19.700 \ |\times 2| \Leftrightarrow \underline{4b + 4s + 6t = 39.400} \ -$
$5b - s = 12.200$ … (4)

Eliminasikan variabel t menggunakan persamaan (1) dan (3):
$3b + s + 2t = 17.200$
$\underline{b + 2s + 2t = 14.000} \ -$
$2b - s = 3.200$
$s = 2b - 3.200$ … (5)

Substitusikan persamaan (5) ke (4), diperoleh:
$5b - s = 12.200$
$5b - (2b - 3.200) = 12.200$
$5b - 2b + 3.200 = 12.200$
$3b = 12.200 - 3.200$
$3b = 9.000$
$b = 9.000 \div 3$
$b = 3.000$

Substitusikan nilai b ke persamaan (5), diperoleh:
$s = 2b - 3.200$
$s = 2(3.000) - 3.200$
$s = 6.000 - 3.200$
$s = 2.800$
Substitusikan nilai b dan s ke persamaan (3), diperoleh:
$b + 2s + 2t = 14.000$
$3.000 + 2(2.800) + 2t = 14.000$
$3.000 + 5.600 + 2t = 14.000$
$8.600 + 2t = 14.000$
$2t = 14.000 - 8.600$
$2t = 5.400$
$t = 5.400 \div 2 = 2.700$

Diperoleh harga 1 buah buku adalah Rp3.000, 1 buah spidol adalah Rp2.800, dan 1 buah tinta adalah Rp2.700. Sehingga harga 1 buku + 1 spidol + 1 tinta = Rp 3.000,00 + Rp 2.800,00 + Rp 2.700,00 = Rp 8.500,00.

4. E

Alternatif Penyelesaian

Misal: a = Harga 1 buah Apel
j = Harga 1 buah Jambu
m = Harga 1 buah Mangga

Maka, model matematikanya adalah

$2a + j + m = 47.000$ … (1)
$a + 2j + m = 43.000$ … (2)
$3a + 2j + m = 71.000$ …(3)

Eliminasikan variabel j dan m menggunakan persamaan (2) dan (3):

$$\begin{aligned} a + 2j + m &= 43.000 \\ \underline{3a + 2j + m} &\underline{= 71.000} \; - \\ -2a &= -28.000 \\ a &= 14.000 \end{aligned}$$

Eliminasikan variabel m menggunakan persamaan (1) dan (2), dan substitusikan nilai a:

$$\begin{aligned} 2a + j + m &= 47.000 \\ \underline{a + 2j + m} &\underline{= 43.000} \; - \\ a - j &= 4.000 \\ j &= a - 4.000 \\ j &= 14.000 - 4.000 \\ j &= 10.000 \end{aligned}$$

Substitusikan nilai a dan j ke persamaan (1):

$2a + j + m = 47.000$
$2(14.000) + 10.000 + m = 47.000$
$28.000 + 10.000 + m = 47.000$
$38.000 + m = 47.000$
$m = 47.000 - 38.000$
$m = 9.000$

Diperoleh harga 1 buah Apel adalah Rp 14.000, 1 buah Jambu adalah Rp 10.000, dan 1 buah Mangga adalah Rp 9.000. Ibu menyuruh Lia untuk membeli 2 Apel, 3 Jambu, dan 1 Mangga maka jumlah uang yang dibelanjakan oleh Lia adalah:
(2 x 14000) + (3 x 10000) + (1 x 9000) = 28000 + 30000 + 9000 = 67000. Uang yang diberikan Ibu kepada Lia adalah Rp 100.000,00. Sehingga sisa uang kembalian yang akan diberikan Lia kepada Ibu adalah:
Rp 100.000,00 – Rp 67.000 = Rp 33.000,00

5. C

Alternatif Penyelesaian:

Misal: masa kehamilan sapi sebagai x,
masa kehamilan kuda sebagai y,
masa kehamilan kerbau sebagai z.

$x + y + z = 975$ ... (1)
$z = 85 + x$ ... (2)
$2x + z = 3y - 65$ ... (3)

Substitusi persamaan (2) ke persamaan (1), diperoleh:

$x + y + (85 + x) = 975$

$2x + y + 85 = 975$

$2x + y = 890 \quad ... (4)$

Substitusikan persamaan (2) ke persamaan (3), diperoleh

$2x + (85 + x) = 3y - 65$

$3x + 85 = 3y - 65$

$3x - 3y = -65 - 85$

$3x - 3y = - 150$

$x - y = -50 \quad ... (5)$

Eliminasi variabel y pada persamaan (4) dan (5)

$$\begin{array}{l} 2x + y = 890 \\ \underline{\ x - y = -50 \quad +} \\ 3x \qquad = 840 \\ \qquad x = 280 \end{array}$$

Substitusikan x ke persamaan (5), diperoleh:

$280 - y = - 50$

$-y = -50 - 280$

$-y = - 330$

$y = 330$

Substitusikan nilai x ke persamaan (2)

$z = 85 + 280$

$z = 365$

Jadi masa kehamilan sapi adalah 280 hari, kuda 330 hari, dan kerbau 365 hari.

Nilai Latihan soal ini adalah: $\frac{Jumlah\ jawaban\ benar}{5} x\ 100$

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah Saya dapat menggunakan metode substitusi untuk menyelesaikan SPLTV?	Ya	Tidak
2	Apakah Saya dapat menggunakan menggunakan metode eliminasi untuk menyelesaikan SPLTV?	Ya	Tidak
3	Apakah Saya dapat menggunakan menggunakan metode eliminasi – substitusi untuk menyelesaikan SPLTV?	Ya	Tidak
4	Apakah Saya dapat menafsirkan hasil dari penyelesaian SPLTV?	Ya	Tidak
5	Apakah Saya dapat menarik kesimpulan dari hasil penafsiran yang sudah dilakukan?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segeralah kalian lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling benar.

1. Penyelesaian dari sistem persamaan $\begin{cases} 3x+7y+2z=8 \\ 4x+2y-5z=-19 \\ 6y-4z=14 \end{cases}$ adalah …
   A. x = 5, y = 3, dan z = 1
   B. x = 4, y = –5, dan z = 1
   C. x = –3, y = 4, dan z = 1
   D. x = –5, y = 3, dan z = 2
   E. x = –5, y = 3, dan z = 1

2. Tentukan penyelesaian dari SPLTV berikut : $\begin{cases} 2a + b - 2c = 19 \\ 4a + 2b + c = 13 \\ a + b + 2c = 3 \end{cases}$
   A. (– 4, 17, – 5)
   B. (– 4, – 5, 17)
   C. (– 5, 17, – 4)
   D. (– 5, – 4, 17)
   E. (– 4, 19, – 5)

3. Jika $\{(x_o, y_o, z_o)\}$memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} 3x-2y-3z=5 \\ x+y-2z=3 \\ x-y+z=-4 \end{cases}$, maka nilai z_o adalah …
   A. –3
   B. –2
   C. –1
   D. 4
   E. 5

4. Nilai dari x - y + z dari sistem persamaan linear tiga variabel $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y - 3z = -9 \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}$ adalah ….
   A. 1
   B. 2
   C. 5
   D. 6
   E. 9

5. Harga 2 kg mangga, 2 kg jeruk, dan 1 kg anggur adalah Rp70.000,00 dan harga 1 kg mangga, 2 kg jeruk, dan 2 kg anggur adalah Rp90.000,00. Jika harga 2 kg mangga, 2 kg jeruk, dan 3 kg anggur Rp130.000,00, maka harga 1 kg jeruk adalah …
   A. Rp5.000,00
   B. Rp7.500,00
   C. Rp10.000,00
   D. Rp12.000,00
   E. Rp15.000,00

6. Diketahui tiga tahun lalu, umur A sama dengan 2 kali umur B. sedangkan dua tahun yang akan datang, 4 kali umur A sama dengan umur B ditambah 36 tahun. Umur A sekarang adalah … tahun
   A. 4
   B. 6
   C. 9
   D. 12

E. 15
7. Toko A, toko B, dan toko C menjual sepeda. Ketiga toko tersebut selalu berbelanja di sebuah distributor sepeda yang sama. Toko A harus membayar Rp 5.500.000,00 untuk pembelian 5 sepeda jenis I dan 4 sepeda jenis II. Toko B harus membayar RP 3.000.000,00 untuk pembelian 3 sepeda jenis I dan 2 sepeda jenis II. Jika toko C membeli 6 sepeda jenis I dan 2 sepeda jenis II, maka toko C harus membayar …
A. Rp 3.500.000,00
B. Rp 4.000.000,00
C. Rp 4.500.000,00
D. Rp 5.000.000,00
E. Rp 5.500.000,00
8. Irma membeli 2 kg apel dan 3 kg jeruk dengan harga 57.000,00 sedangkan Ade membeli 3 kg apel dan 5 kg jeruk dengan harga Rp 90.000,00. Jika Surya hanya membeli 1 kg Apel dan 1 kg Jeruk, kemudian ia membayar dengan uang Rp 100.000,00, maka uang kembalian yang diterima Surya adalah …
A. Rp 24.000,00
B. Rp 42.000,00
C. Rp 67.000,00
D. Rp 76.000,00
E. Rp 80.000,00
9. Jumlah tiga buah bilangan adalah 75. Bilangan pertama lima lebihnya dari jumlah bilangan lain. Bilangan kedua sama dengan $\frac{1}{4}$ dari jumlah bilangan yang lain. Bilangan pertamanya adalah …
A. 15
B. 20
C. 30
D. 35
E. 40
10. Harga 2 buah pisang, 2 buah apel, dan sebuah mangga adalah Rp 1.400,00. di toko buah yang sama harga sebuah pisang, sebuah apel, dan 2 buah mangga adalah Rp 1.300,00, sedangkan harga sebuah pisang, 3 buah apel, dan sebuah mangga adalah Rp 1.500,00. Harga sebuah pisang, sebuah apel, dan sebuah mangga di toko buah tersebut adalah …
A. Rp 700,00
B. Rp 800,00
C. Rp 850,00
D. Rp 900,00
E. Rp 1.200,00
11. Ali, Budi, Cici, dan Dedi pergi ke toko koperasi membeli buku tulis, pena, dan pensil dengan merk yang sama. Ali membeli 3 buku tulis, 1 pena, dan 2 pensil dengan harga Rp 11.000,00. Budi membeli 2 buku tulis, 3 pena, dan 1 pensil dengan harga Rp 14.000,00. Cici membeli 1 buku tulis, 2 pena, dan 3 pensil dengan harga Rp 11.000,00. Dedi membeli 2 buku tulis, 1 pena, dan 1 pensil. Berapa rupiah Dedi harus membayar?
A. Rp 6.000,00
B. Rp 7.000,00
C. Rp 8.000,00
D. Rp 9.000,00
E. Rp 10.000,00
12. Pada sebuah toko buku, Rana membeli alat-alat tulis berupa 4 buku, 2 pulpen, dan 3 pensil dengan harga Rp 26.000,00. Lisa membeli 3 buku, 3 pulpen, dan 1 pensil dengan harga Rp 21.000,00. Nina membeli 3 buku dan 1 pensil dengan harga Rp

12.000,00. Jika Raya membeli 2 pulpen dan 3 pensil maka berapakah harga yang harus dibayar oleh Raya?

A. Rp 26.000,00
B. Rp 21.000,00
C. Rp 13.200,00
D. Rp 12.000,00
E. Rp 8.600,00

13. Ibu Sonia membeli 5 kg telur, 2 kg daging, dan 1 kg udang dengan harga Rp 265.000. Ibu Endang membeli 3 kg telur dan 1 kg daging dengan harga Rp 126.000. Ibu Sinta membeli 3 kg daging dan 2 kg udang dengan harga Rp 320.000. Jika Ibu Ani membeli 2 kg telur, 1 kg daging, dan 1 kg udang ditempat yang sama, ia harus membayar sebesar… .

A. Rp 102.000
B. Rp 139.000
C. Rp 174.000
D. Rp 218.000
E. Rp 310.000

14. Bu Riani membeli beras 5 kg Grade A, 2 kg grade B, dan 3 kg grade C seharga Rp 132.000,-. Di hari yang sama Bu Irma membeli beras di toko yang sama untuk 7 kg beras Grade B dan 3 Grade C seharga Rp 127.000,-. Tetangga yang lain pun membeli beras di toko yang sama dengan Bu Riani dan Bu Irma dengan harga Rp 39.000,- untuk 3 kg beras Grade B. Berapakah harga beras Grade A per kilonya?

A. Rp 15.000,00
B. Rp 14.500,00
C. Rp 13.500,00
D. Rp 12.000,00
E. Rp 10.000,00

15. Seorang penjahit membutuhkan 2 meter kain A, 1 meter kan B dan 3 kain C yang dibeli seharga Rp 106.000,- untuk membuat gorden model pertama.Sementara untuk membuat gaun dibutuhkan 2 meter kain B dan 2 meter C yang dibeli seharga Rp 64.000,- Penjahit itu membeli kain tambahan untuk pesanan tambahan yaitu 3 meter kain A, 2 Meter kain B seharga Rp 90.000,- Berapakah harga setiap meter kain A, B, dan C?

A. Rp 15.000,00, Rp 15.000,00, Rp 17.000,00
B. Rp 20.000,00, Rp 17.000,00, Rp 17.000,00
C. Rp 20.000,00, Rp 17.000,00, Rp 15.000,00
D. Rp 15.000,00, Rp 20.000,00, Rp 17.000,00
E. Rp 20.000,00, Rp 15.000,00, Rp 17.000,00

Kunci Jawaban Evaluasi

1. E
2. A
3. A
4. B
5. C
6. C
7. C
8. D
9. E
10. D
11. C
12. C
13. B
14. A
15. E

Nilai Latihan soal ini adalah: $\frac{\boldsymbol{Jumlah\ jawaban\ benar}}{\mathbf{15}} \boldsymbol{x}\ \mathbf{100}$

KRITERIA PINDAH MODUL

Peserta didik dinyatakan memahami modul ini atau dapat berpindah ke modul berikutnya apabila telah memenuhi salah satu persyaratan berikut.

1. Mampu mengerjakan soal latihan secara lengkap, benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, dengan hasil minimal 75%.
2. Mampu mengerjakan evaluasi untuk modul ini dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, dengan hasil minimal 75%.

Peserta didik dinyatakan belum memahami dan menguasai modul ini serta belum dapat berpindah ke modul berikutnya apabila:

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan dengan hasil di bawah 75%.
2. Mengerjakan evaluasi dengan hasil di bawah 75%.

DAFTAR PUSTAKA

Kemendikbud. 2017. *Modul 2: Membuka Bisnis. Matematika Paket C, Setara Kelas X SMA/MA*. Jakarta: Dirjen PAUD dan DIKMAS. Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan.

Sinaga, Bornok, dkk. 2017. Matematika SMA/MA/SMK/MAK Untuk Kelas X. Jakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

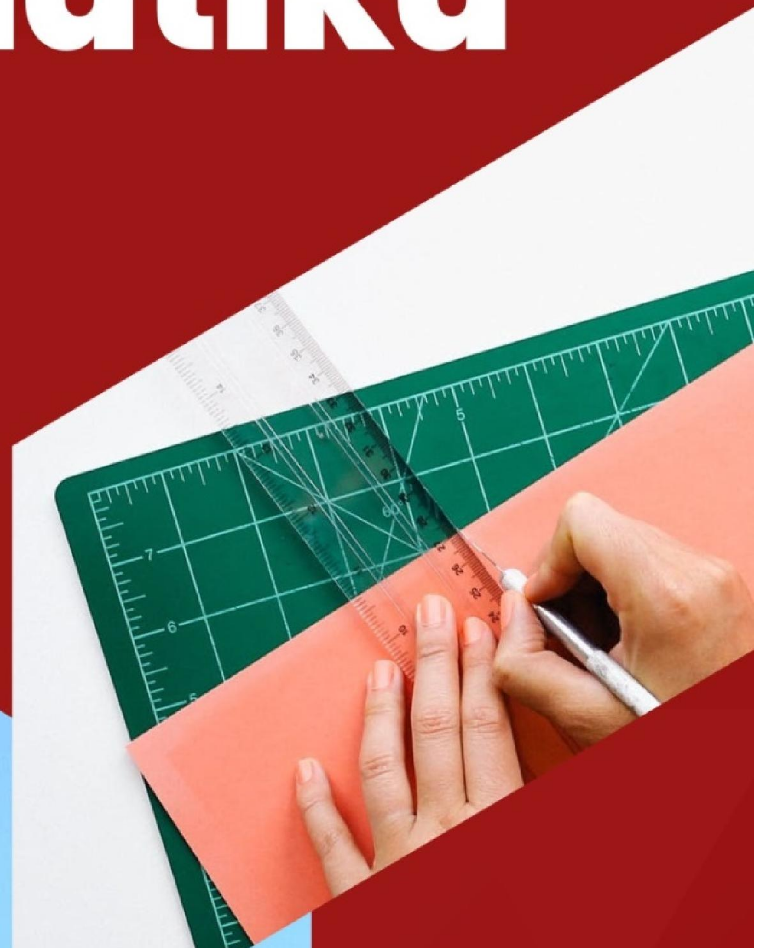
https://ezhpe.files.wordpress.com/2013/02/jual-buah.jpg. 2013. Diakses pada tanggal 10 September 2020.

https://www.nusabali.com/index.php/berita/39612/dpmd-gelar-rakor-posyandu. 2018. Diakses pada tanggal 10 September 2020.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI, PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS
X

SISTEM PERTIDAKSAMAAN DUA VARIABEL

MATEMATIKA UMUM KELAS X

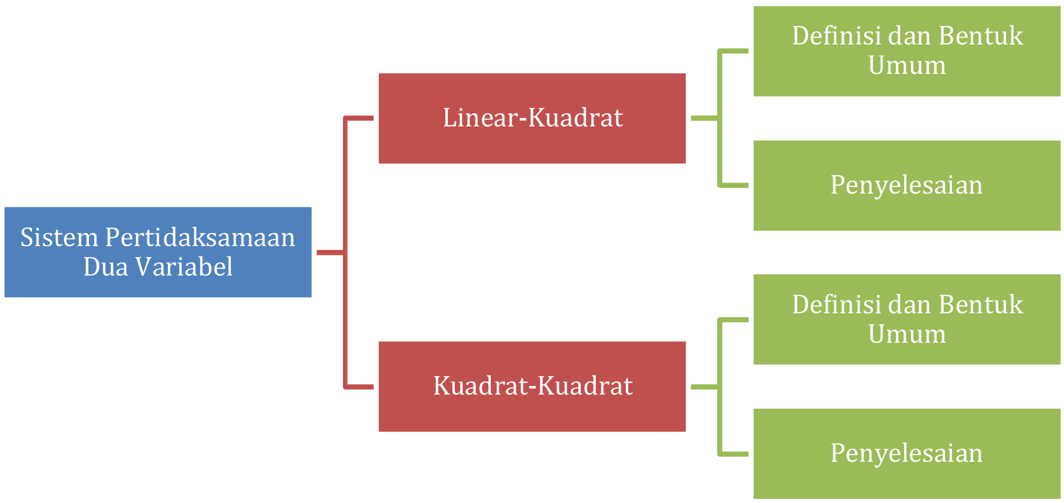
PENYUSUN
Yenni Dian Anggraini, S.Pd.,M.Pd.,MBA.
SMA Negeri 9 Kendari

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Variabel	:	lambang pengganti suatu bilangan yang belum diketahui nilainya dengan jelas, variabel disebut juga peubah.
Kalimat terbuka	:	sebuah kalimat yang memiliki variabel atau memuat variabel.
Pertidaksamaan	:	kalimat terbuka yang menggunakan relasi tidak sama ($>$, $<$, $\leq$, atau $\geq$).
Pertidaksamaan linear	:	pertidaksamaan yang setiap sukunya mengandung konstanta dengan variabel berderajat satu.
Pertidaksamaan kuadrat	:	pertidaksamaan yang setiap sukunya mengandung konstanta dengan variabel berderajat dua.
Pertidaksamaan linear dua variabel	:	pertidaksamaan linear yang memiliki dua variabel.
Pertidaksamaan kuadrat dua variabel	:	pertidaksamaan kuadrat yang memiliki dua variabel.
Sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat atau SPtDVLK	:	kumpulan beberapa pertidaksamaan yang sedikitnya memuat satu pertidaksamaan linear dan satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel.
Sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat atau SPtDVKK	:	kumpulan beberapa pertidaksamaan yang memuat paling sedikit satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel.
Penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel	:	perpotongan atau irisan dari beberapa pertidaksamaan yang membentuk sistem tersebut.
Metode grafik	:	metode yang digunakan untuk melihat secara visual gambaran tentang daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan dua variabel.

PETA KONSEP


Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel
Linear-Kuadrat
Definisi dan Bentuk Umum
Penyelesaian
Kuadrat-Kuadrat
Definisi dan Bentuk Umum
Penyelesaian

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran : Matematika Umum
Kelas : X (Sepuluh)
Alokasi Waktu : 8 JP
Judul Modul : Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel

B. Kompetensi Dasar

3.4 Menjelaskan dan menentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat)

4.4 Menyajikan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat)

C. Deskripsi Singkat Materi

Pada modul ini peserta didik akan mempelajari konsep, penyelesaian dan penerapan sistem pertidaksamaan dua variabel (SPtDV). Sistem pertidaksamaan dua variabel pada materi kali ini terdiri atas sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat dan sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat. Untuk mempelajari modul ini, para peserta didik diharapkan telah menguasai dasar-dasar pemfaktoran, penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan linear serta penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan kuadrat. Selain penjelasan mengenai materi yang ditampilkan, modul ini juga dilengkapi dengan latihan untuk menguji pemahaman dan penguasaan dari peserta didik terhadap materi yang telah dipelajari. Modul ini disusun dengan bahasa yang sederhana, contoh-contoh yang kontekstual, dan dibuat berurutan sesuai dengan urutan materi yang terlebih dahulu perlu dikuasai. Setelah memahami materi ini peserta didik diharapkan dapat menentukan penyelesaian SPtDV dan menerapkan pada permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini hal-hal yang perlu dilakukan oleh peserta didik adalah sebagai berikut.

1. Membaca pendahuluan modul untuk mengetahui arah pengembangan modul.
2. Membaca kompetensi dasar dan tujuan yang ingin dicapai melalui modul.
3. Membaca dan memahami peta konsep agar memperoleh gambaran yang utuh mengenai modul.
4. Mempelajari modul secara berurutan agar memperoleh pemahaman yang utuh.
5. Memahami contoh-contoh soal yang ada, dan mengerjakan semua soal latihan yang ada.
6. Mempelajari kembalih materi yang terkait jika dalam mengerjakan soal menemui kesulitan.
7. Mengikuti semua tahapan dan petunjuk yang ada pada modul ini.
8. Mempersiapkan alat tulis untuk mengerjakan soal-soal latihan.
9. Selamat belajar menggunakan modul ini, semoga bermanfaat.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan, dan soal evaluasi.

Pertama : Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel Linear–Kuadrat

Kedua : Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel Kuadrat–Kuadrat

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
SISTEM PERTIDAKSAMAAN DUA VARIABEL LINEAR-KUADRAT

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan peserta didik mampu:

1. Menjelaskan definisi dan bentuk umum sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat.
2. Menjelaskan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat.
3. Menyatakan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari ke dalam bentuk sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat.
4. Menentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat.

B. Uraian Materi

1. Definisi dan Bentuk Umum

Peserta didik sekalian, masih ingatkah kalian dengan materi sistem persamaan linear tiga variabel pada modul sebelumnya? Pasti masih ingat bukan? Kalian dapat sampai ke modul ini berarti kalian telah melewati kegiatan pembelajaran di modul sebelumnya dengan baik. Mengapa kalian harus mengingat kembali materi tersebut? Karena materi yang akan kalian pelajari di modul ini sangat berkaitan dengan materi sistem persamaan linear tiga variabel. Bagaimana keterkaitannya? Pasti kalian penasaran bukan? Untuk menjawab rasa penasaran kalian silahkan menyimak uraian berikut.

Sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat atau SPtDVLK adalah kumpulan beberapa pertidaksamaan yang sedikitnya memuat satu pertidaksamaan linear dan satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel. Bentuk umum SPtDVLK adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} y * ax + b \\ y * px^2 + qx + r \end{cases}$$ dengan * adalah tanda pertidaksamaan (<, >, ≤, ≥)

Keterangan:

- Variabel adalah x dan y
- Koefisien adalah a, p dan q
- Konstanta adalah b dan r

Contoh: bentuk-bentuk sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat:

i. $$\begin{cases} y \geq 3x + 6 \\ y \leq x^2 + 5x + 6 \end{cases}$$

ii. $$\begin{cases} y + 9 \geq 3x \\ y \leq x^2 - x - 6 \end{cases}$$

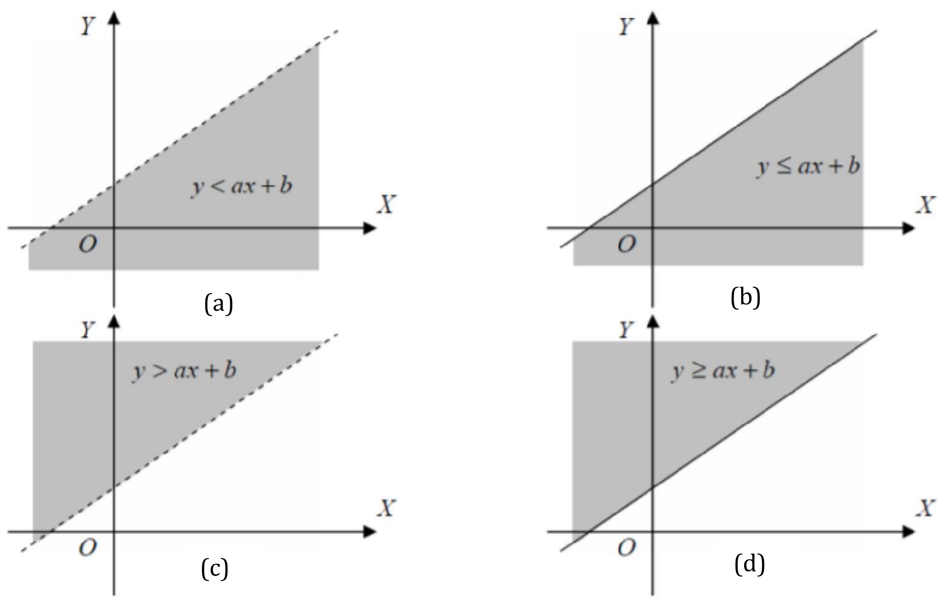
Apakah kalian sudah mulai memahami konsep sistem pertidaksamaan linear kuadrat? Jika belum kalian dapat mengulang kembali membaca materi tersebut. Tetap semangat dan jangan cepat putus asa ya.

2. Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel linear-kuadrat

1) Penyelesaian Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Peserta didik sekalian, setelah kalian mempelajari dan memahami definisi serta bentuk sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat atau SPtDVLK maka kalian dapat melanjutkan ke materi penyelesaian SPtDVLK. Namun sebelumnya kalian harus mampu menentukan daerah himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan linier dua variabel dan daerah himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan kuadrat dua variabel.

Grafik pertidaksamaan linier dua variabel adalah himpunan semua titik pada sistem koordinat Kartesius yang memenuhi sistem tersebut. Grafik ini biasanya digambarkan sebagai suatu daerah yang diarsir pada sistem koordinat yang dinamakan daerah himpunan penyelesaian. Salah satu cara untuk menentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel adalah dengan menggunakan metode grafik. Pada gambar diperlihatkan berbagai tipe grafik atau daerah himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan linier dua variabel.



Gambar 1. Berbagai Tipe Daerah Himpunan Penyelesaian dari Suatu PtLDV
(Sumber: https://smazapo.sch.id/UKBM/)

Jika garis $y = ax + b$ sebagai garis batas tidak termasuk pada daerah himpunan penyelesaiannya (daerah yang diarsir), maka garis ini digambarkan terputus-putus (Gambar 1 (a) dan (c)). Tetapi jika garis $y = ax + b$ sebagai garis batas termasuk dalam daerah himpunan penyelesaiannya (daerah yang diarsir), maka garis ini digambarkan dengan garis yang tidak terputus-putus (Gambar 1 (b) dan (d)).
Peserta didik sekalian, apakah kalian semakin paham? Untuk lebih jelasnya cermati contoh soal berikut ini.

Contoh:

Tentukan grafik atau daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linier dua variabel $x - 2y \le -2$.

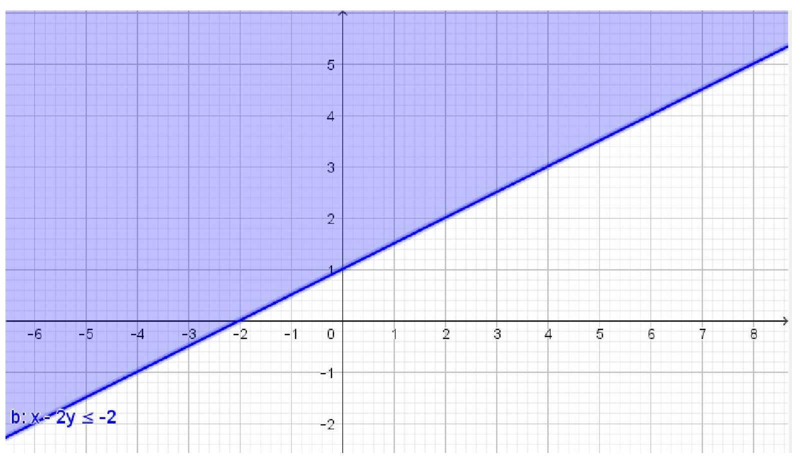
Alternatif Penyelesaian:

Terdapat beberapa langkah untuk menggambar daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linier dua variabel $x - 2y \le -2$, ialah sebagai berikut.

1. Terlebih dahulu menggambar garis $x - 2y \le -2$.
2. Buatlah tabel nilai-nilai $x - 2y = -2$ atau $x = 2y - 2$.

x	– 2	0
y	0	1
(x,y)	(–2, 0)	(0, 1)

3. Pilih sembarang titik, misal (0,0), substitusikan ke pertidaksamaan $x - 2y \le -2$, diperoleh $0 < -2$ (tidak memenuhi) sehingga titik (0,0) tidak terletak di daerah penyelesaian.
4. Garisnya tidak putus-putus karena memuat tanda sama dengan (=).
5. Langkah berikutnya adalah menentukan daerah mana yang termasuk dalam daerah $x - 2y \le -2$ dengan memberikan arsiran pada daerah tersebut.



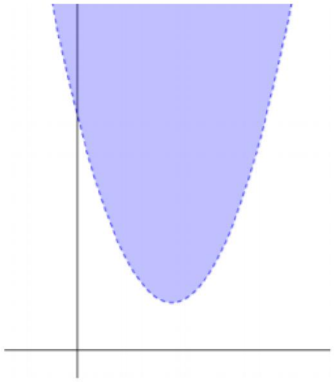
Gambar 2. Daerah Himpunan Penyelesaian PtLDV $x - 2y \le -2$

Bagaimana, mudah bukan untuk menggambar daerah himpunan penyelesaian PtLDV? Jika kalian belum memahami dengan baik, silahkan mengulang kembali mempelajari materi PtLDV. Untuk menambah wawasan kalian dapat mencari referensi dari sumber bacaan lain.

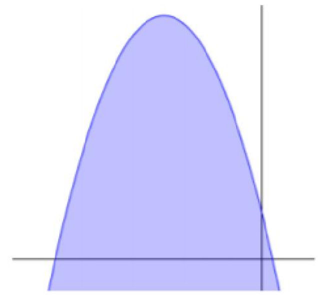
2) Penyelesaian Pertidaksamaan Kuadrat Dua Variabel

Peserta didik sekalian, setelah kalian mempelajari dan memahami penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel (PtLDV) maka kalian dapat melanjutkan ke materi penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dua variabel (PtKDV). Selanjutnya kalian dapat melanjutkan menentukan daerah himpunan penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan linier kuadrat dua variabel (SPtDVLK).

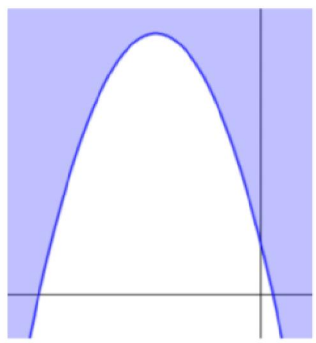
Grafik pertidaksamaan kuadrat dua variabel adalah himpunan semua titik pada sistem koordinat Kartesius yang memenuhi sistem tersebut. Grafik ini biasanya digambarkan sebagai suatu daerah yang diarsir pada sistem koordinat yang dinamakan daerah himpunan penyelesaian. Pada gambar diperlihatkan berbagai model-model daerah penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dua variabel.



(a) $y > ax^2 + bx + c, a > 0$



(b) $y \leq ax^2 + bx + c, a < 0$



(c) $y \geq ax^2 + bx + c, a < 0$

Gambar 3. Beberapa Model Daerah Himpunan Penyelesaian dari Suatu PtKDV
(Sumber: https://smazapo.sch.id/UKBM/)

Peserta didik sekalian, apakah kalian semakin paham? Untuk lebih jelasnya cermati contoh soal berikut ini.

Contoh:

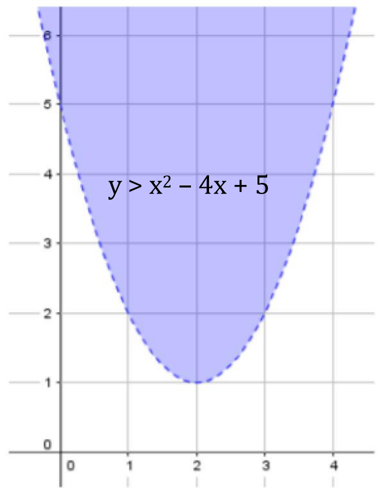
Tentukan grafik atau daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat dua variabel $y > x^2 - 4x + 5$.

Alternatif Penyelesaian:

Terdapat beberapa langkah untuk menggambar daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat dua variabel $y > x^2 - 4x + 5$, ialah sebagai berikut.

1. Tentukan arah kurva terbuka ke atas atau ke bawah di lihat dari koefisien x^2, karena $a > 0$ maka kurva terbuka ke atas.
2. Sketsa , tentukan titik potong dengan sumbu x jika ada, karena $D < 0$, maka kurva tidak memiliki titik potong dengan sumbu x.
3. Tentukan titik puncak dari kurva.

$$
\begin{aligned}
(x_p, y_p) &= (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}) \\
&= (-\frac{(-4)}{2}, -\frac{(-4)}{4}) \\
&= (2, 1)
\end{aligned}
$$



Gambar 4. Daerah Himpunan Penyelesaian PtKDV $y > x^2 - 4x + 5$

Bagaimana, mudah bukan untuk menggambar daerah himpunan penyelesaian PtKDV? Jika kalian belum memahami dengan baik, silahkan mengulang kembali mempelajari materi PtKDV. Jangan lupa untuk selalu menambah wawasan kalian dengan mencari referensi dari sumber lain.

3) Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel linear-kuadrat

Peserta didik sekalian, bagaimana dengan materi sebelumnya? Sangat menantang bukan? Apakah kalian semakin penasaran? Baiklah, selanjutnya kita akan mempelajari penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat (SPtDVLK). Metode yang digunakan untuk menyelesaiak sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat adalah metode grafik. Grafik sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat adalah himpunan semua titik pada sistem koordinat Kartesius yang memenuhi sistem tersebut. Grafik ini biasanya digambarkan sebagai suatu daerah yang diarsir pada sistem koordinat yang dinamakan daerah himpunan penyelesaian. Agar lebih jelas, cermati contoh soal berikut.

Contoh:

Tentukan grafik atau daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan dua variabel (linier-kuadrat) $\begin{cases} -x + y \leq 1 \\ y \geq x^2 - 4x + 1 \end{cases}$

Alternatif Penyelesaian:

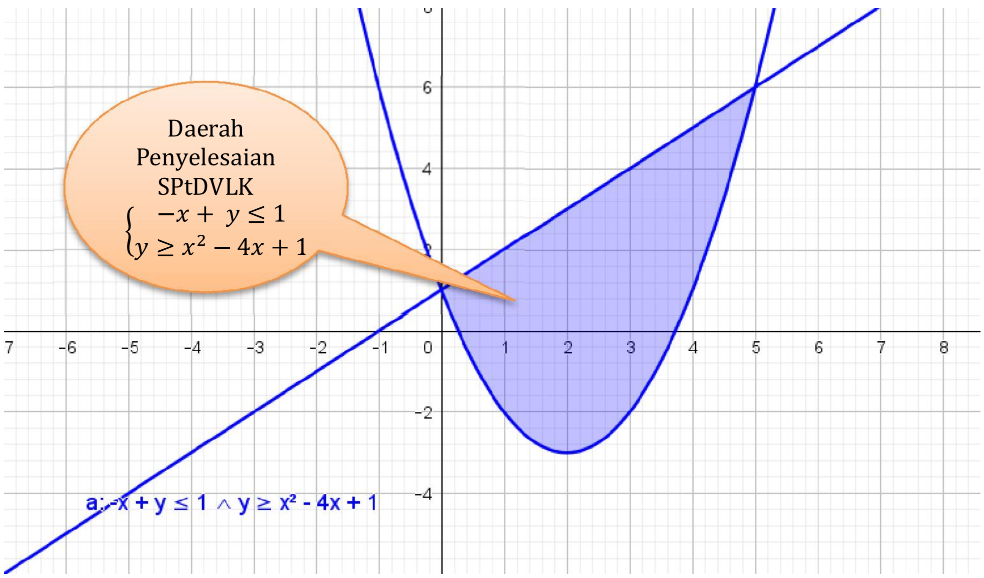
Dengan menerapkan langkah-langkah menentukan daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linier dan pertidaksamaan kuadrat dua variabel diperoleh:

1. Terlebih dahulu menggambar garis $-x + y = 1$.
2. Buatlah tabel nilai-nilai $-x + y = 1$.

x	– 1	0
y	0	1
(x,y)	(–2, 0)	(0, 1)

3. Pilih sembarang titik, misal (0,0), substitusikan ke pertidaksamaan $-x + y \leq 1$, diperoleh 0 < 1 (memenuhi) sehingga titik (0,0) terletak di daerah penyelesaian.
4. Garisnya tidak putus-putus karena memuat tanda sama dengan (=).

5. Langkah berikutnya adalah menentukan daerah mana yang termasuk dalam daerah $-x + y \leq 1$ dengan memberikan arsiran pada daerah tersebut.
6. Menentukan titik potong dengan sumbu x, y = 0 untuk $y = x^2 - 4x + 1$, diperoleh (0,26;0) dan (3,72;0)
7. Menentukan titik potong dengan sumbu y, x = 0 untuk $y = x^2 - 4x + 1$, diperoleh (0, 1).
8. Tentukan titik kurva $y = x^2 - 4x + 1$, diperoleh
$$\begin{aligned}(x_p, y_p) &= (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}) \\ &= (-\frac{(-4)}{2}, -\frac{12}{4}) \\ &= (2, -3)\end{aligned}$$
9. Karena a > 0 maka kurva terbuka ke atas, sehingga daerah arsiran untuk $y = x^2 - 4x + 1$ ada di dalam parabola.
10. Irisan daerah penyelesaian dari $-x + y \leq 1$ dan $y \geq x^2 - 4x + 1$ diperlihatkan oleh gambar yang diarsir.



Cukup menantang bukan? Menurut kalian permasalahan apa dalam kehidupan sehari-hari yang membutuhkan penerapan SPtDVLK? Mengapa? Nah agar kalian lebih termotivasi lagi mempelajari materi ini, silahkan mengerjakan soal-soal latihan di bawah ini.

C. Rangkuman

1. Sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat (SPtDVLK) adalah kumpulan beberapa pertidaksamaan yang sedikitnya memuat satu pertidaksamaan linear dan satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel.
2. Bentuk umum SPtDVLK adalah sebagai berikut.
$$\begin{cases} y * ax + b \\ y * px^2 + qx + r \end{cases}$$ dengan * adalah tanda pertidaksamaan (<, >, ≤, ≥)

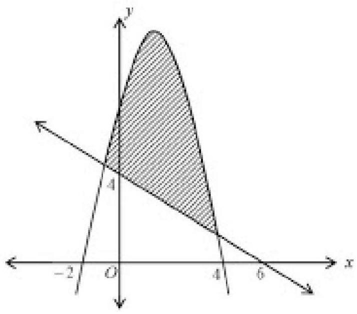
D. Latihan Soal

Soal Essay

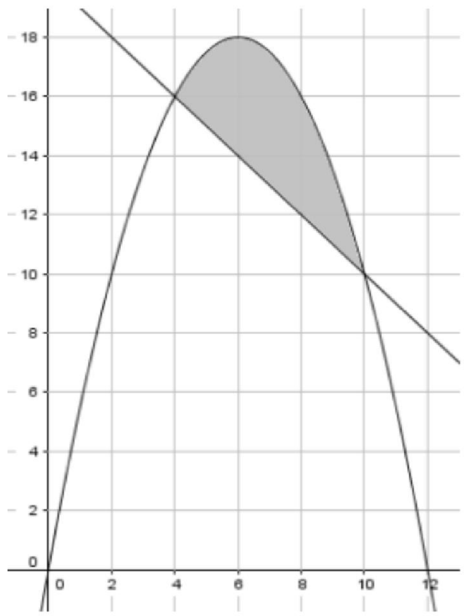
1. Tentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $2x + 3y \geq 12$ dan $y \leq -x^2 + 2x + 8$ pada bidang kartesius.
2. Pada harga Rp s per satuan, departemen pemasaran dalam suatu perusahaan tekstil memperkirakan bahwa biaya mingguan B dan pendapatan P akan diberikan persamaan-persamaan di bawah ini:
   $P = 20 - s$ (dalam ribuan rupiah) → persamaan biaya produksi
   $B = 6s - 0.5s^2$ (dalam ribuan rupiah) → persamaan pendapatan
   Pertanyaan:
   a. Dalam kondisi bagaimanakah perusahaan memperoleh keuntungan?
   b. Berapa harga satuan yang akan membuat perusahaan memperoleh keuntungan?

Kunci dan Pembahasan

Kunci Soal Essay

1. 

2. (a) $\begin{cases} C \geq 20 - s \\ R \leq 6s - 0{,}5s^2 \end{cases}$

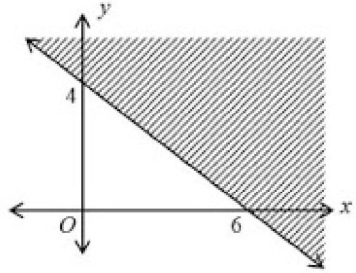
   (b) 

Pembahasan

1. Alternatif Penyelesaian:
   Pertama akan digambar daerah penyelesaian 2x + 3y ≥ 12

2x + 3y = 12

x	y	(x, y)
0	4	(0, 4)
6	0	(6, 0)



Selanjutnya digambar juga daerah penyelesaian $y \leq -x^2 + 2x + 8$, dengan langkah langkah :

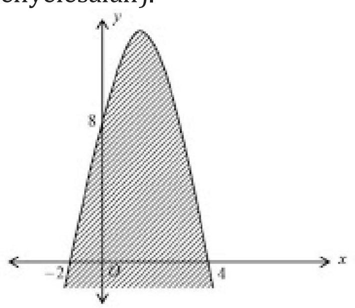
Menentukan titik potong dengan sumbu-X syarat y = 0
$-x^2 + 2x + 8 = 0$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(x - 4)(x + 2) = 0$
x = –2 dan x = 4 . Titik potongnya (–2 0) dan (4, 0)

Menentukan tititk potong dengan sumbu-Y syarat x = 0
$y = -x^2 + 2x + 8$
$y = -(0)^2 + 2(0) + 8$
y = 8 . Titik potongnya (0, 8)

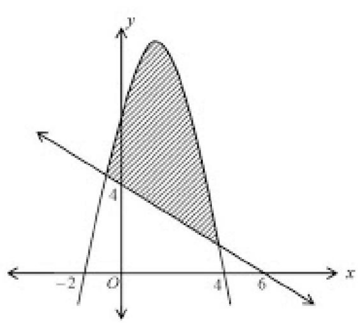
Menentukan titik maksimum fungsi $y = -x^2 + 2x + 8$

$$\begin{aligned}(x_p, y_p) &= (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})\\ &= (\frac{2}{2}, \frac{36}{4})\\ &= (1, 9)\end{aligned}$$

Menggambar daerah penyelesaiannya (daerah yang diarsir adalah daerah penyelesaian).

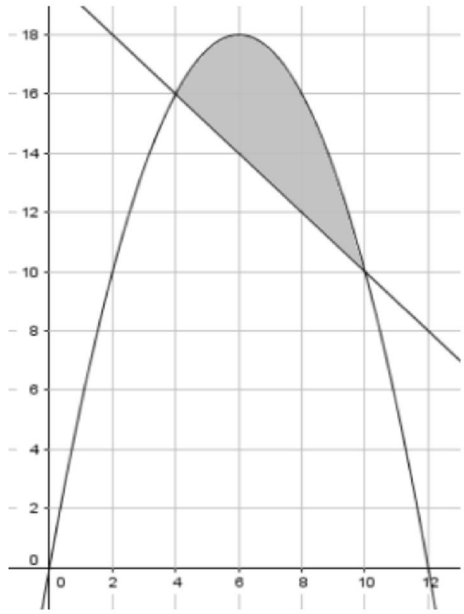


Irisan dari kedua daerah penyelesaian tersebut merupakan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $\begin{cases} 2x + 3y \geq 12 \\ y \leq -x^2 + 2x + 8 \end{cases}$. Gambar daerahnya adalah sebagai berikut:



(Skor: 50)

2. Alternatif Penyelesaian:
   (a) Perusahaan memperoleh keuntungan apabila pendapatan lebih besar dari biaya produksi. Dengan demikian, sistem persamaan di atas diubah dalam bentuk sistem pertidaksamaan yaitu $\begin{cases} P \geq 20 - s \\ B \leq 6s - 0{,}5s^2 \end{cases}$
   (b) Daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan di atas adalah:



Dengan demikian harga satuan yang akan membuat perusahaan tekstil memperoleh keuntungan adalah :
$4 \leq s \leq 10$ (dalam ribuan rupiah)

(Skor: 50)

Nilai Latihan soal ini adalah: Jumlah semua skor yang diperoleh di setiap nomor.

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah Saya telah memahami definisi SPtDVLK?	Ya	Tidak
2	Apakah Saya telah memahami memahami bentuk umum SPtDVLK?	Ya	Tidak
3	Apakah Saya dapat menentukan daerah penyelesaian PtLDV?	Ya	Tidak
4	Apakah Saya dapat menentukan daerah penyelesaian PtKDV?	Ya	Tidak
5	Apakah Saya dapat menentukan daerah penyelesaian SPtDVLK?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segeralah kalian lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
SISTEM PERTIDAKSAMAAN DUA VARIABEL KUADRAT-KUADRAT

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan peserta didik mampu:

1. Menjelaskan definisi dan bentuk umum sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat.
2. Menjelaskan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat.
3. Menyatakan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari ke dalam bentuk sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat.
4. Menentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat.

B. Uraian Materi

1. Definisi dan Bentuk Umum

Peserta didik sekalian, setelah kalian mempelajari SPtDVLK maka kalian pasti akan lebih mudah untuk mempelajari materi sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat atau SPtDVKK. Mengapa demikian? Hal ini dikarenakan bentuk umum pertidaksamaannya hampir menyerupai satu dengan yang lain. Yang membedakan adalah SPtDVLK salah satu pertidaksamaannya berbentuk PtLDV sedangkan SPtDVKK semua pertidaksamaannya berbentuk PtKDV. Pasti kalian tertarik bukan untuk mempelajari materi SPtDVKK lebih lanjut. Untuk memenuhi rasa penasaran kalian silahkan mencermati uraian materi berikut.

Sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat atau SPtDVKK adalah kumpulan beberapa pertidaksamaan yang memuat lebih dari satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel. Sehingga bentuk umumnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} y * ax^2 + bx + c \\ y * px^2 + qx + r \end{cases}$$ dengan * adalah tanda pertidaksamaan (<, >, ≤, ≥)

Keterangan:

- Variabel adalah x dan y
- Koefisien adalah a, b, p dan q
- Konstanta adalah c dan r

Contoh: bentuk-bentuk sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat:

i. $$\begin{cases} y \geq 3x^2 + 6x \\ y \leq x^2 + 5x + 6 \end{cases}$$

ii. $$\begin{cases} y + 12 \geq 3x^2 \\ y \geq x^2 - x - 6 \end{cases}$$

Apakah kalian sudah mulai memahami konsep sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat? Jika belum kalian dapat mengulang kembali membaca materi tersebut. Tetap semangat dan jangan cepat putus asa ya.

2. Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel Kuadrat-Kuadrat

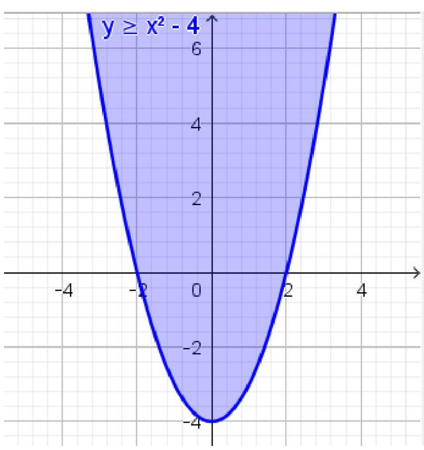
Kalian telah mempelajari cara menggambar daerah penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dua variabel. Setelah kalian mampu menentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dua variabel, silahkan melanjutkan mempelajari cara menentukan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat. Untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan tersebut, langkah-langkah yang perlu dilakukan adalah sebagai berikut. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat adalah metode grafik.

1. Menggambar daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaan dalam sistem tersebut.
2. Mengarsir daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan, yaitu dengan daerah yang merupakan irisan dari daerah penyelesaian semua pertidaksamaan dalam sistem tersebut.

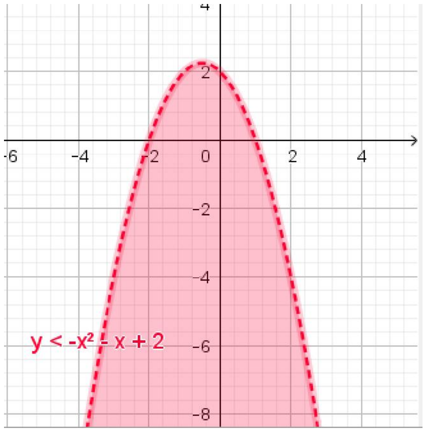
Contoh:
Tentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $y \geq x^2 - 4$ dan $y < -x^2 - x + 2$!

Alternatif Penyelesaian:

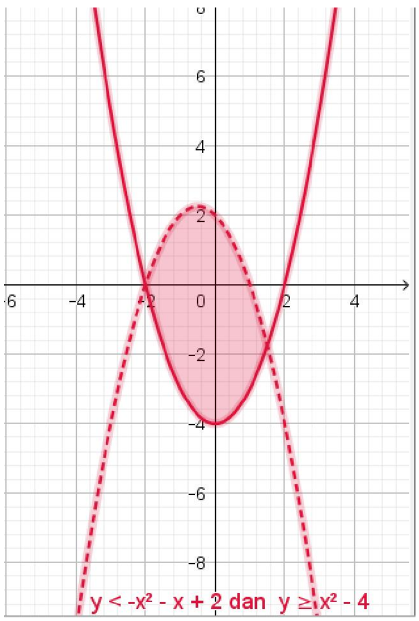
Langkah-langkah:
1. Menggambar daerah penyelesaian pertidaksamaan $y \geq x^2 - 4$ sebagai berikut.



2. Menggambar daerah penyelesaian pertidaksamaan $y < -x^2 - x + 2$ sebagai berikut.



3. Menentukan irisan dari dua daerah himpunan di atas



4. Daerah yang diarsir pada gambar di atas merupakan daerah penyelesaian yang dimaksud.

Kalian dapat memahami penjelasan di atas bukan? Menurut kalian di mana letak kesulitan dalam menentukan penyelesaian SPtDVKK? Ya, umumnya kesulitan terletak pada teknik menggambar grafik pertidaksamaan kuadrat dua variabel, oleh karena itu kalian harus sering berlatih menggambar grafik tersebut. Kalian harus yakin bahwa semakin banyak berlatih akan meningkatkan ketrampilan kalian dalam menggambar grafik pertidaksamaan kuadrat dua variabel. Untuk itu silahkan melatih diri kalian dengan mengerjakan soal-soal latihan di bawah ini.

C. Rangkuman

1. Sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat (SPtDVKK) adalah kumpulan beberapa pertidaksamaan yang sedikitnya memuat satu pertidaksamaan linear dan satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel.
2. Bentuk umum SPtDVKK adalah sebagai berikut.
   $\begin{cases} y * ax^2 + bx + c \\ y * px^2 + qx + r \end{cases}$ dengan * adalah tanda pertidaksamaan (<, >, ≤, ≥)

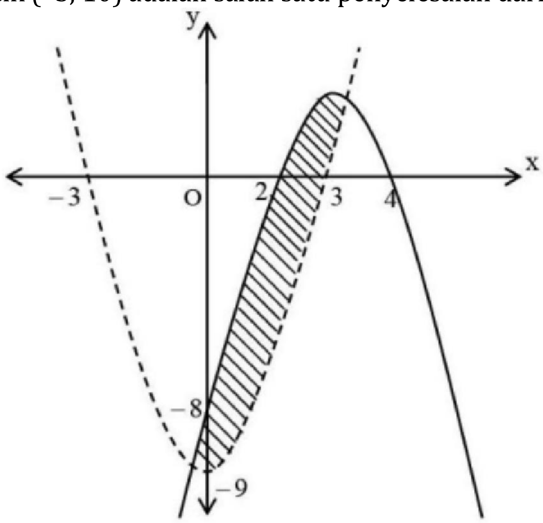
D. Latihan Soal

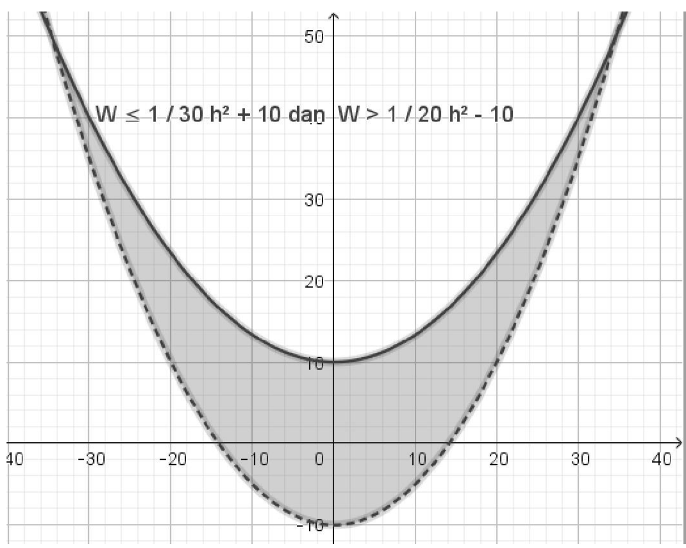
Soal Essay

1. Dari dua sistem pertidaksamaan berikut, manakah yang berbentuk sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat atau disebut SPtDVKK? Mengapa?
   (a) $\begin{cases} y \le x^2 - 9 \\ y > 3x + 6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y \le x^2 - 8 \\ y > 2x^2 - 1 \end{cases}$
2. Diberikan SPtDVKK berikut $\begin{cases} y \le 2x^2 - 3x - 5 \\ y > x^2 - 1 \end{cases}$. Apakah titik (−3, 10) merupakan salah satu penyelesaian sistem pertidaksamaan tersebut? Berikanlah penjelasan yang logis!
3. Tentukan daerah penyelesaian dari $y > x^2 - 9$ dan $y \le -x^2 + 6x - 8$.
4. Berat badan ideal seseorang bergantung pada tinggi bandannya. Seseorang dikatakan memiliki berat badan ideal jika berat badan W (dalam kg) orang tersebut kurang dari atau sama dengan 1/30 kali kuadrat tinggi badan h (dalam cm) orang tersebut ditambah 10 dan lebih dari 1/20 kali kuadrat tinggi badan orang tersebut dikurangi 10. Nyatakan permasalahan tersebut dalam sistem pertidaksamaan dua variabel, kemudian tentukan daerah penyelesaiannya.

Kunci dan Pembahasan

Kunci Soal Essay

1. Bentuk (b) adalah sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat.
2. Titik (−3, 10) adalah salah satu penyelesaian dari SPtDVKK yang dimaksud.
3. 

4. 

Pembahasan

1. Alternatif Penyelesaian:

(a) $\begin{cases} y \leq x^2 - 9 \\ y > 3x + 6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y \leq x^2 - 8 \\ y > 2x^2 - 1 \end{cases}$

Sistem pertidaksamaan dua variabel (b) merupakan SPtDVKK karena kedua pertidaksamaannya berderajat dua (sesuai definisi SPtDVKK), sedangkan sistem pertidaksamaan bagian (a) hanya terdiri dari satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel jadi sesuai deinisi (a) bukan SPtDVKK. (Skor 10)

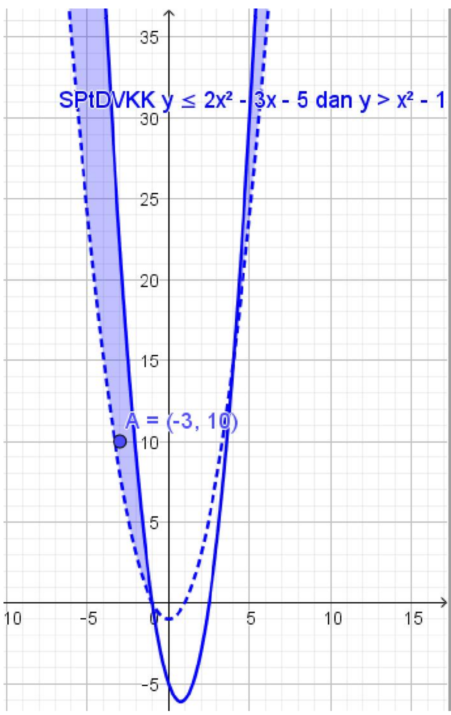
2. Alternatif Penyelesaian:

(i) Substitusikn (–3, 10) ke $y \leq 2x^2 - 3x - 5$ diperoleh:
$10 \leq 2(-3)^2 - 3(-3) - 5$
$10 \leq 22$ (memenuhi/ bernilai benar)

(ii) Substitusikn (–3, 10) ke $y > x^2 - 1$ diperoleh:
$10 > (-3)^2 - 1$
$10 > 8$ (memenuhi/bernilai benar)

Titik (–3, 10) merupakan salah satu penyelesaian sistem pertidaksamaan $\begin{cases} y \leq 2x^2 - 3x - 5 \\ y > x^2 - 1 \end{cases}$ karena jika (–3, 10) di substitusikan pada kedua PtDVK tersebut bernilai benar/memenuhi.

Jika digambarkan dalam koordinat kartesius titik (–3, 10) terletak di daerah penyelesaian SPtDVKK $y \leq 2x^2 - 3x - 5$ dan $y > x^2 - 1$.



(Skor: 20)

3. Alternatif Penyelesaian:

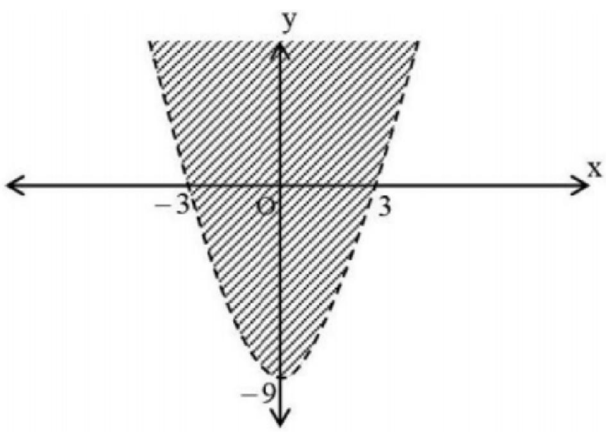
a. Gambar daerah penyelesaian pertidaksamaan $y > x^2 - 9$

1. Titik potong dengan sumbu-X syarat y = 0
$x^2 - 9 = 0$
$(x + 3)(x - 3) = 0$
$x = -3$ dan $x = 3$
Titik potongnya (–3, 0) dan (3, 0)

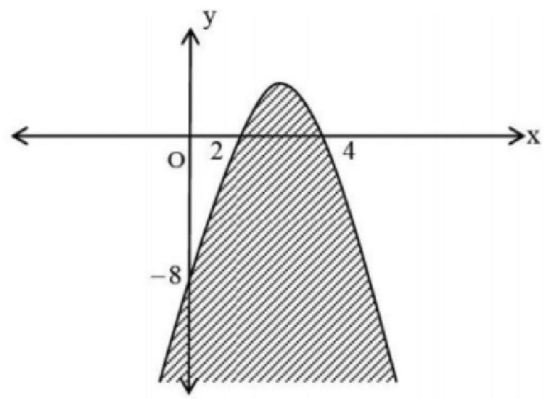
2. Titik potong dengan sumbu-Y syarat x = 0
$y = x^2 - 9$

$y = 0^2 - 9$
$y = -9$
Titik potongnya (0, –9)

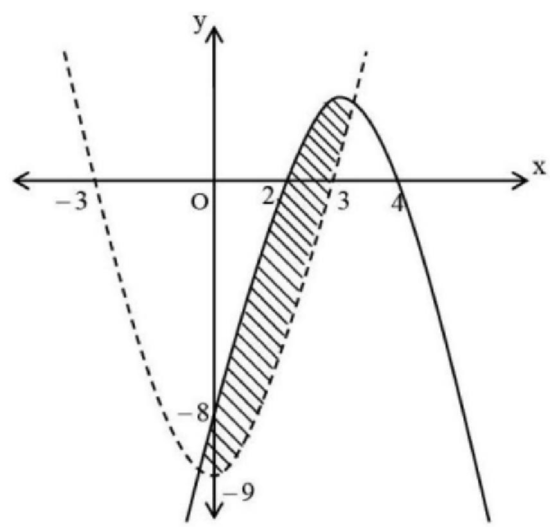
3. Menentukan titik puncak fungsi $y = x^2 - 9$
$(x_p, y_p) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$
$= (\frac{0}{2}, -\frac{(-4).1.(-9)}{4})$
$= (1, -9)$
4. Gambar daerah penyelesaiannya
(Daerah yang diarsir adalah daerah penyelesaian)



b. Gambar daerah penyelesaian pertidaksamaan $y \leq - x^2 + 6x - 8$
1. Titik potong dengan sumbu-X syarat y = 0
$- x^2 + 6x - 8 = 0$
$x^2 - 6x + 8 = 0$
$(x - 4)(x - 2) = 0$
$x = 4 \ dan \, x = 2$
Titik potongnya (4, 0) dan (2, 0)
2. Titik potong dengan sumbu-Y syarat $x = 0$
$y = - x^2 + 6x - 8$
$y = 0^2 + 6.0 - 8$
$y = - 8$
Titik potongnya (0, –8)
3. Menentukan titik puncak fungsi $y = x^2 - 9$
$(x_p, y_p) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$
$= (\frac{-6}{2(-1)}, -\frac{36 - 4.(-1).(-8)}{4(-1)})$
$= (3, 1)$
4. Gambar daerah penyelesaiannya
(Daerah yang diarsir adalah daerah penyelesaian)



Daerah penyelesaian kedua pertidaksamaan itu adalah irisan dua daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaannya, yakni:



(Skor: 35)

4. Alternatif Penyelesaian:

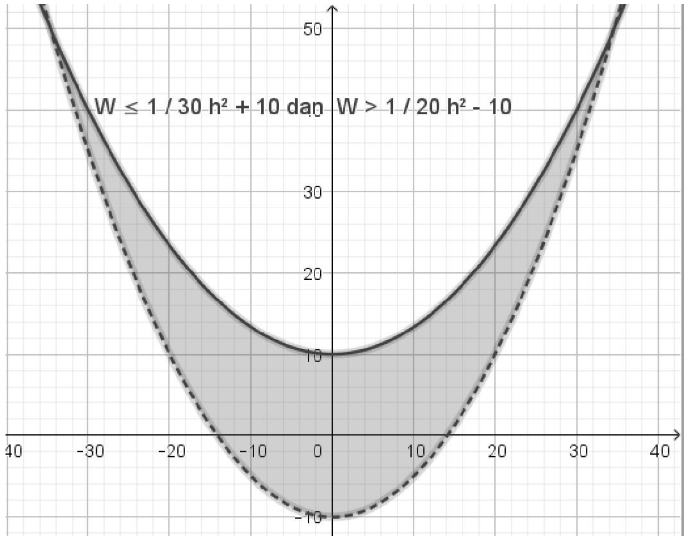
Sebelum menentukan daerah penyelesaian, buatlah model matematikanya.
Misalkan: W adalah berat badan ideal (dalam kg)
h adalah tinggi badan (dalam cm)
SPtDVKK nya adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} W \le \dfrac{1}{30}h^2 + 10 \\ W > \dfrac{1}{20}h^2 - 10 \end{cases}$$

Selanjutnya buatlah gambar daerah penyelesaian dari SPtDVKK

$$\begin{cases} W \le \dfrac{1}{30}h^2 + 10 \\ W > \dfrac{1}{20}h^2 - 10 \end{cases}$$

Daerah penyelesaian kedua pertidaksamaan itu adalah irisan dua daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaannya, yakni:



(Skor: 35)

Menurut kalian masalah ini berkaitan dengan profesi apa dalam kehidupan sehari-hari? Jika kalian memiliki profesi tersebut informasi di atas berguna untuk apa? Tuliskan jawabanmu di dalam buku catatan, sebagai motivasi untuk mempelajari materi SPtDVKK.

Nilai Latihan soal ini adalah: Jumlah semua skor yang diperoleh di setiap nomor.

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

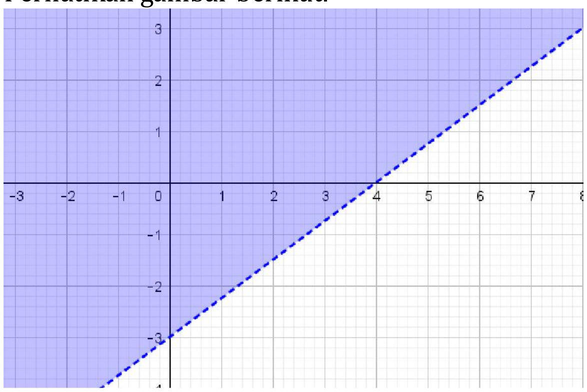
No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah Saya telah memahami definisi SPtDVKK?	Ya	Tidak
2	Apakah Saya telah memahami memahami bentuk umum SPtDVKK?	Ya	Tidak
3	Apakah Saya dapat menentukan daerah penyelesaian PtKDV?	Ya	Tidak
4	Apakah Saya dapat menentukan daerah penyelesaian SPtDVLK?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segeralah kalian lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling benar.

1. Perhatikan gambar berikut.



Daerah yang diarsir pada gambar di atas merupakan daerah penyelesaian pertidaksamaan… .

A. $4y > 3x - 12$
B. $4y < 3x - 12$
C. $4y \geq 3x - 12$
D. $4y \geq 3x + 12$
E. $4y > 3x + 12$

2. Salah satu penyelesaian dari pertidaksamaan $2y > 6x - 12$ adalah

A. (3, 1)
B. (2, 1)
C. (1, – 4)
D. (2, – 1)
E. (3, – 1)

3. Di antara pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut, yang merupakan pertidaksamaan kuadrat dua variabel adalah… .

A. $y < 2x - 3$
B. $|x|^2 - 3 > y$
C. $y < 3x^2 - 6$
D. $x^2 + y^2 - 1 > 0$
E. $x^2 + y^3 - 5 > 0$

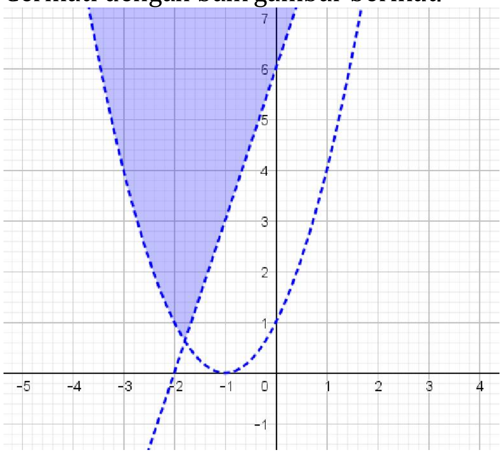
4. Koordinat titik berikut merupakan penyelesaian dari pertidaksamaan $2y < x^2 - 4$, kecuali… .

A. (0, – 4)
B. (– 4, 0)
C. (1, 1)
D. (0, – 3)
E. (1, – 2)

5. Berikut adalah salah satu koordinat titik yang merupakan penyelesaian dari $y < 2x^2 - 3x - 5$… .

A. (0, 0)
B. (– 1, 0)
C. (4, – 1)
D. (2, 2)
E. (0, 2)

6. Cermati dengan baik gambar berikut.



Daerah yang diarsir pada gambar di atas merupakan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan… .

A. $y \geq 3x + 6$ dan $y < x^2 + 2x + 1$
B. $y > 3x + 6$ dan $y < x^2 + 2x + 1$
C. $y < 3x + 6$ dan $y < x^2 + 2x + 1$
D. $y > 3x + 6$ dan $y > x^2 + 2x + 1$
E. $y < 3x + 6$ dan $y > x^2 + 2x + 1$

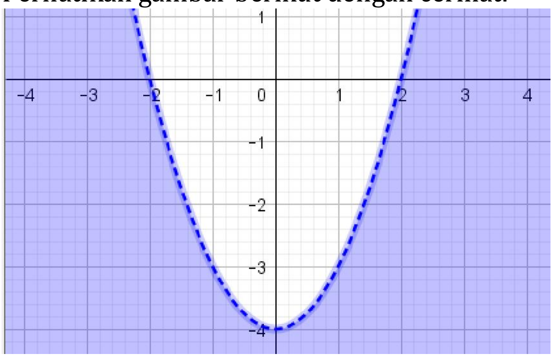
7. Ketika menggambar daerah penyelesaian pertidaksamaan $2y \leq 4x^2 - 1$, Andi mengambil sebuah titik uji. Di akhir tahap menggambar, Andi mendapati daerah yang memuat titik uji tersebut tidak ikut terarsir. Koordinat yang mungkin menjadi titik uji Andi adalah… .

A. (0, – 2)
B. (0, – 2)
C. (4, 0)
D. (0, 5)
E. (1, 1)

8. Sebuah penelitian menunjukkan bahwa pengemudi berusia lebih dari 17 tahun dan kurang dari 60 tahun memiliki waktu reaksi terhadap rangsangan audio sebesar y = A(x) dan waktu reaksinya terhadap rangsangan visual sebesar y = V (x) (keduanya dalam milidetik) yang dapat dimodelkan dengan $V(x) \leq -0.0002x^2 - 0.13x + 11$ dan $A(x) \leq 0.001x^2 - 0.01x + 10$; dimana x adalah usia (dalam tahun) dari pengemudi. Tentukan kesimpulan berikut yang tepat berdasarkan model tersebut.

A. Pengemudi dengan usia 25 tahun akan bereaksi lebih cepat terhadap lampu lalulintas yang berubah dari hijau menjadi kuning dibandingkan ke sirene ambulansyang mendekat.
B. Pengemudi dengan usia 35 tahun akan bereaksi lebih cepat terhadap lampu lalulintas yang berubah dari hijau menjadi kuning dibandingkan ke sirene ambulansyang mendekat.
C. Pengemudi dengan usia 40 tahun akan bereaksi lebih cepat terhadap sireneambulans yang mendekat dibandingkan ke lampu lalu lintas yang berubah dari hijaumenjadi kuning.
D. Pengemudi dengan usia 45 tahun akan bereaksi sama cepat lampu lalu lintas yangberubah dari hijau menjadi kuning dibandingkan ke sirene ambulans yangmendekat.
E. Pengemudi dengan usia 55 tahun akan bereaksi lebih cepat terhadap lampu lalulintas yang berubah dari hijau menjadi kuning dibandingkan ke sirene ambulansyang mendekat.

9. Perhatikan gambar berikut dengan cermat.



Daerah yang ditunjukkan pada gambar di atas merupakan daerah penyelesaian pertidaksamaan… .

A. $2y < x^2 - 4$
B. $2y > x^2 - 4$
C. $2y < x^2 + 4$
D. $2y > x^2 + 4$
E. $2y \leq x^2 - 4$

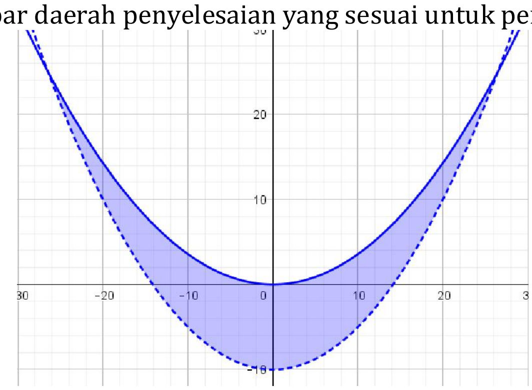
10. Dua bilangan memiliki hubungan sebagai berikut. Selisih dua kali bilangan pertama dan kedua selalu lebih besar dari 12. Bilangan kedua selalu lebih besar atau sama dengan kuadrat bilangan pertama dikurangi dua kali bilangan pertama dikurangi delapan. Sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat yang sesuai untuk permasalahan tersebut adalah… .

A. $2x - 3y < 12$ dan $y > x^2 - 2x - 8$
B. $2x - 3y > 12$ dan $y > x^2 - 2x - 8$
C. $2x - 3y < 12$ dan $y \leq x^2 - 2x - 8$
D. $2x - 3y > 12$ dan $y \geq x^2 - 2x - 8$
E. $2x - 3y \leq 12$ dan $y > x^2 - 2x - 8$

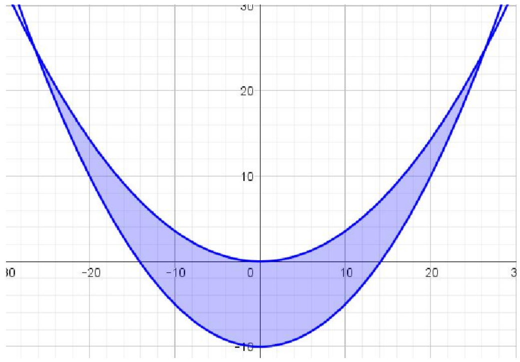
11. Sebuah tali dapat menarik beban seberat W (dalam kg). Pada saat-saat tertentu nilai W memenuhi kondisi kurang dari hasil perkalian dari 3 dengan kuadrat diameter (d) tali tersebut (d dalam cm). Salah satu titik yang memenuhi kondisi tersebut adalah… .

A. (1, 6)
B. (1, 5)
C. (1, 4)
D. (1, 3)
E. (1, 2)

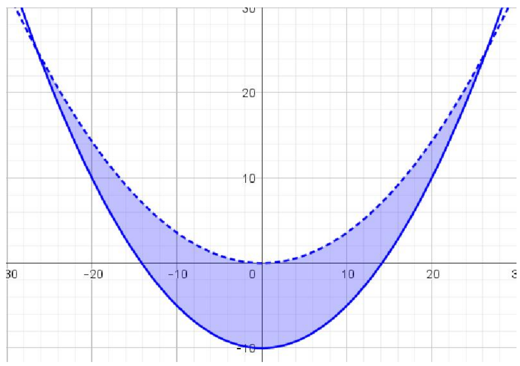
12. Berat badan ideal seseorang bergantung pada tinggi badannya. Seseorang dikatakan memiliki berat badan ideal jika berat badan (W dalam kg) orang tersebut kurang dari atau sama dengan 1/28 kali kuadrat tinggi badan (h dalam cm) orang tersebut dan berat badan lebih dari 1/20 kali kuadrat tinggi badan orang tersebut dikurangi 10. Gambar daerah penyelesaian yang sesuai untuk permasalahan tersebut adalah… .

A. 

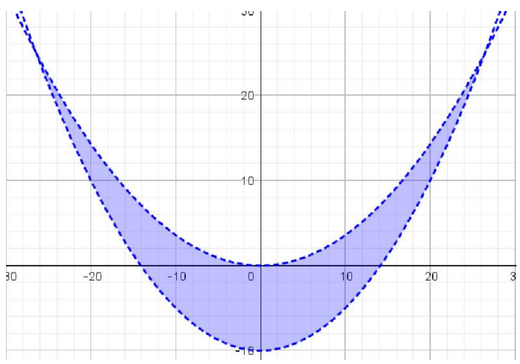
B.



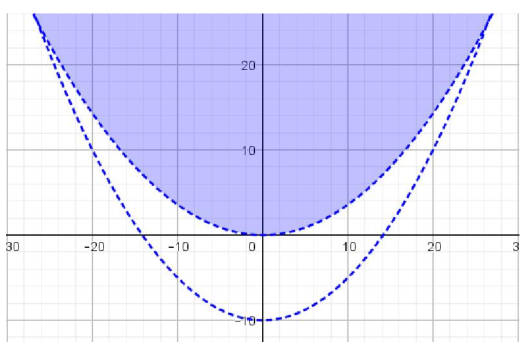
C.



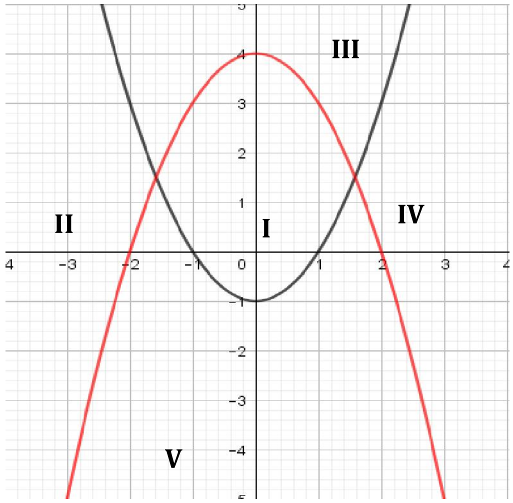
D.



E.



13. Daerah yang merupakan penyelesaian sistem pertidaksamaan $\begin{cases} y \geq x^2 - 1 \\ y \leq 4 - x^2 \end{cases}$ ditunjukkan oleh daerah … pada gambar di bawah ini.



A. V
B. IV
C. III
D. II
E. I

14. Sistem pertidaksamaan yang tidak memiliki daerah penyelesaian adalah… .

A. $\begin{cases} y \geq x^2 - 9 \\ y \leq 9 - x^2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y \geq -x^2 - 2x + 8 \\ y \leq 4 - x^2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y \geq -x^2 + 3 \\ y \leq 2x^2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y \geq 2x^2 + 8 \\ y \leq -4 - x^2 \end{cases}$

E. $\begin{cases} y \geq x^2 - x - 2 \\ y \leq -x^2 + x + 2 \end{cases}$

15. Usia Anto dan Hari memenuhi kondisi berikut. Dua kali usia Anto bernilai lebih besar dibandingkan kuadrat usia Anto ditambah usia Hari. Usia Hari lebih besar dari kuadrat usia Anto dikurangi tiga kali usia Anto. Sistem pertidaksamaan yang memenuhi kondisi tersebut adalah… .

A. $\begin{cases} y \geq x^2 - 3x \\ 2 - x^2 \leq y \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x - x^2 > y \\ y > x^2 - 3x \end{cases}$

C. $\begin{cases} y > x^2 - 3x \\ 2 - x^2 \leq y \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x - x^2 < y \\ y > x^2 - 3x \end{cases}$

E. $\begin{cases} 2x - x^2 > y \\ y < x^2 - 3x \end{cases}$

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. A
2. B
3. C
4. C
5. C
6. D
7. D
8. E
9. A
10. D
11. E
12. A
13. E
14. D
15. B

Nilai Latihan soal ini adalah: $\frac{\textit{Jumlah jawaban benar}}{15} x\ 100$

KRITERIA PINDAH MODUL

Peserta didik dinyatakan memahami modul ini atau dapat berpindah ke modul berikutnya apabila telah memenuhi salah satu persyaratan berikut.

1. Mampu mengerjakan soal latihan secara lengkap, benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, dengan hasil minimal 75%.
2. Mampu mengerjakan evaluasi untuk modul ini dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, dengan hasil minimal 75%.

Peserta didik dinyatakan belum memahami dan menguasai modul ini serta belum dapat berpindah ke modul berikutnya apabila:

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan dengan hasil di bawah 75%.
2. Mengerjakan evaluasi dengan hasil di bawah 75%.

DAFTAR PUSTAKA

Yuana, R. A., Indriyastuti. 2017. *Perspektif Matematika 1 untuk Kelas X SMA dan MA Kelompok Mata Pelajaran Wajib*. Solo: PT. Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Sinaga, Bornok, dkk. 2017. Matematika SMA/MA/SMK/MAK Untuk Kelas X. Jakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

https://smazapo.sch.id/UKBM/ . 2020. Diakses tanggal 16 September 2020.

https://www.materimatematika.com/2017/11/sistem-pertidaksamaan-linier-dan-kuadrat.html. 2017. Diakses tanggal 19 September 2020.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI, PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum

KELAS X

RELASI DAN FUNGSI
MATEMATIKA UMUM KELAS X

PENYUSUN

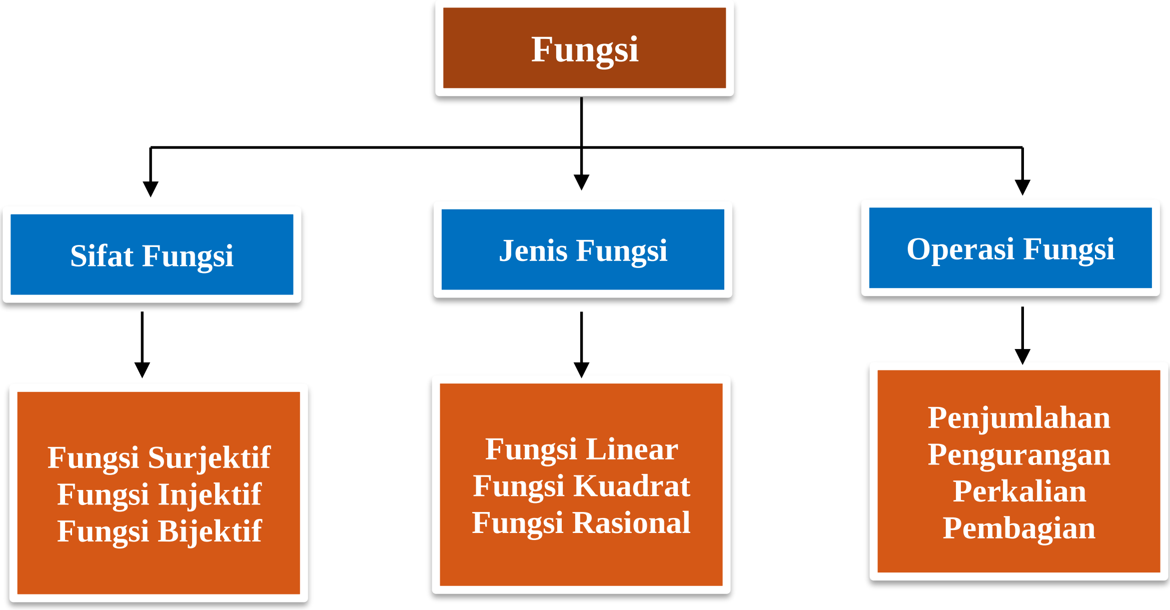
ENTIS SUTISNA, S.Pd.
SMA Negeri 4 Tangerang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Daerah Asal/Domain	:	Himpunan tak kosong dimana sebuah relasi didefinisikan.
Daerah kawan/kodomain	:	Himpunan tidak kosong dimana anggota domain memiliki pasangan sesuai dengan fungsi yang didefinisikan.
Daerah hasil/range	:	Suatu himpunan bagian dari daerah kawan
Fungsi Linear	:	Suatu fungsi yang grafiknya berupa garis.
Fungsi Kuadrat	:	Suatu fungsi yang grafiknya berupa parabola.
Gardien	:	ukuran kemiringan suatu garis..
Fungsi Injektif	:	fungsi f: X → Y dikatakan injektif jika tidak ada dua anggota X yang mempunyai bayangan sama di bawah fungsi f
Fungsi Bijektif	:	Fungsi satu-satu pada
Grafik	:	Grafik suatu fungsi adalah himpunan semua titik yang koordinatnya memenuhi persamaan fungsi.
Relasi	:	Relasi dari himpunan A ke himpunan B, dinyatakan sebagai R: A → B adalah aturan yang menghubungkan $a \in A$ dengan $b \in B$
Fungsi Surjektif	:	Sama dengan fungsi injektif

PETA KONSEP


Fungsi
Sifat Fungsi
Jenis Fungsi
Operasi Fungsi
Fungsi Surjektif
Fungsi Injektif
Fungsi Bijektif
Fungsi Linear
Fungsi Kuadrat
Fungsi Rasional
Penjumlahan
Pengurangan
Perkalian
Pembagian

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran : Matematika Umum
Kelas : X
Alokasi Waktu : 12 JP
Judul Modul : Fungsi

B. Kompetensi Dasar

3\. 5 Menjelaskan dan menentukan fungsi (terutama fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi rasional) secara formal yang meliputi notasi, daerah asal, daerah hasil, dan ekspresi simbolik, serta sketsa grafiknya

4.5 Menganalisa karakteristik masing –masing grafik (titik potong dengan sumbu, titik puncak, asimtot) dan perubahan grafik fungsinya akibat transformasi $f^2(x), \frac{1}{f(x)}$, $|f(x)|$ dsb

C. Deskripsi Singkat Materi

Salam jumpa melalui pembelajaran matematika dengan materi Menganalisa karakteristik masing –masing grafik (titik potong dengan sumbu, titik puncak, asimtot) dan perubahan grafik fungsinya akibat transformasi $f^2(x), \frac{1}{x}$, $|f(x)|$, dsb.

Modul ini disusun sebagai satu alternatif sumber bahan ajar siswa untuk memahami materi fungsi di kelas X. Melalui modul ini Kalian diajak untuk memahami konsep Fungsi Linear, Fungsi Kuadrat, Fungsi Rasional dan menyelesaikan masalah terkait fungsi.

Modul ini terdiri atas **2** bagian proses. Kalian bisa mempelajari modul ini dengan tahapan berikut:

Pembelajaran 1 akan membahas tentang : Konsep Relasi, Fungsi dan Sifat-sifat Fungsi dan Operasi Aljabar Fungsi

Pembelajaran 2 akan membahas tentang : Fungsi Linear, Fungsi Kuadrat dan fungsi Pecah (Fungsi Rasional)

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Supaya kalian berhasil mencapai kompetensi dalam mempelajari modul ini maka ikuti petunjuk-petunjuk berikut:

a. Petunjuk Umum:

1) Pelajari daftar isi serta skema modul dengan cermat, karena daftar isi dan peta kedudukan modul ini akan menuntun Kalian dalam mempelajari modul ini dan modul yang lain.
2) Untuk mempelajari modul ini haruslah berurutan, karena materi yang mendahului merupakan prasyarat untuk mempelajari materi berikutnya.

3) Pahamilah contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Jika dalam mengerjakan soal Kalian menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
4) Kerjakan soal evaluasi dengan cermat. Jika Kalian menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
5) Jika Kalian mempunyai kesulitan yang tidak dapat Kalian selesaikan, catatlah, kemudian tanyakan kepada guru pada saat kegiatan tatap muka atau bacalah referensi lain yang berhubungan dengan materi modul ini. Dengan membaca referensi lain, Kalian juga akan mendapat pengetahuan tambahan.

b. Petunjuk Khusus

a. Dalam kegiatan Pembelajaran Kalian akan mempelajari bagaimana memahami konsep dan menyelesaikan masalah fungsi dan grafik fungsi
b. Perhatikan gambar gambar dan uraian dengan seksama agar dapat memahami, menentukan dan menggeneralisasikan masalah fungsi serta mampu menerapkan dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hal tersebut.
c. Pahamilah contoh-contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Kerjakanlah soal uji kompetensi dengan cermat agar Kalian bisa lebih paham dan terampil.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Relasi, fungsi, Sifat-sifat Fungsi dan Operasi Aljabar pada Fungsi

Kedua : Fungsi Linear, Fungsi Kuadrat dan Fungsi Pecah (Fungsi Rasional)

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
RELASI , FUNGSI DAN FUNGSI LINIER

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan peserta didik mengenal konsep relasi, fungsi dan fungsi linear serta mampu menyelesaiakan masalah yang berkatian dengan fungsi linear.

B. Uraian Materi

Pernahkah Kalian mendatangi suatu tempat, seperti mall dan melihat tarip parkir sebagai berikut: parkir untuk mobil, satu jam pertama Rp. 4000,00 dan untuk jam berikutnya Rp. 3000,00 sehinga seorang yang memarkir mobilnya selama 3 jam harus membayar biaya parkirnya Rp. 10.000,00? Proses perhitungan parkir tersebut merupakan salah satu aplikasi fungsi dalam kehidupan sehari-hari.

Gambar 1.1 Parkir Mobil Vertikal.
Sumber: https://pixabay.com/id/photos/autos-teknologi-vw-214033/

Contoh lain penerapan fungsi adalah jarak dan kecepatan. Setiap orang yang berjalan untuk berpindah tempat dari tempat yang satu ke tempat yang lain tentu saja memiliki kecepatan. Saat berjalan, seseorang bisa mempercepat, memperlambat, bahkan berjalan dengan kecepatan tetap.

Dalam fungsi, kecepatan yang dipakai yaitu pada saat kecepatan tetap (konstan). Saat seseorang mulai berjalan, kemungkinan kecepatannya akan dipercepat atau diperlambat. Di lain pihak, tentu saja ada waktu di saat kecepatan mulai konstan. Kecepatan konstan itulah yang berlaku dalam suatu fungsi. Dengan demikian, jarak yang ditempuh pejalan tersebut yang merupakan suatu fungsi.

Contoh lain misalkan, seseorang yang akan membuat suatu area penempatan hewan peliharaan (kuda, kambing, atau ayam) sehingga membentuk suatu area yang paling luas dengan penggunaan batasan pagar yang tersedia, maka hal ini dapat menggunakan konsep yang ada pada cakupan materi fungsi kuadarat. Begitu juga permasalahan yang berkaitan dengan proyektil, yakni objek apa pun yang dilemparkan, ditembak, atau dijatuhkan, dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan fungsi kuadrat. Seperti menentukan puncak tertinggi dari benda yang kita lempar. Demikian juga masalah menentukan kecepatan awal peluru pada olah raga tolak peluru.

Gambar 1.2 Orang Berjalan

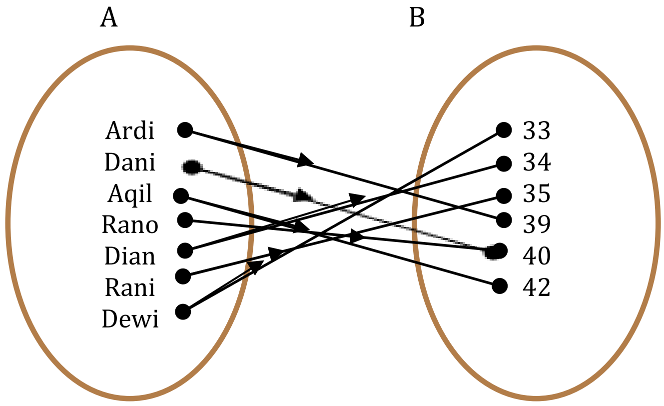
Gambar 1.3 Tolak Peluru.

Konsep Relasi dan fungsi.

Konsep "fungsi" merupakan hal yang penting dalam berbagai cabang matematika. Pengertian fungsi dalam matematika berbeda dengan pengertian dalam kehidupan sehari-hari. Dalam pengertian sehari-hari, "fungsi" adalah guna atau manfaat. Kata fungsi dalam matematika sebagaimana diperkenalkan oleh Leibniz (1646-1716) digunakan untuk menyatakan suatu hubungan atau kaitan yang khas antara dua himpunan, sehingga fungsi dapat dikatakan merupakan hal yang istimewa dari suatu relasi antara dua himpunan.

Untuk memahami konsep fungsi, coba Kalian perhatikan ilustrasi berikut.
Sejak tahun 2006, melalui Undang-undang nomor 23 tahun 2006 tentang Administrasi Kependudukan, pemerintah mewajibkan semua warga Negara Indonesia memiliki Nomor Induk Kependudukan (NIK) yang tidak sama dengan orang lain. Hubungan NIK dengan individu seseorang merupakan fungsi pemetaan yang informasi kependudukan orang yang bersangkutan. Program NIK berkaitan dengan e-KTP. Dengan e-KTP diharapkan seseorang tidak lagi berpeluang memiliki lebih dari satu KTP karena telah menggunakan sistem basis data terpadu yang menghimpun data penduduk dari seluruh Indonesia.

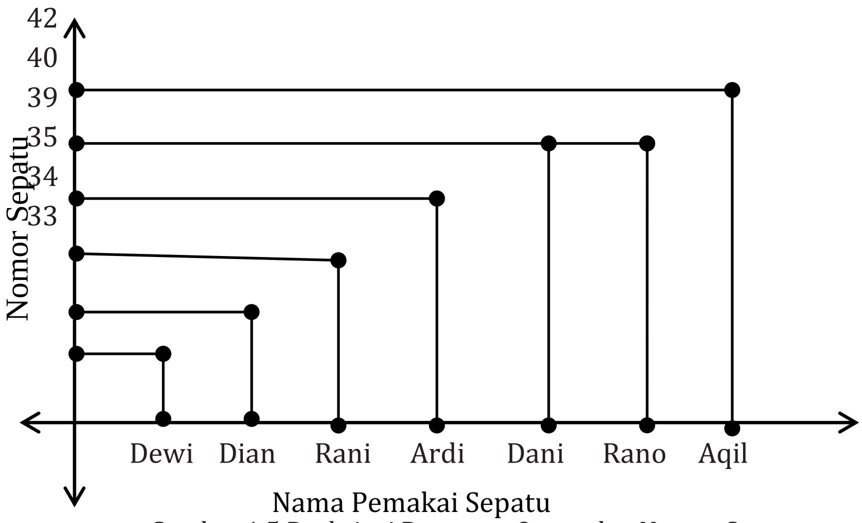
Seperti juga NIK, setiap orang dari Kalian pasti punya nomor sepatu, nomor celana atau nomor baju masing-masing. Misalnya ukuran sepatu Ardi adalah 39, Dani adalah 40, Aqil adalah 42, Rano adalah 40 Dian adalah 34, Rani adalah 35 dan Dewi 33. Setiap orang memiliki ukuran unik (tunggal) dan beberapa orang bisa memiliki ukuran sepatu yang sama, misalnya Dani dan Rano. Tetapi, tidak ada orang yang memiliki ukuran sepatu lebih dari satu. Kita menyatakan hubungan atau relasi ini sebagai fungsi dan dapat digambarkan pada diagram panah berikut.



Gambar 1.4 Relasi nomor sepatu

Hubungan tersebut dapat juga dituliskan dalam bentuk pasangan berurut: (Ardi, 39), (Dani, 40), (Aqil, 42), (Rano, 40), (Dian, 34), (Rani, 35), (Dewi, 33). Hubungan antara Ardi dengan angka 39 adalah nomor sepatu yang digunakan. Begitu juga hubungan Dani, Aqil, dan nama-nama lain yang ada pada himpunan A dengan angka-angka yang ada pada himpunan B dari gambar diagram panah di atas hubungan nomor sepatu yang digunakan. Jadi dua himpunan di atas dihubungkan oleh aturan nomor sepatu dan ditKaliani dengan garis panah yang menghubungkan anggota kedua himpunan.

Aturan yang menghubungkan kelompok nama dengan kelompok nomor sepatu pada Gambar 1.4 disebut relasi antara kelompok nama pada himpunan A dengan nomor sepatu pada himpunan B, relasinya adalah 'nomor sepatu yang digunakan'. Relasi yang disajikan pada Gambar 1.4 di atas ditKaliani dengan sebuah garis panah dari kelompok nama menuju kelompok nomor sepatu, relasi seperti ini biasa disebut relasi yang dinyatakan dengan diagram panah. Selain dengan diagram panah. Relasi dapat juga dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut dan dengan menggunakan diagram kartesius seperti berikut.



Gambar 1.5 Deskripsi Pasangan Orang dan Nomor Sepatu

Untuk lebih memahami masalah relasi, coba Kalian perhatikan contoh berikut:

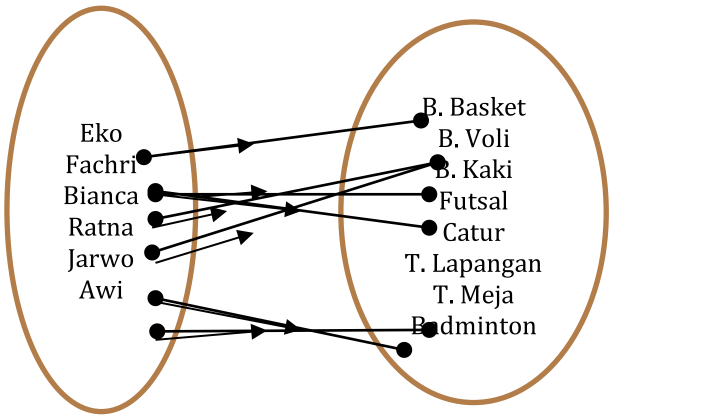
Contoh 1.1

Dalam rangka Pekan Olah Raga Pelajar tingkat provinsi, SMA XYZ mengirimkan beberapa orang siswanya untuk mengikut seleksi tingkat kabupaten. Dari 9 cabang yang akan dilombakan, yaitu Bola Basket, Bola Voli, Bola Kaki, Futsal, Badminton, Tenis Lapangan, Tenis Meja dan Catur, SMA XYZ meloloskan 6 siswanya untuk mewakili tim kabupaten dalam 6 cabang yang dilombakan, yaitu Eko untuk cabang Bola Basket, Fachri untuk bola kaki dan futsal, Bianca dan Ratna untuk bola voli, Jarwo untuk Badminton, dan Awi untuk tenis meja. Pak Alam sebagai guru olah raga yang membimbing siswa ikut seleksi akan membuat laporan kepada kepala sekolah dalam bentuk diagram panah, himpunan pasangan berurut dan diagram kartesius. Bagaimana bentuk laporan yang akan dibuat pak Alam?

Alternatif Penyelesaian:

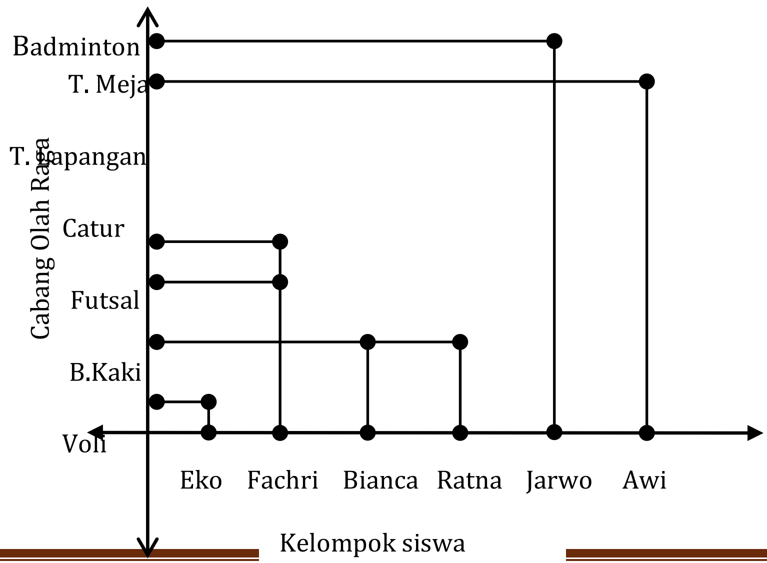
- Pasangan Berurut

  Himpunan pasangan berurut: {(Eko, Basket), (Fachri, B. Kaki), (Fachri, Futsal), (Bianca, B. Voli), (Ratna, B. Voli), (Jarwo, Badminton), (Awi, T. Meja)
- Diagram panah.



Gambar 1.6

- Diagram Kartesius



Dari paparan dan contoh di atas, kita dapat menemukan definisi dari relasi.

Definisi 1.1

Misalkan A dan B adalah himpunan. Relasi dari A ke B adalah aturan pengaitan/ pemasangan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B

Perhatikan Contoh 1.1, terlihat bahwa Kalian panah mengarah dari anggota himpunan siswa yang terpilih seleksi ke anggota Cabang Olah Raga. Himpunan yang anggotanya akan dipasangkan pada Contoh 1.1., yaitu himpunan siswa disebut daerah asal (*domain*). Himpunan Cabang Olah raga yang akan diikuti disebut daerah kawan (*kodomain*). Himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan di daerah asal disebut daerah hasil (*range*). Himpunan daerah asal (*Domain*) pada contoh 1.1 adalah {Eko, Fachri, Bianca, Ratna, Jarwo, Awi}. Himpunan daerah kawan (*Kodomain*) adalah {B. basket, B. Voli, B. Kaki, Futsal, Catur, Tenis Lapangan, tenis Meja, Badminton}. Daerah hasilnya (*Range*) adalah {B. basket, B. Voli, B. Kaki, Futsal, tenis Meja, Badminton}.

Contoh 1.2

Sebuah pusat perbelanjaan menerapkan tarip parkir mobil pengunjung dalam tabel berikut:

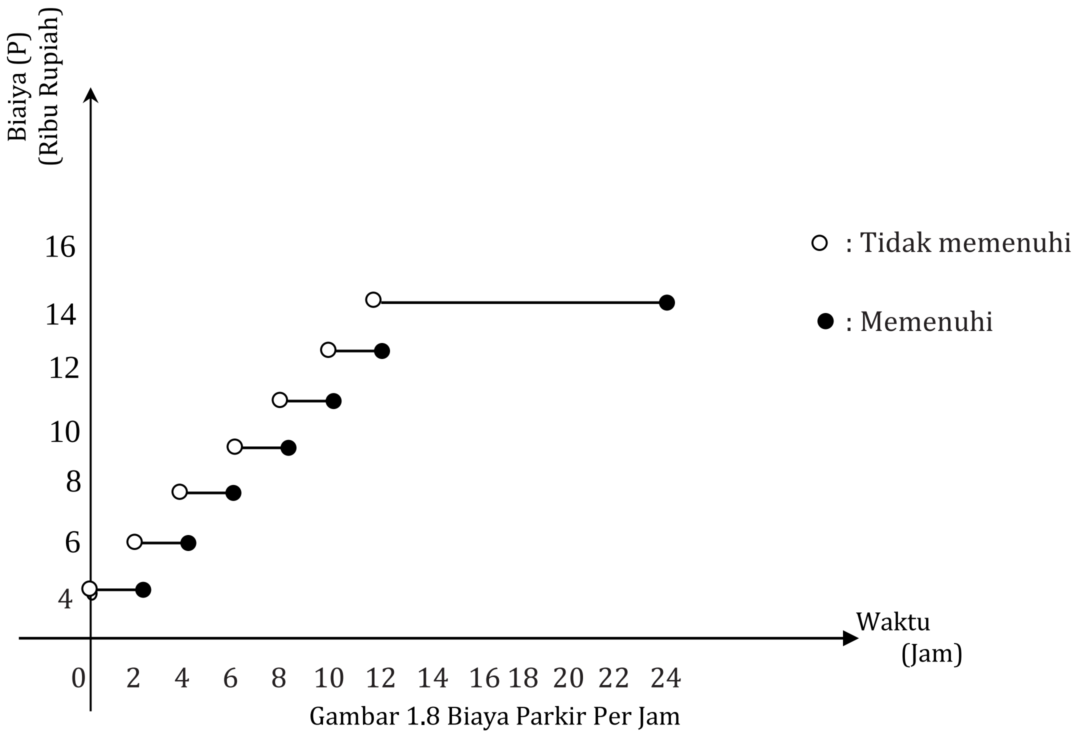
No.	Lama Waktu (t) (Dalam satuan jam)	Biaya Parkir (P) (Dalam satuan ribu rupiah)
1	$0 < t \leq 2$	4
2	$2 < t \leq 4$	6
3	$4 < t \leq 6$	8
4	$6 < t \leq 8$	10
5	$8 < t \leq 10$	12
6	$10 < t \leq 12$	14
7	$12 < t \leq 24$	16

Tabel 1.1 Tarip Parkir

Gambarkanlah biaya parkir di atas dalam bentuk grafik kartesius. Jika seseorang memarkirkan mobilnya dari pukul 07.30 WIB sampai dengan pukul 10.00 WIB, berapa biaya parkir yang harus dibayar?

Alternatif Penyelesaian:

Tarif parkir berdasarkan Tabel 1.1 di atas, jika digambarkan dalam grafik kartesius ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 1.8 Biaya Parkir Per Jam

Jika lama waktu parkir dari pukul 07.30 WIB sampai pukul 10.00 WIB, maka seseorang itu parkir selama 2 jam 30 menit dan membayar parkir sebesar Rp 6.000,-. Hubungan antara lama waktu parkir dengan biaya parkir pada Contoh 1.2 di atas merupakan sebuah contoh relasi.

Dari relasi antara waktu parkir dengan biaya pada Contoh 1.2 di atas, dinyatakan hal-hal berikut.

Daerah asal adalah $\{t : 0 < t \leq 24\}$

Daerah kawan adalah: {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 }

Daerah hasil adalah: {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 }

Berdasarkan contoh-contoh di atas, ditemukan definisi daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil sebagai berikut.

Definisi 1.2

Daerah asal atau biasa disebut domain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana sebuah relasi didefinisikan.

Definisi 1.3

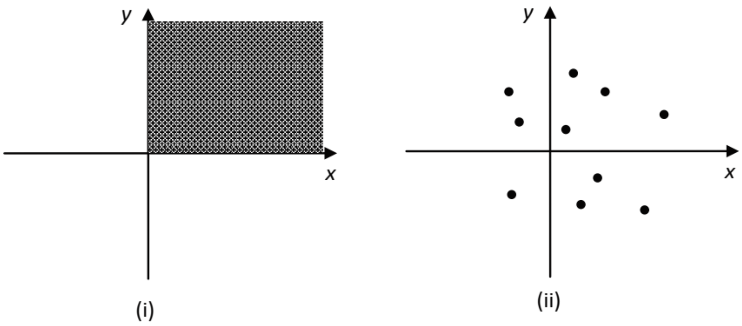
Daerah kawan atau biasa disebut kodomain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana anggota domain memiliki pasangan sesuai relasi yang

Definisi 1.4

Daerah hasil atau biasa disebut *range* suatu relasi adalah sebuah himpunan bagian dari daerah kawan (*kodomain*) yang anggotanya adalah pasangan anggota domain yang memenuhi relasi yang didefinisikan.

Sebuah relasi sering dinyatakan dalam bentuk persamaan dalam variabel x dan y, sebagai contoh: $y = 2x$ dan $y = x^2$. Nilai x merupakan domain relasi dan nilai y merupakan daerah hasil relasi. Pada persamaan $y = 2x$, jika domain x dibatasi oleh $0 < x \leq 5$, untuk x bilangan riil, maka daerah hasilnya adalah $0 < y \leq 10$.

Akan tetapi, tidak semua relasi dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.9 Jenis-jenis Relasi

Berdasarkan Gambar 1.9, dapat diketahui bahwa:

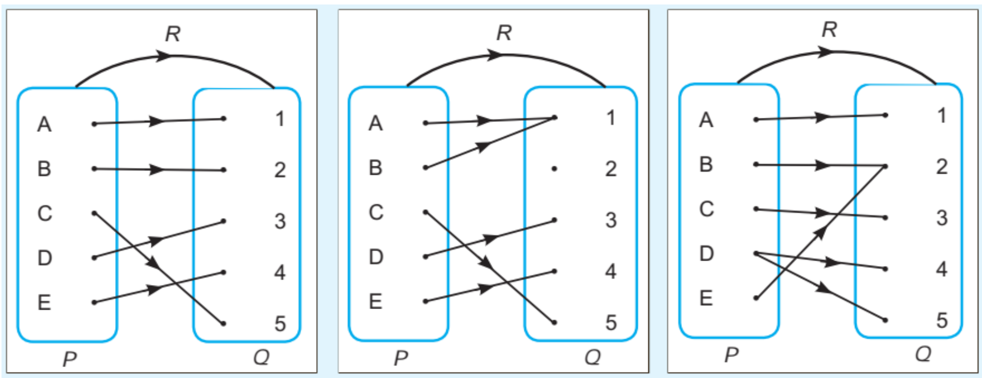
(i) Seluruh titik pada $x > 0$ dan $y > 0$ merupakan contoh relasi.

(ii) Kesepuluh titik-titik pada Gambar 1.9 (ii) merupakan contoh relasi

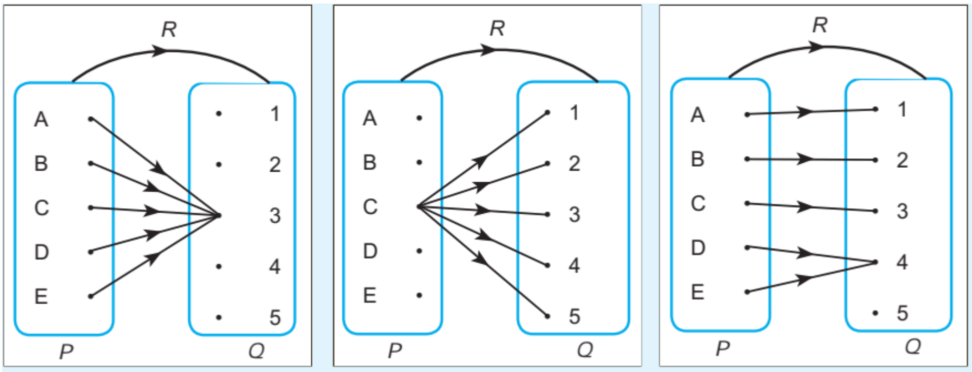
Fungsi

Setelah Kalian memahami masalah relasi, sekarang Kita kembangkan pembahasan dengan mempelajari fungsi. Kalian akan mempelajari menentukan notasi fungsi, daerah asal, daerah hasil, ekspresi simbolik fungsi, serta skesta grafik fungsi linear, fungsi kuadrat dan fungsi rasional.

Kalian perhatikan gambar diagram panah berikut.



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

Pada gambar 1.10 (a)

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan anggota himpunan Q
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan tunggal dengan anggota himpunan Q
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Pada gambar 1.10 (b)

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Pada gambar 1.10 (c)

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan dua anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P

Pada gambar 1.10 (d)

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Pada gambar 1.10 (e)

- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan semua anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Pada gambar 1.10 (f)

- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.

- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi yang ditunjukkan diagram panah pada gambar 1.10 (a), (b) dan (c) merupakan contoh fungsi. Syarat sebuah relasi menjadi fungsi adalah sebagai berikut.

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan tunggal dengan anggota himpunan Q.

Berdasarkan contoh-contoh di atas kita temukan definisi fungsi sebagai berikut.

Definisi 1.5

Misalkan A dan B himpunan.

Fungsi f dari A ke B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.

Notasi Fungsi

Jika f suatu fungsi yang memetakan/memasangkan setiap x anggota himpunan A ($X \in A$) dengan tepat satu y anggota himpunan B, maka dapat ditulis:
f: $x \to y$ (dibaca: f memetakan x ke y) y disebut bayangan x oleh fungsi f dan dinyatakan dengan $f(x)$.

Jadi, $f(x)$ adalah nilai y untuk sebuah nilai x yang diberikan, sehingga dapat ditulis $y= f(x)$ yang berarti bahwa y adalah fungsi dari x. Dalam hal tersebut, nilai dari y bergantung pada nilai x, maka dapat dikatakan bahwa y adalah fungsi dari x

Contoh 1.3:

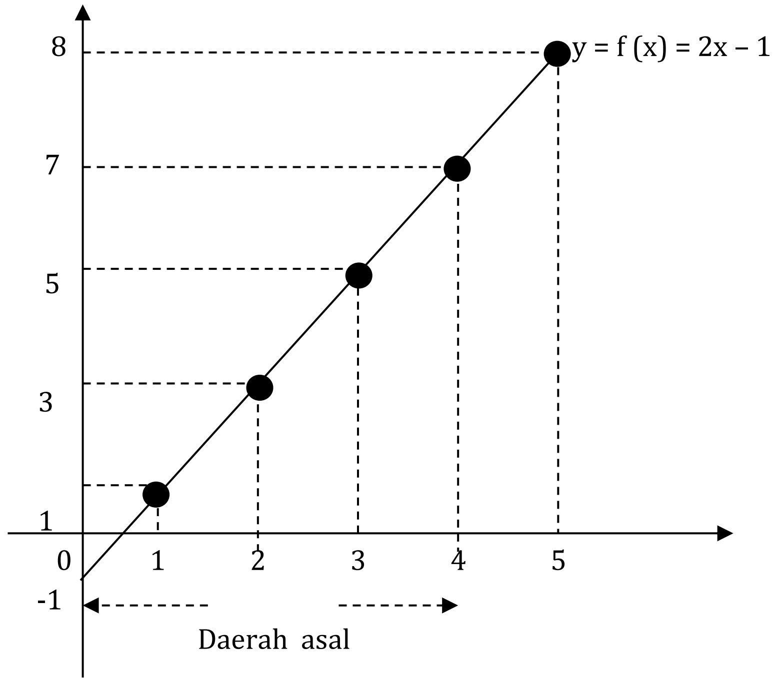
Diketahi f : A → B dan dinyatakan oleh rumus f (x) = 2x – 1.
Jika daerah asal A ditetapkan A : $\{x \mid 0 \le x \le 4. x \in R\}$

a. Tentukan f (0), f (1), f (2), f (3) dan f (4).
b. Gambarkan grafik fungsi y : f (x) = 2x – 1 dalam bidang kartesius.
c. Tentukan daerah hasil dari fungsi f.

Alternatif Penyelesaian:

a. f (x) = 2x – 1, maka :
   f (0) = 2.0 – 1 = -1
   f (1) = 2.1 – 1 = 1
   f (2) = 2.2 – 1 = 3
   f (3) = 2.3 – 1 = 5
   f (4) = 2.1 – 1 = 7

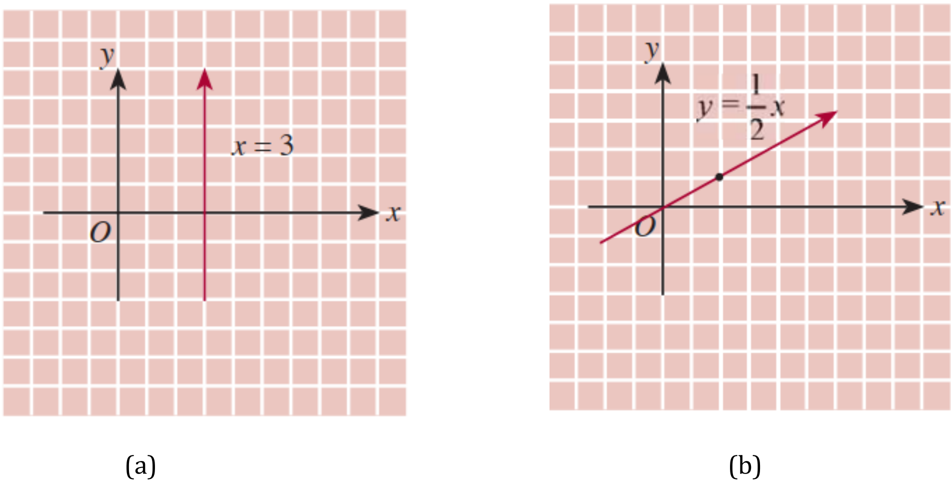
b. Grafik fungsi y : f (x) = 2x – 1



c. Daerah hasil fungsi f → $R_f = \{y \mid -1 \leq y \leq 7, y \in R\}$

Contoh 1.4

Perhatikan gambar berikut, manakah yang menyatakan suatu fungsi dari $R \to R$, $x, y \in R$?



Gambar 1.11

Alternatif Penyelesaian:

Pada gambar 1.11 (a) tampak bahwa untuk $x = 3$ dihubungkan dengan $y \in R$, misalnya 3 dengan 0, 3 dengan 1, 3 dengan 2, dan seterusnya. x tidak tepat dipasangkan dengan satu anggota y, akibatnya, relasi $\{(x,y) \mid x = 3;\ x, y \in R\}$ *bukan* merupakan fungsi.

Pada gambar 1.11 (b) tampak bahwa setiap unsur pada *domain* dihubungkan dengan satu dan hanya satu unsur pada *range*. Misalnya, 4 dihubungkan dengan 2; −2 dihubungkan dengan −1; 0 dihubungkan dengan 0; 2 dengan 1; dan seterusnya. Dengan demikian, relasi $\{(x,y) \mid y = \frac{1}{2}x;\ x, y \in R\}$ merupakan fungsi.

Grafik pada Gambar 1.11(b), menyatakan fungsi.
Jika daerah asal dari suatu fungsi f tidak atau belum ditentukan, maka dapat diambil daerah asalnya himpunan dari semua bilangan riil yang mungkin, sehingga daerah hasilnya merupakan bilangan riil. Daerah asal yang ditentukan dengan cara seperti itu disebut daerah asal alami (natural domain).

Contoh 1.5:
Tentukan daerah asal alami dari fungsi berikut:

a. $f(x) = \dfrac{4}{x+1}$

b. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Alternatif Penyelesaian:

a. $f(x) = \dfrac{4}{x+1}$, supaya f (x) bernilai riil maka $x + 1 \neq 0$ atau $x \neq -1$

Jadi Df : $\{x \mid x \in R, \text{ dan } x \neq -1\}$

b. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, supaya g (x) bernilai riil maka :

$4 - x^2 \geq 0$

$x^2 - 4 \leq 0$

$(x - 2)(x + 2) \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$

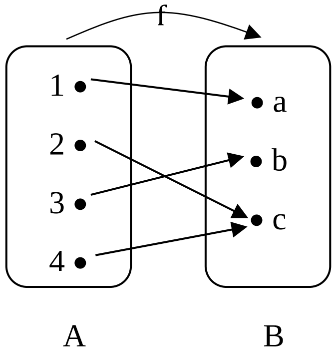
Jadi Dg = $\{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \in R\}$

Sifat-sifat Fungsi :

a. Fungsi Surjektif

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi onto atau fungsi kepada jika dan hanya jika daerah hasil fungsi f sama dengan himpunan B atau $R_f = B$.

Contoh dalam diagram panah



A : {1, 2, 3, 4} , B : {a, b, c}
Fungsi $f : A \rightarrow B$ dinyatakan dalam pasangan terurut : f = {(1, a), (2, c), (3, b), (4, c)}.
Tampak bahwa daerah hasil fungsi f adalah R_f : {a, b, c} dan $R_f = B$ maka fungsi f adalah fungsi surjektif atau fungsi onto atau fungsi kepada.

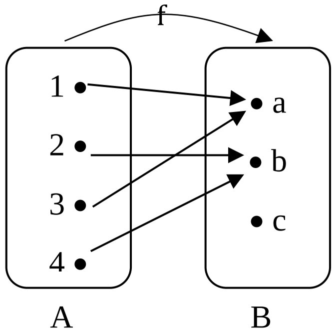
Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi into atau fungsi ke dalam jika dan hanya jika daerah hasil fungsi f merupakan himpunan bagian murni dari himpunan B atau $R_f \subset B$.

Contoh :

A : {1, 2, 3, 4} , B : {a, b, c}

fungsi f : A → B dinyatakan dalam pasangan terurut f : {(1, a), (2, b), (3, a), (4, b)}.

Tampak bahwa daerah hasil fungsi f : R_f : {a, b} dan $R_f \subset B$, maka fungsi f adalah fungsi into atau fungsi ke dalam.



b. Fungsi Injektif

Fungsi f : a → B disebut fungsi injektif (fungsi satu-satu) jika dan hanya jika untuk tiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.

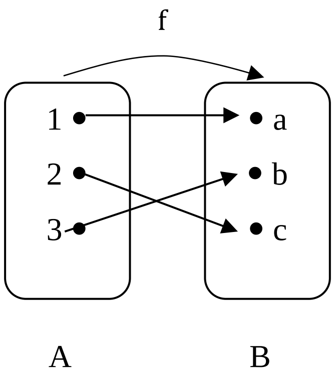
Contoh :

A : {1,2,3} , B : {a,b,c}

f : A → B dinyatakan dalam pasangan terurut f : {(1, a), (2, b), (3, c)}.

Tampak bahwa tiap anggota A yang berbeda mempunyai peta yang berbeda di B

Fungsi f adalah fungsi injektif atau satu-satu.



c. Fungsi Bijektif

Fungsi f : A → B disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi f sekaligus merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.

Contoh :

A : {1, 2, 3} , B : {a, b, c}

Fungsi f : A → B, dinyatakan dalam pasangan terurut f : {(1, a), (2, c), (3, b)}.

Tampak bahwa fungsi f adalah fungsi surjektif sekaligus fungsi injektif.

fungsi f adalah fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu.

Operasi Aljabar pada Fungsi

Jenis operasi aljabar sering dijumpai dalam himpunan bilangan riil, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian dan perpangkatan. Operasi aljabar pada bilangan riil dapat diterapkan pada aljabar fungsi, yaitu jika diketahui fungsi f(x) dan g (x), dan n bilangan rasional.

Untuk memahami operasi aljabar pada fungsi, coba Kalian amati masalah berikut.
Seorang pengrajin miniatur menerima pesanan pembuatan miniatur dan asesoris tempat penyimpanannya. Harga untuk membuat miniatur saja (F_1) biayanya Rp.75.000,- per buah mengikuti fungsi $F_1(x) = 75.000x + 5000$.
Jika akan membuat lengkap dengan asesoris tempat penyimpanannya, biaya tambahannya (F_2) Rp.25.000,- perbuah mengikuti fungsi $F_2\ (x) = 25.000x + 1000$, dengan x banyaknya miniatur yang dibuat.

a. Berapa biaya untuk membuat 10 buah miniature lengkap dengan asesoris penyimpanannya?
b. Tentukan selisih biaya pembuatan miniature dengan asesoris penyimpanannya jika banyaknya miniature yang dibuat 5 buah.

Alternatif Penyelesaian:

Fungsi biaya pembuatan miniature: $F_1(x) = 75.000x + 5.000$
Fungsi biaya pembuatan asesoris $F_2(x) = 25.000x + 1000$.

a. Biaya untuk membuat miniature lengkap dengan asesorisnya adalah:

$$F_1(x) + F_2(x) = (75.000x + 5.000) + (25.000X + 1000)$$
$$= 100.000x + 6.000$$

Total biaya untuk membuat 10 buah miniature lengkap dengan asesorisnya adalah:
$F_1\ (10) + F_2\ (10) = 100.000.10 + 6.000 = 1.006.000.$

Jadi total biaya untuk membuat 10 miniatur lengkap dengan asesorisnya adalah Rp. 1.006.000,-

Selisih biaya pembuatan miniature dengan asesorisnya adalah:

$$F_1(x) - F_2(x) = (75.000x + 5.000) - (25.000X + 1000)$$
$$= 50.000x + 4.000$$

Selisih biaya pembuatan 5 buah miniature dengan asesorisnya adalah :
$F_1\ (5) - F_2\ (5) = 50.000.5 + 4 = 246.000$

Jadi selisih biaya pembuatan 5 buah miniatur dengan asesorisnya adalah :
Rp. 246.000,-

Operasi aljabar pada fungsi didefinisikan sebagai berikut

Definisi 1.6

Jika f suatu fungsi dengan daerah asal D_f dan g suatu fungsi dengan daerah asal D_g, maka pada operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dinyatakan sebagai berikut.
Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
Perkalian f dan g ditulis $f \times g$ didefinisikan sebagai $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ dengan daerah asal $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$.
Pembagian f dan g ditulis $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$.

Contoh 1.7

Diketahui fungsi-fungsi f dan g ditentukan dengan rumus f (x) = 2x – 10 dan g (x) = $\sqrt{2x - 1}$

Tentukan nilai fungsi-fungsi berikut, kemudian tentukan daerah asalnya.

a. (f + g) (x)
b. (f – g) (x)
c. (f x g) (x)
d. $\left(\frac{f}{g}\right)$ (x)

Alternatif Penyelesaian:

Daerah asal fungsi f(x) = 2x - 10 adalah D_f : $\{x \mid x \in R\}$

Daerah asal fungsi g(x) = $\sqrt{2x - 1}$ adalah D_g : $\{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

a. Jumlah fungsi f (x) dan g (x) adalah

   (f + g) (x) = f (x) + g (x) = 2x – 10 + $\sqrt{2x - 1}$

   Daerah asal fungsi (f + g) (x) adalah

   $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

   $= \{x \mid x \in R\} \cap \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

   $= \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

b. Selisih fungsi f (x) dan g (x) adalah

   (f – g) (x) = f (x) – g (x) = 2x – 10 - $\sqrt{2x - 1}$

Daerah asal fungsi (f - g) (x) adalah

$D_{f-g} = D_f \cap D_g$

$= \{x \mid x \in R\} \cap \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

$= \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

c. Perkalian fungsi f (x) dan g (x) adalah

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (2x - 10)(\sqrt{2x-1}) = 2x\sqrt{2x-1} - 10\sqrt{2x-1}$

Daerah asal fungsi (f x g) (x) adalah

$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$

$= \{x \mid x \in R\} \cap \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

$= \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

d. Pembagian fungsi f (x) dengan g (x) adalah

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x-1}}$

Daerah asal fungsi $(\frac{f}{g})(x)$ adalah

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$ dan $g(x) \neq 0$

$= \{x \mid x \in R\} \cap \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R$ dan $\sqrt{2x-1} > 0\}$

$= \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R$ dan $x > \frac{1}{2}\}$

$= \{x \mid x > \frac{1}{2}, x \in R\}$

B. Rangkuman

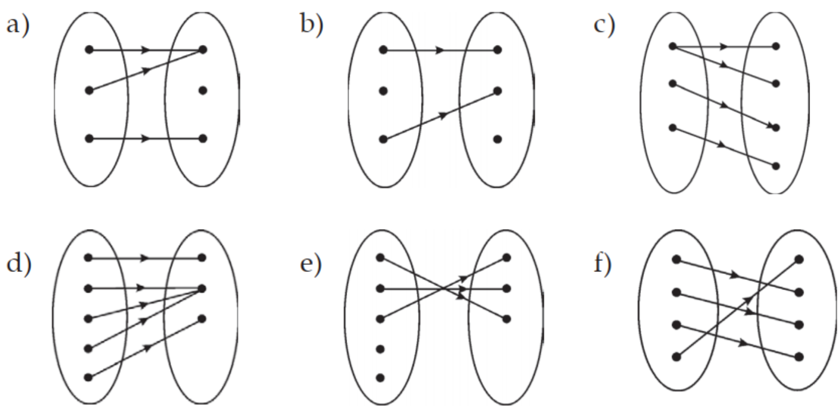
1. **Apabila A dan B himpunan**, maka hubungan atau pemasangan anggota A dengan anggota B disebut relasi. Apabila antara anggota A dan anggota B tidak ada hubungan, maka himpunan A dan B tidak berelasi.
2. **Fungsi** adalah relasi yang memetakan, memasangkan atau mengawankan setiap anggota di himpunan A dengan tepat satu anggota di himpunan B.
3. **Sebuah fungsi f dari himpunan A ke** B, dapat dinyatakan dalam bentuk diagram, pasangan terurut atau dengan notasi fungsi $f : A \rightarrow B$ atau dengan rumus $y = f(x)$, dimana $x \in A$ dan $y \in B$. Himpunan A disebut pula dengan daerah asal (domain) dan B disebut daerah kawan (kodomain). Sedangkan daerah hasil fungsi (range) merupakan himpunan bagian dari B
4. Misalkan fungsi f memetakan himpunan A ke himpunan B dengan darah hasil R. Fungsi disebut fungsi **surjektif** (onto) apabila daerah hasil sama dengan daerah kawan (R = B), disebut fungsi **injektif** (into) apabila untuk setiap $a \neq b$, maka $f(a) \neq f(b)$ dan disebut fungsi bijektif (satu ke satu) apabila fungsi tersebut injektif dan sekaligus surjektif
5. Operasi Aljabar pada fungsi didefinisikan:
   a. Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
   b. Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.

c. Perkalian f dan g ditulis $f \times g$ didefinisikan sebagai $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ dengan daerah asal $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$.

d. Pembagian f dan g ditulis $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$.

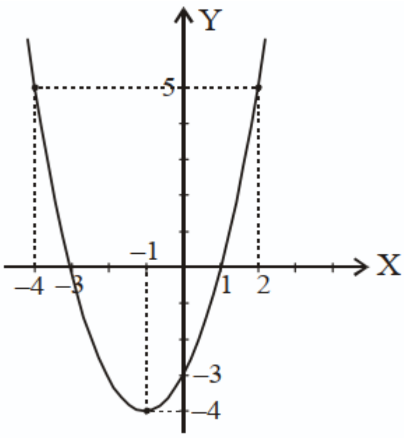
C. Latihan Soal

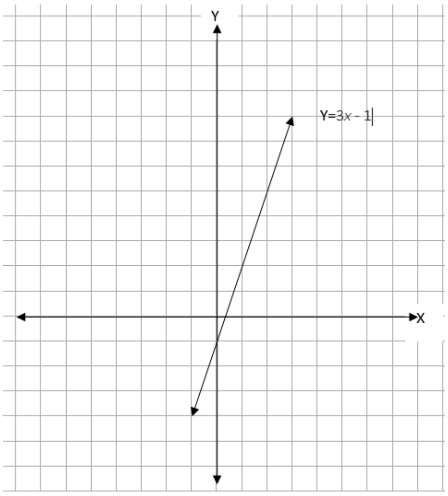
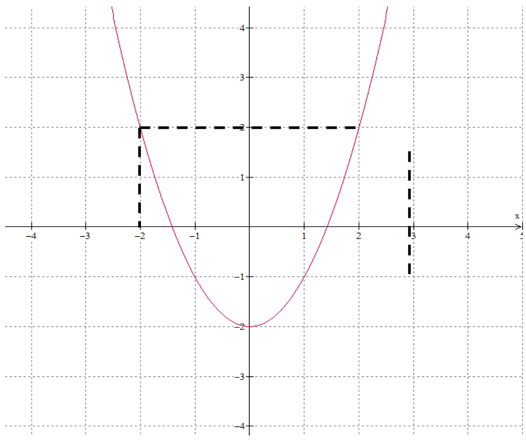
1. Manakah dari diagram berikut yang mendefinisikan fungsi?



2. Diketahui fungsi $f : x \rightarrow f(x)$ didefinisikan oleh $f(x) = x^3$ pada interval $-1 \leq x \leq 2$
   a. Tentukan $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, dan $f(2)$!
   b. Tentukan domain dan range!
3. Diketahui fungsi $f : R \rightarrow R$ dan $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
   a. Hitunglah $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, dan $f(2)$
   b. Gambarkan grafik fungsi tersebut.
   c. Jika daerah asal fungsi tersebut adalah $Df = \{x | -4 \leq x \leq 2, x \in R\}$, tentukan daerah hasilnya.
4. Tentukan mana yang merupakan fungsi surjektif, injektif, atau bijektif dari fungsi $f : R \rightarrow A$ yang ditentukan sebagai berikut.
   a. $f : x \rightarrow 3x - 1, x \in R$
   b. $f : x \rightarrow x^2 - 2, x \in R$
5. Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x+1}$ dan $g(x) = \sqrt{16 - x^2}$
   Tentukan nilai fungsi-fungsi berikut, kemudian tentukan daerah asalnya.
   a. $(f + g)(x)$
   b. $(f - g)(x)$
   c. $(f \times g)(x)$
   d. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Pembahasan Latihan Soal

No	Pembahasan	Pedoman Skor
1.	Diagram a), d) dan f) merupakan fungsi karena setiap anggota himpunan daerah asal memiliki tepat satu pasangan anggota himpunan daerah kawan. Untuk diagram b) dan e) ada anggota himpunan daerah asal yang tidak memiliki pasangan anggota himpunan daerah kawan serta untuk diagram c) ada anggota himpunan daerah asal memiliki lebih dari satu pasangan anggota daerah kawan sehingga b), c) dan e) bukan fungsi.	5
2.	$f(x) = x^3$ pada interval $-1 \leq x \leq 2$ a. f(-1) = $(-1)^3$ = -1 f(0) = 0^3 = 0 f(1) = 1^3 = 1 f(2) = 2^3 = 8 b. Daerah asal: $D_f = \{x \mid -1 \leq x \leq 2, x \in R\}$ Daerah hasil: $R_f = \{y \mid -1 \leq y \leq 8, y \in R\}$	 3 2
3.	$f(x) = x^2 + 2x - 3$. a. Hitunglah $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, dan $f(2)$ $f(-4) = (-4)^2 + 2(-4) - 3 = 5$ $f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) - 3 = 0$ $f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3$ $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$ $f(0) = (0)^2 + 2(0) - 3 = -3$ $f(1) = (1)^2 + 2(1) - 3 = 0$ $f(2) = (2)^2 + 2(2) - 3 = 5$ b.  c. $D_f = \{x \mid -4 \leq x \leq 2, x \in R\}$ $R_f = \{y \mid -4 \leq y \leq 5, y \in R\}$	 3,5 3,5 3
4.	a. Grafik fungsi y = f(x) = 3x – 1, x∈R seperti tampak pada gambar di bawah:	

No	Pembahasan	Pedoman Skor
	 Amati untuk setiap domain x_1 dan x_2 ($x_1 \neq x_2$) maka $f(x_1) \neq f(x_2)$. Jadi, fungsi $y = f(x)$ = 3x-1 merupakan fungsi injektif. Oleh karena range R_f sama dengan daerah kawannya (kodomainnya) maka fungsi $y = f(x)$=3x – 1, $x \in R$ merupakan fungsi surjektif. Dengan demikian, fungsi $y = f(x) = 3x - 1$, $x \in R$ adalah fungsi bijektif.	5
	b. Grafik fungsi y = f(x) = $x^2 - 2$, x∈R seperti tampak pada gambar di bawah:  ada gambar tampak terdapat terdapat nilai-nilai x_1 dan $x_2 \in D_f$ dengan $x_1 \neq x_2$ ada $f(x_1) = f(x_2)$. Jadi, fungsi $y = f(x) = x^2 - 2$, $x \in R$ bukan fungsi injektif.	5
5.	Fungsi f akan bernilai riil jika $x + 1 \geq 0$ atau $x \geq -1$. Daerah asal fungsi f adalah $D_f = \{x \mid x \geq -1; x \in R\}$. Fungsi g akan bernilai riil jika $16 - x^2 \geq 0$. $16 - x^2 \geq 0$ $x^2 - 16 \leq 0$	10

No	Pembahasan	Pedoman Skor
	$(x-4)(x+4) \leq 0 \rightarrow -4 \leq x \leq 4$ Daerah asal fungsi g adalah $D_g = \{x \mid -4 \leq x \leq 4; x \in R\}$. a. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{16-x^2}$ Daerah asal fungsi $(f+g)(x)$ adalah $D_{f+g} = \{x \mid -1 \leq x \leq 4; x \in R\}$ b. $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{16-x^2}$ Daerah asal fungsi $(f-g)(x)$ adalah $D_{f-g} = \{x \mid -1 \leq x \leq 4; x \in R\}$ c. $(f \text{x } g)(x) = (x) \text{ x } g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{16-x^2}$ $= \sqrt{(x+1)(16-x^2)}$ $= \sqrt{16+16x-x^2-x^3}$ Daerah asal fungsi $(f \text{ x } g)(x)$ adalah $D_{f \text{ x } g} = \{x \mid -1 \leq x \leq 4; x \in R\}$ b. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{16-x^2}} = \sqrt{\frac{x+1}{16-x^2}}$ Daerah asal fungsi $\frac{f(x)}{g(x)}$ adalah $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$ dan $g(x) \neq 0$ $= \{x \mid -1 \leq x < 4; x \in R\}$	
	Jumlah Skor	**40**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan Kalian, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan= $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum} x\ 100\%$

Kriteria

90% – 100% = baik sekali

80% – 89% = baik

70% – 79% = cukup

< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan Kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

D. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom "Ya" jika Kalian mampu dan "Tidak" jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Saya sudah memahami tentang konsep relasi dan fungsi		
2.	Saya sudah dapat membedekan antara relasi dan fungsi		
3.	Saya sudah dapat menentukan Domain, Kodomain dan range		
4.	Saya sudah memahami sifat-sifat fungsi		
5.	Saya sudah memahami operasi aljabar pada fungsi		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
FUNGSI LINIER, FUNGSI KUADRAT DAN FUNGSI RASIONAL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan:
1. Memahami bentuk umum fungsi linear dan menggambar grafiknya
2. Memahami bentuk umum fungsi kuadrat dan menggambar grafiknya
3. Memahami bentuk umum fungsi rasional dan menggambar grafiknya

B. Uraian Materi

Pada pembelajaran kedua ini pembahasan akan kita fokuskan pada fungsi linear, fungsi kuadrat dan fungsi rasional.

1. Fungsi Linear

Fungsi linear merupakan salah satu fungsi yang sederhana dalam matematika. Banyak aplikasi dari fungsi linear ini, seperti hubungan antara ketinggian pesawat dan suhu udara, hubungan penawaran dengan ketersediaan barang, serta hubungan antara jarak dan waktu tempuh. Dalam modul ini, fungsi linear dinyatakan sebagai berikut.

$$\boxed{f(x) = mx + a}$$

Dikatakan linear karena grafiknya berupa garis. Grafik dari fungsi ini dapat Kalian gambar dengan menentukan dua nilai c yang berbeda serta menentukan pasangan titik salah satunya dengan jalan membuat tabelnya.

Contoh 2.1
Tentukan rumus untuk fungsi linear f jika diberikan pasangan nilai seperti tabel berikut.

Tabel 1.1.

x	f(x)
-1	-1
2	8

Alternatif Penyelesaian:
Karena f fungsi linear, dia dapat dinyatakan sebagai f(x) = mx + a. Oleh karena itu, Kalian akan memperoleh dua persamaan.

(-1) = m.(-1) + a ……(1)

8 = m.2 + a…………..(2)

Jika persamaan (2) dikurangi dengan persamaan (1), akan akan peroleh persamaan

9 = m. 3

yang memberikan penyelesaian m = 3.

Substitusi nilai ini ke persamaan (2) maka di peroleh persamaan

$$8 = 3.2 + a,$$

yang memberikan penyelesaian a = 2.
Jadi, rumus untuk f(x) sebagai berikut f(x) = 3x + 2.
Variabel pada fungsi linear dan juga pada fungsi-fungsi lain tidak harus berupa simbol x, tetapi dapat berupa simbol yang lain, seperti t, z, dan w. Khusus untuk variabel t, variabel ini biasanya digunakan sebagai simbol dari waktu.

Contoh 1.2

Hubungan antara waktu dan jarak yang ditempuh suatu kendaraan merupakan fungsi linear g. Lalu, diberikan pasangan nilai seperti tabel berikut.

Tabel 1.2.

t (dalam menit)	g(t) (dalam km)
5	200
10	400

Tentukan rumus hubungan waktu dan jarak tempuh kendaraan tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Seperti pada Contoh 1.1, karena g fungsi linear, dia dapat dinyatakan sebagai $g(t) = mt + a$.
Oleh karena itu, di peroleh dua persamaan, yaitu:

200 = m.5 + a

400 = m.10 + a

Periksa bahwa penyelesaian bersama dari persamaan di atas adalah g(t) = 40t. Jadi, hubungan waktu dan jarak tempuh kendaraan adalah g(t) = 40t.
Pada fungsi linear bentuk, jika f(x) dinyatakan sebagai y, yaitu: y = mx + a.
Persamaan terakhir ini disebut sebagai persamaan garis.

Contoh 2.3

Tentukan persamaan garis melalui titik (1,1) dan (2,0). Tentukan grafiknya.

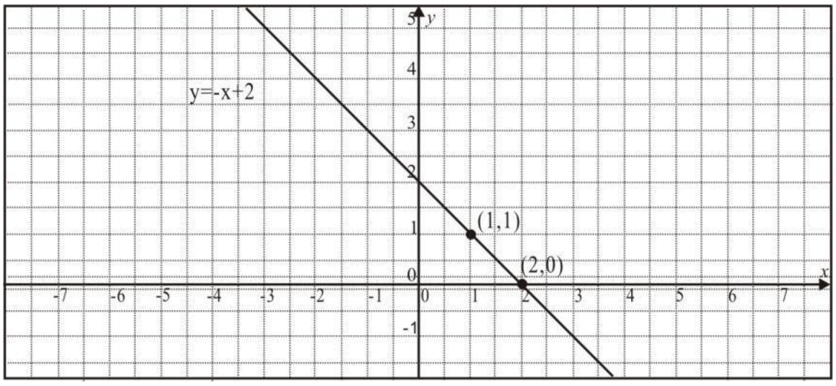
Alternatif Penyelesaian:

Persamaan garis sebagai y = mx + a. Kalian akan peroleh dua persamaan berikut.

1 = m.1 + a

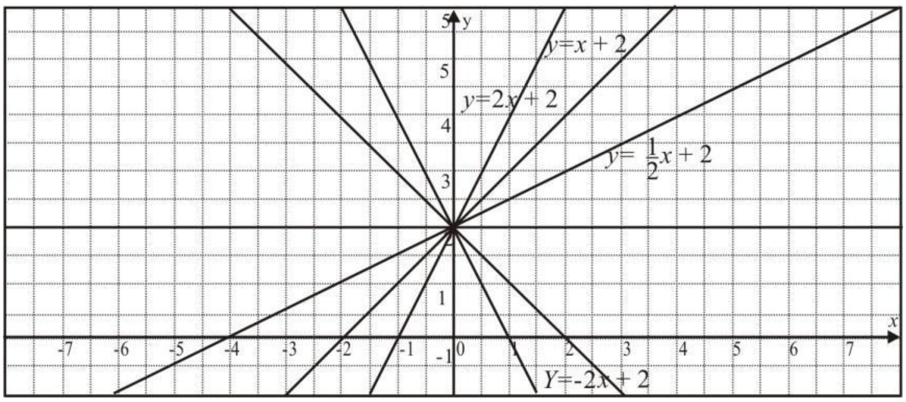
0 = m.2 + a.

Penyelesaian bersama dua persamaan tersebut adalah m = -1 dan a = 2. Jadi, persamaan garis yang diminta adalah y = -m + 2. Grafik persamaan garis diperoleh dengan menghubungkan titik-titik yang dilaluinya seperti gambar berikut ini.



Gambar 2.1

Perhatikan grafik berikut.



Gambar 2.2

Pada gambar di atas, dapat dilihat berbagai kemiringan garis terhadap sumbu x. Kemiringan garis disebut sebagai **gradien**. Gradien merupakan kooefisien dari variabel m. Kalian tentunya bertanya bagaimana cara menentukan gradien garis?

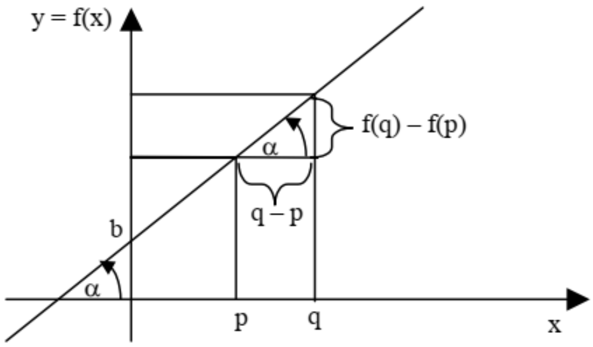
Jika kita perhatikan bahwa gradien adalah garis yang dilihat relatif sumbu x, terutama untuk garis dengan persamaan y = 2 atau ditulis sebagai y = 0.x + 2, Maka dapat diduga bahwa gradien garis dapat ditentukan dengan perbandingan panjang segmen garis pada sumbu y dengan panjang segmen garis pada sumbu x dari dua titik tertentu. Sehingga jika kita mempunyai dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) gradien garis dapat di rumuskan sebagai berikut.

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Lihat kembali pada contoh 3, m = -1, diperoleh dari rumus gradien garis tersebut adalah:

$$m = \frac{0-1}{2-1} = -1$$

Untuk lebih jelas coba Kalian perhatikan grafik berikut:



Gambar 2.3

$f(x) = mx + b \rightarrow f(p) = m.p + b$

$f(q) = m.q + b$

______________ -

$f(p) - f(q) = m(p - q)$

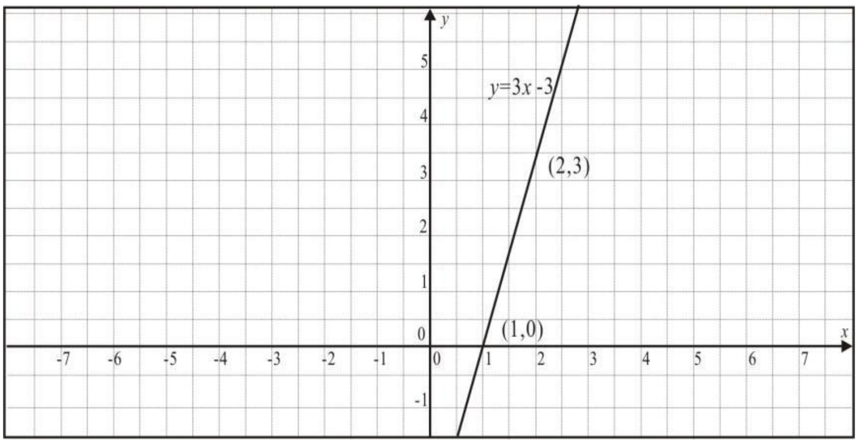
$$\boxed{\frac{f(p)-f(q)}{p-q} = m = \tan\alpha}$$

Dari jabaran di atas tampak bahwa gradien tersebut merupakan nilai perbandingan antara selisih komponen y dan x dari dua sebarang dua titik pada garis tersebut.

Jika persamaan garis y = ax + b maka gradiennya adalah a dan melalui titik (0,b). Secara umum sebuah garis lurus (yang tidak sejajar atau berimpit dengan sumbu Y) persamaannya adalah y = mx + n, dengan m adalah gradien (koefisien arah) garis yang menunjukkan kemiringan garis.
Garisnya condong ke kanan jika dan hanya jika $m > 0$ dan condong ke kiri jika dan hanya jika $m < 0$.

Contoh 2.4
Gambarlah suatu garis yang mempunyai gradien m = 3 dan titik potong dengan sumbu Y adalah -3.

Alternatif Penyelesaian:
Persamaan garis yang dimaksud adalah y = 3x - 3.
Untuk menggambarnya, Anda tentukan dua titik yang dilaluinya seperti berikut.
$x = 1 \rightarrow y = 0$, $x = 2 \rightarrow y = 3$.
Jadi, dua titik yang dilaluinya adalah (1,0) dan (2,3). Oleh karena itu, Kalian peroleh gambar seperti berikut ini.



Gambar 2.4

Gradien/kemiringan garis dari garis tersebut dengan rumus adalah:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{2-1} = 3$$

Sama dengan gradien yang diketahui, yaitu m = 3.

Contoh 2.5

Gambarlah suatu garis yang melalui titik (2,3) dan mempunyai gradien $\frac{1}{2}$.

Alternatif penyelesaian:

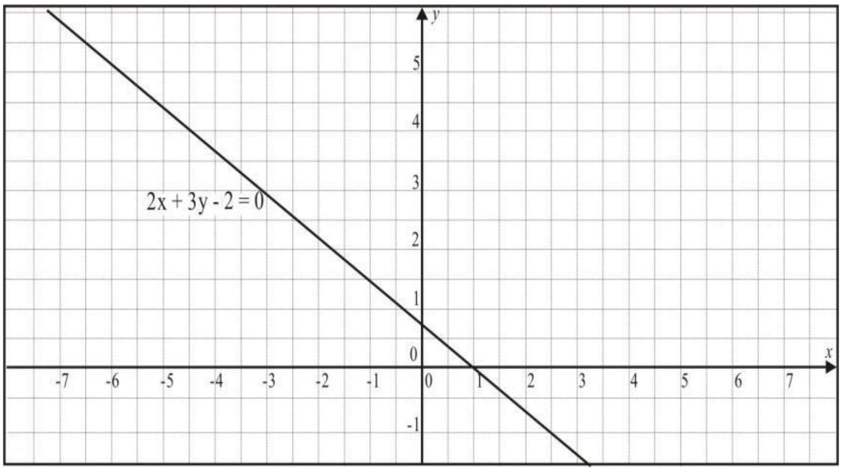
Misalnya, persamaan garis yang dimaksud adalah y = mx + a.

Karena garis mempunyai gradien $\frac{1}{2}$, maka persamaan garis menjadi y = $\frac{1}{2}$ x + a.

Berikutnya garis melalui (2,3). Maka itu, Anda peroleh persamaan 3 = $\frac{1}{2}$ 2 + a ↔ a = a.

Jadi persamaan garis yang melalui titik (2, 3) dan gradient $\frac{1}{2}$ adalah y = $\frac{1}{2}$ x + 2

Gambar garis seperti berikut ini.



Gambar 2.5

Contoh 2.6

Diberikan persamaan linear 2x + 3y – 2 = 0. Tentukan gradien, titik potong dengan sumbu y dan gambar grafiknya.

Alternatif Penyelesaian:

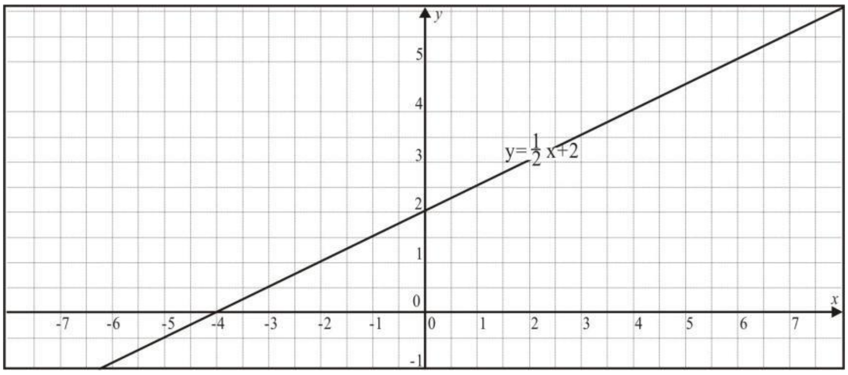
Ubah 2x + 3y – 2 = 0 ke bentuk y = mx + a.

$2x + 3y - 2 = 0 \leftrightarrow 3y = -2x + 2$

$\leftrightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{2}{3}$

Jadi gradiennya m= $\frac{-2}{3}$

Titik potong dengan sumbu Y: $(0, \frac{2}{3})$



Gambar 2.6

Dari contoh di atas, jika persamaan berbentuk AX + BY + C = 0, maka gradiennya adalah $m = -\frac{A}{B}$ dan titik potong dengan sumbu Y adalah $(0, \frac{-C}{A})$

Jika diketahui suatu persamaan garis, dapat ditentukan gradien garis dan titik potong garis tersebut dengan sumbu *y.*

Menentukan persamaan garis dengan gradien tertentu dan melalui satu titik tertentu.

Misal garis yang akan kita tentukan persamaannya bergradien *m* dan melalui titik sembarang (x_1, y_1).

Misalkan persamaan garisnya adalah $y = mx + n$.

Garis ini melalui titik (x_1, y_1) berarti $y_1 = mx_1 + n$ atau $n = y_1 - mx_1$.

Dengan mensubstitusikan $n = y_1 - mx_1$ ke $y = mx + n$, maka diperoleh $y = mx + y_1 - mx_1$.

Persamaan $y = mx + y_1 - mx_1$ dapat diubah menjadi $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Jadi persamaan **garis** yang **bergradien *m*** dan **melalui titik (x_1, y_1)** adalah:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1).}$$

Contoh 2.7.

Tentukan persamaan garis yang bergradien -1 dan melalui titik (-2, 3).

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan garis yang bergradien m dan melalui titik (x_1, y_1) adalah $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$.

Jadi persamaan garis bergradien -1 dan melalui titik (-2, 3) adalah $\boldsymbol{y}$ - 3 = -1{x - (-2)} atau $\boldsymbol{y}$ - 3 = -1{x + 2} atau $\boldsymbol{y}$ - 3 = -1x -2 atau $\boldsymbol{y}$ = -x + 1.

Menentukan persamaan garis yang melalui dua titik.

Misalkan diberikan dua titk A(x_1, y_1) dan B(x_2, y_2).

Garis yang melalui titk A(x_1, y_1) adalah $\boldsymbol{y - y_1 = m}\ (x - x_1)$.

Garis ini melalui titik B(x_2, y_2), berarti $\boldsymbol{y_2 - y_1 = m}\ (x_2 - x_1)$ atau $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Subtitusikan $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ke $\boldsymbol{y - y_1 = m}\ (x - x_1)$ sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ (x - x_1)$$

Atau

$$\frac{\boldsymbol{y - y_1}}{\boldsymbol{y_2 - y_1}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Jadi

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{y - y_1}}{\boldsymbol{y_2 - y_1}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

merupakan persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2).

Contoh 2.8

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (0, -3) dan (2, 5).

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan garis yang titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah $\frac{\boldsymbol{y-y_1}}{\boldsymbol{y_2-y_1}} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

Jadi persamaan garis yang melalui titik (0, -3) dan (2, 5) adalah $\frac{\boldsymbol{y-(-3)}}{\boldsymbol{5-(-3)}} = \frac{x-0}{2-0}$

$\frac{\boldsymbol{y+3}}{\boldsymbol{8}} = \frac{x}{2} \leftrightarrow (y+3).2 = 8.x$

$\leftrightarrow$ 2y + 6 = 8x

$\leftrightarrow 2y - 8x + 6 = 0$

Jadi persamaan garis yang melalui titik (0, -3) dan (2, 5) adalah $2y - 8x + 6 = 0$ atau 2y = 8x – 6 $\leftrightarrow$ y = 4x – 6

2. Fungsi Kuadrat

.

Sekarang kita bersama-sama akan mempelajari bentuk lain dari suatu fungsi yang dikenal sebagai **fungsi kuadrat**.

Fungsi f: $R \rightarrow R$ yang didefinisikan sebagai $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$ dengan a, b, dan c anggota bilangan riil dan $a \neq 0$ disebut fungsi berderajat dua atau fungsi kuadrat.
Persamaan umum fungsi kuadrat $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$ adalah:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

dan grafik fungsinya disebut **kurva parabola**.

Ingat kembali cara menentukan penyelesaian dari suatu persamaan kuadrat yang berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$ seperti dengan menggunakan rumus:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Penyelesaian dari suatu persamaan kuadrat disebut akar dari persamaan kuadrat.

Jika suatu fungsi kuadrat yang diketahui akar-akarnya misalkan x_1 dan x_2, maka fungsi kuadrat tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

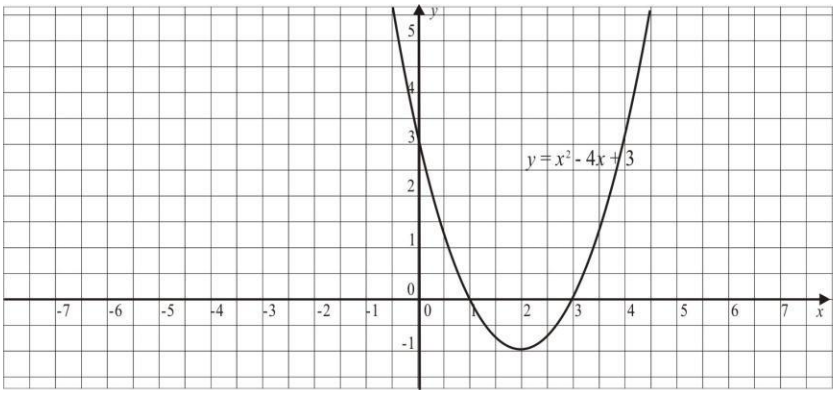
Untuk menggambar suatu fungsi kuadrat, ikuti prosedur tiga langkah sederhana berikut.
1. Tentukan titik potong kurva dengan sumbu x dan sumbu y
2. Tentukan titik puncak
3. Letakan titik-titik tersebut pada bidang koordinat Cartesius
4. Dapat menggunakan beberapa titik uji.
5. Hubungkan titik-titik tersebut dengan kurva.

Contoh 2.9
Dengan cara membuat tabel, gambarlah grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 4x + 3$

Alternatif Penyelesaian:
Dengan menggunakan prosedur tiga langkah di atas, Kalian memperoleh tabel berikut ini.
1. Titik potong kurva dengan sumbu x, diperoleh untuk nilai y = 0, maka
   y = 0 maka $0 = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$ atau x = 3 dan x = 1.
   Maka titik potong sumbu x adalah (1, 0) dan (3, 0).
2. Titik potong kurva dengan sumbu y, diperoleh untuk nilai x = 0, maka $y = 0^2 - 4.0 + 3$.
   Maka titik potong sumbu y adalah (0, 3).
3. Sumbu simetri fungsi kuadrat adalah $x_{sb} = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-b)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$. Nilai optimum untuk $x_{sb} = 2$ maka $y = (2)^2 - 4.2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

Tabel 3

Berdasarkan dari data di atas, maka diperoleh grafik kurva sebagai berikut:



Gambar 2.7

Perhatikan secara seksama gambar Contoh 2.7.
Apa yang dapat kita simpulkan?
Beberapa hal yang dapat disimpulkan tentang grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 4x + 3$ sebagai berikut.

a. Memotong sumbu y di titik (0,3).
b. Memotong sumbu x di titik (1,0) dan (3,0).
c. Simetri terhadap garis x = 2.
d. Mempunyai titik puncak (2, -1).
e. Mempunyai nilai ekstrem -1.

Dari kesimpulan di atas, maka bisa diperoleh hal sebagai berikut:

a. Menggambar grafik fungsi kuadrat dengan cara menentukan titik potong dengan sumbu y, titik potong dengan sumbu x, dan titik puncak.
   Penentuan titik potong grafik fungsi kuadrat dengan sumbu y dilakukan melalui substitusi nilai x = 0 ke fungsi kuadrat. Lalu, Anda akan memperoleh berikut ini.
   $y = x^2 - 4x + 3$
   $y = 0^2 - 4.0 + 3$
   $y = 3$
b. Titik potong grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 4x + 3$ dengan sumbu y adalah titik (0,3). Nilai 3 merupakan nilai c pada fungsi kuadrat bentuk umum $y = ax^2 + bx + c$. Jadi, titik potong grafik fungsi kuadrat dengan sumbu y adalah titik (0, c).
c. Penentuan titik potong grafik fungsi kuadrat dengan sumbu x dilakukan melalui substitusi nilai y = 0 ke fungsi kuadrat, maka akan memperoleh:
   $y = x^2 - 4x + 3$
   $0 = x^2 - 4x + 3$
   $(x - 1)(x - 3) = 0$
   x = 1 atau x = 3.
   Jadi, titik potong grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 4x + 3$ dengan sumbu x adalah titik-titik (1,0) dan (3,0).

c. Garis simetri grafik fungsi kuadrat y = x^2 - 4x + 3 adalah x = 2. Nilai ini dapat Anda peroleh dari

$$2 = -\frac{-4}{2.1} = \frac{-b}{2a}$$

Jadi garis x = $\frac{-b}{2a}$ merupakan garis simetri dari fungsi kuadrat y = x^2 - 4x + 3.

d. Titik puncak grafik fungsi kuadrat y = x^2 – 4x + 3 adalah titik (2, −1). Nilai −1 disebut sebagai nilai ekstrem. Nilai ini dapat Anda peroleh dengan menyubstitusikan nilai x = 2 ke persamaan berikut.

y = x^2 – 4x + 3
= 2^2 – 4.2 + 3 = –1

Nilai ekstrem ini dapat pula Anda peroleh dari hal berikut ini.

$-1 = \frac{(-4)^2-4.1.3}{4.1}$
$= \frac{(b)^2-4.a.c}{4.a}$
$= -\frac{D}{4a}$

D = b^2 – 4.a.c disebut sebagai diskriminan.

Jadi, titik puncak grafik fungsi y = ax^2 + bx + c adalah $(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a})$

Hasil dari pembahasan di atas dapat Kalian gunakan untuk menggambar grafik fungsi kuadrat secara umum. Oleh karena itu, untuk menggambar grafik fungsi kuadrat, Kalian cukup menentukan hal-hal berikut.

1. Titik potong dengan sumbu y, yaitu (0, c).
2. Titik potong dengan sumbu x dengan mengambil nilai y = 0.
3. Titik puncak $(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a})$

Contoh 2.10

Gambarlah grafik fungsi kuadrat y = $2x^2$ – 2x - 4

Alternatif Penyelesaian

3. Titik potong dengan sumbu y adalah (0,c) = (0,-4).
4. Titik potong dengan sumbu x dan mengambil nilai y = 0

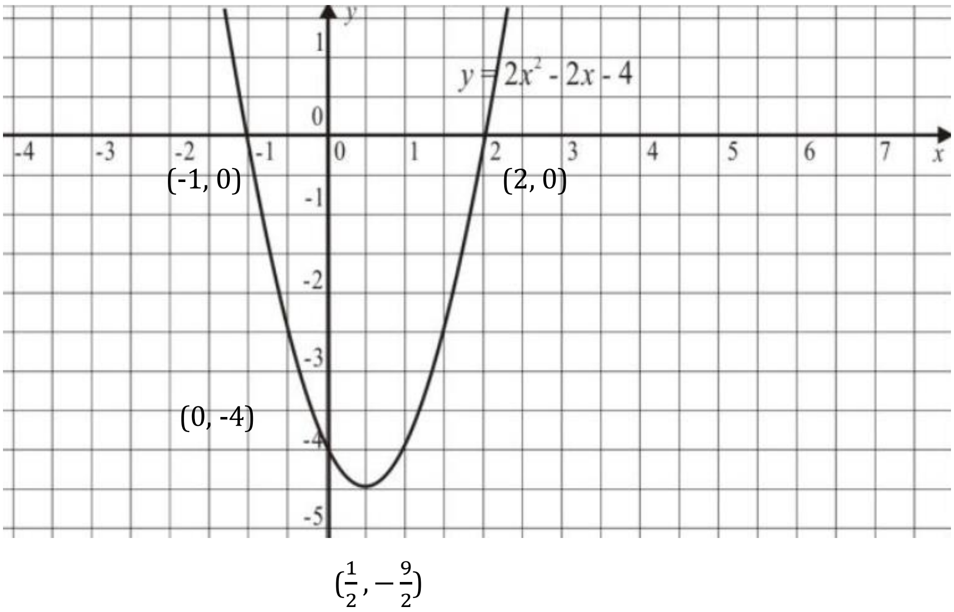
$2x^2$ – 2x - 4 = 0
2(x^2 – x – 2) = 0 (kedua ruas dikali $\frac{1}{2}$)

x^2 – x – 2 = 0
(x + 1)(x – 2) = 0
X = -1 atau x = 2

Jadi, titik potong dengan sumbu x adalah (-1, 0) dan (2, 0).

3. Titik puncak $(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a}) = (\frac{-(-2)}{2.2}, \frac{(-2)^2-4.2.(-4)}{4.2}) = (\frac{1}{2}, -\frac{36}{8}) = (\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$

Gambar yang didapatkan:



Gambar 2.8

Perhatikan dalam contoh 2.9 dan 2.10 di atas fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ untuk nilai $a > 0$, grafiknya buka ke atas atau menghadap ke atas.

Sekarang kita coba untuk fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ dengan nilai $a < 0$. Kalian perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.11

Gambarlah grafik fungsi kuadrat $y = -2x^2 + 2x + 4$

Alternatif Penyelesaian

1. Titik potong dengan sumbu y adalah (0,c) = (0,4).
2. Titik potong dengan sumbu x dan mengambil nilai y = 0

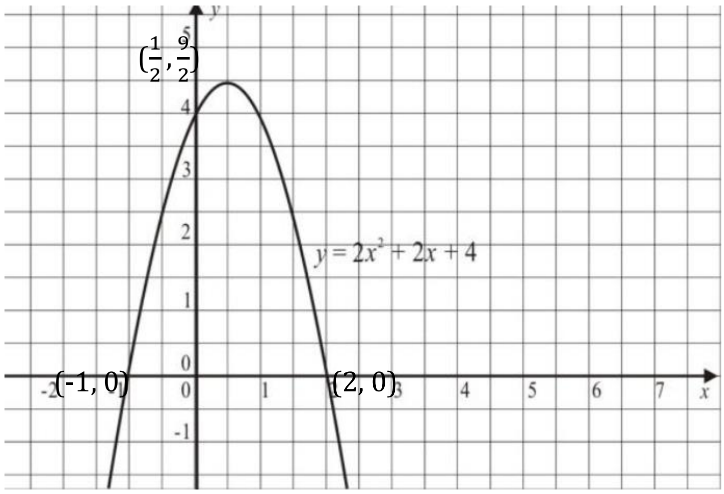
   $-2x^2 + 2x + 4 = 0$

   $-2(x^2 - x - 2) = 0$ (kedua ruas dikali- $\frac{1}{2}$)

   $$x^2 - x - 2 = 0$$
   $$(x + 1)(x - 2) = 0$$
   $$x = -1 \text{ atau } x = 2$$

Jadi, titik potong dengan sumbu x adalah (-1, 0) dan (2, 0).

3. Titik puncak $(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a}) = (\frac{2}{2.(-2)}, \frac{(2)^2-4.(-2).(4)}{4.)-2)}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{36}{-8}) = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$



Gambar 2.9

Jadi, grafik fungsi kuadrat y = $-2x^2 + 2x + 4$ menghadap ke bawah.

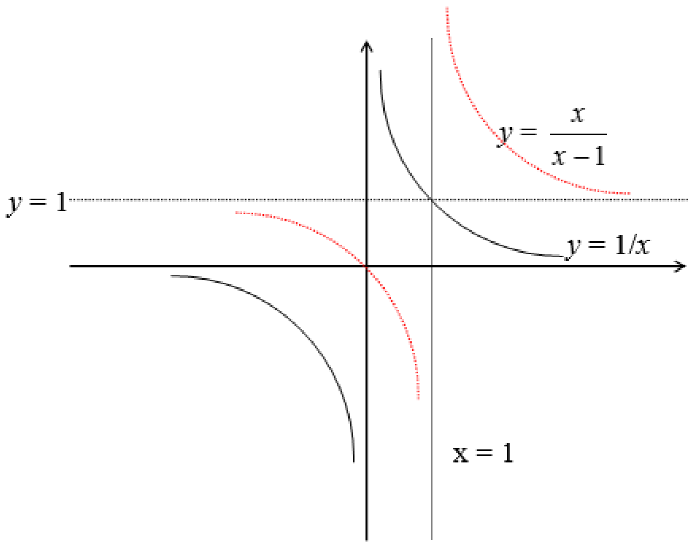
Secara umum, dapat Kalian simpulkan bahwa grafik fungsi kuadrat y = $ax^2 + bx + c$ menghadap ke atas jika a > 0. Sebaliknya, menghadap ke bawah jika a < 0.

3. Fungsi Pecahan (Fungsi Rasional)

Fungsi pecah dapat didefinisikan sebagai berikut.
Fungsi pecah adalah fungsi yang dirumuskan oleh $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, dengan dengan P(x) dan Q (x) merupakan suku banyak dalam x dan Q(x) ≠ 0 pada domainnya.

Contoh fungsi pecah dan grafiknya.

$f(x) = \frac{1}{x}$ dan $f(x) = \frac{x}{x-1}$



Gambar 2.10

Nilai Nol Fungsi

Jika diketahui fungsi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, maka nilai -nilai x yang menyebabkan f(x)= 0 disebut nilai nol dari fungsi f(x). Nilai nol disebut juga pembuat nol atau harga nol. Dapat dibuktikan bahwa jika f(x) = 0, maka juga P(x)= 0. Jadi, untuk mencari nilai nol fungsi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, cukup dicari nilai (nilai-nilai) yang menyebabkan P(x)= 0.

Namun perlu diingat bahwa nilai x yang menyebabkan P(x) = 0 belum tentu merupakan nilai nol fungsi f(x). Ini terjadi jika nilai x tersebut ternyata juga membuat Q(x)= 0. Untuk x yang bersama-sama membuat P(x) dan Q(x) bernilai nol menyebabkan f(x) mempunyai nilai tak tentu. Misalnya, pada fungsi $(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-4}$, nilai x = 1 bukan nilai nol dari fungsi f(x) sekalipun untuk P(x) = x^2- 3x + 2 berlaku P(1)= 0. Ini karena juga berlaku Q(1)= 0, sehingga f(1) bernilai tak tentu.

Perlu diperhatikan bahwa tidak setiap fungsi pecahan mempunyai nilai nol. Ini terjadi kalau P(x) tidak mungkin berharga nol.
Pada pembelajaran sebelumnya kita telah ketahui bahwa nilai nol suatu fungsi berkaitan dengan koordinat titik potong grafik dengan sumbu X. Jadi, jika x = a adalah nilai nol dari fungsi f(x), maka (a,0) adalah koordinat titik potong grafik dengan sumbu X.

Contoh 2.12

Tentukan nilai nol dari $f(x) = \frac{3x-6}{2x+1}$

Alternatif Penyelesaian:

$2x - 6 = 0$
$2x = 6$
$x = 3$

Jadi, nilai nol dari fungsi tersebut adalah x = 3.

Contoh 2.13

Tentukan nilai nol dari fungsi $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{2x+3}$

Alternatif Penyelesaian:

Nilai nol dicari dengan cara berikut.

$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x - 2)(x - 3) = 0$
$x = 2$ atau $x = 3$

Untuk x = 2 dan x = 3 nilai Q(x) tidak nol.

Jadi, nilai nol dari $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{2x+3}$ adalah x = 2 dan x = 3. Dan grafik f(x) memotong sumbu x di titik (2, 0) dan (3, 0).

Jika fungsi f(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$, dan P(x) dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, ini berarti ada tidaknya nilai nol fungsi tergantung pada diskriminan persamaan kuadrat.

Contoh 2.14

Tentukan nilai nol dari f(x) = $\frac{x^2-x+3}{4x-3}$

Alternatif Penyelesaian:

Diskriminan dari $x^2 - x + 3 = 0$ adalah $D = (-1)^2 - 4.1.3 = 1 - 12 = -11<0$.

Karena D < 0, maka fungsi f(x) = $\frac{x^2-x+3}{4x-3}$ tidak mempunyai nol. Ini berarti grafik fungsi $f(x) = \frac{x^2-x+3}{4x-3}$ tidak memotong sumbu x.

Grafik Fungsi Pecahan

Langkah-langkah untuk menggambar grafik fungsi pecahan adalah sebagai berikut:

a. Menentukan titik-titik potong dengan sumbu x dan sumbu y
b. Menentukan asimptot datar, tegak dan miring
c. Membuat tabel yang menunjukkan dimana fungsi bernilai positif (grafik terletak di
d. atas sumbu x) dan bernilai negatif (grafik terletak di bawah sumbu x)
e. Menentukan nilai ekstrim fungsi (hanya untuk fungsi pecah terentu)
f. Menentukan titik-titik bantu (kalau perlu)
g. Mensketsa kurvanya

Jenis-jenis asimptot fungsi pecah:

a. Asimptot tegak, diperoleh bila penyebut bernilai nol
b. Asimptot datar, diperoleh bila $x \to \sim$
c. Asimptot miring, hanya untuk jenis fumgsi rasional yang pembilangnya mempunyai derajat lebih tinggi satu daripada penyebutnya

Contoh 2.15

Gambar sketsa grafik f(x) = $\frac{1}{x}$

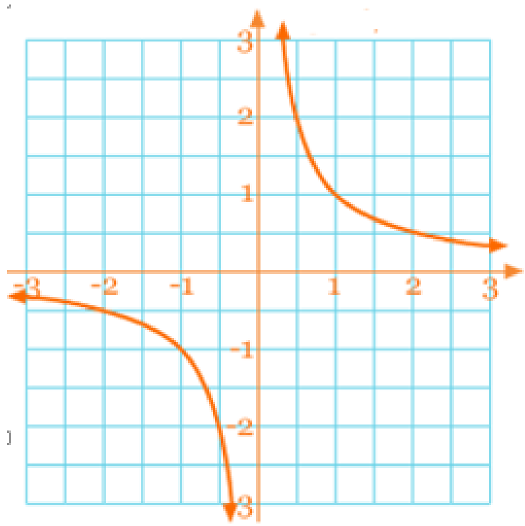
Alternatif Penyelesaian:

Langkah-langkah menggambar :

1. Titik potong sumbu x dan sumbu y tidak ada
2. Asimptot-asimptot : tegak : garis x = 0
   datar : untuk $x \to \sim$ diperoleh y = f(x) = 0
   Jadi garis y = 0 sebagai asimptot datar
3. Titik-titik bantu :

x	-1	-2	-3	-4	1	2	3	4
f(x)	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

4. Sketsa grafik



Gambar 2.11

Contoh 2.16

Sketsalah grafik $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

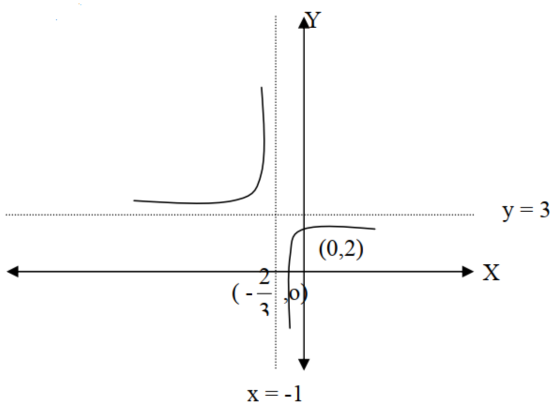
Langkah-langkah:

1. titik-titik potong dengan sumbu x, syarat f(x) = y = 0 ⇒ 3x + 2 = 0 ⇔ x =$-\frac{2}{3}$, titik potong dengan sumbu x$(-\frac{2}{3}, 0)$.
2. Titik potong dengan sumbu y, syarat x = 0 ⇒ f(x) = y = 2 titik potong (0,2)
3. Asimptot tegak : x + 1 = 0, garis x = -1 sebagai asimptot tegak
4. Asimtot datar: $f(x) = \frac{3x+2}{x+1} = \frac{x(3+\frac{2}{x})}{x(1+\frac{1}{x})}$, untuk x → ~ maka $\frac{1}{x}$ → 0 dan $\frac{2}{x}$ → 0

   Jadi asimptot datar: garis y = $\frac{3+0}{1+0}$=3
5. Titik Bantu

x	-2	-3	-4	1	2	3
y	4	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{3}{4}$

6. Sketsa grafik



Gambar 2.12

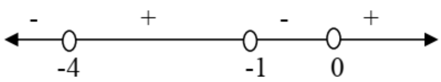
Contoh 2.17

Buat sketsa grafik f(x) = $\frac{3x}{x^2+5x+4}$

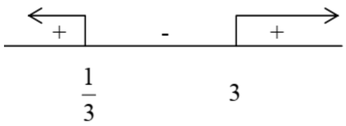
Alternatif Penyelesaian:

Langkah – langkah:

1. Titik potong dengan sumbu x dan sumbu y adalah (0,0)
   Asimptot – asimptot :
   a. tegak, diperoleh bila $x^2 + 5x + 4 = 0$,
   b. (x + 4) (x + 1) = 0
   c. x = -4 atau x = -1, asimptot tegak adalah garis x = -4 dan x = -1
   d. datar : f(x) = $\frac{3x}{x^2+5x+4} = \frac{x^2\left(\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}$
   e. Untuk $x \to \sim$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ sehingga $\frac{3.0}{1+5.0+4.0} = \frac{0}{1} = 0$
2. Sumbu x dibagi menjadi 4 interval oleh titik potong sumbu x dan asimptot tegak. Tentukan tanda f (x) untuk masing-masing interval



3. Nilai ekstrim
   Misalkan f(x) mempunyai nilai ekstrim p. Dengan demikian p = $\frac{3x}{x^2+5x+4}$
   $\leftrightarrow \mathrm{px}^2 + 5\mathrm{px} + 4\mathrm{p} = 3\mathrm{x}$
   $\leftrightarrow \mathrm{px}^2 + 5\mathrm{px} + 4\mathrm{p} - 3\mathrm{x} = 0$
   Supaya persamaan kuadrat mempunyai akar-akar, D≥ 0
   $\mathrm{px}^2 + 5\mathrm{px} + 4\mathrm{p} - 3\mathrm{x} = 0 \leftrightarrow \mathrm{px}^2 + (5\mathrm{p} - 3)\mathrm{x} + 4\mathrm{p} = 0$
   D≥ 0
   $(5p - 3)^2 - 4.p.4p \geq 0 \leftrightarrow 25p^2 - 30p + 9 - 16p^2 \geq 0$
   $\leftrightarrow 9p^2 - 30p + 9 \geq 0$
   $\leftrightarrow 3p^2 - 10p + 3 \geq 0$
   $\leftrightarrow (3p - 1)(P - 3) \geq 0$



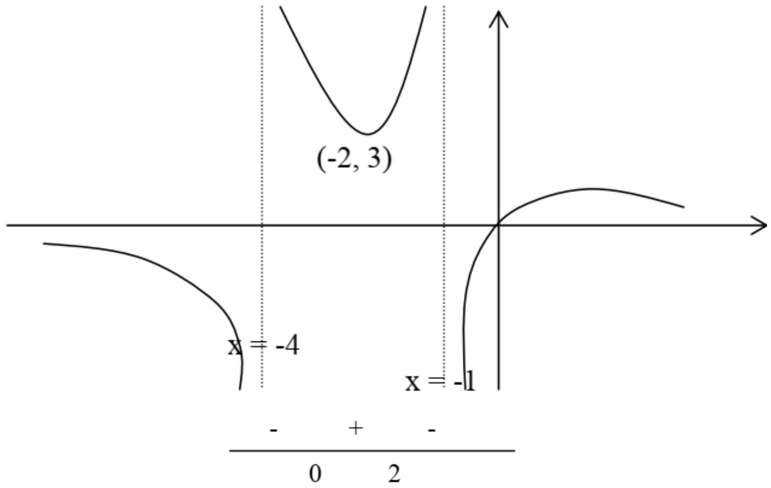
$\mathrm{p} = \mathrm{y} \leq \frac{1}{3}$ atau $\mathrm{p} \geq 3$

Ini menujukkan nilai ekstrim minimum y = 3 dan nilai ekstrim maksimum y = $\frac{1}{3}$
Untuk menentukan titik maksimum dan minimum, subtitusi nilai ekstrim maksimum dan minimum ke dalam f (x), diperoleh: titik ekstrim minimum (-2, 3) dan titik ekstrim maksimum (2 , $\frac{1}{3}$).

4. Titik-titik bantu

x	-6	-5	-3	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$-1\frac{4}{5}$	$-3\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{5}$	$3\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{28}$

5. Sketsa Grafik



Contoh 2.18

Buat sketsa grafik $f(x) = \frac{6x^2}{3x^2+1}$

Alternatif Penyelesaian:

Langkah – langkah:

1. Titik potong dengan sumbu x dan sumbu y adalah (0,0)
2. Asimptot – asimptot :
   a. tegak, tidak ada
   b. datar: f(x) = $\frac{6x^2}{3x^2+1} = \frac{6}{3+\frac{1}{x^2}}$

   Untuk $x \to \sim$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ sehingga y= $\frac{6}{3+0} = \frac{6}{2} = 3$ merupakan asimtot datar.
3. f(x) selalu positif untuk x < 0 maupun x > 0.
4. Nilai ekstrim

   Misalkan f(x) mempunyai nilai ekstrim p. Dengan demikian p = $\frac{6x^2}{3x^2+1}$

   $\leftrightarrow 3\mathrm{px}^2 + \mathrm{p} = 6\mathrm{x}^2$

   $\leftrightarrow 3\mathrm{px}^2 - 6x^2 + \mathrm{p} = 0$

   $\leftrightarrow (3\mathrm{p} - 6)\mathrm{x}^2 + \mathrm{p} = 0$

   Supaya persamaan kuadrat mempunyai akar-akar, D ≥ 0

   $(3\mathrm{p} - 6)\mathrm{x}^2 + \mathrm{p} = 0$

   D ≥ 0

   $(0)^2 – 4.(3p\text{-}6).p \geq 0 \leftrightarrow -12p^2 + 24p \geq 0$

   $\leftrightarrow p^2 + 2p \geq 0$

   $\leftrightarrow p^2 – 2p \leq 0$

   $\leftrightarrow p(p-2) \leq 0$

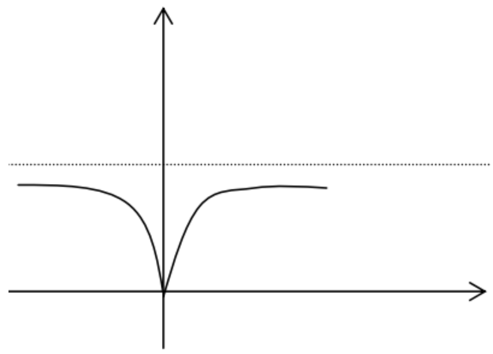
   Jadi 0 ≤ p ≤ 2 atau 0 ≤ y ≤ 2

   Ini menyatakan nilai y terletak dalam interval 0 sampai 2. Nilai y minimum adalah 0. titik minimum (0,0). Grafik tidak memiliki nilai maksimum.

5. Titik-titik bantu.

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$\frac{27}{14}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{27}{14}$

6. Sketsa grafik



Catatan :

a. asimptot datar grafik $y = \frac{ax+b}{px+q}$ adalah $y = \frac{a}{p}$

b. grafik $y = \frac{1}{x-a}$ dapat diperoleh dengan cara menggeser grafik $y = \frac{1}{x}$ sebanyak a satuan ke kanan.

c. grafik $y = a + \frac{1}{x}$ dapat diperoleh dengan cara menggeses grafik grafik $y = \frac{1}{x}$ sejauh a satuan ke atas.

d. Grafik y = $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$ selalu mempunyai asimptot datar sumbu x

C. Rangkuman

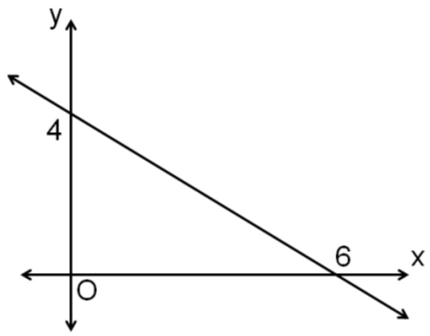
1) Fungsi linear dinyatakan sebagai f(x) = mx + a dikatakan linear karena grafiknya berupa garis.
2) Pada fungsi linear bentuk, jika f(x) dinyatakan sebagai y, Kalian memperoleh persamaan y = mx + a. Persamaan terakhir ini disebut sebagai persamaan garis
3) Garis mempunyai kemiringan atau disebut sebagai *gradien*. Jika Kalian mempunyai dua titik (x_1, y_1) dan (x_2 , y_2) gradien garis dapat Anda rumuskan sebagai berikut.
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
4) Tidak setiap persamaan garis merupakan fungsi linear. Sebagai contoh, grafik dari persamaan x = 2 adalah garis, tetapi dia bukan merupakan fungsi sehingga dia bukan merupakan fungsi linear.
5) Secara umum, persamaan linear dinyatakan sebagai Ax + By + C = 0 yang A dan B tidak keduanya nol.
6) Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2 , y_2) dapat dicari dengan rumus :
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

7) Menggambar grafik fungsi kuadrat dapat dilakukan dengan tahap berikut.
   a. a. Dapatkan koordinat beberapa titik yang memenuhi persamaan, yaitu memilih beberapa nilai x dan menentukan nilai y yang berpadanan.
   b. Sajikan titik-titik yang Anda peroleh dalam bentuk tabel.
   c. Plotlah titik-titik tersebut pada bidang koordinat.
   d. Hubungkan titik-titik tersebut dengan kurva mulus.
8) Cara lain menggambar grafik fungsi kuadrat dengan langkah-langkah berikut:
   a. Titik potong dengan sumbu y, yaitu (0,c).
   b. Titik potong dengan sumbu x dengan mengambil nilai y = 0.
   c. Titik puncak $(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a})$
9) Grafik fungsi kuadrat y = ax^2 + bx + c menghadap ke atas jika a > 0. Sebaliknya, menghadap ke bawah jika a < 0.
10) Grafik fungsi kuadrat memotong sumbu x jika D $\geq$ 0.
11) Grafik fungsi kuadrat tidak memotong sumbu x jika D < 0.
12) Dalam hal D = 0, grafik fungsi kuadrat memotong sumbu x pada satu titik atau dikatakan menyinggung sumbu x.
13) Fungsi pecah adalah fungsi yang dirumuskan oleh $f\ (x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, dengan dengan P(x) dan Q (x) merupakan suku banyak dalam x dan Q(x) ≠ 0 pada domainnya.
14) Jika f(x) = 0, maka juga P(x)= 0. Jadi, untuk mencari nilai nol fungsi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, cukup dicari nilai (nilai-nilai) yang menyebabkan P(x)= 0
15) Untuk menggambar grafik fungsi pecah, Kalian bisa mengikuti langkah-langkah berikut:
   a. Menentukan titik-titik potong dengan sumbu x dan sumbu y
   b. Menentukan asimptot datar, tegak dan miring
   c. Membuat tabel yang menunjukkan dimana fungsi bernilai positif (grafik terletak di
   d. atas sumbu x) dan bernilai negatif (grafik terletak di bawah sumbu x)
   e. Menentukan nilai ekstrim fungsi (hanya untuk fungsi pecah terentu)
   f. Menentukan titik-titik bantu (kalau perlu)
   g. Mensketsa kurvanya
16) Jenis-jenis asimptot fungsi pecahan :
   a. Asimptot tegak, diperoleh bila penyebut bernilai nol
   b. Asimptot datar, diperoleh bila $x \to \sim$
   c. Asimptot miring, hanya untuk jenis fumgsi rasional yang pembilangnya mempunyai derajat lebih tinggi satu daripada penyebutnya

D. Latihan Soal

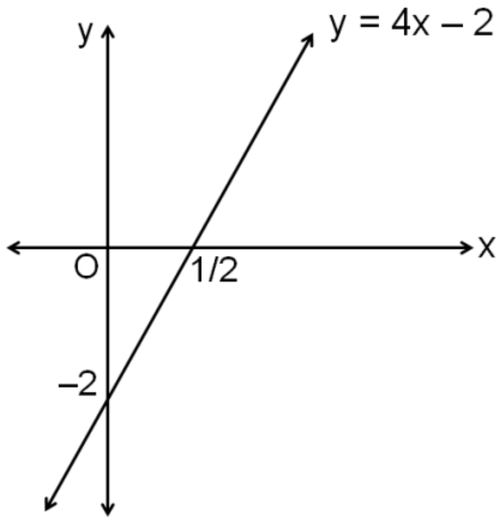
1. Tentukan persamaan garis yang:
   a. melalui titik (1, 2) dan (-3, 4)
   b. melalui titik (2, 1) dan gradien m = -$\frac{1}{2}$
2. Gambarlah garis-garis dengan persamaan berikut pada grafik Cartesius
   a. y = 4x – 2
   b. 3x + 2y = 12

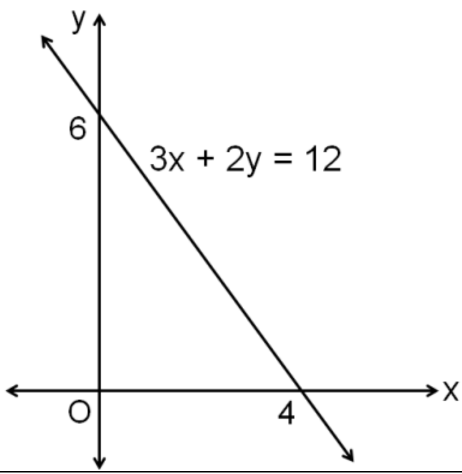
3. Perhatikan gambar garis berikut, tentukan persamaannya.

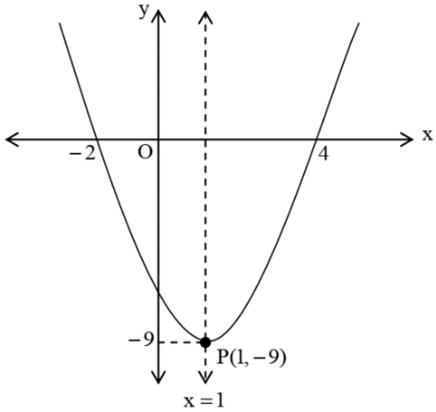
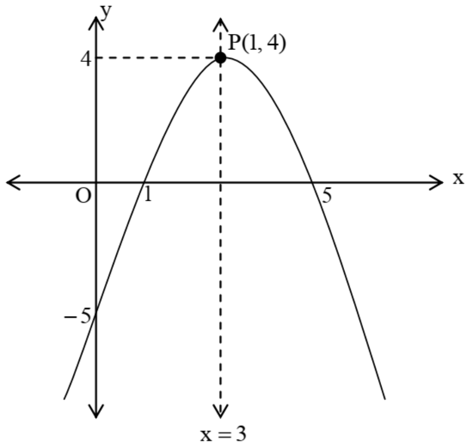


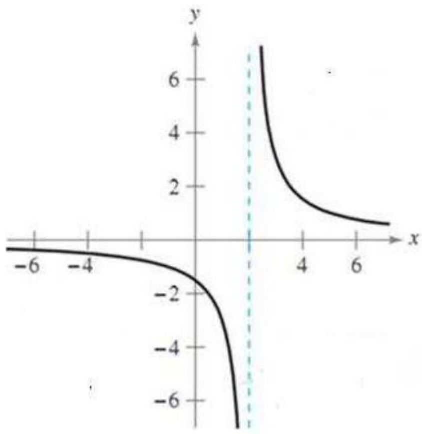
4. Sebuah perusahaan otomotif mengeluarkan produk mobil terbaru dan akan diuji kelayakan jalannya dengan cara dikendarai selama 10 jam. Pada 4 jam pertama mobil tersebut telah menempuh jarak 242 km dan setelah 6 jam mobil tersebut telah menempuh 362 km. Jika mobil selalu tetap maka tentukan persamaan garis yang menggambarkan kecepatan mobil.
5. Lukislah grafik fungsi kuadrat berikut:
   a. $f(x) = x^2 - 2x - 8$
   b. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$
6. Tentukanalah persamaan fungsi kuadrat jika titik potongnya dengan sumbu-X adalah A(4, 0) dan B(−2, 0) serta melalui titik (2, −8)
7. Lukislah grafik fungsi pecahan berikut:
   a. $y = \frac{3}{x-2}$
   b. $y = \frac{x-1}{2x^2+x-4}$

Pembahasan Latihan Soal

<table>
<tr><th>No</th><th>Pembahasan</th><th>Pedoman Skor</th></tr>
<tr><td>1</td><td>a. melalui titik (1, 2) dan (-3, 4)
$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \rightarrow \frac{y-2}{4-2} = \frac{x-1}{-3-1}$
$\leftrightarrow \frac{y-2}{2} = \frac{x-1}{-4} \leftrightarrow -4(y-2) = 2(x-1)$
$\leftrightarrow -4y + 8 = 2x - 2 \leftrightarrow 2y + x = 5 \leftrightarrow 2y + x - 5 = 0$</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>b. melalui titik (2, 1) dan gradien $m = -\frac{1}{2}$
$y - y_1 = m(x - x_1) \leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$
$\leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$
$\leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$
$\leftrightarrow 2y + x = -4$
$\leftrightarrow 2y + x + 4 = 0$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>a. $y = 4x - 2$
Dengan menggunakan tabel diperoleh :
<table>
<tr><td>x</td><td>y</td><td>(x, y)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>-2</td><td>(0, -2)</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{2}$</td><td>0</td><td>$(\frac{1}{2}, 0)$</td></tr>
</table>

</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>b. $3x + 2y = 12$
Dengan menggunakan tabel diperoleh :
<table>
<tr><td>x</td><td>y</td><td>(x, y)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>6</td><td>(0, 6)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>(4, 0)</td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
</table>

No	Pembahasan	Pedoman Skor
		
3.	Perhatikan, garis memotong sumbu x di titik (6, 0) dan memotong sumbu y di titik (0, 4) Persamaan garis melalui titik (6, 0) dan (0, 4) adalah: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \rightarrow \frac{y-0}{4-0}=\frac{x-6}{0-6}$ $\leftrightarrow \frac{y}{4}=\frac{x-6}{-6}$ $\leftrightarrow$ -6y = 4(x – 6) $\leftrightarrow$ -6y = 4x – 24 $\leftrightarrow$ -6y – 4x = – 24 $\leftrightarrow$ 4x +6y = 24 $\leftrightarrow$ 2x +3y = 12	10
4.	Misalkan x adalah waktu jalan mobil dan y adalah jarak tempuh mobil, maka untuk x = 4 , y = 242 diperoleh titik (4, 242) Untuk x = 6 , y = 362 diperoleh titik (6, 362) $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \rightarrow \frac{y-242}{362-242}=\frac{x-4}{6-4}$ $\leftrightarrow \frac{y-242}{120}=\frac{x-4}{2}$ $\leftrightarrow 2(y-242)=120(x-4)$ $\leftrightarrow y-242=60x-240$ $\leftrightarrow$ y = 60x + 2 Jadi persamaan garis yang menggambarkan kecepatan mobil adalah y = 60x + 2.	10
5.	a. Titik potong dengan sumbu-X, yakni $x^2 - 2x - 8 = 0$, (x – 4)(x + 2) = 0 $x_1 = 4$ dan $x_2 = -2$ Titiknya (–2, 0) dan (4, 0) Titiik potong dengan sumbu-Y, yakni $y = x^2 - 2x - 8$ y = (0)2 – 2(0) – 8 = –8 Titiknya (0, –8) Titik puncak $(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a})$= $(\frac{-(-2)}{21}, -\frac{(-2)^2-4.1.(-8)}{41})$=(1, -9)	5

No	Pembahasan	Pedoman Skor
	Gambar grafik:  	
	b.f(x) = $-x^2 + 6x - 5$ Titik potong dengan sumbu-X, yakni $-x^2 + 6x - 5 = 0$ $x^2 - 6x + 5 = 0$ $(x - 2)(x - 3) = 0$ $x_1 = 2$ dan $x_2 = 3$ Titiknya (2, 0) dan (3, 0) Tiiik potong dengan sumbu-Y, yakni $y = -x^2 + 6x - 5$ $y = (0)^2 + 6(0) - 5 = -5$ Titiknya (0, −5) Titik puncak $(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a}) = (\frac{-6}{2(-1)}, -\frac{(6)^2-4.(-1).(-5)}{4(-1)}) = (3, 4)$ Gambar grafik:  	5
6.	Fungsi memiliki titik potong dengan sumbu-X adalah A(4, 0) dan B(−2, 0) serta melalui titik (2, −8) Persamaan fungsi : $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ $y = a(x - 4)(x - (-2))$ $y = a(x - 4)(x + 2)$ $y = a(x^2 - 2x - 8)$	10

<table>
<tr><th>No</th><th>Pembahasan</th><th>Pedoman Skor</th></tr>
<tr><td></td><td>Melalui titik (2, −8) maka : −8 = a((2)² – 2(2) – 8)
−8 = a(4 – 4 – 8)
−8 = a(−8) sehingga a = 1Jadi y = 1(x2 – 2x – 8)
y = x^2 – 2x – 8</td><td></td></tr>
<tr><td>7.</td><td>a. $y = \frac{3}{x-2}$
Langkah-langkah:
1. titik-titik potong dengan sumbu x, syarat f(x) = y = 0 ⇒ $\frac{3}{x-2}$= 0
2. Tidak ada titik potong dengan sumbu x
3. Titik potong dengan sumbu y, syarat x = 0 ⇒ y = $\frac{3}{0-2} = -\frac{3}{2}$
titik potong (0, $-\frac{3}{2}$)
4. asimptot tegak : x - 2 = 0
garis x = 2 sebagai asimptot tegak
5. Asimtot datar: $f(x) = \frac{3}{x-2} = \frac{\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}$, untuk x → ~ maka $\frac{1}{x}$ → 0 dan $\frac{2}{x}$ → 0
6. Jadi asimptot datar: garis y = $\frac{0}{1}$ = 0
7. Titik bantu
<table>
<tr><td>X</td><td>-4</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{3}{5}$</td><td>$-\frac{3}{4}$</td><td>-1</td><td>$-\frac{3}{2}$</td><td>-3</td><td>3</td><td>$\frac{3}{2}$</td></tr>
</table>
8. Gambar grafik


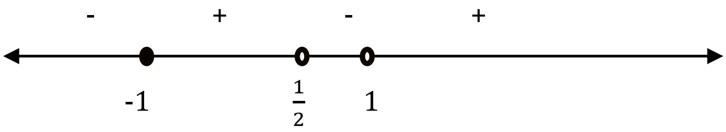
</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>$b. y = \frac{x-1}{2x^2+x-1}$
1. Titik potong dengan sumbu y adalah (0,1)
2. Titik potong dengan sumbu x adalah (1, 0)
3. Asimptot – asimptot :
tegak, diperoleh bila $2x^2$ + x - 1 = 0
(2x - 1) (x + 1) = 0
x = $\frac{1}{2}$ atau x = -1
asimptot tegak adalah garis x = $\frac{1}{2}$ dan x = -1</td><td>10</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>No</th><th>Pembahasan</th><th>Pedoman Skor</th></tr>
<tr><td></td><td>

datar : f(x) = $\frac{x-1}{2x^2+x-1} = \frac{x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^2(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$

Untuk $x \to \sim$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ sehingga $\frac{3.0}{2+0-0} = \frac{0}{2} = 0$

6. Sumbu x dibagi menjadi 4 interval oleh titik potong sumbu x dan asimptot tegak.
   Tentukan tanda f (x) untuk masing-masing interval



7. Nilai ekstrim
   Misalkan f(x) mempunyai nilai ekstrim p. Dengan demikian p = $\frac{x-1}{2x^2+x-1}$

$\leftrightarrow 2px^2 + px - p = x - 1$

$\leftrightarrow 2px^2 + px - p - x + 1 = 0$

Supaya persamaan kuadrat mempunyai akar-akar, D$\geq$ 0

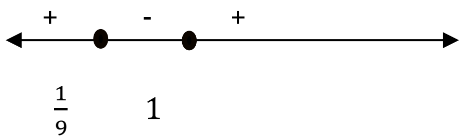
$2px^2 + px - p - x + 1 = 0 \leftrightarrow 2px^2 + (p-1)x - p + 1 = 0$

D$\geq$ 0

$(p-1)^2 - 4.2p.(-p+1) \geq 0 \leftrightarrow p^2 - 2p + 1 + 8p^2 - 8p \geq 0$

$\leftrightarrow 9p^2 - 10p + 1 \geq 0$

$\leftrightarrow (9p-1)(p-1) \geq 0$



p = y $\leq \frac{1}{9}$ atau p=y ≥ 1

Untuk y = 1→1= $\frac{x-1}{2x^2+x-1}$

$\leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = x - 1$

$\leftrightarrow 2x^2 = 0$

$\leftrightarrow x = 0$

(0, 1)

Untuk y = $\frac{1}{9} \to \frac{1}{9} = \frac{x-1}{2x^2+x-1}$

$\leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 9(x-1)$

$\leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 9x - 9$

$\leftrightarrow 2x^2 + x - 9x - 1 + 9 = 0$

$\leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0 \leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$\leftrightarrow (x-2)(x-2) = 0$

x = 2

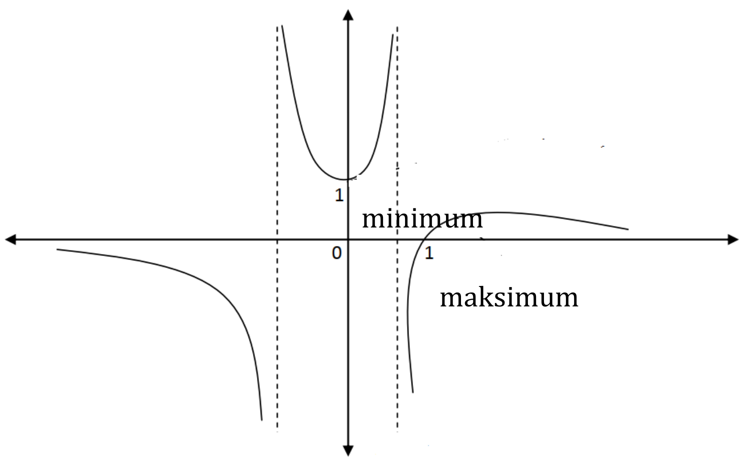
$(2, \frac{1}{9})$

Ini menujukkan nilai ekstrim minimum y = 1 dan nilai ekstrim maksimum y = $\frac{1}{9}$

</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>No</th><th>Pembahasan</th><th>Pedoman Skor</th></tr>
<tr><td></td><td>Untuk menentukan titik maksimum dan minimum, subtitusi nilai ekstrim maksimum dan minimum ke dalam f (x), diperoleh: titik ekstrim minimum (0, 1) dan titik ekstrim maksimum (2 , $\frac{1}{9}$).
8. Titik-titik bantu

x	-2	-1,5	-1/2	1/4	3/4	2	3
y	-3/5	-5/4	3/2	6/5	-2/7	1/9	1/10

9. Sketsa Grafik


Asymtot tegak x = -1 x = $\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Jumlah Skor Maksimum</td><td>80</td></tr>
</table>

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan=$\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum}\ x\ 100\%$

Kriteria

90% – 100% = baik sekali

80% – 89% = baik

70% – 79% = cukup

< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

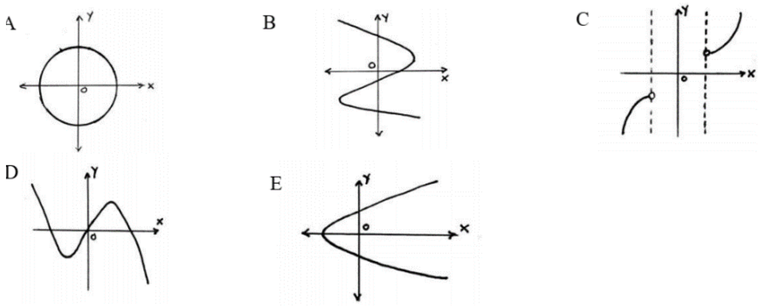
E. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom “Ya” jika mampu dan pada kolom “Tidak” jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Saya sudah memahami fungsi linear		
2.	Saya sudah dapat menggambar grafik fungsi linear		
3.	Saya sudah memahami fungsi kuadrat		
4.	Saya sudah dapat gambar grafik fungsi kuadrat		
5.	Saya sudah memahami fungsi pecah (rasional)		
	Saya sudah dapat menggambar grafik fungsi pecah (rasional)		

EVALUASI

1. Manakah diantara relasi-relasi berikut ini merupakan fungsi?
   A. { (0,6), (1,6), (2,3), (2,4), (3,5) }
   B. { (3,1), (2,5), (3,5), (3,1), (2,4) }
   C. { (2,1), (5,3), (4,3), (1,2), (3,3) }
   D. ((0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5) }
   E. { (3,1), (1,3), (4,1), (3,4), (1,4) }
2. Jika A = { 1, 2, 3, 4 } dan B = { 1, 2, 3, 4, 5 } maka manakah dari relasi berikut ini merupakan fungsi?
   A. f: A →B = { (1,3), (3,2), (2,5), (4,2), (1,4) }
   B. f: B → A = { (1,3), (3,2), (4,3), (2,5) }
   C. f: A → A = { (3,1), (2,4), (3,2), (4,2) }
   D. f: A → B = { (2,1), (1,3), (3,4), (4,2) }
   E. f: A → B = { (5,3), (2,1), (3,1), 4,2) }
3. Manakah diantara grafik berikut ini merupakan fungsi?



4. Daerah asal dari fungsi y = $\frac{3x+6}{2x-4}$ adalah….
   A. $D_f = \{ x \mid x \neq 3, x \in R \}$
   B. $D_f = \{ x \mid x > 3, x \in R \}$
   C. $D_f = \{ x \mid x \neq -2, x \in R \}$
   D. $D_f = \{ x \mid x > -2, x \in R \}$
   E. $D_f = \{ x \mid x \neq 2, x \in R \}$

5. Daerah asal dari fungsi y = $\sqrt{2x-6}$ adalah….
   A. $D_f = \{ x \mid x \geq 3, x \in R \}$
   B. $D_f = \{ x \mid x \leq 3, x \in R \}$
   C. $D_f = \{ x \mid x \geq -3, x \in R \}$
   D. $D_f = \{ x \mid x \leq -3, x \in R \}$
   E. $D_f = \{ x \mid x \geq 2, x \in R \}$
6. Daerah asal dari fungsi y = $\sqrt{x^2-2x-8}$ adalah….
   A. $D_f = \{ x \mid -2 \leq x \leq 4 \}$
   B. $D_f = \{ x \mid -4 \leq x \leq 2 \}$
   C. $D_f = \{ x \mid x \leq -2$ atau $x \geq 4 \}$
   D. $D_f = \{ x \mid x \leq -4$ atau $x \geq 2 \}$
   E. $D_f = \{ x \mid 0 \leq x \leq 4 \}$
7. Suatu fungi linier f(x) = 2x – 4 dengan daerah asal $D_f = \{ x \mid -3 \leq x \leq 5 \}$, maka daerah hasilnya adalah R_f = …
   A. $\{y \mid -10 \leq y \leq 6 \}$
   B. $\{y \mid -6 \leq y \leq 3 \}$
   C. $\{y \mid 5 \leq y \leq 10 \}$
   D. $\{y \mid 0 \leq y \leq 6 \}$
   E. $\{y \mid 2 \leq y \leq 8 \}$

8. Jika daerah asal dari fungsi $f(x) = x^2 + 2x - 3$ adalah $1 \le x \le 3$, maka daerah hasilnya adalah R_f =….
   A. $-4 \le y \le 12$
   B. $-4 \le y \le 5$
   C. $0 \le y \le 12$
   D. $0 \le y \le 4$
   E. $-4 \le y \le 0$
9. Suatu fungsi pecah $y = \frac{x+4}{x-2}$ dengan daerah asal fungsi $D_f = \{x|x \in R, x \neq 2\}$, maka daerah hasilnya R_f = ….
   A. $\{ y \mid y \in R, y \neq 2 \}$
   B. $\{ y \mid y \in R, y \neq 1 \}$
   C. $\{ y \mid y \in R, y \neq -2 \}$
   D. $\{ y \mid y \in R, y \neq -1\}$
   E. $\{ y \mid y \in R, y \neq 3 \}$
10. Jika A = { 1, 2, 3, 4} dan B = { 1, 2, 3, 4, 5} maka yang manakah dari berikut ini merupakan fungsi bijektif ?
   A. $f : A \to B = \{(1,3) , (2,1) , (3,2) , (4,4)\}$
   B. $f : A \to A = \{(1,4) , (2,3) , (3,1) , (4,3)\}$
   C. $f : B \to A = \{(1,3), (2,4), (5,1), (3,3), (4,2)\}$
   D. $f : A \to B = \{(1,2), (2,5), (3,1), (4,3), (2,4)\}$
   E. $f : B \to B = \{(1,3), (2,1), (3,2), (4,4), (5,5)\}$
11. Diketahui $f(x) = x^2 - 3x + 1$ dan $g(x) = 2x + 4$, maka $f(x) . g(x)$ = …
   A. $2x^3 - 2x^2 - 10x + 4$
   B. $2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$
   C. $x^3 + 3x^2 - 5x + 7$
   D. $x^3 - 4x^2 + 2x - 4$
   E. $2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$
12. Jika $f(x) = x - 3$, maka $f(x^2) - 2 f(x) + \{f(x)\}^2$ = ……
   A. $x^2 - 6x + 9$
   B. $x^2 - 8x$
   C. $2x^2 - 8x + 12$
   D. $2x^2 - 4x + 12$
   E. $2x^2 - 4x + 9$
13. Diketahui fungsi $f(x) = 2x - 4$ dan $g(x) = x + 3$, maka daerah asal dari $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ adalah….
   A. $\{x \mid x \in R \}$
   B. $\{x \mid x \in R, x \neq -3 \}$
   C. $\{x \mid x \in R, x \neq 2 \}$
   D. $\{x \mid x \in R, x \neq 2, x \neq -3 \}$
   E. $\{x \mid x \in R, -3 \le x \le 2\}$
14. Jika $f(x) = \frac{3}{x-4}$ dan $g(x) = \sqrt{3x-6}$, maka daerah asal dari $(f - g)(x)$ adalah….
   A. $\{x \mid x \in R, x \ge 4 \}$
   B. $\{x \mid x \in R, 2 \le x < 4\}$
   C. $\{x \mid x \in R, x \ge 2, x \neq 4 \}$
   D. $\{x \mid x \in R, x \neq 4 \}$
   E. $\{x \mid x \in R, x \ge 4\}$
15. Diketahui $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = x + 5$. maka daerah hasil dari $(f . g) (x)$ adalah…
   A. $\{y \mid y \ge 4, y \in R \}$
   B. $\{y \mid y \le 4, y \in R \}$
   C. $\{y \mid y \ge -4, y \in R \}$
   D. $\{y \mid y \le -4, y \in R \}$
   E. $\{y \mid y \in R \}$
16. Sebuah garis melalui titik A(−2, −3) dan B(6, −5). Besar gradien garis itu adalah ...
   A. −4
   B. $-\frac{1}{4}$
   C. $\frac{1}{4}$
   D. 2
   E. 4

17. Persamaan garis dengan gradien 3 dan melalui titik P(2, −4) adalah ...
A. y = 3x – 2 B. y = 3x + 2 C. y = 3x – 6
D. y = 3x – 10 E. y = 3x + 10

18. Tim peneliti akan mengamati penurunan populasi harimau Sumatera selama 8 tahun mengikuti pola linier. Jika pada tahun ke-tiga jumlah populasi harimau sebanyak 182 ekor dan pada tahun ke-lima menjadi 170 ekor, berapakah perkiraan populasi harimau sumatera pada tahun ke-9 ?
A. 164 ekor B. 158 ekor C. 152 ekor
D. 146 ekor E. 140 eko

19. Tiga titik yang dilalui grafik fungsi kuadrat y = x^2 – 2x + 6 adalah ….
A. (-1, 5), (0, 6), (1, 9)
B. (-1, 9), (0, 6), (1, 5)
C. (-1, 9), (0, 5), (1, 5)
D. (-1, 3), (0, 5), (1, 9)
E. (-1, 5), (0, 6), (1, 3)

20. Nilai ekstrim dari fungsi y = $6x^2$ + 12x adalah
A. Nilai maksimum 6 B. Nilai minimum –6
C. Nilai maksimum 9 D. Nilai minimum – 9
E. Nilai minimum –5

21. Jika titik potong dengan sumbu X suatu fungsi kuadrat adalah (-4, 0) dan (3, 0), maka persamaan sumbu simetrinya adalah …
A. x = 2 B. x = -2 C. x = $\frac{1}{2}$
D. x = - $\frac{1}{2}$ E. x = 3

22. Grafik dari fungsi kuadrat y = $-x^2$ + 4x – 1 mempunyai titik puncak, yaitu ….
A. (-2,-13) C. (0, -1) E. (4, 3)
B. (-2, 3) D. (2, 3)

23. Daerah asal fungsi pecah f(x) = $\frac{2x^3-6}{x^2}$ adalah….
A. D_f :{x/ $x \in$ R, $x \neq 2$} D. D_f :{x/ $x \in$ R, $x \neq -1$}
B. D_f :{x/ $x \in$ R, $x \neq 1$} E. D_f :{x/ $x \in$ R, $x \neq -2$}
C. D_f :{x/ $x \in$ R, $x \neq 0$}

24. Asimtot tegak dari fungsi f(x) = $\frac{x}{x^2-x-2}$ adalah….
A. x = -1 dan x = 0 C. x = -1 dan x =2
B. x = 2 dan x = -1 D. x = 1 dan x = -2
E. x = - 1 dan x = 2

25. Pernyataan di bawah ini yang **tidak sesuai** untuk grafik fungsi f(x) = $\frac{x^2-4}{x-1}$ adalah….
A. Titik potong dengan sumbu X adalah (-2, 0) dan (2, 0)
B. Titik potong dengan sumbu Y adalah (0, 4)
C. Asimtot datar y = 1
D. Asimtot tegak x = 1
E. Tidak memiliki nilai ekstrim.

KUNCI JAWABAN EVALUASI

No.	Kunci	No.	Kunci
1.	C	16.	B
2.	D	17.	D
3.	C	18.	B
4.	E	19.	B
5.	A	20.	B
6.	C	21.	D
7.	A	22.	D
8.	C	23.	C
9.	B	24.	E
10,	E	25.	C
11.	A		
12.	C		
13.	B		
14.	C		
15.	E		

DAFTAR PUSTAKA

Amin, Siti M. 2004. *Relasi dan Fungsi.* Bagian Pengembangan Proyek Kurikulum Dikmenjur. Departemen Pendidikan Nasional. Jakarta

Lestari, Sri dan Diah Ayu K. 2009. *Matematika 2 untuk SMA/MA Program Studi IPS Kelas XI*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Markaban. 2009. *Relasi dan Fungsi.* Yogyakarta. PPPPTK Matematika Yogyakarta.

Sinaga, Bornok. Dkk. 2017. *Matematika SMA Kelas X.* Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Siswanto dan Umi Supraptinah. 2009. *Matematika Inovatif 2: Konsep dan Aplikasinya untuk Kelas XI SMA dan MA Program Ilmu Pengetahuan Sosial*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Soedyarto, Nugroho dan Maryanto. 2008. *Matematika 2 untuk SMA atau MA Kelas XI Program IPA*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum

KELAS
X

FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

MATEMATIKA UMUM KELAS X

PENYUSUN
Entis Sutisna, S.Pd.

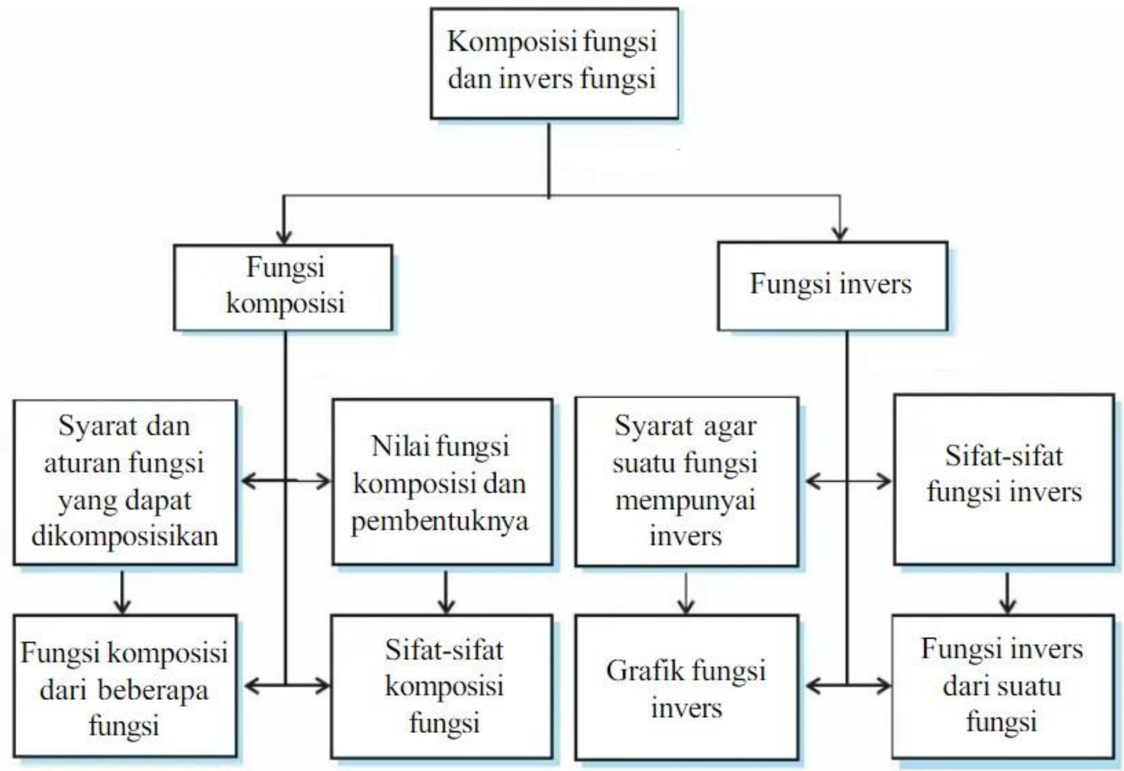
SMA Negeri 4 Tangerang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Daerah Asal/Domain	:	Himpunan tak kosong dimana sebuah relasi didefinisikan.
Daerah kawan/kodomain	:	Himpunan tidak kosong dimana anggota domain memiliki pasangan sesuai dengan fungsi yang didefinisikan.
Daerah hasil/range	:	Suatu himpunan bagian dari daerah kawan
Fungsi invers	:	Fungsi kebalikan dari suatu fungsi. Misalkan f sebuah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, f^{-1} disebut fungsi invers dari f jika dapat ditentukan sebuah fungsi f^{-1} dari himpunan B ke himpunan A sedemikian sehingga $f^{-1}(f(a)) = a$ dan $f^{-1}(f(b)) = b$.
Fungsi komposisi	:	Sebuah fungsi hasil operasi komposisi dua buah fungsi atau lebih. Misal fungsi f dan g, fungsi komposisi f dan g (ditulis: gof) ditentukan dengan $(gof)(x) = g(f(x))$
Invers fungsi	:	Suatu relasi dari himpunan B ke himpunan A.

PETA KONSEP


Komposisi fungsi dan invers fungsi
Fungsi komposisi
Fungsi invers
Syarat dan aturan fungsi yang dapat dikomposisikan
Nilai fungsi komposisi dan pembentuknya
Syarat agar suatu fungsi mempunyai invers
Sifat-sifat fungsi invers
Fungsi komposisi dari beberapa fungsi
Sifat-sifat komposisi fungsi
Grafik fungsi invers
Fungsi invers dari suatu fungsi

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	X
Alokasi Waktu	:	16 JP
Judul Modul	:	Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers

B. Kompetensi Dasar

3. 6 Menjelaskan operasi komposisi pada fungsi dan operasi invers pada fungsi invers serta sifat-sifatnya serta menentukan eksistensinya.

4.6 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan operasi komposisi dan operasi invers suatu fungsi.

C. Deskripsi Singkat Materi

Salam jumpa melalui pembelajaran matematika dengan Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers. Modul ini disusun sebagai satu alternatif sumber bahan ajar siswa untuk memahami materi Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers di kelas X. Melalui modul ini Kalian diajak untuk memahami konsep Komposisi fungsi dan invers suatu fungsi dan menyelesaikan masalah kontekstual menggunakan Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers.

Banyak sekali penerapan fungsi komposisi dan fungsi invers dalam kehidupan sehari-hari diantaranya adalah:
1). Proses pembuatan buku diproses melalui 2 tahap yaitu tahap editorial dilanjutkan dengan tahap produksi. Pada tahap editorial, naskah diedit dan dilayout sehingga menjadi file yang siap dicetak. Kemudian, file diolah pada tahap produksi untuk mencetaknya menjadi sebuah buku. Proses pembuatan buku ini menerapkan algoritma fungsi komposisi.
2). Untuk mendaur ulang logam, awalnya pecahan logam campuran dihancurkan menjadi serpihan kecil. Drum magnetic pada mesin penghancur menyisihkan logam magnetic yang memuat unsure besi. Lalu sisa pecahan logam dikeruk dan dipisahkan, sedangkan serpihan besi dilebur menjadi baja baru. Proses pendaur ulang logam tersebut menggunakan fungsi komposisi.
3). Sebuah lempeng emas yang dapat dibentuk menjadi berbagai perhiasan juga menerapkan fungsi komposisi.
4). Di bidang ilmu yang lain fungsi komposisi dan invers juga di terapkan seperti di bidang ekonomi digunakan untuk menghitung dan memperkirakan sesuatu seperti fungsi permintaan dan penawaran, di bidang kimia digunakan untuk menentukan waktu peluruhan unsur, di bidang geografi dan sosiologi digunakan untuk optimasi dalam industri dan kepadatan penduduk alam.

Modul ini terdiri atas 2 bagian proses. Kalian bisa mempelajari modul ini dengan tahapan berikut:
Pembelajaran 1 akan membahas tentang : Fungsi Komposisi
Pembelajaran 2 akan membahas tentang : Fungsi Invers.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Supaya Kalian berhasil mencapai kompetensi dalam mempelajari modul ini maka ikuti petunjuk-petunjuk berikut:

a. Petunjuk Umum:

1) Pelajari daftar isi serta skema modul dengan cermat, karena daftar isi dan peta kedudukan modul ini akan menuntun anda dalam mempelajari modul ini dan kaitannya dengan modul-modul yang lain.
2) Untuk mempelajari modul ini haruslah berurutan, karena materi yang mendahului merupakan prasyarat untuk mempelajari materi berikutnya.
3) Pahamilah contoh-contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Jika dalam mengerjakan soal Kalian menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
4) Kerjakan soal evaluasi dengan cermat. Jika Kalian menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
5) Jika Kalian mempunyai kesulitan yang tidak dapat Kalian pecahkan, catatlah, kemudian tanyakan kepada guru pada saat kegiatan tatap muka atau bacalah referensi lain yang berhubungan dengan materi modul ini. Dengan membaca referensi lain, Kalian juga akan mendapat pengetahuan tambahan.

b. Petunjuk Khusus

1) Dalam kegiatan Pembelajaran Kalian akan mempelajari bagaimana memahami konsep dan menyelesaikan masalah Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers.
2) Perhatikan gambar gambar dan uraian dengan seksama agar dapat memahami, menentukan dan menggeneralisasikan Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers.serta mampu menerapkan dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hal tersebut.
3) Pahamilah contoh-contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Kerjakanlah soal uji kompetensi dengan cermat agar Kalian bisa lebih paham dan terampil.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Fungsi Komposisi
Kedua : Fungsi Invers

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
FUNGSI KOMPOSISI

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan peserta didik dapat:
1. Menjelaskan operasi komposisi fungsi
2. Mengidentifikasi sifat-sifat operasi komposisi pada fungsi
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan operasi komposisi

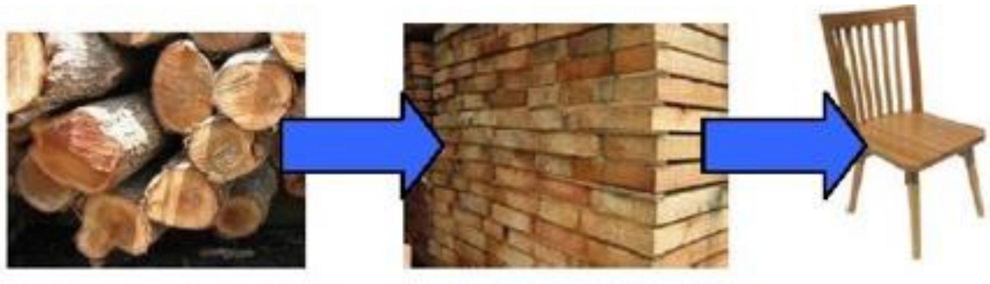
B. Uraian Materi

Setelah Kalian mempelajari konsep Relasi dan Fungsi pada modul sebelumnya, pembahasan akan kita kembangkan dengan mempelajari Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers. Tujuan dari mempelajari materi pembelajaran ini adalah untuk menggali materi-materi tentang konsep komposisi dan invers kemudian operasi-operasi pada fungsi komposisi dan invers beserta sifat-sifatnya.

Komposisi atau operasi fungsi secara umum dilakukan untuk menghasilkan nilai tertentu setelah melalui tahapan/prosedur operasi tertentu. Hal ini banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, misalkan tata cara mandi tahapan adalah melepas baju baru dilanjutkan dengan mandi, jika dibalik akan berbeda hasilnya. Begitu juga dengan benda-benda di sekitar kita banyak yang pembuatannya tidak sekaligus jadi tetapi pengerjaannya bisa melalui beberapa tahap. Misalnya meja dan kursi pada gambar berikut agar siap dipakai dapat dikerjakan melalui beberapa tahap yaitu tahap pengerjaan pembuatan dan tahap *finishing*.

Gambar 1.1 Meja Kursi Ukir Jepara.
Sumber: http://keren2704.blogspot.com/2017/03/seni-kerajinan-kursi-kayu-ukir.html

Untuk tahap pembuatanpun melalui beberapa tahap, mulai dari kayu gelodongan (Log), kayu papan, meja – kursi kasar baru *finishing.*



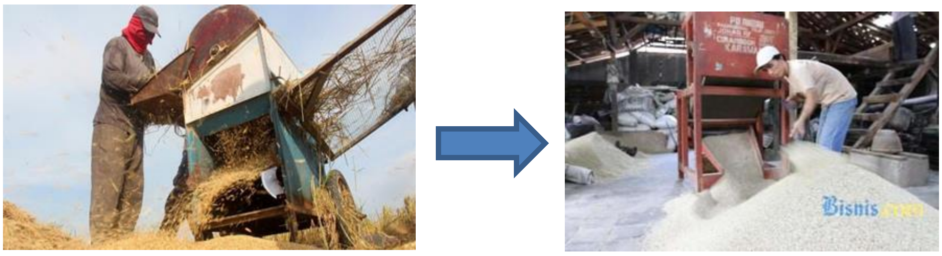
Gambar 1.2. Proses Log jadi Furniture.
Sumber: www.tentangkayu.com

Untuk membuat mebel berupa meja dan kursi, seorang pengusaha mebel harus mengetahui berapa biaya pembuatan meja dan kursi sampai jadi sehingga biaya tidak berlebih. Pengusaha harus merencanakan dan menghitung satu persatu yaitu biaya pada tahap pengerjaan pembuatan dan biaya pada tahap *finishing*. Di dalam matematika, biaya dari setiap tahapan dapat dinyatakan dalam suatu fungsi biaya sehingga biaya totalnya merupakan fungsi komposisi dari setiap tahapan.

Sebagai contoh berapakah total biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 20 set meja kursi dengan kualitas yang bagus dari seorang tukang kayu yang dapat menghasilkan meja dan kursi yang bagus melalui dua tahap, yaitu tahap pembuatan dan tahap *finishing*. Apabila biaya yang diperlukan pada tahap pembuatan adalah Rp750.000,00 per set, dan biaya pada tahap finishing adalah Rp150.000,00 per set. Apabila banyaknya meja dan kursi yang dihasilkan adalah x set dan biaya yang diperlukan pada tahap pembuatan adalah dengan persamaan $f(x)$ = 750 000 x + 15000, sedangkan biaya pada tahap finishing dengan persamaan $g(x)$ = 15000x + 10000. Dengan menggunakan operasi fungsi komposisi maka biaya total pembuatan 20 set meja-kursi dapat dihitung.

Untuk lebih memahami masalah Fugsi Komposisi, coba Kalian perhatikan permasalahan berikut:

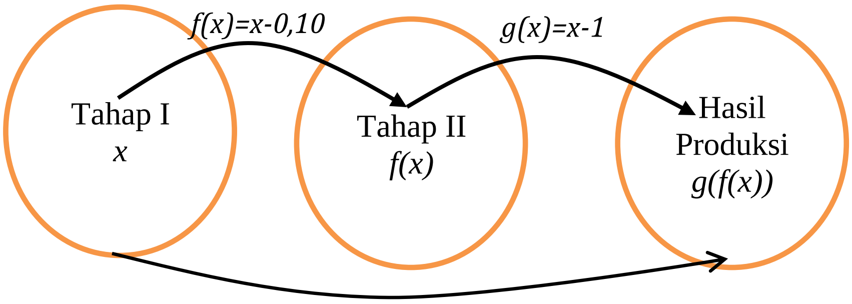
Suatu penggilingan padi dapat memproduksi beras super melalui dua tahap. Tahap pertama menggunakan mesin-1 yang menghasilkan beras setengah jadi berupa pelepasan kulit padi. Tahap kedua dengan menggunakan mesin-2 yang menghasilkan beras super. Dalam produksinya, mesin-1 menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi (x) = x - 0,10 dan mesin-2 mengikuti fungsi $g(x)$ = x - 1, dengan x merupakan banyak bahan dasar padi dalam satuan kg. Jika bahan dasar padi yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 1 ton, berapakah beras super yang dihasilkan dalam ton?



Mesin I Mesin II

Gambar 1.3 : Mesin penggiling padi
Sumber : https://images.app.goo.gl/TWJ7HYeZR3ssXQvt6
https://images.app.goo.gl/wQsMgmmyAR5qdLLu5

Proses di atas dapat kita gambarkan sebagai berikut:



Gambar 1.4 : Tahapan produksi beras.

Dari gambar di atas, terlihat bahwa tahap produksi beras terdiri atas dua tahap yang hasil produksi setiap tahapnya dapat dihitung sebagai berikut.

Hasil produksi tahap I
Rumus fungsi pada produksi tahap I adalah $(x) = x - 0,10$.
Untuk $x = 1000$, diperoleh:
$f(x) = x - 0,10$
$= 1000 - 0,10$
$= 999,90$
Hasil produksi tahap I adalah 999,90 kg beras setengah jadi.

Hasil produksi tahap II
Rumus fungsi pada produksi tahap II adalah $(x) = x - 1$.
Karena hasil produksi pada tahap I akan dilanjutkan pada produksi tahap II, maka hasil produksi tahap I menjadi bahan dasar produksi tahap II, sehingga diperoleh:
$g(x) = x - 1$
$= 999,90 - 1$
$= 998,90$
Dengan demikian, hasil produksi tahap II adalah 998,90 kg beras super. Hasil produksi yang dihasilkan penggilingan padi tersebut jika bahan dasar padinya sebanyak 1 ton adalah 0,9989 ton beras super.

Masalah di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan cara yang berbeda sebagai berikut.
Diketahui fungsi-fungsi produksi berikut.

$f(x) = x - 0{,}10$ ....(1)

$g(x) = x - 1$ ....(2)

Dengan mensubstitusikan persamaan (1) ke persamaan (2), diperoleh fungsi

$g(f(x)) = (f(x)) - 1 = (x - 0{,}10) - 1 = x - 1{,}1.$

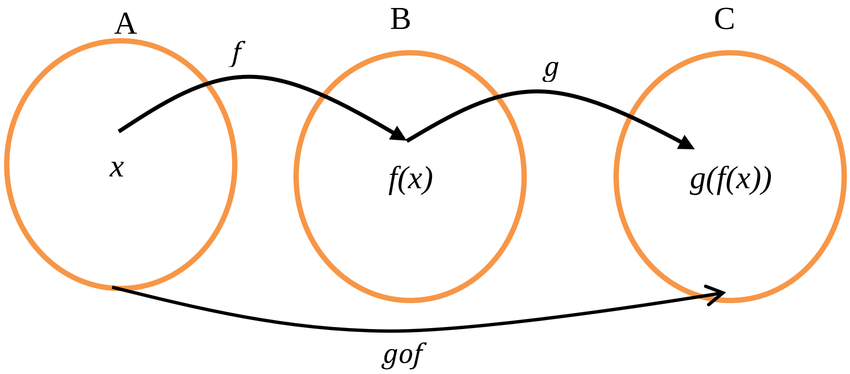
Dengan demikian, diperoleh fungsi $g(f(x)) = x - 1{,}1$. (3).
Jika disubtitusikan nilai $x = 1000$ pada persamaan 3, didapat:

$g(f(1000)) = 1000 - 1{,}1 = 998{,}90.$

Terlihat bahwa hasil produksi sebesar 998,90 kg. Nilai ini sama hasilnya dengan hasil produksi dengan menggunakan perhitungan cara pertama di atas.
Nilai $g(f(x))$ merupakan nilai suatu fungsi yang disebut fungsi komposisi f dan g dalam x yang dilambangkan dengan gof. Karena itu nilai gof di x ditentukan dengan $(gof)(x) = g(f(x))$.

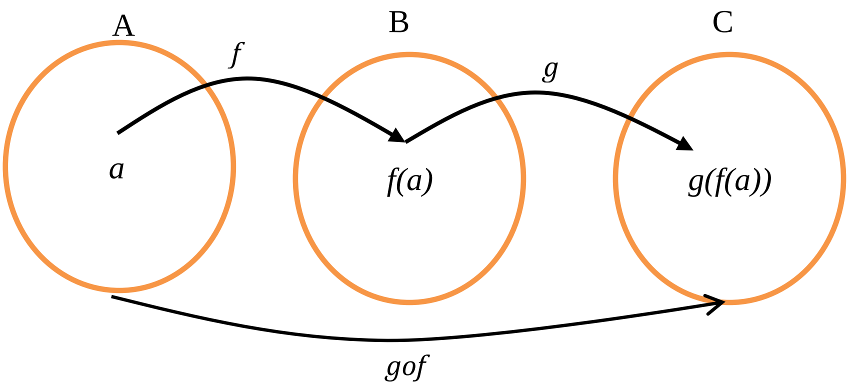
Masalah di atas merupakan contoh permasalahan komposisi fungsi. Bagaimana sekarang sudah dipahami yang dimaksud dengan komposisi fungsi?
Ayo kita kaji lebih dalam lagi.

Misalkan fungsi f memetakan himpunan A ke dalam himpunan B ditulis $f: A \rightarrow B$, dan fungsi g memetakan himpunan B ke dalam C ditulis $g: B \rightarrow C$, sebagaimana ilustrasi di bawah ini:



Gambar 1.5 : Komposisi Fungsi

Untuk $a \in A$ maka petanya (a) berada di B yang juga merupakan domain dari fungsi g, oleh sebab itu pasti diperoleh peta dari (a) di bawah pemetaan g yaitu $(f(a))$. Dengan demikian kita mempunyai suatu aturan yang menentukan setiap elemen $a \in A$ dengan tepat satu elemen $((a)) \in C$. Fungsi baru inilah yang disebut fungsi komposisi dari f dan g, yang dinyatakan dengan notasi $g\circ f$ (dibaca "g bundaran f")



Gambar 1.6 : Pemetaan $f: A \to B$, dan $g: B \to C$

Secara singkat, jika f: $A \to B$, dan g: $B \to C$ maka kita definisikan suatu fungsi komposisi $g{\circ}f$: $A \to C$ sedemikian hingga $(g{\circ}f)(a) = g(f(a))$. Perhatikan bahwa fungsi komposisi $g{\circ}f$ adalah penggandaan fungsi yang mengerjakan f dahulu, baru kemudian mengerjakan g.

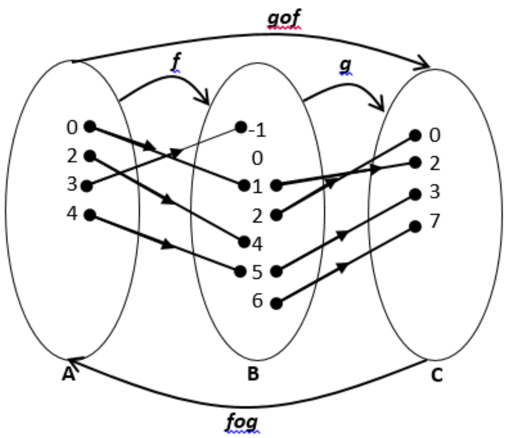
Dengan memperhatikan definisi dari fungsi komposisi di atas dapat diperoleh fungsi komposisi $g{\circ}f$ dan $f \circ g$ apabila:
Komposisi fungsi $g \circ f$: Jika fungsi f dan g memenuhi $\boldsymbol{R_f} \cap \boldsymbol{D_g} \neq \varnothing$
Komposisi fungsi $f \circ g$: Jika fungsi f dan g memenuhi $\boldsymbol{R_g} \cap \boldsymbol{D_f} \neq \varnothing$

Contoh 1:

Diketahui fungsi $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ dinyatakan dalam pasangan terurut :
f = {(0,1), (2,4), (3,-1),(4,5)} dan g = {(2,0), (1,2), (5,3), (6,7)}
Tentukanlah:
a) (f o g) b) (g o f) c) (f o g)(1) d) (g o f)(4)

Penyelesaian:

$f : A \to B$ dan $g : B \to C$
Perhatikan diagram panah berikut:



a) (f o g) pemetaan oleh g dilanjutkan pemetaan oleh f.

Dari diagram di atas

g(1) = 2 dan f(g(1)) =f(2) = 4

g(2) = 0 dan f(g(2))=f(0) = 1

g(5) = 3 dan f(g(5))=f(3) = -1

sehingga (fog) = {(2,1), (1,4), (5,-1)}

b) (go f) pemetaan oleh f dilanjutkan pemetaan oleh g.

F(0) = 1 dan g(f(0)) = g(1) = 2

F(4) = 5 dan g(f(4)) = g(5) = 3

Sehingga (gof) = {(0,2), (4,3)}

c) (f o g)(1) = 4

d) d) (g o f)(4) = 3

Contoh 2:

Diketahui : f : R $\rightarrow$ R ; f(x) = $2x^2 + 1$,
g : R $\rightarrow$ R ; g(x) = x + 3

Tentukan :

a) (f o g)(x)
b) (g o f)(x)
c) (f o g)(1)
d) (g o f)(1)

Penyelesaian:

a) Pada (fog) x dipetakan lebih dulu oleh g(x) kemudian g(x) dipetakan oleh f(x).

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2(g(x))^2 + 1 \\
&= f(x+3) \\
&= 2(x+3)^2+1 \\
&= 2(x^2 + 6x + 9) + 1 \\
&= 2x^2+12x+19
\end{aligned}
$$

b) Pada (g o f) x dipetakan lebih dulu oleh f(x) kemudian f(x) dipetakan oleh g(x)

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(2x^2+1) \\
&= 2x^2 + 1 + 3 \\
&= 2x^2 + 4
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(1) &= f(g(1)) \\
&= f(4) \\
&= 2.\ (4)^2 +1 \\
&= 2.16 + 1 \\
&= 33
\end{aligned}
$$

d)
$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(1) &= g(f(1)) \\
&= g(3) \\
&= 3 + 3 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Contoh 3:

Diketahui A = {x l x < -1}, B dan C adalah himpunan bilangan real.
f : A → B dengan f(x) = -x + 1; g : B → C dengan g(x) = x^2 dan
h = g o f : A → C.
Bila x di A dipetakan ke 64 di C, tentukan nilai x!

Penyelesaian:

h(x) = (g o f)(x) = g(f(x)) = g(-x + 1) = $(-x + 1)^2$
h(x) = 64 → $(-x + 1)^2 = 64 \leftrightarrow -x + 1 = \pm 8$
$-x + 1 = 8 \leftrightarrow x = -7$ atau $-x + 1 = -8 \leftrightarrow x = 9$
Karena A = {x l x < -1}, maka nilai x yang memenuhi adalah x = -7.

Contoh 4:

Fungsi $f: R \to R$, $g : R \to R$ dan $h: R \to R$ yang didefinisikan oleh rumus
$f(x) = x + 2$, $g(x) = 3x^2$ dan $h(x) = 2x - 3$
Tentukan :
a) $(gof)(1)$ dan $(fogoh)(1)$
b) rumus untuk (gof), (fog) dan $(fogoh)$

Penyelesaian:
a) $(gof)(1)$=g(f(1)
f(1) = 1 + 2 = 3
$(gof)(1)$=g(f(1)) = $3.3^2 = 3.9 = 27$

Untuk $(fogoh)(1)$ pemetaan pertama oleh *h(x) = 2x + 3*, dilanjutkan oleh *g(x) =* x^2 sehingga *g(h(x).* Untuk selanjutnya *g(h(x)* dipetakan oleh *f(x)* sehingga *f(g(h(x))).*
$h(1) = 2.(1) - 3 = -1$
$g(h(1)) = (h(1))^2 = (-1)^2 = 1$
(fogoh)(x) = (f(g(h(1))) = 2.*(g(h(1))* + 3 = 2.(1) + 3 = 5

b) $(gof): x \to (gof)(x) = g\ (f(x)) = g(x + 2) = 3(x + 2)2 = 3x^2 + 12x + 12$
sehingga $(gof): x \to 3x^2 + 12x + 12$.
$(fog): x \to (fog)(x) = f(g(x)) = f(3x2) = 3x^2 + 2$
sehingga $(fog): x \to 3x^2 + 2$.

Catatan:
Dari jawab di atas didapat fungsi $go\ f$ dan $fo\ g$ tidak sama, sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa komposisi fungsi tidak bersifat komutatif.

$$
\begin{aligned}
(fogoh): x \to (fogoh)(x) &= f(g(h(x))) \\
&= f(g(2x - 3)) \\
&= f(3(2x - 3)^2 = f(12x^2 - 36x + 27) \\
&= (12x^2 - 36x + 27) + 2 = 12x^2 - 36x + 29.
\end{aligned}
$$

sehingga $(fogoh): x \to 12x^2 - 36x + 29$.

Perhatikan kembali Contoh 1 s.d 4 di atas. Contoh 1 s.d 4 tersebut diberikan untuk menentukan fungsi komposisi jika fungsi-fungsi yang lain telah diketahui.

Berikut ini diberikan contoh bagaimana menentukan fungsi jika diketahui fungsi komposisi dan suatu fungsi yang lain.

Menentukan Komponen Pembentuk Fungsi Komposisi

Contoh 5:
Diketahui fungsi komposisi (f o g)(x) = 3x – 2 dan fungsi f(x) = 2x + 1. Tentukan nilai dari g(x)!

Penyelesaian:

(f o g)(x) = 3x – 2 dan f(x) = 2x + 1

(fog)(x) = f(g(x)) = 3x – 2→ f(g(x)) = 2.g(x) + 1

f (g(x)) = f(g(x))

2.g(x) + 1 = 3x – 2

2.g(x) = 3x – 3

g(x) = $\frac{3x-3}{2}$

Contoh 6:
Diketahui fungsi komposisi (f o g)(x) = 6x + 3 dan fungsi g(x) = 2x - 3. Tentukan nilai dari f(x)!

Penyelesaian:

(f o g)(x) = 6x + 3, misalkan, p = 2x - 3

f(g(x)) = 6x + 3   p + 3 = 2x

f(2x – 3) = 6x + 3 $\frac{p+3}{2}$ = x

f(p) = 6.($\frac{p+3}{2}$) + 3

f(p) = 3(p + 3) + 3

f(p) = 3p + 12

Jadi, f(x) = 3x + 12

Cara lain:

(f o g)(x) = 6x + 3 dan g(x) = 2x - 3
f(g(x)) = 6x + 3
f(2x – 3) = 6x + 3 = 3(2x – 3) + 12
f(x) = 3x + 12

Ruas kanan dinyatakan dalam 2x-3 namun nilainya tetap 6x + 3

Penggunaan komposisi fungsi dalam kehidupan sehari-hari.

Contoh 7:

PT MAKMUR BERSAMA sebuah perusahaan yang sangat memperhatikan karyawannya. Pada tahun 2020 perusahaan mempunyai mempunyai kebijakan dalam memberikan kesejahteraan kepada karyawannya, yaitu setiap bulan seorang karyawan akan menerima 3 buah tunjangan yang terdiri dari tunjangan keluarga, tunjangan kesehatan dan tunjangan transportasi selain gaji pokok. Ketentuan tentang tunjangan tersebut adalah sebagai berikut:

- Tunjangan Keluarga = 1/3 Gaji Pokok + Bonus Tambahan
- Tunjangan Kesehatan = ½ (Tunjangan Keluarga + Bonus Tambahan)
- Tunjangan Transportasi = ¼ Tunjangan Kesehatan

Tabel **Bonus tambahan** ditampilkan seperti pada tabel di bawah ini:

Gol	Masa Kerja dalam tahun (M)						
	M ≤ 5	5<M≤ 10	10<M≤15	15<M≤20	20<M≤25	25<M≤30	M ≥ 30
I A	50.000	150.000	250.000	350.000	450.000	550.000	650.000
I B	150.000	250.000	350.000	450.000	550.000	650.000	750.000
II A	250.000	350.000	450.000	550.000	650.000	750.000	850.000
II B	350.000	450.000	550.000	650.000	750.000	850.000	950.000
III A	450.000	550.000	650.000	750.000	850.000	950.000	1.050.000
III B	550.000	650.000	750.000	850.000	950.000	1.050.000	1.150.000
IV A	650.000	750.000	850.000	950.000	1.050.000	1.150.000	1.350.000
IV B	750.000	850.000	950.000	1.050.000	1.150.000	1.350.000	1.450.000
V	850.000	950.000	1.050.000	1.150.000	1.350.000	1.450.000	1.550.000

Jaka adalah seorang karyawan Golongan III B dan telah bekerja selama 27 tahun dengan gaji pokok Rp 12.000.000, Berapakah **tunjangan transportasi** yang akan diperoleh Jaka perbulannya?

Penyelesaian:

Misalnya : Tunjangan keluarga = K
Tunjangan Kesehatan = S
Tunjangan Transportasi = T
G = Gaji Pokok

Maka:

K = $\frac{1}{3}G + Bonus\ Tambahan$

S = ½ (K + Bonus Tambahan)

T = ¼ S ;

sesuai Golongan dan masa kerja Jaka (gol III B dan masa kerja 27 tahun) jika dicocokan dengan tabel bonus tambahan diperoleh:

K = $\frac{1}{3}G + 1.050.000$

S = ½ (K + 1.050.000)

T = ¼ S

T= ¼ (½ (K +1.050.000)) = $\frac{1}{8}K + 131.250$

T = $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}G + 1.050.000\right) + 131.250$

T = $\frac{1}{24}G + 131.250 + 131.250$

T = $\frac{1}{24}G + 262.500$

T = $\frac{1}{24}(12.000.000) + 262.500$

T = 762.500

Jadi Tunjangan Transportasi Jaka per bulan = Rp 762.500,-

Sifat – Sifat Komposisi Fungsi

Berikut ini sifat – sifat yang berlaku pada fungsi komposisi :

1. Secara umum *sifat komutatif tidak berlaku* pada fungsi komposisi, yaitu $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$
2. Untuk komposisi tiga fungsi atau lebih, berlaku *sifat asosiatif*. Jika f, g, dan h tiga buah fungsi, maka berlaku : $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$.
3. Terdapat fungsi identitas terhadap operasi komposisi fungsi, yakni $I(x) = x$, sehingga berlaku :
   $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x) = f(x)$

Contoh 8:

Diketahui f(x) = 2x + 1, g(x) = 3 – x, dan h(x) = x^2 + 2, I(x) = x

(f o g)(x) = f(g(x)) = f(3-x) = 2(3-x) + 1 = 6 – 2x + 1 = 7 – 2x

(g o f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = 3 – (2x+1) = 3 – 2x – 1 = 2 – 2x

(g o h)(x) = g(h(x)) = g(x^2 + 2) = 3 – (x^2 + 2) = 1 - x^2

Dari hasil di atas tampak bahwa (fog)(x) ≠ (g o f)(x)

((fog)oh)(x) = (fog)(h(x))= (fog)(x^2 + 2)= 7 – 2(x^2 + 2) = 3 - 2x^2

(fo(goh))(x)=f((goh)(x))= f(1 - x^2)= 2(1 - x^2) + 1 = 2 – 2 x^2 + 1 = 3 – 2 x^2

Dari hasil di atas tampak bahwa ((fog)oh)(x) = (fo(goh))(x)

(foI)(x) = f(I(x)) = f(x) = 2x + 1

(Iof)(x) = I(f(x)) = I(2x+1) = 2x + 1

Dari hasil di atas tampak bahwa (foI)(x) = (Iof)(x) = f(x)

C. Rangkuman

1. Komposisi fungsi f dan g didefinisikan (fog)(x) = f(g(x)) dan (gof)(x) = g(f(x))
2. Komposisi fungsi $g \circ f$: Jika fungsi f dan g memenuhi $\boldsymbol{R}_f \cap \boldsymbol{D}_g \neq \emptyset$
   Komposisi fungsi $f \circ g$: Jika fungsi f dan g memenuhi $\boldsymbol{R}_g \cap \boldsymbol{D}_f \neq \emptyset$
3. Sifat-sifat komposisi fungsi
   a. Tidak komutatif
   b. Memiliki sifat asosiatif (fog)o(h) = fo(goh)
   c. Memiliki fungsi identitas I(x) = x sehingga foI = Iof = f

D. Latihan Soal

Untuk meningkatkan pemahaman, coba Kalian kerjakan Latihan soal berikut kemudian cocokkan jawaban Kalian dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Jangan melihat kunci dulu sebelum Kalian mengerjakan.

I. Pilihan Ganda.

1. Diketahui $f(x) = x^2 + 4x - 5$ dan $g(x) = 2x - 1$. Hasil fungsi komposisi $(gof)(x)$ adalah ....
   A. $2x^2 + 8x - 11$ C. $2x^2 + 8x - 9$ E. $2x^2 + 4x - 9$
   B. $2x^2 + 8x - 6$ D. $2x^2 + 4x - 6$
2. Fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$, dirumuskan dengan $f(x) = 2x^2 - 2$ dan $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$, maka $(fog)(x) = ...$
   A. $x^2 + 1$ C. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ E. $\frac{1}{2}x^2 + 8x + 6$
   B. $\frac{1}{2}x^2 + 6$ D. $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$
3. Fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ ditentukan oleh $f(x) = 2x - 1$ dan $g(x) = 5x - x^2$. Nilai untuk $(fog)(-1)$ adalah ....
   A. –24 B. –13 C. –9 D. –6 E. –4
4. Ditentukan $g(f(x)) = f(g(x))$. Jika $f(x) = 2x + p$ dan $g(x) = 3x + 120$, maka nilai p = ...
   A. 30 B. 60 C. 90 D. 120 E. 150
5. Fungsi f dan g ditentukan oleh $f(x) = 2x - 4$ dan $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$. Daerah asal (daerah definisi) f adalah $D_f = \{x | 2 \le x \le 6, x \in R\}$ dan $g: R \to R$. Daerah hasil dari $(gof)(x)$ adalah....
   A. $\{y | 1 \le x < 4, y \in R\}$ C. $\{y | 3 \le x \le 7, y \in R\}$ E. $\{y | -1 < x \le 17, y \in R\}$
   B. $\{y | 4 < x \le 6, y \in R\}$ D. $\{y | -1 \le x \le 6, y \in R\}$
6. Jika $f(x) = 3x + 1$ dan $(fog)(x) = 6x^2 + 9x + 4$, maka $g(x) = ...$
   A. $2x^2 - 3x - 1$ C. $x^2 + 3x + 1$ E. $x^2 + 2x + 1$
   B. $2x^2 + 3x + 1$ D. $2x^2 - 3x + 1$

7. Fungsi $f: R \to R$, $g: R \to R$, dan $h: R \to R$ adalah fungsi-fungsi yang ditentukan oleh $f(x) = 2 + x$, $g(x) = x^2 - 1$, dan $h(x) = 2x$. Maka bentuk yang paling sederhana $(hogof)(x) = ...$

   A. $x^2 + 4x + 3$ C. $-2x^2 + 8x + 6$ E. $2x^2 + 8x + 6$
   B. $2x^2 - 8x + 6$ D. $-2x^2 + 8x - 6$

8. Diketahui f dan g yang dirumuskan oleh $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$ dan $g(x) = 2x - 1$. Jika nilai $(fog)(x) = 101$, maka nilai x yang memenuhi adalah ....

   A. $3\frac{2}{3}$ dan -2 C. $\frac{3}{11}$ dan 2   E. $-\frac{3}{11}$ dan -2
   B. $-3\frac{2}{3}$ dan 2   D. $-3\frac{2}{3}$ dan -2

9. Diketahui fungsi f dan g yang dirumuskan oleh $f(x) = 2x - 4$ dan $(gof)(x) = 4x^2 - 24x + 32$. Rumus fungsi g adalah $g(x) = ...$

   A. $x^2 - 4x + 8$ C. $x^2 + 4x + 8$ E. $x^2 - 4x$
   B. $x^2 - 4x - 8$ D. $x^2 + 4x$

10. Jika $f(x) = x + 3$ dan $(gof)(x) = 2x^2 + 4x - 3$, maka $(fog)(1) = ...$

    A. 6   B. 3   C. 3   D. 1   E. 0

II. Uraian

1. Diketahui **f** : **R → R**, **g** : **R → R,** dan **h** : **R** → **R** ditentukan oleh rumus **f** (**x**) = 2**x** + 4, **g** (**x**) = 3**x**, dan **h** (**x**) = **x**^{2} + 1. Tentukan:
   a. ((**fog**)o**h**) (**x**);
   b. (**f**o (**g**o**h**)) (**x**)

2. Dari fungsi f dan g diketahui $g(x) = x - 1$ dan $(fog)(x) = 4x^2 - x$. Jika $f(a) = 5$, maka tentukan nilai a !

3. Suatu pabrik kertas dengan bahan dasar kayu **(*x*)** memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama menggunakan mesin I menghasilkan bahan kertas setengah jadi **(*m*)** dengan mengikuti fungsi $\boldsymbol{m = f(x) = x^2 - 3x - 2}$. Tahap kedua menggunakan mesin II menghasilkan kertas mengikuti fungsi $\boldsymbol{g(m) = 4m + 2}$ dengan ***x*** dan ***m*** dalam satuan ton. Jika bahan dasar kayu yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 4 ton, tentukan banyak kertas yang dihasilkan!

4. Sebuah perusahaan menggunakan dua buah mesin untuk mengubah bahan mentah menjadi bahan jadi. Mesin I mengubah bahan mentah menjadi bahan setengah jadi, dan mesin II mengubah dari bahan setengah jadi menjadi bahan jadi. Mesin I dianalogikan dengan fungsi f(x) = 2x – 3 dan mesin II dianalogikan dengan fungsi g(x) = x^2 - x

a) Apalagi bahan mentah yang digunakan sebanyak x, tentukan persamaan hasil bahan jadi.
b) Apabila bahan mentah yang digunakan sebanyak 100 kg, berapa banyak hasil produksi?

Pembahasan Latihan Soal

NO	PEMBAHASAN	Kunci
1.	$(gof)(x) = g(f(x))$ $= g(x^2 + 4x - 5)$ $= 2(x^2 + 4x - 5) - 1 = 2x^2 + 8x - 10 - 1 = 2x^2 + 8x - 11$	A
2.	$(fog)(x) = f(g(x))$ $= f\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$ $= 2\left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 - 2$ $= \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8 - 2$ $= \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$	C
3	$(fog)(-1) = f(g(-1))$ $= f\left(5(-1) - (-1)^2\right)$ $= f(-6) = 2(-6) - 1 = -13$	B
4	$g(f(x)) = f(g(x))$ $g(2x + p) = f(3x + 120)$ $3(2x + p) + 120 = 2(3x + 120) + p$ $6x + 3p + 120 = 6x + 240 + p$ $2p = 120$ $p = 60$ Jadi, nilai p adalah 60.	B
5	$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x - 4) = \frac{1}{2}(2x - 4) + 3 = x + 1$ $x = 2 \rightarrow (gof)(2) = 2 + 1 = 3$ $x = 6 \rightarrow (gof)(6) = 6 + 1 = 7$ Jadi, daerah hasil dari $(gof)(x)$ adalah $\{y \mid 3 \le x \le 7, y \in R\}$	C
6	$(fog)(x) = 6x^2 + 9x + 4$ $f(g(x)) = 6x^2 + 9x + 4$ $3g(x) + 1 = 6x^2 + 9x + 4$	C

	$g(x)=2x^2+3x+1$	
7	$(hogof)(x)=h(g(f(x)))$ $=h(g(2+x))$ $=h((2+x)^2-1)$ $=h(x^2+4x+3)$ $=2(x^2+4x+3)$ $=2x^2+8x+6$	E
8	$(fog)(x)=101$ $f(g(x))=101$ $f(2x-1)=101$ $3(2x-1)^2-4(2x-1)+6=101$ $12x^2-12x+3-8x+4+6=101$ $12x^2-20x-88=0$ $3x^2-5x-22=0$ $(3x-11)(x+2)=0$ $3\frac{2}{3}$ atau -2 Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $3\frac{2}{3}$ dan -2.	A
9.	$(g \text{ o } f)(x) = 4x^2 - 24x + 32$ $g(2x - 4) = 4x^2 - 24x + 32$ $= (2x - 4)^2 - 8x + 16$ $= (2x - 4)^2 - 4(2x - 4)$ $g(x) = x^2 - 4x$ **Alternatif 2:** $(g \text{ o } f)(x) = 4x^2 - 24x + 32$ $g(2x - 4) = 4x^2 - 24x + 32$ Misalnya $2x - 4 = w$, maka $x=\frac{1}{2}(w+4)$, sehingga $g(w)=4\left\{\frac{1}{2}(w+4)\right\}^2-24\left\{\frac{1}{2}(w+4)\right\}+32$ $= w^2 + 8w + 16 - 12w - 48 + 32$ $= w^2 - 4w$ $g(x) = x^2 - 4x$ Jadi, rumus fungsi g adalah $g(x) = x^2 - 4x$	E
10	$(gof)(x)=2x^2+4x-3$ $g(f(x))=2x^2+4x-3$ $g(x+3)=2x^2+4x-3$ $g(x)=2(x-3)^2+4(x-3)-3$ $g(x)=2x^2-12x+18+4x-12-3$	E

	$g(x)=2x^2-8x+3$ $(gof)(x)=f(g(x))$ $=f(4x^2-4x+8)$ $=2x^2-8x+6$ $(gof)(1)=2\times1^2-8\times1+6=0$	
	Skor Maksimum : 50	
	II. Uraian	
1.	a. (fog) (x) = f (g (x)) = f (3x) = 2 (3x) + 4 = 6x + 4 ((fog)oh) (x) = (fog) (h(x)) = (fog) (x^2 + 1) = 6 (x^2 + 1) + 4 = 6x^2 + 6 + 4 = 6x^2 + 10 Jadi, ((fog)oh) (x) = 6x^2 + 10 b. (goh) (x) = g (h (x)) = g (x^2 + 1) = 3 (x^2 + 1) = 3x^2 + 3 (fo(goh)) (x) = f ((goh) (x)) = f (3x^2 + 3) = 2 (3x^2 + 3) + 4 = 6x^2 + 6 + 4 = 6x^2 + 10 Jadi, (fo(goh)) (x) = 6x^2 + 10	5 5
2.	$(fog)(x)=4x^2-x$ $f(g(x))=4x^2-x$ $f(x-1)=4x^2-x$ $f(x)=4(x+1)^2-(x+1)$ $f(x)=4x^2+7x+3$ $f(a)=5$ $4a^2+7a+3=5$ $4a^2+7a-2=0$ $(4a-1)(a+2)=0$ $a=\frac{1}{4}$ atau $a=-2$ Jadi, nilai a yang diminta adalah -2.	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
3.	Rumus fungsi pada produksi tahap I adalah m = (x) = x^2 - 3x - 2 Untuk x = 4, diperoleh: m = $f(x)$ = x^2 - 3x - 2 = 4^2 - 3.4 - 2 = 16 - 12 - 2 = 2 Hasil produksi tahap I adalah 2 ton bahan kertas setengah jadi. Hasil produksi tahap II	6

	Rumus fungsi pada produksi tahap II adalah $g(m) = 4m + 2$ Karena hasil produksi pada tahap I akan dilanjutkan pada produksi tahap II, maka hasil produksi tahap I menjadi bahan dasar produksi tahap II, sehingga diperoleh: $g(m) = 4m + 2$ = 4.2 + 2 = 10 Dengan demikian, hasil produksi tahap II adalah 10 ton kertas. Jadi banyaknya kertas yang dihasilkan adalah 10 ton.	 6 3
4.	a) Persamaan bahan jadi adalah $(gof)(x) = g(f(x) = (2x - 3)^2 - (2x-3)$ $g(f(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 2x + 3$ $g(f(x)) = 4x^2 - 14x + 12$ b) Banyak bahan mentah yang digunakan 100 kg. $(gof)(100) = 4.100^2 - 14.100 + 12 = 40.000 - 1400 + 12 =$ 38.612 Jadi banyaknya hasil produksi adalah: 38.612	 8 7
	Skor maksimum	**50**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan=$\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum} x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom “Ya” jika Kalian mampu dan “Tidak” jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Saya sudah memahami tentang komposisi fungsi		
2.	Saya sudah dapat menentukan rumus komposisi fungsi		
3.	Saya sudah memahami sifat-sifat komposisi fungsi		
4.	Saya sudah memahami penerapan komposisi fungsi dalam kehidupan sehari-hari..		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
FUNGSI INVERS

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan peserta didik dapat :
1. Memahami operasi invers pada fungsi invers
2. Memahami sifat-sifat operasi invers pada fungsi invers
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan invers pada suatu fungsi.

B. Uraian Materi

Masih ingatkah Kalian waktu kecil dulu orangtua Kalian atau guru TK mengajarkan bagaimana cara memakai sepatu atau melepas sepatu. Biasanya dimulai dengan mengambil sepatu dari rak sepatu, memasang kaos kaki, memasukkan kaki dan mengikat tali sepatu. Ketika belajar membuka sepatu, dimulai dengan membuka tali sepatu, mengeluarkan kaku, membuka kaos kaki dan meletakkan sepatu pada tempat penyimpanan sepatu. Proses memakai sepatu dan membuka sepatu tergambar pada diagram berikut:

Gambar 2.1: Proses memasang dan membuka sepetu.

Kegiatan memakai sepatu dan melepas sepatu tersebut merupakan kegiatan yang berkebalikan, dalam matematika sering dinamakan invers.
Sekarang perhatikan contoh kontekstual yang terkait dengan invers fungsi berikut:

Contoh 1:

Seorang pedagang kain memperoleh keuntungan dari hasil penjualan setiap x potong kain sebesar f(x) rupiah. Nilai keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi f(x) = 500x + 1.000, dimana x banyak potong kain yang terjual.

a. Jika dalam suatu hari pedagang tersebut mampu menjual 50 potong kain, berapa keuntungan yang diperoleh?
b. Jika keuntungan yang diharapkan sebesar Rp100.000,00 berapa potong kain yang harus terjual?
c. Jika A merupakan daerah asal (domain) fungsi f dan B merupakan daerah hasil (range) fungsi f, gambarkanlah permasalahan butir (a) dan butir (b) di atas.

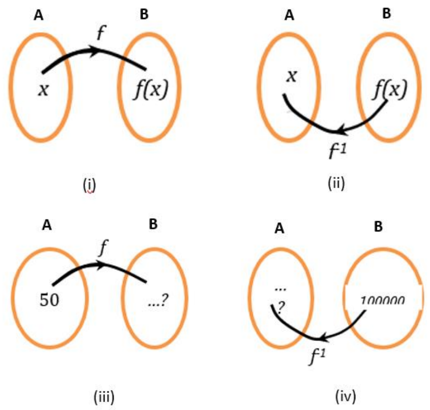
Penyelesaian:

Keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 1.000$, untuk setiap x potong kain yang terjual.

a) Penjualan 50 potong kain, maka $x = 50$ dan nilai keuntungan yang diperoleh adalah $f(x) = 500x + 1000$ untuk $x = 50$ berarti $f(50) = (500 \times 50) + 1.000$
$$= 25.000 + 1.000$$
$$= 26.000$$
Jadi, keuntungan yang diperoleh dalam penjualan 50 potong kain sebesar Rp26.000,00

b) Agar keuntungan yang diperoleh sebesar Rp 100.000,00, maka banyaknya kain yang harus terjual adalah $f(x) = 500x + 1000$
$$100.000 = 500x + 1000$$
$$500x = 100.000 - 1.000$$
$$500x = 99.000$$
$$x = \frac{99.000}{500}$$
$$x = 198$$
Jadi, banyaknya kain yang harus terjual adalah 198 potong

c) Jika A merupakan daerah asal fungsi f dan B merupakan daerah hasil fungsi f, maka permasalahan butir (a) dan butir (b) di atas digambarkan seperti berikut.



Gambar 2.2: Fungsi Invers

Berdasarkan Gambar 2.2 di atas, maka dapat dikemukakan beberapa hal sebagai berikut.

(a) Gambar 2.2 (i) menunjukkan bahwa fungsi *f* memetakan A ke B, dapat ditulis *f*: A → B.

(b) Gambar 2.2 (ii) menunjukkan bahwa f^{-1} memetakan B ke A, dapat ditulis f^{-1}: B → A, dimana f^{-1} merupakan fungsi invers *f*

(c) Gambar 2.2 (iii) menunjukkan bahwa untuk nilai x = 50, maka akan dicari nilai $f(x)$

(d) Gambar 2.2 (iv) menunjukkan kebalikan dari Gambar 2.2 (iii), yaitu mencari nilai x jika diketahui nilai f(x) = 100.000.

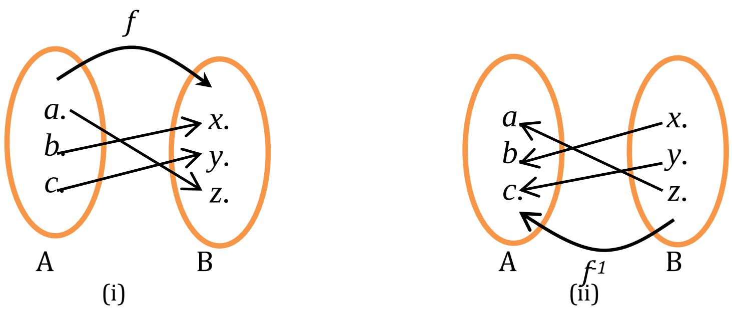
Dari contoh di atas, dapat dikatakan bahwa untuk mencari nilai x adalah merupakan pembahasan invers suatu fungsi.
Secara umum invers dari suatu fungsi dapat dijelaskansebagai berikut.
Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B dan misalkan untuk suatu $a \in A$ petanya adalah $(a) = b \in B$, maka invers dari b (dinyatakan dengan $f^{-1}(b)$) adalah elemen-elemen dalam A yang memiliki $b \in B$ sebagai petanya.
Secara singkat, jika $f : A \rightarrow$ B sedemikian hingga $f : x \rightarrow f\ (x)$ maka yang dimaksud dengan invers fungsi b adalah:

$$f^{-1}(b) = \{x | x \in A, f(x) = b\}$$

(Notasi f^{1} dibaca "*f* invers")

Contoh 2:

Misalkan $f: A \rightarrow B$ didefinisikan sebagaimana diagram panah berikut :



Gambar 2.3

Dari diagram (i):

$f(a) = z$
$f(b) = x$
$f(c) = y$

Dari diagram (ii):

$f^{1}(z) = a$
$f^{1}(x) = b$
$f^{1}(y) = c$

Jadi $f : A \rightarrow B$ adalah f={(a, z), (b, x), (c, y)} dan $f^{1} : B \rightarrow A$ adalah f^{1}={(x, b), (y, c), (z, a)}.

Fungsi Invers

Setelah Kalian mempelajari contoh 1 dan 2, Kalian sudah mendapat gambaran tentang invers suatu fungsi. Sekarang kita kembangkan pemahaman Kalian dengan mempelajari fungsi invers. Apakah yang dimaksud dengan invers suatu fungsi sama dengan fungsi invers? Untuk menjawab pertanyaan tersebut, Kalian perhatikan contoh berikut.
Fungsi $f: A \to B$ dengan $f = \{(x, y) | y = f(x), x \in A$ dan $y \in B\}$ didefinisikan dengan $y = f(x) = 2x$. Jika daerah asal (domain) $D_f = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\ldots\}$, maka daerah hasilnya (Range) adalah:
$f(-2) = 2.(-2)=-4$, $f(-1) = 2.(-1) = -2$, $f(0) = 2.0 = 0$, $f(1) = 2.1=2$, $f(2) = 2.2 = 4$, sehingga Range $R_f = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$.
Pasangan berurut dari fungsi f adalah f : {…, (-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4),…}
Inver dari fungsi f adalah $f^{-1}: B \to A$. Dari pasangan berurut fungsi f kita dapatkan daerah asal invers fungsi f, yaitu $D_{f^{-1}} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$
Daerah hasi $R_{f^{-1}}=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
Pasangan berurut invers fungsi f adalah f^{-1} : {…, (-4, -2), (-2, -1), (0, 0), (2, 1), (4, 2),…}

Coba Kalian amati pasangan berurut di atas, bahwa setiap dua unsur yang berbeda di dalam domain f dikawankan dengan dua unsur yang berbeda di dalam daerah kawan (kodomain) f. Sebagai contoh, x_1 = -2 dan x_2 = 2 dikawankan berturut turut dengan y_1 = -4 dan y_2 = 4. Invers dari fungsi ini akan menghubungkan dua unsur yang berbeda tersebut dengan dua unsur semula yang berbeda, yaitu -4 dengan -2 dan 4 dengan 2. Ini berarti relasi pada invers fungsi f merupakan relasi satu-satu, setiap unsur di dalam daerah asalnya dihubungkan dengan satu dan hanya satu unsur di dalam daerah hasil. Invers dari fungsi f memenuhi syarat sebagai sebuah fungsi, jadi f^{-1}disebut fungsi invers.

Sekarang Kalian amati fungsi g: C→ D dengan $g = \{(x, y) | y = g(x), x \in C$ dan $y \in D\}$ didefinisikan dengan $y = g(x) = x^2$. Jika daerah asal (domain) $D_f = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\ldots\}$, maka daerah hasilnya (Range) adalah:
$g(-2) = (-2)^2 = 4, g(-1) = (-1)^2 = 1, g(0) = 0^2 = 0, g(1) = 1^2 = 1, g(2) = 2^2 = 4$
Pasangan berurut fungsi g={…(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)…}.
Pasangan berurut invers dari fungsi g adalah g^{-1}={…,(4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2)}.

Kalau Kalian mengamati, Kalian bisa melihat bahwa ada unsur x di dalam domain g dikawankan dengan unsur y yang sama di dalam daerah kawan g. Contohnya, unsur 2 dan −2 keduanya dipetakan ke unsur yang sama, yaitu 4. Akibatnya, invers dari fungsi ini menghubungkan 4 dengan dua unsur yang berbeda, yaitu 2 dan −2.
$g(-2) = 4$, $g(2) = 4$ dan $g^{-1}(4) = -2$, $g^{-1}(4) = 2$. Invers dari fungsi ini tidak sesuai dengan aturan fungsi. Jadi, invers dari fungsi $g(x) = x^2$ bukan merupakan fungsi, tetapi hanya relasi saja. g^{-1} disebut invers dari fungsi g.

Dari contoh di atas dapat disimpulkan bahwa invers atau kebalikan dari fungsi, tidak selalu menghasilkan fungsi. Jika invers dari suatu fungsi merupakan fungsi juga, maka invers tersebut dinamakan fungsi invers. Syarat agar invers suatu fungsi merupakan fungsi invers jika dan hanya jika f suatu **fungsi bijektif (korespondensi satu-satu).**

Sifat 1:

Suatu fungsi f : A → B dikatakan memiliki fungsi invers f^{-1}: B → A jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi bijektif.

Dari Sifat 1 di atas, pada fungsi bijektif f: A → B, A merupakan daerah asal fungsi f dan B merupakan daerah hasil fungsi f. Secara umum, definisi fungsi invers diberikan sebagai berikut :

Definisi:

Jika fungsi f: $D_f \to R_f$ adalah fungsi bijektif, maka invers fungsi f adalah fungsi yang didefinisikan sebagai f^{-1}: $R_f \to D_f$ dengan kata lain f^{-1} adalah fungsi dari R_f ke D_f. D_f adalah daerah asal fungsi f dan Rf adalah daerah hasil fungsi f

Fungsi f: $D_f \to R_f$ adalah fungsi bijektif, jika $y \in R_f$ merupakan peta dari $x \in D_f$, maka hubungan antara y dengan $f(x)$ didefinisikan dengan $y = f(x)$. Jika f^{-1} adalah fungsi invers dari fungsi f, maka untuk setiap $x \in R_{f^{-1}}$ adalah peta dari $y \in D_{f^{-1}}$. Hubungan antara x dengan $f^{-1}(y)$ didefinisikan dengan rumus $x = f^{-1}(y)$

Menentukan Rumus Fungsi Invers.

Setelah memahami fungsi invers, pembahasan kita kembangkan dengan menentukan rumus fungsi invers. Coba Kalian amati masalah berikut:

Contoh 3:

Salah satu sumber penghasilan yang diperoleh klub sepak bola adalah hasil penjualan tiket penonton jika timnya sedang bertanding. Besarnya dana yang diperoleh bergantung kepada banyaknya penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut. Suatu klub memberikan informasi bahwa besar pendapatan yang diperoleh klub dari penjualan tiket penonton mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 20.000$, dengan x merupakan banyak penonton yang menyaksikan pertandingan.

a) Tentukanlah fungsi invers pendapatan dari tiket penonton klub sepak bola tersebut.
b) Jika dalam suatu pertandingan, klub memperoleh dana hasil penjualan tiket penonton sebesar Rp 5.000.000,00, berapa penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut?

Penyelesaian:

Diketahui fungsi pendapatan klub sepak bola tersebut adalah $f(x) = 500x + 20.000$.

(a) Invers fungsi pendapatan dari tiket penonton klub sepak bola
Untuk menentukan rumus fungsi invers $f(x)$ dapat dihitung sebagai berikut.
$y = f(x) = 500x + 20.000$
$y = 500x + 20.000$
$500x = y - 20.000$
$$x = \frac{y - 20.000}{500}$$

Karena $x = f^{-1}(y)$, maka $f^{-1}(y) = \frac{y-20.000}{500}$
Karena $f^{-1}(y) = \frac{y-20.000}{500}$, maka $f^{-1}(x) = \frac{x-20.000}{500}$
Jadi, fungsi invers dari $f(x) = 500x + 20.000$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{x-20.000}{500}$ atau
$$f^{-1} = \frac{1}{500}(x - 20.000)$$

(b) Jika dana hasil penjualan tiket penonton sebesar Rp 5.000.000,00, maka banyak penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut adalah
$f^{-1}(x) = \frac{x-20.000}{500}$
$$f^{-1}(5.000.000) = \frac{5.000.000 - 20.000}{500} = \frac{4.980.000}{500} = 9.960.$$

Jadi, penonton yang menyaksikan pertandingan sepak bola sebanyak 9.960 orang.
Berdasarkan alternatif penyelesaian Contoh 3 di atas, diperoleh sifat sebagai berikut.

Sifat 2:

Misalkan f^{-1} adalah fungsi invers fungsi f. Untuk setiap $x \in D_f$ dan $y \in R_f$, maka berlaku $y = f(x)$ jika dan hanya jika $f^{-1}(y) = x$

Untuk menentukan rumus fungsi invers dari fungsi f dapat dilakukan langkahlangkah:
1. memisalkan $f(x) = y$,
2. menyatakan x dalam y,
3. menentukan rumus dari $f^{-1}(x)$ dengan mengingat $f^{-1}(y) = x$ dan mengganti variabel y dengan x.

Contoh 4:

Diketahui f: R $\rightarrow$ R dengan f(x) = 2x - 5. Tentukan $f^{-1}(x)$!

Penyelsaian:

Karena y = f(x)m maka y = 2x - 5
y = 2x - 5 (yang berarti $x = f^{-1}(y)$)
2x = y + 5

$x = \frac{y+5}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

Contoh 5:

Diketahui f(x)=$\frac{2x+1}{x-4}$ Tentukan $f^{-1}(x)$!

Penyelesaian:

Karena y = f(x), maka y = $\frac{2x+1}{x-4}$

$y(x-4) = 2x+1$

$yx - 4y = 2x + 1$

$yx - 2x = 4y + 1$

$x(y-2) = 2y + 1$

$x = \dfrac{4y+1}{y-2}$

$f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{x-2}$

Contoh 6:

Jika $f(x) = \dfrac{2x}{3x-4}$, $x \in R$, $x \neq \dfrac{4}{3}$ dan $f^{-1}(k) = 1$. Tentukan nilai k!

Penyelesaian:

Misalkan *f(x) = y*,

$y = \dfrac{2x}{3x-4}$

$y(3x - 4) = 2x$

$3xy - 4y = 2x$

$3xy - 2x = 4y$

$x(3y - 2) = 4y$

$x = \dfrac{4y}{3y-2}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{4x}{3x-2}$

$f^{-1}(k) = \dfrac{4k}{3k-2}$

$1 = \dfrac{4k}{3k-2}$

$3k - 2 = 4k$

$k = -2$

Contoh 7:

Suatu fungsi f pada bilangan real ditentukan oleh rumus fungsi
$(x) = \frac{x-4}{2x+3}$
Tentukan domain dan kodomain f agar diperoleh fungsi invers f-1

Penyelesaian:
Dengan memperhatikan rumus fungsi f yang berupa fungsi pecah, maka domain dari fungsi f adalah: $Df = \{x|\ 2x + 3 \neq 0, x \in R\}$

$$= \left\{x | x \neq -\frac{3}{2}, x \in R\right\}$$

Untuk menentukan kodomainnya terlebih dulu dicari rumus inversnya,
Misalkan $f(x) = y$

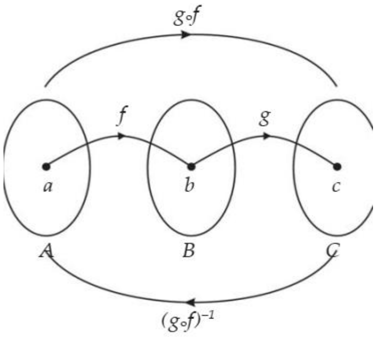
$y = \dfrac{x-4}{2x+3}$
$\leftrightarrow \frac{x-4}{2x+3} = y$
$\leftrightarrow x - 4 = y(2x+3)$
$\leftrightarrow\ x - 4 = 2yx + 3y$
$\leftrightarrow x - 2yx = 3y + 4$
$\leftrightarrow x(1-2y) = 3y + 4$
$\leftrightarrow x = \dfrac{3y+4}{1-2y}$
$\rightarrow\ f^{-1}(y) = \dfrac{3y+4}{1-2y}$
$\rightarrow\ f^{-1}(x) = \dfrac{3x+4}{1-2x}$

Syarat suatu fungsi memiliki fungsi invers apabila fungsi tersebut adalah bijektif, maka kodomain dari fungsi f adalah domain dari f^{-1}, sehingga kodomain dari f adalah

$$D_{f^{-1}} = \{x|1 - 2x \neq 0, x \in R\} = \left\{x | x \neq \frac{1}{2}, x \in R\right\}$$

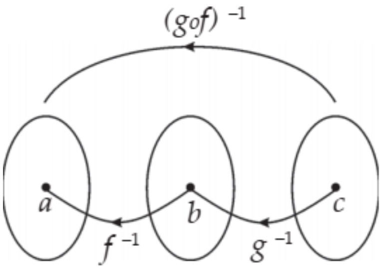
Invers dari Fungsi Komposisi

Setelah Kalian mempelajari fungsi komposisi dan fungsi invers dari suatu fungsi, pada pembahasan ini Kalian akan mempelajari mengenai fungsi invers dari fungsi komposisi. Untuk mempelajari lebih lanjut, perhatikan diagram panah berikut ini.



Gambar 2.4

Dari diagram di atas, dapat terlihat bahwa fungsi komposisi (gof) memetakan a ke c. Sedangkan fungsi invers dari gof, yaitu $(gof)^{-1}$ memetakan c ke a, atau dapat dinyatakan dengan $(gof)^{-1}\ (c) = a$.
Dalam hal ini, g^{-1} memetakan c ke b dan f^{-1} memetakan b ke a, seperti terlihat pada diagram berikut ini.



Gambar 2.5

Sehingga diperoleh $f^{-1}(g^{-1}) = f^{-1}$ (b) = a dengan $f^{-1}\ (g^{-1}\ (x)) = (f^{-1}\ o\ g^{-1})$ (c).
Untuk sembarang nilai x, secara umum dapat dikatakan bahwa:

$$(gof)^{-1}(x) = (f^{-1}og^{-1})(x)$$

Kalian dapat menentukan rumus invers fungsi dari fungsi komposisi dengan dua cara yaitu:

a. Menentukan dulu rumus fungsi komposisi, kemudian menentukan inversnya
b. Menentukan dulu inversnya masing–masing fungsi, kemudian dikomposisikan.

Contoh 8:

Diketahui $f = x - 7$ dan $g = 4x + 1$, tentukan $(f \circ g) -1(x)$ dengan dua cara di atas

Penyelesaian:

a. Menentukan dulu rumus fungsi komposisi, kemudian menentukan inversnya
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x + 1) = 4x + 1 - 7 = 4x - 6$
Misalkan $y = 4x - 6$.
$\Leftrightarrow 4x = y + 6$
$\Leftrightarrow x = \frac{y+6}{4}$
Jadi $(fog)^{-1}(x) = \frac{x+6}{4}$

b. Menentukan dulu inversnya masing–masing fungsi, kemudian dikomposisikan
$f(x) = x - 7 \rightarrow$ misalkan $y = x - 7$
$\Leftrightarrow x = y + 7$ sehingga $f^{-1}(x) = x + 7$.
$g(x) = 4x + 1 \rightarrow$ misalkan $y = 4x + 1$
$\Leftrightarrow 4x = y - 1$
$\Leftrightarrow x = \frac{y-1}{4}$ sehingga $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{4}$
$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$
$= g^{-1}(f^{-1}(x))$
$= g^{-1}(x + 7)$
$= \frac{(x+7)-1}{4} = \frac{x+6}{4}$
Jadi $(fog)^{-1}(x) = \frac{x+6}{4}$

Contoh 9:

Diketahui fungsi f(x) = 2x – 3 dan g(x) = $\frac{1}{3x+1}$, $x \neq -\frac{1}{3}$. Tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$!

Penyelesaian:

$(f \circ g)(x) = 2\left(\frac{1}{3x+1}\right) - 3 = \frac{2 - 3(3x+1)}{3x+1} = \frac{-9x-1}{3x+1}$
Misalkan $y = (f \circ g)(x)$
$y = \frac{-9x-1}{3x+1}$
$y(3x+1) = -9x - 1$
$3xy + y = -9x - 1$
$3xy + 9x = -y - 1$
$x(3y + 9) = -(y + 1)$
$x = \frac{-(y+1)}{3y+9}$
$(f \circ g)^{-1}(x) = -\frac{x+1}{3x+9}$

Contoh 10:

Ditentukan f(x) = 2x – 1, g(x) = 3 – x dan h(x) = $\frac{4}{x}, x \neq 0$, carilah nilai x sehingga $(hogof)^{-1}(x) = 1$!

Penyelesaian:

$(gof)(x)$= 3 – (2x – 1) = 4 – 2x

$\big(ho(gof)\big)(x)$ = $\frac{4}{4-2x}$

Misalkan $\big(ho(gof)\big)(x)$ = y, maka:

y = $\frac{4}{4-2x}$

4y – 2xy = 4

-2xy = 4 – 4y

x = $\frac{4-4y}{-2y} = \frac{2y-2}{y}$

$\big(ho(gof)\big)^{-1}(x)$ (x) = $\frac{2x-2}{x}$

$\frac{2x-2}{x}$ = 1

2x – 2 = x

x = 2

Contoh 11:

Ditentukan $f(x) = \frac{2x}{3-x}$, dengan $x \neq 3$. Tentukan:

a. $f^{-1}(x)$
b. $(fof^{-1})(x)$ dan $(f^{-1}of)(x)$

Penyelesaian:

a. $f(x) = \frac{2x}{3-x}$, misal y = *f(x)*

$y = \frac{2x}{3-x} \leftrightarrow y(3-x) = 2x$

$\leftrightarrow 3y - yx = 2x$

$\leftrightarrow 3y = yx + 2x = x(y+2)$

$\leftrightarrow x(y+2) = 3y$

$\leftrightarrow x = \frac{3y}{y+2}$

Jadi $f^{-1}(x) = \frac{3x}{x+2}$

b. $(fof^{-1})(x) = \frac{2(\frac{3x}{x+2})}{3-\frac{3x}{x+2}} = \frac{\frac{6x}{x+2}}{\frac{3(x+2)}{(x+2)}-\frac{3x}{x+2}} = \frac{\frac{6x}{x+2}}{\frac{3x+6-3x}{x+2}} = \frac{\frac{6x}{x+2}}{\frac{6}{x+2}} = \frac{6x}{6} = x$

$(f^{-1}of)(x) = \frac{3\frac{2x}{3-x}}{\frac{2x}{3-x}+2} = \frac{\frac{6x}{3-x}}{\frac{2x}{3-x}+\frac{2(3-x)}{3-x}} = \frac{\frac{6x}{3-x}}{\frac{6}{3-x}} = \frac{6x}{6} = x$

Pada pembahasan sebelumnya I(x) = x di sebut fungsi identitas.
Dari contoh di atas f^{-1} fungsi invers dari f berlaku $(fof^{-1})(x) = (fof^{-1})(x) = I(x)$

Menetukan Rumus Invers Fungsi Kuadrat.

Coba Kalian simak masalah berikut.
Diketahui $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tentukan $f^{-1}(x)$!

Penyelesaiaan:
Misal f(x) = y
$y = ax^2 + bx + c \leftrightarrow ax^2 + bx = y - c$ (kedua ruas datambah (-c))

$\leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{y-c}{a}$ (Kedua rua dikali $\frac{1}{a}$)

$\leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

(kedua ruas ditambah $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ agar ruas kiri bisa membentuk kuadrat sempurna)

$\leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{y-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$\leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{y-c}{a} + \frac{b^2}{4a}$

$\leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{4a(y-c)}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$

$\leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{4ay-4ac+b^2}{4a^2}$

$\leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{4ay+b^2-4ac}{4a^2}$

$\leftrightarrow (x + \frac{b}{2a}) = \pm\sqrt{\frac{4ay+b^2-4ac}{4a^2}}$

$\leftrightarrow (x + \frac{b}{2a}) = \pm\frac{1}{2a}\sqrt{4ay + b^2 - 4ac}$

$\leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{4ay + b^2 - 4ac}$

$\leftrightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{4ay+b^2-4ac}}{2a}$

Jadi $f^{-1}(x) = x = \frac{-b\pm\sqrt{4ay+b^2-4ac}}{2a}$

Catatan:
$f^{-1}(x) = x = \frac{-b\pm\sqrt{4ay+b^2-4ac}}{2a}$ akan menjadi fungsi invers jika dibatasi $x \geq -\frac{-b}{2a}$

Rumus Umum Invers Fungsi dalam Bentuk Akar.

Contoh 12:
Tentukan invers dari $f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$

Penyelesaian :
Misal $f(x) = y$ maka dapat dijabarkan $y = \sqrt[n]{ax+b}$

$\leftrightarrow y = \sqrt[n]{ax+b} = (ax+b)^{\frac{1}{n}}$
$\leftrightarrow y^n = ax+b$ (Kedua ruas dipangkatkan dengan n)
$\leftrightarrow ax = y^n - b$ (Kedua ruas ditambah dengan –b)
$\leftrightarrow x = \frac{y^n-b}{a}$
$\leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y^n-b}{a}$
$\leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^n-b}{a}$
Jadi jika $f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$, maka $f^{-1}(x) = \frac{x^n-b}{a}$

C. Rangkuman

1. Pengertian Fungsi Invers:
   Jika fungsi $f : A \rightarrow B$ yang mempunyai peta $f(a) = b$ maka invers f adalah fungsi $g : B \rightarrow A$ dengan peta $g(b) = a$.
2. Teorema fungsi invers:
   Bila $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi bijektif maka invers fungsi f yaitu $f^{-1} : B \rightarrow A$ juga merupakan fungsi bijektif
3. Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi
   - $(gof)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$
   - $(hogof)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1})(x)$
4. Jika $f(x) = ax^2 + bx + c$, maka $f^{-1}(x) = x = \frac{-b\pm\sqrt{4ay+b^2-4ac}}{2a}$ akan menjadi fungsi invers jika dibatasi $x \geq -\frac{-b}{2a}$
5. Jika $f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$, maka $f^{-1}(x) = \frac{x^n-b}{a}$

D. Latihan Soal

Untuk meningkatkan pemahaman, coba Kalian kerjakan latihan soal berikut, kemudian cocokkan jawaban Kalian dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Jangan melihat kunci dulu sebelum Kalian mengerjakan.

1. Diketahui $f(x) = \frac{5x-3}{x+2}$, $x \neq -2$ dan $g(x) = 6x - 2$, tentukan:
   a. $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$
   b. $(fog)^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$

2. Diketahui (x) = 3x + 2 dan $(gof)(x)$ = 6x - 4 . Tentukan
   a. $g^{-1}(x)$
   b. Nilai $g^{-1}(2)$
3. Diketahui f(x) = 4x^2 – 16x + 25, $x \in R$. Tentukan:
   a. $f^{-1}(x)$
   b. Syarat agar $f^{-1}(x)$ menjadi fungsi invers.
4. Tentukan invers dari:
   a. $f(x) = \sqrt{x+6}$
   b. $\sqrt[3]{2x-5}$
5. Jumlah produksi makanan ringan dari suatu pabrik per hari mengikuti fungsi f(x) = x^2 + 300 dengan x adalah banyaknya bahan baku yang diperlukan (dalam kg)

   a. Tentukan banyaknya makanan ringan yang dapat dihasilkan dari bahan baku sebanyak 50kg.
   b. Tentukan banyaknya bahan baku yang dibutuhkan untuk menghasilkan makanan ringan sebanyak 10.300 buah

Pembahasan Latihan Soal

NO	PEMBAHASAN	Skor
1	$f\ (x) = \frac{5x-3}{x+2}$, x ≠ -2 dan $g\ (x)$ = 6x – 2 a. Misal *f(x) = y* → y = $\frac{5x-3}{x+2}$ y = $\frac{5x-3}{x+2}$↔y(x + 2) = 5x – 3 ↔yx + 2y = 5x – 3 ↔yx – 5x = -2y - 3 ↔5x - yx = 2y + 3 (Kedua ruas dikali (-1) ↔x(5 - y) = 2y + 3 $\leftrightarrow x = \frac{2y+3}{5-y}$ $\leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{2y+3}{5-y}$ $\leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{5-x}$ Jadi $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{5-x}$	5
	Misal g(x) = y →y = 6x – 2 y = 6x – 2 ↔6x = y + 2 $\leftrightarrow x = \frac{y+2}{6}$ $\leftrightarrow g^{-1}(y) = \frac{y+2}{6}$ $\leftrightarrow g^{-1}(x) = \frac{x+2}{6}$ Jadi $g^{-1}(x) = \frac{x+2}{6}$	5
	$b. (fog)^{-1}(x)$ dan $(gof)^{-1}(x)$ Cara 1. $(fog)^{-1}(x)$=$(g^{-1}of^{-1})(x)$ $= \frac{\frac{2x+3}{5-x}+2}{6} = \frac{\frac{2x+3}{5-x}+\frac{2(5-x)}{5-x}}{6}$ $=\frac{\frac{2x+3+10-2x}{5-x}}{6} = \frac{13}{6(5-x)} = \frac{13}{30-6x}$=-$\frac{13}{6x-30}$ Jadi $(fog)^{-1}(x)$ =-$\frac{13}{6x-30}$	5
	$(gof)^{-1}(x) = (f^{-1}og^{-1})(x)$ $= \frac{2\left(\frac{x+2}{6}\right)+3}{5-\frac{x+2}{6}} = \frac{\frac{2x+4}{6}+\frac{3.6}{6}}{\frac{5.6}{6}-\frac{x+2}{6}}$ $= \frac{\frac{2x+4+18}{6}}{\frac{30-(x+2)}{6}} = \frac{\frac{2x+22}{6}}{\frac{30-x-2}{6}} = \frac{\frac{2x+22}{6}}{\frac{28-x}{6}} = \frac{2x+22}{28-x}$ Jadi $(gof)^{-1}(x) = \frac{2x+22}{28-x}$	5

	Cara 2. (fog)(x) = f(g(x)) =$\frac{5(6x-2)-3}{(6x-2)+2} = \frac{30\,x-13}{6x}$ Misal f(x) = y $y = \frac{30x-13}{6x} \leftrightarrow 6x.y = 30x - 13$ $\leftrightarrow 6xy - 30x = -13$ $\leftrightarrow x(6y-30) = -13$ $\leftrightarrow x = \frac{-13}{6y-30}$ $\leftrightarrow (fog)^{-1}(y) = \frac{-13}{6y-30}$ $\leftrightarrow (fog)^{-1}(x) = \frac{-13}{6x-30}$ = -$\frac{13}{6x-30}$ Jadi$(fog)^{-1}(x) =$ -$\frac{13}{6x-30}$ (gof)(x) = 6 $\frac{5x-3}{x+2} - 2 = \frac{30x-18}{x+2} - 2(\frac{x+2}{x+2})$ $= \frac{30x-18}{x+2} - \frac{2x+4}{x+2} = \frac{30x-18-2x-4}{x+2} = \frac{28x-22}{x+2}$ Misal (gof)(x) = y $y = \frac{28x-22}{x+2} \leftrightarrow y(x+2) = 28x - 22$ $\leftrightarrow yx + 2y = 28x - 22$ $\leftrightarrow yx - 28x = -2y - 22$ $\leftrightarrow x(y - 28) = -(2y + 22)$ $\leftrightarrow x = \frac{-(2y+22)}{y-28} = \frac{2y+22}{28-y}$ $\leftrightarrow (gof)^{-1}(y) = \frac{2y+22}{28-y}$ $\leftrightarrow (gof)^{-1}(x) = \frac{2x+22}{28-x}$ Jadi $(gof)^{-1}(x) = \frac{2x+22}{28-x}$	
2	$f(x) = 3x + 2$ dan $(gof)(x) = 6x - 4$ $(gof)(x) = g(f(x)) = 6x - 4$ $g(3x+2) = 6x - 4$ $g(3x+2) = 2(3x+2) - 8$ $g(x) = 2x - 8$ a. Misal g(x) = y $y = 2x - 8 \leftrightarrow y + 8 = 2x$ $\leftrightarrow 2x = y + 8$ $\leftrightarrow x = \frac{y+8}{2}$ $\leftrightarrow g^{-1}(y) = \frac{y+8}{2}$ $g^{-1}(x) = \frac{x+8}{2}$ b. $g^{-1}(2) = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$	8 8 4

3.	f(x) = 4x² – 16x + 25=4(x² – 4x) + 25 = 4(x² – 4x + 4 - 4) + 25 (ditambahkan 0 = 4 – 4) = 4(x² – 4x + 4) – 16 + 25 (4 x (-4) di keluarkan agar di dalam kurung berbentuk kuadrat sempurna) = 4(x² – 4x + 4) + 9 a. Misal f(x) = y → y = 4(x² – 4x + 4) + 9 = 4(x – 2)² + 9 ↔y – 9 = (x – 2)² ↔(x – 2)² = y – 9 ↔x – 2 = $\pm\sqrt{y-9}$ ↔x =3 $\pm\sqrt{y-9}$ ↔*f⁻¹ (y)* =3 $\pm\sqrt{y-9}$ ↔*f⁻¹ (x)* =3 $\pm\sqrt{x-9}$ Jadi: *f⁻¹ (x)* =3 $\pm\sqrt{x-9}$ b. Agar *f⁻¹ (x)* =3 $\pm\sqrt{x-9}$ menjadi fungsi invers maka daerah asal harus dibasi $x-9 \geq 0 \rightarrow x \geq 9$	6 10 4
4	a. $f(x) = \sqrt{x+6}$ Menggunakan rumus $f(x) = \sqrt[n]{ax+b}, \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^n-b}{a}$ $f^{-1}(x) = \frac{x^n-b}{a} = \frac{x^2-6}{1} = x^2-6$ b. $f(x) = \sqrt[3]{2x-5}$ $= \frac{x^n-b}{a} = \frac{x^3-(-5)}{2} = \frac{x^3+5}{2} = \frac{1}{2}(x^3+5)$	10 10
5	Jumlah produksi makanan ringan dari suatu pabrik per hari mengikuti fungsi f(x) = x² + 300 a. Jumlah produksi yang dihasilkan jika banyak bahan baku 50 kg. f(50) = (50)² + 300 = 2.500 + 300 = 2.800. Jadi jumlah produksi yang dihasilkan dengan bahan baku sebanyak 50 kg adalah 2.800 buah. b. Banyaknya bahan baku yang dibutuhkan untuk memproduksi sebanyak 10.300 buah adalah: f(x) = x² + 300 f(x) = 10.300 x² + 300 = 10.300 x² = 10.000 x = $\pm\sqrt{10.000} = \pm 100$ Jadi banyak bahan baku yang diburuhkan untuk	6 4 6

	memproduksi makanan kecil sejumlah 10.300 adalah 100 kg.	4
	Skor maksimum	**100**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan= $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum} x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka Kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom "Ya" jika Kalian mampu dan "Tidak" jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Saya sudah memahami tentang invers dari sebuah fungsi		
2.	Saya sudah dapat menentukan rumus invers dari sebuah fungsi		
3.	Saya sudah memahami invers yang merupakan fungsi invers		
4.	Saya sudah rumus invers komposisi fungsi..		

EVALUASI

1. Diketahui $f : R \to R$, $g : R \to R$ dirumuskan oleh $f(x) = x^2 - 4$ dan $g(x) = 2x - 6$. Jika $(fog)(x) = -4$, nilai $x = ...$
   A. -6 B. -3 C. 3 D. 3 atau -3 E. 6 atau -6

2. Jika $g(x) = x + 3$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 - 4$, maka $f(x-2) = ...$
   A. $x^2 - 6x + 5$ C. $x^2 - 10x + 21$ E. $x^2 + 10x + 21$
   B. $x^2 + 6x + 5$ D. $x^2 - 10x - 21$

3. Diketahui $(fog)(x) = \dfrac{2x-3}{x+4}; x \neq -4$ dan $g(x) = 1 - x$, maka $f(x) = ...$
   A. $\dfrac{1-x}{x+4}; x \neq -4$ C. $\dfrac{7-x}{x+4}; x \neq -4$ E. $\dfrac{3x+1}{x+4}; x \neq -4$
   B. $\dfrac{2x+1}{x-5}; x \neq 5$ D. $\dfrac{2x-1}{x+5}; x \neq -5$

4. Dari fungsi f dan g diketahui $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ dan $g(x) = 3x - 2$. Supaya $(gof)(a) = -11$, nilai a yang positif adalah ...
   A. $2\frac{1}{2}$ B. $1\frac{1}{6}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{1}{6}$

5. Fungsi $f : R \to R$ dan $g : R \to R$ dinyatakan oleh $f(x) = x + 2$ dan $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x + 1$, maka $g(2x) = ...$
   A. $2x^2 - 4x + 1$ C. $8x^2 - 8x + 1$ E. $4x^2 - 8x + 1$
   B. $2x^2 - 12x + 1$ D. $8x^2 + 8x + 1$

6. Diketahui $f(x) = x^2 + 1$ dan $g(x) = 2x - 3$, maka $(fog)(x) = ...$
   A. $4x^2 - 12x + 10$ C. $4x^2 - 12x - 10$ E. $-4x^2 + 12x + 10$
   B. $4x^2 + 12x + 10$ D. $4x^2 + 12x - 10$

7. Jika $f(x) = x^2 - 3x - 4$ dan $g(x) = 2x + 3$, dan $f : R \to R$, $g : R \to R$, maka $(fog)(x)$ adalah ....
   A. $4x^2 + 6x - 4$ C. $2x^2 - 6x - 5$ E. $4x^2 + 9x + 5$
   B. $4x^2 - 6x - 4$ D. $2x^2 + 6x - 5$

8. Diketahui fungsi-fungsi $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = 2^x$, maka ....
   A. $(fog)(x) = 2x^2 - 1$ C. $(foh)(x) = 4^x$ E. $(hog)(x) = 2x^2 - 1$
   B. $(gof)(x) = 4x^2 - 1$ D. $(hof)(x) = 4^{2x}$

9. Diketahui fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ didefinisikan dengan $(x) = -x + 3$ dan $(fog)(x) = 4x^2 - 26x + 32$ maka nilai $f(1)$ adalah ... .
   A. – 5 B. -4 C. -3 D. 3 E. 4

10. Suatu penggilingan padi dapat memproduksi beras super melalui dua tahap. Tahap pertama menggunakan mesin I yang menghasilkan beras setengah jadi berupa pelepasan kulit padi. Tahap kedua dengan menggunakan mesin II yang menghasilkan beras super. Dalam produksinya, mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi $(x) = x - 0{,}175$ dan mesin II mengikuti fungsi $g(x) = x - 0{,}125$ dengan x merupakan banyak bahan dasar padi dalam satuan kg. Jika bahan dasar padi yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 5 ton, berapakah beras super yang dihasilkan dalam kwintal?
    A. 4999,825 kg　C. 5000 kg　E. 79,997 kwintal
    B. 4999,7 kg　D. 49,998 kwintal
11. Invers dari fungsi $f(x)=\dfrac{3x-2}{5x+8};\ x\neq -\dfrac{8}{5}$ adalah $f^{-1}(x)=....$
    A. $\dfrac{-8x+2}{5x-3}$　C. $\dfrac{8x-2}{3+5x}$　E. $\dfrac{-8x+2}{3-5x}$
    B. $\dfrac{8x-2}{5x+3}$　D. $\dfrac{8x+2}{3-5x}$
12. Diketahui $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$, $x\neq 3$. Jika f^{-1} adalah invers fungsi f, maka $f^{-1}(x-2) = ...$
    A. $\dfrac{x+1}{x-2}, x\neq 2$　C. $\dfrac{2x-2}{x+1}, x\neq -1$　E. $\dfrac{x+1}{x-3}, x\neq 3$
    B. $\dfrac{2x-3}{x-5}, x\neq 5$　D. $\dfrac{3x-5}{x-4}, x\neq 4$
13. Fungsi $f: R\to R$ dan $g: R\to R$ ditentukan oleh $f(x)=3x-2$ dan $g(x)=x+5$. Rumus untuk $(gof)^{-1}(x)$ adalah ....
    A. $3x+1$　C. $\dfrac{1}{3}x-1$　E. $\dfrac{1}{3}x-3$
    B. $3x-1$　D. $\dfrac{1}{3}x+1$
14. Diketahui $f(x)=x+4$ dan $g(x)=2x$, maka $(fog)^{-1}(x)=....$
    A. $2x+8$　C. $\dfrac{1}{2}x-8$　E. $\dfrac{1}{2}x-2$
    B. $2x+4$　D. $\dfrac{1}{2}x-4$
15. Fungsi $f: R\to R$ didefinisikan sebagai $f(x)=\dfrac{3x+4}{2x-1}, x\neq \dfrac{1}{2}$. Invers dari fungsi f adalah $f^{-1}(x)$. Nilai dari $f^{-1}(-1)=....$
    A. -3　B. $-\dfrac{3}{5}$　C. 7　D. $-\dfrac{5}{3}$　E. 3
16. Fungsi $f: R\to R$ dan $g: R\to R$ ditentukan dengan $f(x)=x^{-1}, x\neq 0$ dan $f(g(x))=\dfrac{x-3}{2x}, x\neq 0, x\neq 3$, maka $g^{-1}(x)=....$

A. $\frac{x-3}{2x}$ C. $\frac{2x}{x-3}$ E. $\frac{3}{2x-1}$

B. $\frac{3x}{x-2}$ D. $\frac{3x}{x+2}$

17. Jika fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ ditentukan $f(x) = x^3$ dan $g(x) = 3x - 4$, maka $\left(g^{-1} o f^{-1}\right)(8) = \ldots.$

A. 1 B. 2 C. $3\frac{1}{3}$ D. $4\frac{2}{3}$ E. $5\frac{1}{3}$

18. Fungsi berikut yang tidak memiliki fungsi invers adalah ….
    A. y = x +1
    B. $y = x^3$
    C. y = log x
    D. $y = x^2 + 1000$
    E. y = 1 – 100 x

19. Diketahui $f(x) = 3 + 2x$, $g(x) = 2 + x$, dan $h(x) = 2x$. Bila $(f \circ g \circ h)^{-1}(x) = -1$, maka nilai x adalah …..

A. 5 B. 3 C. 2 D. –3 E. –5

20. Dikatahui $\boldsymbol{f(x)} == \frac{1-5x}{x+2}, x \neq -2$ dan $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ adalah invers dari $\boldsymbol{f(x)}$. Nilai $\boldsymbol{f^{-1}}$ (–3) = …

A. $\frac{4}{3}$ B. 2 C. $\frac{5}{2}$ D. 3 E. $\frac{7}{2}$

Kunci Jawaban Evaluasi.

No.	kunci	Uraian	Skor
1	C	$(fog)(x) = -4$ $f(g(x)) = -4$ $f(2x-6) = -4$ $(2x-6)^2 - 4 = -4$ $(2x-6)^2 = 0$ $2x - 6 = 0$ $x = 3$ Jadi, nilai $x = 3$.	**1**
2	C	$(f \text{ o } g)(x) = x^2 - 4$ $f(g(x)) = x^2 - 4$ $f(x+3) = x^2 - 4$ $f(x+3) = (x+3)^2 - 6x - 13$ $f(x+3) = (x+3)^2 - 6(x+3) + 5$ $f(x) = x^2 - 6x + 5$ $f(x-2) = (x-2)^2 - 6(x-2) + 5$ $= x^2 - 4x + 4 - 6x + 12 + 5$ $= x^2 - 10x + 21$	**1**
3	B	$(fog)(x) = \frac{2x-3}{x+4}$ $f(g(x)) = \frac{2x-3}{x+4}$ $f(1-x) = \frac{2(1-x)-3}{1-x+4} = \frac{-2x-1}{-x+5} = \frac{2x+1}{x-5}; x \neq 5$	**1**
4	D	$(g \text{ o } f)(a) = -11$ $g(f(a)) = -11$ $g(2a^2 + 3a - 5) = -11$ $3(2a^2 + 3a - 5) - 2 = -11$ $6a^2 + 9a - 15 - 2 = -11$ $2a^2 + 3a - 2 = 0$ $(2a - 1)(a + 2) = 0$ $a = \frac{1}{2}$ atau $a = -2$ Jadi, nilai a yang positif adalah $\frac{1}{2}$.	**1**
5	C	$(g \text{ o } f)(x) = 2x^2 + 4x + 1$ $g(f(x)) = 2x^2 + 4x + 1$ $g(x + 2) = 2x^2 + 4x + 1$	**1**

		$= 2\ (x + 2\ )^2 - 4\ x - 7$ $= 2\ (x + 2)^2 - 4\ (x + 2) + 1$ $g\ (2x)\ = 2\ (2x)^2 - 4\ (2x) + 1 = 8\ x^2 - 8x + 1$ **Alternatif 2:** $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x + 1$ $g\ (x + 2) = 2x^2 + 4x + 1$ Misalnya $x + 2 = y$, maka $x = y - 2$, sehingga $g\ (y) = 2\ (y - 2)^2 + 4\ (y - 2\ ) + 1\ = 2\ y^2 - 4y + 1$ $g\ (2x) = 2\ (2x)^2 - 4\ (2x) + 1\ = 8x^2 - 8x + 1$	
6	A	$(fog)(x) = f(g(x))$ $= f(2x-3)$ $= (2x-3)^2 + 1$ $= 4x^2 - 12x + 10$	**1**
7	**A**	$(fog)(x) = f(g(x))$ $= f(2x+3)$ $= (2x+3)^2 - 3(2x+3) - 4$ $= 4x^2 + 6x - 4$	**1**
8	B	A. $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2-1) = 2(x^2-1) = 2x^2 - 2$. B. $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 - 1 = 4x^2 - 1$. C. $(foh)(x) = f(h(x)) = f(2^x)\ = 2 \times 2^x = 2^{x+1}$. D. $(hof)(x) = h(f(x)) = h(2x) = 2^{2x} = 4^x$. E. $(hog)(x) = h(g(x)) = h(x^2-1) = 2^{x^2-1}$, Jadi, pernyatan yang benar adalah B.	
9	**E**	$(\ f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4x^2 - 26x + 32$ $f(-x + 3) = 4x^2 - 26x + 32$ $= 4(-x + 3\ )^2 + 2(-x + 3) - 2$ Dari bentuk persamaan $f(-x + 3) = 4(-x + 3\ )^2 + 2(-x + 3) - 2$ ini berarti $f(x) = 4x^2 + 2x - 2$ mengakibatkan $f(1) = 4.1^2 + 2.1 - 2 = 4$ Jadi $(f)(1) = 4$	**1**
10.	**E**	• Fungsi tahap I adalah $(x) = x - 0{,}175$. Untuk $x = 5000$, diperoleh: $f(x) = x - 0{,}175$ $= 5000 - 0{,}175$ $= 4999{,}825$	**1**

		Hasil produksi tahap I adalah 4999,825 kg beras setengah jadi • Fungsi tahap I adalah $(x) = x - 0{,}175$. Untuk $x = 4999{,}825$, diperoleh: $g(x) = x - 0{,}125$ $= 4999{,}825 - 0{,}125$ $= 4999{,}7$ Hasil produksi tahap II adalah 4999,7 kg beras super. Jadi beras super yang dihasilkan adalah 49,997 kwintal	
11	**D**	$f(x) = \frac{3x-2}{5x+8}$ $x = \frac{3y-2}{5y+8}$ $5xy + 8x = 3y - 2$ $5xy - 3y = -8x - 2$ $(5x-3)y = -8x - 2$ $y = \frac{-8x-2}{5x-3}$ $y = \frac{8x+2}{3-5x}$ Jadi, $f^{-1}(x) = \frac{8x+2}{3-5x}$	**1**
12	**D**	$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ $x = \frac{2y+1}{y-3}$ $xy - 3x = 2y + 1$ $(x-2)\,y = 3x + 1$ $y = \frac{3x+1}{x-2}$ $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ $f^{-1}(x-2) = \frac{3(x-2)+1}{(x-2)-2} = \frac{3x-5}{x-4}$	**1**

13	**C**	$(gof)(x)=g(f(x))$ $=g(3x-2)$ $=3x-2+5$ $=3x+3$ $x=3y+3$ $y=\frac{x-3}{3}$ $(gof)^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-1$	**1**
14	**E**	$(fog)(x)=f(g(x))$ $=f(2x)$ $=2x+4$ $x=2y+4$ $y=\frac{1}{2}x-2$ $(fog)^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-2$	**1**
15	**B**	$f(x)=\frac{3x+4}{2x-1}$ $x=\frac{3y+4}{2y-1}$ $2xy-x=3y+4$ $(2x-3)y=x+4$ $y=\frac{x+4}{2x-3}$] $f^{-1}(x)=\frac{x+4}{2x-3}$ $f^{-1}(-1)=\frac{-1+4}{2(-1)-3}=-\frac{3}{5}$	**1**
16.	**C**	$f(g(x))=\frac{x-3}{2x}$ $\frac{1}{g(x)}=\frac{x-3}{2x}$ $g(x)=\frac{2x}{x-3}$	**1**
17	**B**	$f(x)=x^3$ $x=y^3$ $y=\sqrt[3]{x}$	**1**

		$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ $g(x)=3x-4$ $x=3y-4$ $y=\frac{1}{3}(x+4)$ $g^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x+4)$ $(g^{-1}of^{-1})(8)=g^{-1}(f^{-1}(8))$ $=g^{-1}(\sqrt[3]{8})$ $=g^{-1}(2)$ $=\frac{1}{3}(2+4)=2$	
18	**D**	A. y = x +1→y^{-1} = f^{-1}(x) =x – 1 Untuk $x_1 \neq x_2 \to f^{-1}(x_1) \neq f^{-1}(x_2)$ Jadi y^{-1} = x -1 merupakan fungsi. B. y = x^3 → $y^{-1} = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ Untuk $x_1 \neq x_2 \to f^{-1}(x_1) \neq f^{-1}(x_2)$ Jadi $y^{-1} = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ merupakan fungsi C. y = log x→ $y^{-1} = f^{-1}(x) = 10^x$ Untuk $x_1 \neq x_2 \leftrightarrow f^{-1}(x_1) \neq f^{-1}(x_2)$ Jadi $y^{-1} = f^{-1}(x) = 10^x$ merupakan fungsi D. y = x^2 + 1000 → $y^{-1} = f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-100}$ Untuk $x_1 \neq x_2$ ada $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ Jadi $y^{-1} = f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-100}$ bukan fungsi E. y = 1 – 100 x → $y^{-1} = f^{-1}(x) = \frac{1-x}{100}$ Untuk $x_1 \neq x_2 \leftrightarrow f^{-1}(x_1) \neq f^{-1}(x_2)$ Jadi $y^{-1} = f^{-1}(x) = \frac{1-x}{100}$ merupakan fungsi	**1**
19	**A**	$f(x) = 3 + 2x$, $g(x) = 2 + x$, dan $h(x) = 2x$. (fogoh)(x) =f(g(h(x))) =f(2 + 2x) = 3 + 2(2 + 2x) = 7 + 2x Misal : (fogoh)(x) = y	**1**

		y = 7 + 2x → y – 7 = 2x 2x = y – 7 → x = $\frac{y-7}{2}$ $(fogoh)^{-1}(x) = \frac{x-7}{2}$ $(fogoh)^{-1}(x) = -1 \leftrightarrow \frac{x-7}{2} = -1$ **↔ x – 7 = -2** **↔ x = 5**	
20	**E**	Dikatahui $\boldsymbol{f(x)} = \frac{1-5x}{x+2}, x \neq -2$ $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{-2x+1}{x+5}}$ Nilai $\boldsymbol{f^{-1}}$ $(-3) = \frac{\boldsymbol{-2(-3)+1}}{\boldsymbol{(-3)+5}} = \frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{2}}$	**1**
		Skor Maksimum	**20**
		Nilai: $\frac{jumlah\ skor}{skor\ maksimum} x\ 100$	

DAFTAR PUSTAKA

Kemdikbud. 2017. Matematika Kelas X. Jakarta : Puskurbuk.

Kemdikbud. 2019. Paket Unit Pembelajaran Matematika Aljabar 2. Jakarta. Dirjen Guru dan Tenaga Kependidikan. Kementerian Pendidikan Nasional.

Lestari, Sri. 2009. Matematika 2. Jakarta: pusat Perbukuan. Depatemen Pendidikan Nasional

Markaban. 2004. Fungsi, Persamaan dan Pertidaksamaan. Yogyakarta. PPPG Matematika.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum

KELAS X

RASIO TRIGONOMETRI

MATEMATIKA UMUM KELAS X

PENYUSUN
Entis Sutisna, S.Pd.

SMA Negeri 4 Tangerang

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Perbandingan sinus : Perbandingan sisi dihadapan sudut dengan hipotenusa.

Perbandingan cosinus : Perbandingan sisi disamping sudut dengan hipotenusa.

Perbandingan tangen : Perbandingan sisi dihadapan sudut dengan sisi disamping sudut.

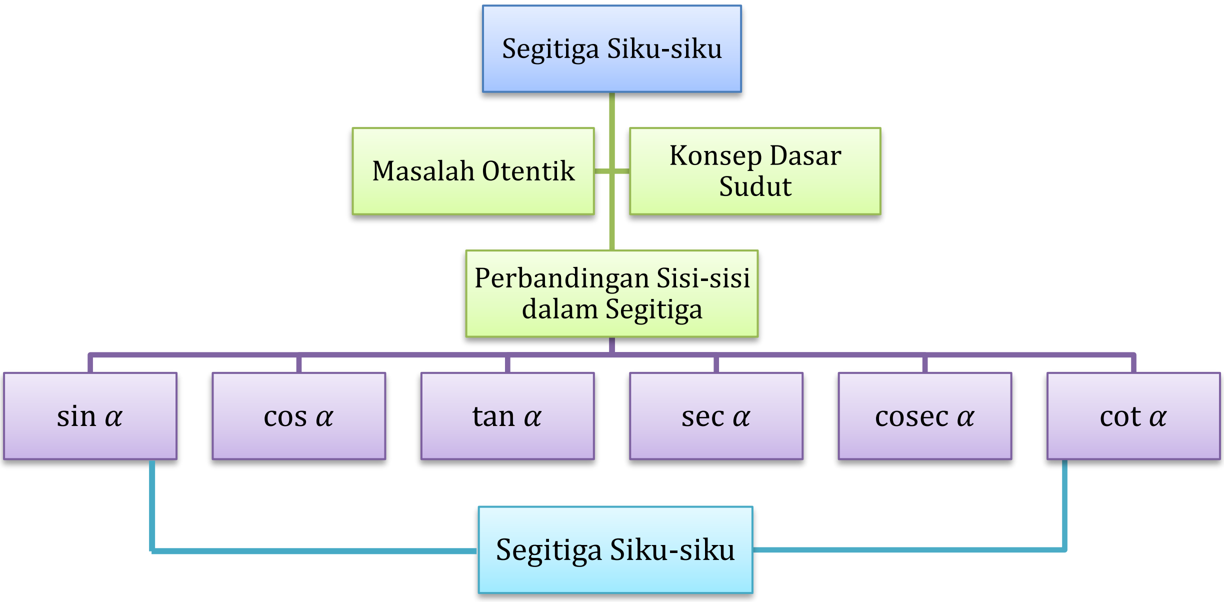
Perbandingan cosecan : Perbandingan hipotenusa dengan sisi dihadapan sudut.

Perbandingan secan : Perbandingan hipotenusa dengan sisi disamping sudut.

Perbandingan cotangen : Perbandingan sisi disamping sudut dengan sisi dihadapan sudut.

Sudut istimewa : Sudut tertentu yang nilai perbandingan trigonometrinya dapat dicari tanpa memakai tabel matematika atau kalkulator.

PETA KONSEP


Segitiga Siku-siku
Masalah Otentik
Konsep Dasar Sudut
Perbandingan Sisi-sisi dalam Segitiga
sin α
cos α
tan α
sec α
cosec α
cot α
Segitiga Siku-siku

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	X
Alokasi Waktu	:	8 JP
Judul Modul	:	Rasio Trigonometri

B. Kompetensi Dasar

3. 7 Menjelaskan rasio trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen) pada segitiga siku-siku.

4.7 Menyelesaikan masalah rasio trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen) pada segitiga siku-siku.

C. Deskripsi Singkat Materi

Salam jumpa melalui pembelajaran matematika dengan materi Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-siku. Modul ini disusun sebagai satu alternatif sumber bahan ajar siswa untuk memahami materi Trigonometri di kelas X. Melalui modul ini Kalian diajak untuk memahami konsep Ukuran Sudut, Perbandingan Trigonometri dan Menyelesaikan Masalah Kontekstual menggunakan Rasio Trigonometri.
Modul ini terdiri atas 2 bagian proses. Kalian bisa mempelajari modul ini dengan tahapan berikut:
Pembelajaran 1 akan membahas tentang Ukuran Sudut dan Pengenalan Rasio Trigonometri
Pembelajaran 2 akan membahas tentang Rasio Trigonometri dan Menyelesaikan Masalah Kontekstual menggunakan Rasio Trigonometri.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Supaya Kalian berhasil mencapai kompetensi dalam mempelajari modul ini maka ikuti petunjuk-petunjuk berikut:

a. Petunjuk Umum:

1) Pelajari daftar isi serta skema modul dengan cermat, karena daftar isi dan peta kedudukan modul ini akan menuntun anda dalam mempelajari modul ini dan kaitannya dengan modul-modul yang lain.
2) Untuk mempelajari modul ini haruslah berurutan, karena materi yang mendahului merupakan prasyarat untuk mempelajari materi berikutnya.
3) Pahamilah contoh-contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Jika dalam mengerjakan soal anda menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
4) Kerjakan soal evaluasi dengan cermat. Jika anda menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
5) Jika anda mempunyai kesulitan yang tidak dapat anda pecahkan, catatlah, kemudian tanyakan kepada guru pada saat kegiatan tatap muka atau bacalah referensi lain yang berhubungan dengan materi modul ini. Dengan membaca referensi lain, anda juga akan mendapat pengetahuan tambahan.

b. Petunjuk Khusus

1) Dalam kegiatan Pembelajaran Kalian akan mempelajari bagaimana memahami konsep dan menyelesaikan masalah Rasio Trigonometri
2) Perhatikan gambar-gambar dan uraian dengan seksama agar dapat memahami, menentukan dan menggeneralisasikan Rasio Trigonometri serta mampu menerapkan dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hal tersebut.
3) Pahamilah contoh-contoh soal yang ada dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Kerjakanlah soal uji kompetensi dengan cermat agar Kalian bisa lebih paham dan terampil.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan didalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Ukuran Sudut dan Konsep Dasar Sudut

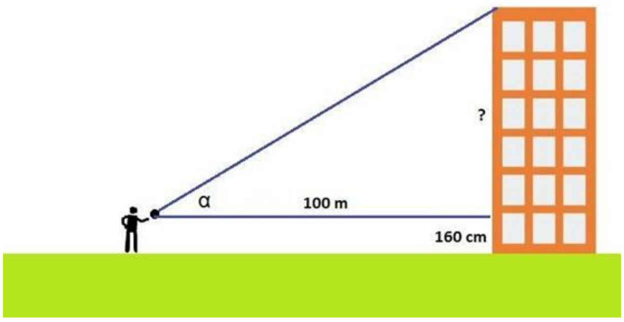
Kedua : Rasio Trigonometri pada Segitiga Siku-siku dan Menyelesaikan Masalah Kontekstual menggunakan Rasio Trigonometri

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Ukuran Sudut dan Konsep Dasar Sudut

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan Kalian dapat:
1. Memahami satuan ukuran sudut dalam radian dan derajat,
2. Mengubah satuan ukuran sudut dari bentuk radian ke bentuk derajat dan sebaliknya.

B. Uraian Materi



Gambar : Pengukuran tinggi gedung
Sumber : https://images.app.goo.gl/AQcHMTjeBkfogGEy6hbcwX8

Pernahkah Kalian melihat seorang sedang mengukur jalan yang akan diperbaiki atau mengukur ketinggian sebuah gedung? Tahukah kalian bagaimana seorang Nakhoda kapal memperkirakan jarak antara kapal dengan pelabuhan atau pantai atau dengan kapal lain sehingga kapalnya tidak bertabrakan? Bagaimana seorang ahli kelautan mengukur kedalaman Samudra, ketinggian ombak atau seorang Astronom mengukur jarak bintang? Para ahli tersebut bekerja menggunakan perhitungan Trigonometri. Aktivitas pengukuran tersebut hanya sebagian dari penerapan trigonometri dalam kehidupan nyata.

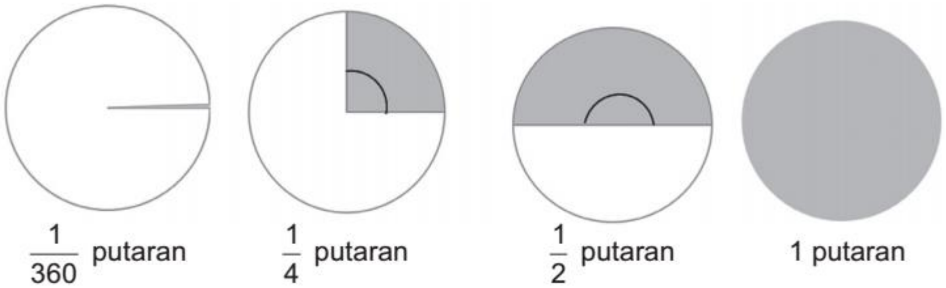
Secara sederhana, menggunakan trigonometri berarti melakukan penghitungan yang berkaitan dengan sudut. Trigonometri sering digunakan oleh surveyor, astronot, ilmuwan, enginer, bahkan juga digunakan untuk kegiatan investigasi. Dalam bidang fisika, teknik, dan kedokteran, trigonometri mengambil peranan penting dalam pengembang teknologi kedokteran dan teori-teori fisika dan teknik. Dalam Matematika, trigonometri digunakan untuk menemukan relasi antara sisi dari sudut pada suatu segitiga.

Setelah membaca paparan di atas, Kalian bisa mengetahui betapa luasnya penggunaan Trigonometri dalam kehiduapan nyata. Bagaimana, menarikkan? Mudah-mudahan Kalian termotivasi untuk mempelajari lebih dalam Trigonometri, khususnya belajar matematika sebagai tarunya ilmu pengetahuan.

Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)

Sesuatu yang bisa diukur itu memiliki satuan ukuran untuk mengukurnya. Begitu pula dengan sudut. Satuan sudut yang paling sering kita temui dan dipergunakan adalah derajat (dilambangkan dengan “o”). Namun, ada satuan lain yang dapat digunakan untuk mengukur satuan sudut, yaitu satuan radian (dilambangkan dengan “rad”).

Kalian pasti masih ingat pelajaran waktu SMP bahwa besar sudut dalam satu putaran penuh adalah 360^0 atau 1^0 didefinisikan sebagai besar sudut yang dibentuk oleh $\frac{1}{360}$ putaran penuh.
Satuan derajat ini berasal dari peradaban manusia yang mengaitkannya dengan musim yang dipengaruhi oleh perputaran bumi terhadap matahari. Dalam 1 (satu) kali revolusi bumi menyelesaikannya dalam 360 hari.
Coba Kalian cermati gambar berikut:



Gambar 1.1

Dari gambar 1.1 didapat besar sudut berikut:

$$\frac{1}{360} \text{ putaran} = \frac{1}{360}.360^0 = 1^0$$

$$\frac{1}{4} \text{ putaran} = \frac{1}{4}.\ 360^0 = 90^0$$

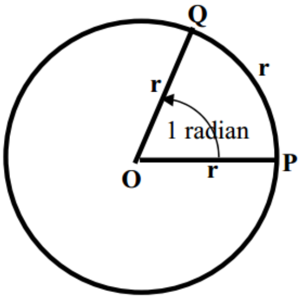
$$\frac{1}{2} \text{ putaran} = \frac{1}{2}.\ 360^0 = 180^0$$

$$\frac{1}{12} \text{ putaran} = \frac{1}{12}.\ 360^0 = 30^0$$

$$\frac{1}{8} \text{ putaran} = \frac{1}{8}.\ 360^0 = 45^0$$

Kalian dapat mendeskripsikan beberapa satuan putaran yang lain.

Selain ukuran derajat, kita juga mengenal ukuran radian. satu radian atau 1 rad adalah besarnya sudut yang dibentuk oleh dua buah jari-jari lingkaran berjari-jari r dan membentuk busur sepanjang r juga atau besar sudut pusat dari suatu lingkaran yang panjang busur dihadapan sudut tersebut adalah sama dengan jari-jari lingkaran tersebut. Panjang busur suatu lingkaran dapat dihitung langsung dengan mengalikan besarnya sudut dengan jari-jari lingkaran, apabila besarnya sudut telah dalam satuan radian.



Gambar 1.2

Dari gambar di atas,

$$\text{Besar sudut POQ} = \frac{\text{Panjang busur PQ}}{\text{r}}\ \text{radian}$$
$$= \frac{\text{r}}{\text{r}}\ \text{radian}$$
$$= 1\ \text{radian}$$

Hubungan satuan derajat dengan satuan radian adalah bahwa satu putaran penuh sama dengan 2π radian. Untuk lebih jelasnya, dapat kita lihat seperti di bawah ini.

Satu putaran penuh = 360^0 = 2π radian

$\frac{1}{2}$ putaran $= \frac{1}{2} \times 360^0 = 180^0 = \frac{1}{2} \times 2\pi\ radian = \pi\ radian$

$\frac{1}{360}$ putaran $= \frac{1}{360} \times 360^0 = 1^0 = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}\ radian$

Maka didapat $1\ rad = \frac{180}{\pi} 1^0 \approx 57,3^0$

Coba Kalian perhatikan hubungan secara Aljabar antara derajat dengan Radian berikut:

$$\frac{1}{4}\text{putaran} = \frac{1}{4} \times 360° = 90° \Leftrightarrow 90° = 90 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{1}{4}\pi\ rad$$
$$\frac{1}{3}\text{putaran} = \frac{1}{3} \times 360° = 120° \Leftrightarrow 120° = 120 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{1}{3}\pi\ rad$$
$$\frac{1}{2}\text{putaran} = \frac{1}{2} \times 360° = 180° \Leftrightarrow 180° = 180 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{1}{2}\pi\ rad$$
$$\frac{2}{3}\text{putaran} = \frac{2}{3} \times 360° = 240° \Leftrightarrow 240° = 240 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{2}{3}\pi\ rad$$
$$\frac{3}{4}\text{putaran} = \frac{3}{4} \times 360° = 270° \Leftrightarrow 270° = 270 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{3}{4}\pi\ rad$$

Tentunya dengan mudah kalian mampu mengubah ukuran sudut yang lain.
Untuk lebih memahami masalah hubungan antara derajat dengan radian, coba Kalian perhatikan contoh-contoh berikut:

Contoh 1 :

Selesaikan soal-soal ukuran sudut berikut:

1. $\frac{1}{4}\pi$ rad = ...putaran = ...^{0}
2. $\frac{1}{10}$ putaran =...rad =...^{0}
3. 135^0 = ...rad = ... putaran
4. Berapa radian sudut yang dibentuk jarum jam pada pukul 11.00?

Jawab:

1. 1 putaran = 360^0 = 2π rad, jadi $\frac{1}{2}$ putaran = 180^0 = π. Oleh karena itu $\frac{1}{4}\pi$ rad = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ putaran = $\frac{1}{8}$ putaran = $\frac{1}{8} \times 360^0 = 45^0$.
2. Karena 1 putaran = 2π rad, maka $\frac{1}{10} \times 2\pi$ rad. = $\frac{1}{5}\pi$ rad = $\frac{1}{5} \times 180^0 = 36^0$

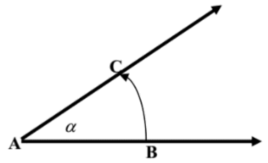
3. $135 = 135 \times \frac{\pi}{180}$ rad = $\frac{3}{4}\pi$ rad = $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ putaran = $\frac{3}{8}$ putaran
4. Sudut yang terbentuk pada pukul 11.00 adalah 30^0. Jadi $30^0 = 30 \times \frac{\pi}{180}$ rad = $\frac{1}{6}\pi$ rad.

Konsep Dasar Sudut

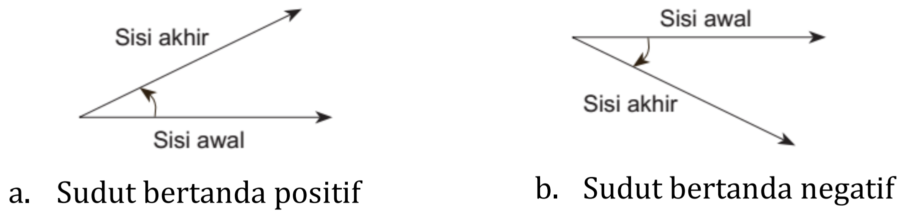
Kalian sudah sering mendengar kata "sudut". Sebenarnya apa yang dimaksud dengan sudut? Untuk memahami masalah sudut, coba Kalian lakukan Langkah-langkah berikut:

1. Lukis sinar garis (misal sinar AB)
2. Putar sinar AB dengan pusat A sampai terjadi sinar garis AC, sehingga terbentuk sudut BAC
3. Beri nama sudut BAC = α

Dari proses tersebut Kalian telah membuat sudut $\angle BAC$ seperti tampak pada gambar.



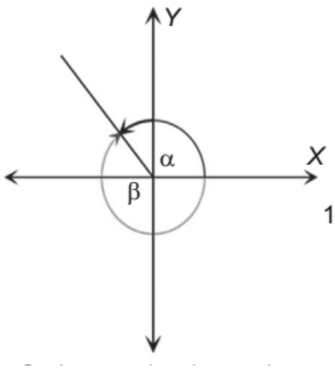
Dalam kajian geometris, sudut didefnisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (*initial side*) ke sisi akhir (*terminal side*). Selain itu, arah putaran memiliki makna dalam sudut. Suatu sudut bertanda *"positif"* jika arah putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan bertanda *"negatif"* jika arah putarannya searah dengan jarum jam. Arah putaran untuk membentuk sudut juga dapat diperhatikan pada posisi sisi akhir terhadap sisi awal. Untuk memudahkannya, mari kita cermati deskripsi berikut ini.



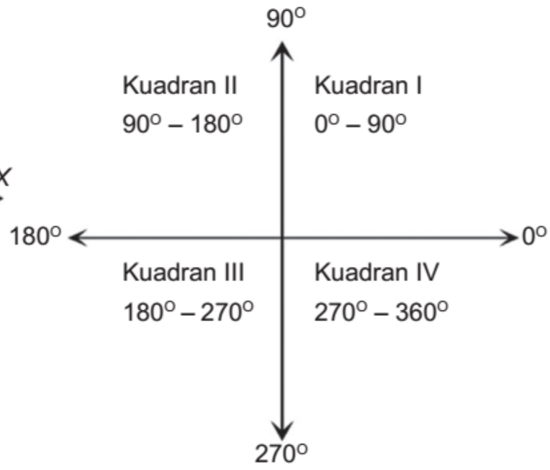
Gambar 1.3 Sudut berdasarkan arah putaran.

Dalam bidang koordinat kartesius, jika sisi awal suatu garis berimpit dengan sumbu x dan sisi terminalnya terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius itu, disebut sudut *standar* (baku). Jika sisi akhir berada pada salah satu sumbu pada koordinat tersebut, sudut yang seperti ini disebut pembatas kuadran, yaitu 0°, 90°, 180°, 270° dan 360°. Sebagai catatan, bahwa untuk menyatakan suatu sudut, lazimnya digunakan huruf Yunani, seperti, α (*alpha*), β (*betha*), γ (*gamma*), dan θ (*tetha*), dan juga digunakan huruf-huruf kapital, seperti A, B, C, dan D.

Cermati gambar di bawah ini.
Jika sudut yang dihasilkan sebesar α (sudut standar), maka sudut β disebut sebagai sudut koterminal, sehingga $\alpha + \beta = 360^0$, seperti gambar berikut.



Sudut standar dalam sudut koterminal



Besar sudut pada setiap kuadran

Definisi :

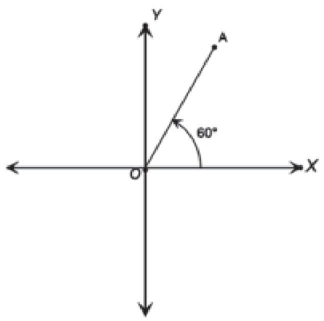
Sudut-sudut koterminal adalah dua sudut standar, memiliki sisi-sisi akhir (*terminal side*) yang berimpit.

Untuk lebih memahami, coba kalian amati contoh-contoh berikut:

Contoh 2 :
Gambarkanlah sudut-sudut standar di bawah ini, dan tentukan posisi setiap sudut pada koordinat kartesius.
a) 60° b) –45° c) 120° d) 600°

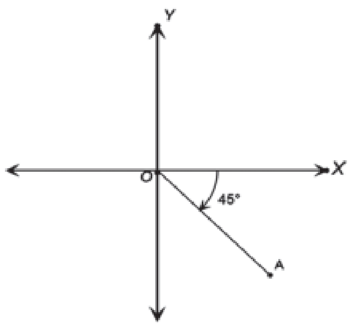
Jawab :

a.

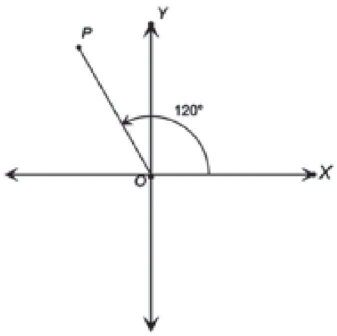


Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi akhir OA terletak di kuadran I

b.

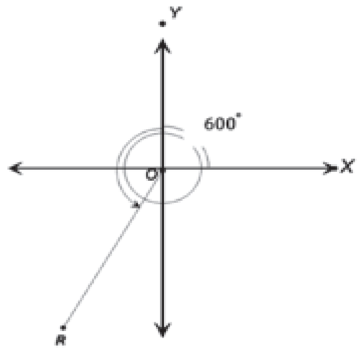


Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi akhir OA terletak di kuadran IV c.



Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi akhir OP terletak di kuadran II

d.



Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi akhir OR terletak di kuadran III

C. Rangkuman

1. Ada dua ukuran untuk mengukukur sudut, yaitu derajat dan radian.
2. $1^0 = \frac{1}{360}$ putaran.
3. 1 rad adalah besarnya sudut yang dibentuk oleh dua buah jari-jari lingkaran berjari-jari r dan membentuk busur sepanjang r juga.
4. Hubungan satuan derajat dengan satuan radian adalah bahwa satu putaran penuh sama dengan 2π radian.
5. $1\ rad = \frac{180}{\pi} 1^0$.
6. Sudut didefnisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (*initial side*) ke sisi akhir (*terminal side*).
7. Sudut *standar* (baku) adalah sudut yang sisi awalnya berimpit dengan sumbu *x* dan sisi terminalnya terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius.
8. Sudut-sudut koterminal adalah dua sudut standar, memiliki sisi-sisi akhir (*terminal side*) yang berimpit.

D. Latihan Soal

Untuk meningkatkan pemahaman, coba Kalian kerjakan Latihan soal berikut kemudian cocokkan jawaban Kalian dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Jangan melihat kunci dulu sebelum Kalian mengerjakan.

1. Untuk setiap besar sudut di bawah ini, ubahlah ke bentuk satuan derajat dan radian.
   a. $\frac{1}{3}$ putaran
   b. $\frac{2}{5}$ putaran
   c. $\frac{3}{10}$ putaran
   d. 4 putaran

2. Nyatakanlah sudut berikut ke dalam satuan radian.
   a. 120^0
   b. 210^0

3. Nyatakan sudut berikut ke dalam bentuk derajat.
   a. $\frac{1}{3}\pi rad$
   b. $\frac{7}{9}\pi rad$
   c. $\frac{3}{4}\pi rad$
   d. $\frac{11}{12}\pi rad$

4. Berapa radian jarak putar jarum menit sebuah jam apabila ia berputar selama
   a. 45 menit
   b. 30 menit
   c. 15 menit
   d. 1 menit

Pembahasan Latihan Pembelajaran 1

No	Pembahasan	Skor
1.	a. $\frac{1}{3}$ putaran = $\frac{1}{3}$ x 360^0 = 120^0. $\frac{1}{3}$ putaran = $\frac{1}{3}$ x 2π rad= $\frac{2}{3}\pi$ rad $\frac{2}{5}$ putaran = $\frac{2}{5}$ x 360^0 = 144^0 $\frac{2}{5}$ putaran = $\frac{2}{5}$ x 2 π rad = $\frac{4}{5}\pi$ rad c. $\frac{3}{10}$ putaran = = $\frac{3}{10}$ x 360^0 = 108^0 $\frac{3}{10}$ putaran = $\frac{3}{10}$ x 2 π rad = $\frac{3}{5}\pi$ rad d. 4 putaran = 4 x 360^0 = 1440^0 = 8π rad	1 1 1 1 1 1 2
2.	a. $\frac{1}{3}\pi rad$ = $\frac{1}{3}$ x 180^0 = 60^0 b. $\frac{7}{9}\pi rad$ = $\frac{7}{9}$ x 180^0 = 140^0 c. $\frac{3}{4}\pi rad$ = $\frac{3}{4}$ x 180^0 = 135^0 d. $\frac{11}{12}\pi rad$ = $\frac{11}{12}$ x 180^0 = 165^0	2 2 2 2
3	a. 120^0 = 120 x $\frac{\pi}{180}$ = $\frac{2}{3}\pi$ rad b. 210^0 = 210 x $\frac{\pi}{180}$ = $\frac{7}{6}\pi$ r	2 2
4	Satu putaran jarum jam = 12 jam = 12(60) = 720 menit sebesar 2 π radian. a. Sudut putaran 45 menit = $\frac{45}{720}(2\pi)$ = 1/8 π rad b. Sudut putaran 30 menit = $\frac{30}{720}$ (2π) = $\frac{1}{12}\pi$ rad c. Sudut putaran 15 menit = $\frac{15}{720}(2\pi)$ = $\frac{1}{24}\pi$ rad d. Sudut putaran 1 menit = $\frac{1}{720}(2\pi)$ = $\frac{1}{360}\pi$ rad	2 2 2 2 2
	Skor maksimum	**30**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan = $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum}$ x 100%

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom "Ya" jika Kalian mampu dan "Tidak" jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Saya sudah memahami tentang ukuran sudut		
2.	Saya sudah dapat mengubah sudut satuan derajat ke satuan radian		
3.	Saya sudah dapat mengubah sudut satuan radian ke satuan derajat.		
4.	Saya sudah memahami hubungan derajat dan radian.		
5	Saya sudah memahami posisi sudut pada koordinat cartesius		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Rasio/Perbandingan Trigonometri Pada Segitiga Siku-Siku

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini kalian diharapkan dapat:
1. Memahami rasio/perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, tangen, secan, cosecan dan cotangen) pada segitiga siku-siku.
2. Menghitung rasio/perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, tangen, secan, cosecan dan cotangen) pada segitiga siku-siku.
3. Menyelesaikan masalah menggunakan rasio/perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen).

B. Uraian Materi

Jika Kalian perhatikan lingkungan sekitar kita, banyak benda atau bangunan memiliki sudut atau pojok tertentu. Bentuk-bentuk sudut dari benda di alam terbentuk dengan sendirinya, seperti sudut dahan dengan ranting, lekukan batuan, dan sebagainya. Bentuk sudut ada yang sengaja dirancang seperti penggaris berbentuk segitiga, sudut antara dua ruas jalan yang bersilangan, sudut yang terbentuk antara jarum pendek dan jarum panjang dari sebuah jam dinding, bentuk permukaan buku. Model atap rumah biasanya dibuat dengan sudut atau pojok sesuai kebutuhan. Titik sudut sebuah buku biasanya tegak lurus, sedangkan atap rumah sudutnya lebih kecil.

Ilmu ukur sudut dipelajari secara khusus dalam trigonometri yang mengkaji hubungan antara sisi dan sudut dalam suatu segitiga dan sifat-sifat serta aplikasinya dalam berbagai bidang seperti penaksiran tinggi bangunan atau pohon, jarak mendatar puncak gunung terhadap lembahnya, dan sebagainya.

Pada peradaban kehidupan kita, kajian mengenai trigonometri sudah tercermin dari berbagai ikon kehidupan mereka. Misalnya, para arsitekturnya, sudah menerapkan kesetimbangan bangunan pada rumah adat yang mereka ciptakan, sebagai contoh rumah adat Dayak. Rumah adat tersebut berdiri kokoh sebagai hasil hubungan yang tepat antara besar sudut yang dikaitkan dengan panjang sisi-sisinya.

Gambar : Rumah Adat Suku Dayak.
Sumber : http://www.jualsewarumah.com

Pada pembelajaran II ini kita akan mempelajari konsep perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku.

Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut Pada Segitiga Siku-Siku

Perhatikan gambar. Segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku dengan titik sudut siku-siku di C. Panjang sisi di hadapan sudut A adalah a satuan, panjang sisi di hadapan sudut B adalah b satuan, dan panjang sisi di hadapan sudut C adalah c satuan.
Pada gambar, diketahui $\angle$BAC = α. Sisi BC = a disebut ***sisi di depan sudut* α**, sisi AC = b disebut ***sisi di samping sudut* α**, dan sisi AB = c disebut ***sisi miring*** (***hipotenusa***). Dari ketiga sisi segitiga siku-siku ABC tersebut, dapat ditentukan perbandinga-perbandingan trigonometri sebagai berikut.

Definisi : ***Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku***

a. $\text{sinus } \alpha = \dfrac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \dfrac{a}{c}$

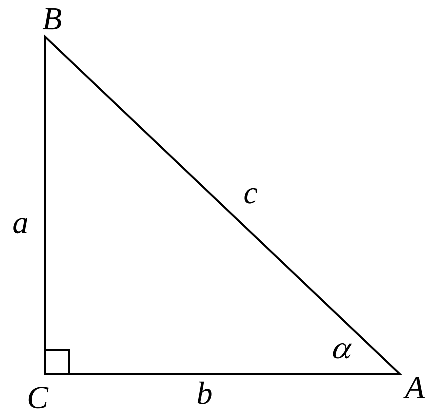
b. $\text{cosinus } \alpha = \dfrac{\text{sisi di samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \dfrac{b}{c}$

c. $\text{tangen } \alpha = \dfrac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi di samping sudut } \alpha} = \dfrac{a}{b}$

d. $\text{cotangen } \alpha = \dfrac{\text{sisi di samping sudut } \alpha}{\text{sisi di depan sudut } \alpha} = \dfrac{b}{a}$

e. $\text{secan } \alpha = \dfrac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di samping sudut } \alpha} = \dfrac{c}{b}$

f. $\text{cosecan } \alpha = \dfrac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di depan sudut } \alpha} = \dfrac{c}{a}$



Catatan :
Untuk selanjutnya, penulisan ***sinus*** dan ***cosinus*** disingkat ***sin*** dan ***cos***, penulisan ***tangen*** dan ***cotangen*** disingkat ***tan*** dan ***cot***, penulisan ***secan*** dan ***cosecan*** disingkat ***sec*** dan ***cosec*** (atau ***csc***).

Berdasarkan definisi di atas, dapat diturunkan rumus-rumus dasar trigonometri berikut ini.

a. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

b. $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

c. $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

d. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

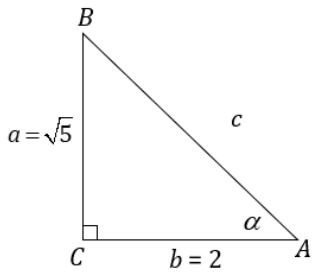
e. $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Contoh 1:
Diketahui segitiga ABC siku-siku di C dengan panjang sisi $a = \sqrt{5}$ satuan dan panjang sisi b = 2 satuan. Jika $\angle$BAC = α, tentukanlah nilai keenam perbandingan trigonometri untuk sudut α.

Jawab:
Nilai c dihitung dengan menggunakan teorema Pythagoras:

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$$

Jadi, nilai perbandingan trigonometri sudut α adalah:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{5} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{3}{2}$

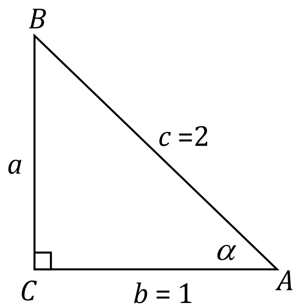
$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ $\qquad$ $\text{cosec}\,\alpha = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$

Contoh 2:

Diketahui cos α° = $\frac{1}{2}$ dan α° sudut lancip (0° < α° < 90°). Carilah nilai perbandingan trigonometri sudut α° yang lain.

Jawab:

Gambarlah segitiga siku-siku ABC sehingga nilai perbandingan trigonometri cos α° = $\frac{1}{2}$



Nilai a dicari dengan menggunakan teorema Pythagoras:

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

Jadi, nilai perbandingan trigonometri sudut α yang lain adalah:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

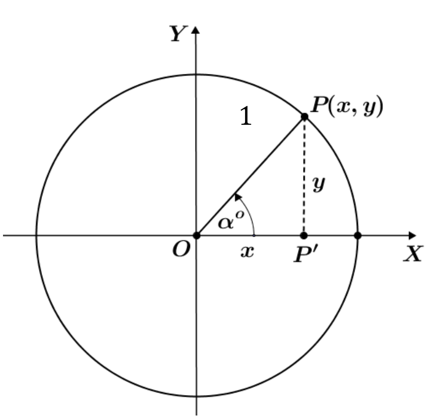
$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{2}{1} = 2$

$\text{cosec}\,\alpha = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Perbandingan Trigonometri Sudut-Sudut Istimewa

Sudut istimewa adalah suatu sudut di mana nilai perbandingan trigonometrinya dapat ditentukan secara langsung tanpa menggunakan daftar trigonometri atau kalkulator. Sudut-sudut yang dimaksud adalah sudut-sudut yang besarnya 0°, 30°, 45°, 60°, dan 90°.

Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa dapat ditentukan dengan menggunakan konsep lingkaran satuan seperti pada gambar berikut.



Berdasarkan definisi perbandingan trigonometri, diperoleh hubungan:

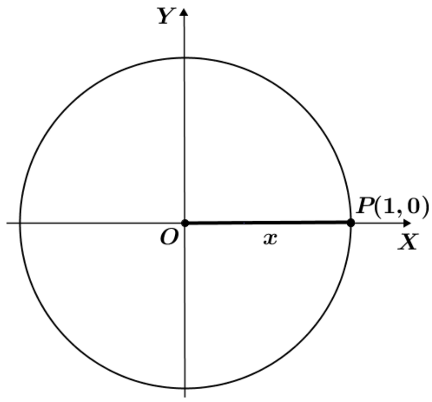
$\sin\alpha^o = \frac{PP'}{OP} = \frac{y}{1} = y$

$\cos\alpha^o = \frac{OP'}{OP} = \frac{x}{1} = x$

$\tan\alpha^o = \frac{PP'}{OP'} = \frac{y}{x}$, dengan syarat $x \neq 0$.

Jadi, dalam lingkaran satuan ini koordinat titik $P(x, y)$ dapat dinyatakan sebagai P(cos α°, sin α°).

1. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 0^o



Perhatikan gambar di samping. Koordinat titik *P* adalah (1, 0), sehingga (1, 0) = (cos 0^o, sin 0^o)

maka diperoleh:

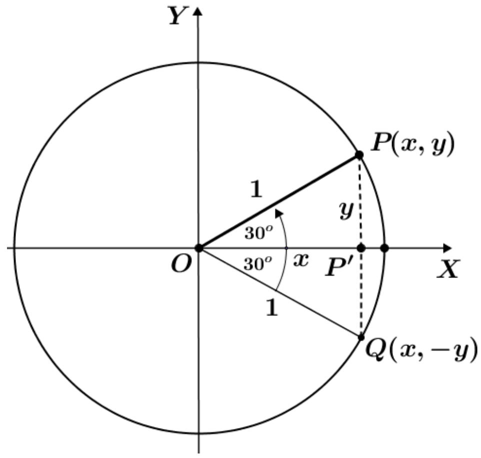
sin 0^o = 0

cos 0^o = 1

tan 0^o = $\dfrac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = \dfrac{0}{1} = 0$

2. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 30^o

Perhatikan gambar di samping. Jika $\alpha^o = 30^o$, maka $\angle OPQ = 60^o$, sehingga ΔOPQ merupakan segitiga sama sisi dengan panjang sisi OP = OQ = PQ = 1, dan PP' = QP' = $\frac{1}{2}$ atau ordinat $y = \frac{1}{2}$.



$\Delta OPP'$ siku-siku di P', dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh hubungan:

$(OP')^2 + (PP')^2 = (OP)^2$

$\Leftrightarrow (OP')^2 = (OP)^2 - (PP')^2$

$\Leftrightarrow (OP')^2 = 1^2 - (\frac{1}{2})^2$

$\Leftrightarrow (OP')^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow OP' = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

OP' menyatakan absis titik P atau $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jadi, untuk $\alpha^o = 30^o$, maka koordinat titik *P* adalah $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ = (cos 30^o, sin 30^o), maka diperoleh:

sin 30^o = $\frac{1}{2}$,

cos 30^o = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dan

tan 30^o = $\dfrac{\sin 30^o}{\cos 30^o} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

3. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 45^o

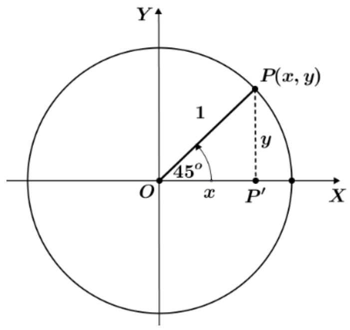
Perhatikan gambar di samping. Jika $\alpha^o = 45^o$, maka $\Delta OPP'$ merupakan segitiga sama kaki dengan panjang sisi OP = PP' atau $x = y$. Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh hubungan:

$(OP')^2 + (PP')^2 = (OP)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$



$\Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Karena $x = y$, maka $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Jadi, untuk $\alpha^o = 45^o$, maka koordinat titik P adalah $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}) = (\cos 45^o, \sin 45^o)$, maka diperoleh:

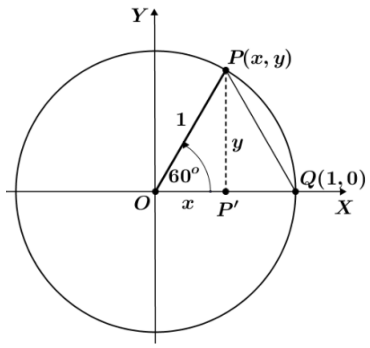
$\sin 45^o = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$\cos 45^o = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dan

$\tan 45^o = \frac{\sin 45^o}{\cos 45^o} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$

4. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 60^o

Perhatikan gambar di samping. Jika $\alpha^o = 60^o$, maka ΔOPQ merupakan segitiga sama sisi dengan panjang sisi OP = OQ = PQ = 1, dan OP' = QP' = $\frac{1}{2}$ sehingga absis $x = \frac{1}{2}$. Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh hubungan:



$(OP')^2 + (PP')^2 = (OP)^2$

$\Leftrightarrow \qquad (PP')^2 = (OP)^2 - (OP')^2$

$\Leftrightarrow \qquad (PP')^2 = 1^2 - (\frac{1}{2})^2$

$\Leftrightarrow \qquad (PP')^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \qquad PP' = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

PP' menyatakan ordinat titik P atau $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jadi, untuk $\alpha^o = 60^o$, maka koordinat titik P adalah $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) = (\cos 60^o, \sin 60^o)$, maka diperoleh:

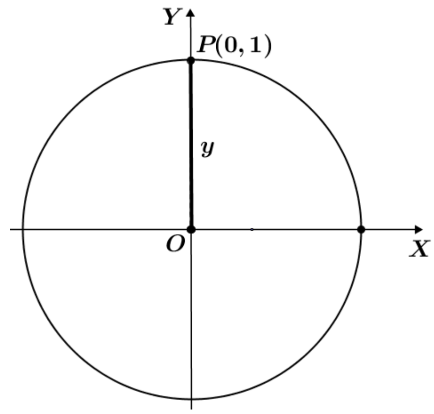
$\sin 60^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$\cos 60^o = \frac{1}{2}$, dan

$\tan 60^o = \frac{\sin 60^o}{\cos 60^o} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

5. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 90^o

Perhatikan gambar di samping. Jika $\alpha^o = 90^o$, maka kaki sudut OP berimpit dengan sumbu Y positif atau titik P berada pada sumbu Y positif. Koordinat titik P adalah (0, 1), sehingga (0, 1) = $(\cos 90^o, \sin 90^o)$



maka diperoleh:

$\sin 90^o = 1$

$\cos 90^o = 0$

$\tan 90^o =$

$\frac{\sin 90^o}{\cos 90^o} = \frac{1}{0}$ (tidak didefinisikan)

Rangkuman Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Istimewa

	Besar sudut α^o				
	0^o	**30^o**	**45^o**	**60^o**	**90^o**
$\sin \alpha^o$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha^o$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha^o$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot \alpha^o$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
$\sec \alpha^o$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	–
$\operatorname{cosec} \alpha^o$	–	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

Contoh 1:

Hitunglah:

a. $\tan 30^o + \tan 45^o$

b. $\sec 0^o + \sec 45^o$

c. $\dfrac{\operatorname{cosec} 30^o + \operatorname{cosec} 90^o}{\sec 0^o + \sec 60^o}$

Jawab:

a. $\tan 30^o + \tan 45^o = \frac{1}{3}\sqrt{3} + 1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}+3\right)$

b. $\sec 0^o + \sec 45^o = \dfrac{1}{\cos 0^o} + \dfrac{1}{\cos 45^o} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$

c. $\dfrac{\operatorname{cosec} 30^o + \operatorname{cosec} 90^o}{\sec 0^o + \sec 60^o} = \dfrac{\dfrac{1}{\sin 30^o} + \dfrac{1}{\sin 90^o}}{\dfrac{1}{\cos 0^o} + \dfrac{1}{\cos 60^o}} = \dfrac{\dfrac{1}{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{1}}{\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2+1}{2+1} = 1$

Contoh 2:

Tunjukkan bahwa:

a. $\sin^2 45^o + \cos^2 45^o = 1$

b. $1 + \tan^2 45^o = \sec^2 45^o$

Jawab:

a. $\sin^2 45^o + \cos^2 45^o = (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Jadi, terbukti bahwa $\sin^2 45^o + \cos^2 45^o = 1$

b. Bagian ruas kiri: $1 + \tan^2 45^o = 1 + (1)^2 = 1 + 1 = 2$

Bagian ruas kanan: $\sec^2 45^o = \dfrac{1}{\cos^2 45^o} = \dfrac{1}{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

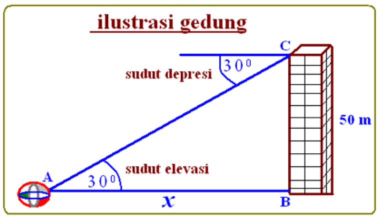
Ruas kiri = ruas kanan = 2

Jadi, terbukti bahwa $1 + \tan^2 45^o = \sec^2 45^o$

Setelah Kalian memahami perbandingan trigonometri, mari kita kembangkan pembahasan kita lebih jauh dengan menggunakan perbandingan triogonemetri dalam memecahkan masalah-masalah kontekstual. Untuk menggunakan perbandingan trigonometri dalam memecahkan masalah kontekstual, kalian perlu memperhatikan dan memahami hal-hal berikut:

Sudut depresi dan sudut elevasi

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering mendengar istilah “sudut elevasi” dan “sudut depresi”.
Sudut elevasi adalah **sudut** yang dibentuk oleh arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah atas.
Sudut depresi adalah **sudut** yang dibentuk oleh arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah bawah.
Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar berikut ini.



Gambar : Sudut depresi dan sudut elevasi.
Sumber : https://images.app.goo.gl/NDb3gfmLxwL

Penerapan Trigonometri dalam Kehidupan Nyata

Banyak sekali kita jumpai berbagai hal yang terkait dengan rasio trigonometri. Rasio trigonometri dapat digunakan untuk memecahkan masalah kontekstual yang berhubungan dengan sudut pengamatan, tinggi suatu benda , atau untuk menentukan jarak ke suatu obyek. Rasio trigonometri merupakan salah satu sarana yang dapat digunakan untuk melatih penalaran dalam menyelesaikan permasalahan tersebut.

Berikut beberapa contoh penggunaan trigonometri dalam kehidupan sehari hari :

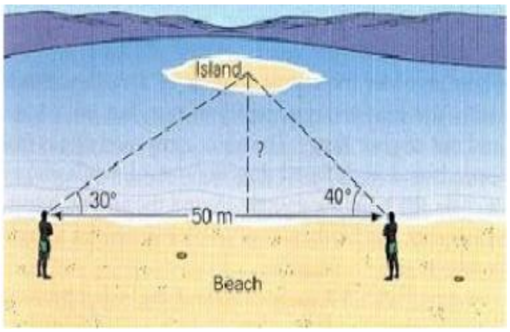
1. Menghitung tinggi bangunan / gunung / pohon/ bukit/ benda

Apabila kamu tahu jarak antara kamu dengan benda yang kamu amati dan kamu juga tahu sudut elevasi pengamatannya, maka kamu dapat menghitung tinggi dari bangunan yang kamu amati tersebut.

Gambar : Menghitung tinggi bangunan
Sumber : Modul PKB Matematika

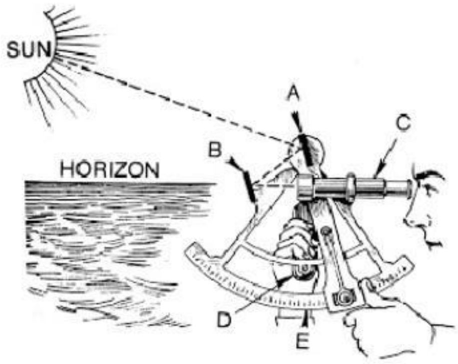
2. Dalam navigasi

Perbandingan trigonometri dapat digunakan di bidang navigasi. Sebagai contoh, rasio trigonometri digunakan untuk menghitung jarak suatu titik terhadap garis pantai.



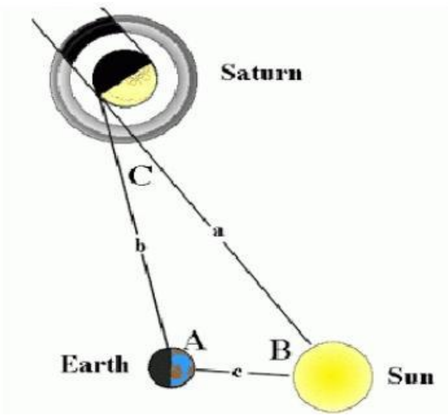
Gambar : Menghitung jarak suatu pulau ke bibir pantai
Sumber : Modul PKB Matematika

3. **Dalam bidang oseanografi**
   Rasio trigonometri dapat digunakan untuk menghitung ketinggian gelombang laut.



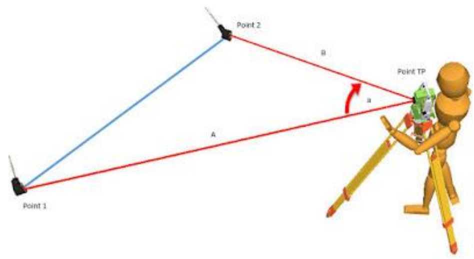
Gambar : Menghitung ketinggian gelombang laut
Sumber : Modul PKB Matematika

4. **Dalam bidang astronomi**
   Trigonometri sangat besar manfaatnya dalam ilmu astronomi, karena ukuran benda-benda langit tidak mungkin diukur pakaipenggaris, pasti dihitung dengan bermain skala-skala dan sudut-sudut, sehingga dapat diestimasi ukurannya secara akurat. Rumus trigonometri sudut ganda digunakan untuk nilai-nilai ukuran sisi akibat sudut-sudut yang tidak istimewa.



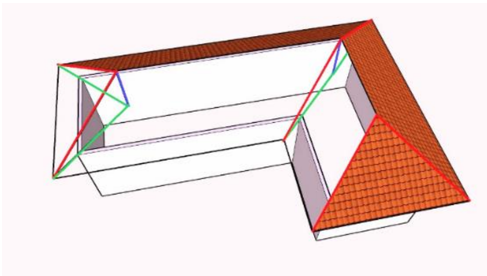
Gambar : Menghitung ketinggian gelombang laut
Sumber : Modul PKB Matematika

5. **Dalam bidang teknik sipil**
   Pengukuran tanah adalah suatu cabang ilmu alam untuk menentukan posisi ruang dimensi tiga dari suatu tempat pada permukaan bumi. Hasil pengukuran tanah yang diperoleh antara lain digunakan untuk membuat peta topografi dari bumi untuk menentukan luas wilayah suatu daerah. Keahlian trigonometri seorang surveyor sangat mempermudah pekerjaannya sehingga beliau tak perlu terjun langsung ke medan-medan sulit.

Gambar : Menghitung luas tanah
Sumber : https://images.app.goo.gl/NJyTnwuvcdej534f7
https://images.app.goo.gl/qPnUiJwwHcmah7bJ9

6. **Pada Bidang Arsitektur**
   Trigonometri bermanfaat dalam menentukan kemiringan atap, beban struktural, efek bayangan matahari dan sudut cahaya terhadap karya arsitektur.



Gambar : Menghitung luas tanah
Sumber : https://images.app.goo.gl/VgrjdSvaMjV5aQPh8

Beberapa keterampilan yang perlu kalian miliki untuk meningkatkan kemampuan memecahkan masalah adalah:

1. Memahami soal
   Pahami soal atau masalah yang diberikan, kemudian tentukan beberapa hal berikut.
   a. Menyatakan soal ke dalam bahasa sendiri
   b. Membuat diagram dari soal tersebut
   c. Menentukan apa fakta atau informasi yang diberikan
   d. Menentukan apa yang ditanyakan, apa yang diminta untuk dicari atau dibuktikan

2. Memilih pendekatan atau strategi pemecahan
   Setelah memahami soal, tentukanlah beberapa hal berikut.
   a. Memilih dan menggunakan pengetahuan aljabar yang diketahui
   b. Menentukan konsep yang relevan
   c. Menentukan atau memilih variabel yang terlibat
   d. Merumuskan model matematika atau kalimat matematika darimasalah

3. Menyelesaikan model
   Setelah memilih strategi penyelesaian, tentukanlah beberapa hal berikut.
   a. Tentukan jenis model matematikanya
   b. Lakukan operasi hitung atau operasi aljabar secara benar untuk mendapatkan solusi dari permasalahan yang diberikan

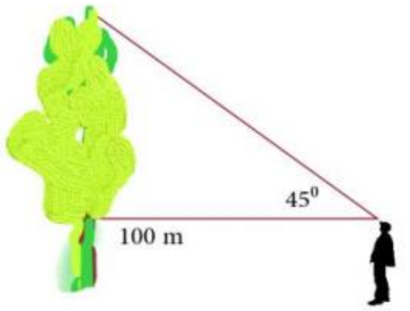
4. Menafsirkan solusi
   Setelah solusi atau penyelesaian dari model matematika diperoleh, selanjutnya lakukan hal berikut ini.
   a. Periksalah kelayakan atau kebenaran jawaban atau masukakalnya jawaban
   b. Solusi dari penyelesaian model matematika diterjemahkan ke dalam penyelesaian dari masalah semula

Untuk lebih memahami perhatikan contoh berikut:

Contoh 1:
Sebuah pohon berjarak 100 meter dari seorang pengamat yang tingginya 170 cm. Apabila pucuk pohon tersebut dilihat pengamat dengan sudut elevasi 60^0, tentukanlah tinggi pohon tersebut.

Penyelesaian:

- Memahami soal
  Dari soal dapat dibuatkan diagramnya sebagai berikut.

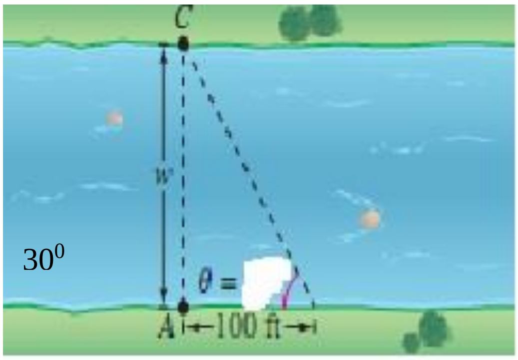


- Dari soal diketahui bahwa:
  Jarak pengamat ke pohon = 100 m
  Tinggi pengamat = 170 cm = 1,7 m
  Sudut elevasi = 45^0
  Yang dicari tinggi pohon
- Memilih pendekatan atau strategi pemecahan
  Konsep yang relevan dari soal di atas adalah perbandingan trigonometri.
  Dimisalkan bahwa t = tinggi pohon – tinggi pengamat
  x = jarak pengamat ke pohon
  $\tan 45^0 = \frac{t}{x}$
- Menyelesaikan model
  Dengan menggunakan operasi hitung, diperoleh:
  $\tan 45^0 = \frac{t}{x}$
  t = x tan 450 = 100 . 1 = 100
- Menafsirkan solusi
  Tinggi pohon = t + tinggi pengamat
  = 100 m+ 1, 7 m = 101,7 m

Jadi, tinggi pohonnya adalah 101,7 m

Contoh 2:

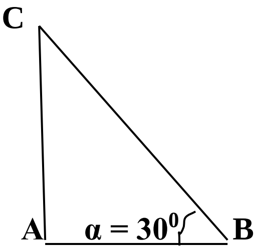
Seorang ahli Biologi ingin mengetahui lebar sebuah sungai sehingga alat yang dipasang untuk mengetahui polutan dalam air sungai dapat diatur dengan baik. Jarak dari ahli Biologi berdiri pada tempat yang akan dipasang alat di titik A adalah 100 kaki dan sudut pandang pada alat di seberang sungai, yaitu di titik C sebesar 30^0 (lihat gambar). Hitunglah lebar sungai tersebut.



Gambar 3.8.10
(Sumber : Larson, 2011)

Penyelesaian:

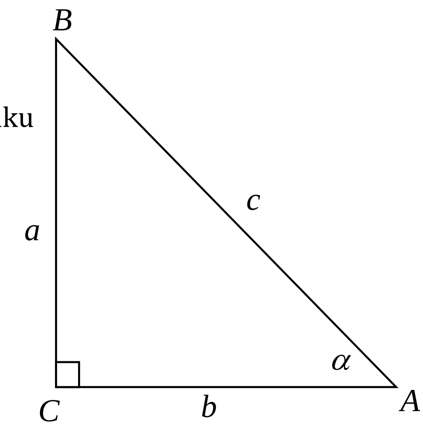
- Dari soal dapat dibuat diagramnya sebagai berikut:



- Jarak dari pengamat pada alat yang dipasang adalah 100 mkaki
  Sudut elevasi 30^0
  Yang dicari lebar sungai.
  Dimisalkan lebar sungai AC.
  $\tan\ \alpha = \frac{AC}{AB} \leftrightarrow AC = AB.\,tan\ \alpha$
  $AC = 100.\,tan\ 30^0 = 100.\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{100}{3}\sqrt{3}$

Jadi lebar sungai adalah $\frac{100}{3}\sqrt{3}$ kaki.

C. Rangkuman



1. Definisi Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku
   1. sinus $\alpha = \frac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{c}$
   2. cosinus $\alpha = \frac{\text{sisi di samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \frac{b}{c}$
   3. tangen $\alpha = \frac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi di samping sudut } \alpha} = \frac{a}{b}$

4. $\text{cotangen } \alpha = \dfrac{\text{sisi di samping sudut } \alpha}{\text{sisi di depan sudut } \alpha} = \dfrac{b}{a}$
5. $\text{secan } \alpha = \dfrac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di samping sudut } \alpha} = \dfrac{c}{b}$
6. $\text{cosecan } \alpha = \dfrac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di depan sudut } \alpha} = \dfrac{c}{a}$

2. Rangkuman Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Istimewa

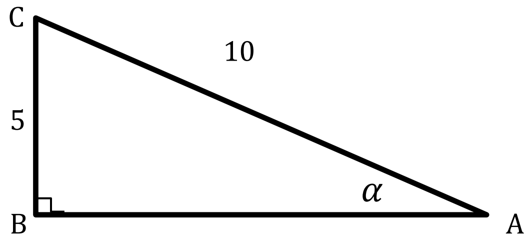
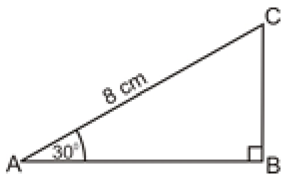
	Besar sudut α°				
	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sin α°	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos α°	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α°	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
cot α°	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
sec α°	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	–
cosec α°	–	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

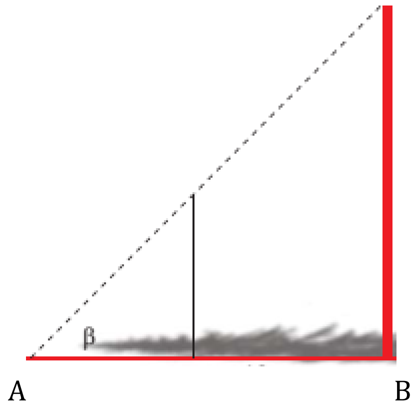
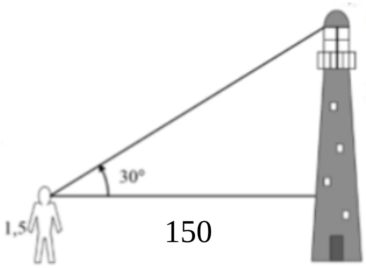
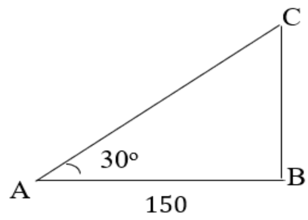
D. Latihan Soal

Untuk meningkatkan pemahaman, coba Kalian kerjakan latihan soal berikut, kemudian cocokkan jawaban Kalian dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Jangan melihat kunci dulu sebelum Kalian mengerjakan.

1. Segitiga ABC siku-siku di C. Apabila $\sin A = 0.5$, tentukan:
   a. $\cos A$ dan $\tan A$
   b. $\sec A$ dan $\cot A$
2. Diketahui segitiga ABC siku-siku di B, jika panjang AC adalah 8 cm, dan $\angle A = 30^\circ$. Hitunglah panjang AB dan BC.
3. Seorang anak memandang sebuah pohon dengan sudut 60^0. Apabila jarak anak tersebut 60 meter dari pohon, tentukan tinggi pohon tersebut.
4. Andi melihat sebuah sebuah menara dari jarak 150 meter dengan sudut elevasi 30^0. Jarak mata Andi dengan tanah 150 cm. Tentukan tinggi gedung tersebut!

Pembahasan Latihan Soal Pembelajaran 2

No	Pembahasan	Skor
1.	Diketahui sin A = 0,5 = $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Perhatikan segitiga siku-siku berikut:  Dengan menggunakan phytagoras maka: AB = $\sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100-25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ a. Cos A = $\frac{AB}{AC} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ Tan A = $\frac{BC}{AB} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ Pembilang dan penyebut dikali $\sqrt{3}$ b. Sec A = $\frac{AC}{AB} = \frac{10}{5\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$	2 2 2 2 2
2.	Segitiga ABC siku-siku di B. AC = 8 cm $\angle$ A = 30°  Dicari Panjang BC dan Panjang AC Sin $30^0 = \frac{BC}{AC}$ BC = AC . Sin 30^0 BC = 8. $\frac{1}{2}$ = 4 cm Panjang BC = 4 cm Cos $30^0 = \frac{AB}{AC}$ AB = AC. Cos 30^0 AB = 8. $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ Jadi panjang AB adalah $4\sqrt{3}$ cm	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
3.	Sudut elevasi anak dengan pohon $\beta = 60^0$ Jarak anak dengan pohon 60 m Dicari tinggi pohon. Sketsa posisi anak dan pohon: C	1

	 Dari gambar kita dapatkan cos $\beta = \frac{AB}{AC} \leftrightarrow \cos 60^0 = \frac{60}{AC}$ AC = $\frac{60}{\cos 60^0} = \frac{60}{\frac{1}{2}} = 120$ Sin $60^0 = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{120}$ BC = 120 x sin 60^0 = 120 x $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$ Jadi tinggi pohon adalah $60\sqrt{3}$ meter	1 2 2 2 2 1
	Sudut elevasi = 30^0 Jarak Andi dengan Menara = 150 meter Jarak mata Andi dengan tanah = 150 cm Sketsa posisi Andi dengan menara:   tan $30^0 = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{150} \leftrightarrow$ BC = 150 x tan 30^0 BC = 150 x $\frac{1}{3}\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$ Jadi tinggi menara = $(50\sqrt{3} + 1{,}5)$ meter	1 1 2 3 2 2
	Skor maksimum	**40**

Untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian, cocokkan jawaban dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Hitung jawaban benar kalian, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan kalian terhadap materi kegiatan pembelajaran ini.

Rumus Tingkat penguasaan = $\frac{Jumlah\ skor}{Jumlah\ skor\ maksimum} x\ 100\%$

Kriteria
90% – 100% = baik sekali
80% – 89% = baik
70% – 79% = cukup
< 70% = kurang

Jika tingkat penguasaan kalian cukup atau kurang, maka kalian harus mengulang kembali seluruh pembelajaran.

E. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom "Ya" jika Kalian mampu dan "Tidak" jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

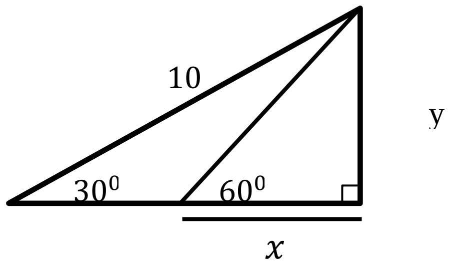
No.	Kemampuan Diri	Ya	Tidak
1.	Saya sudah memahami definisi perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku		
2.	Saya sudah dapat menghitung perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku		
3.	Saya sudah dapat menggunakan perbandingan trigonometri dalam memecahkan masalah kontekstual		

Catatan:
Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,
Bila semua jawaban "Ya", maka kalian dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

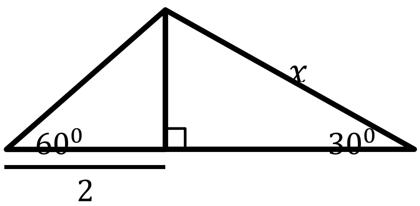
EVALUASI

1. Nyatakalah ukuran sudut berikut ke dalam ukuran radian
   a. 240^0
   b. 330^0
2. Nyatakalah ukuran sudut berikut ke dalam ukuran derajat
   a. $\frac{2\pi}{3}$ rad
   b. $\frac{7\pi}{6}$ rad
3. Hitunglah nilai x pada gambar berikut ini.

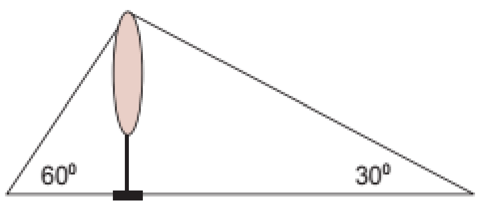
a.



b.



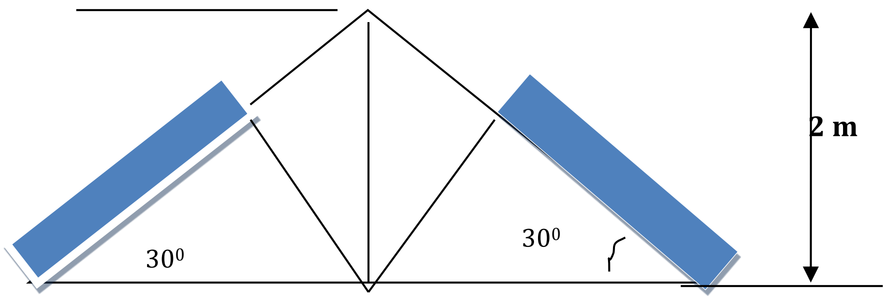
4. Apabila $\sin\theta = \frac{3}{5}$ maka tentukanlah nilai dari $\left(\frac{\sin\theta \cdot \tan\theta - 1}{2\, tan^2\theta}\right)$.
5. Seorang pilot pesawat melihat puncak gunung dari ketinggian 1200 m. Apabila sudut depresi (sudutlihatpilotterhadaparahmendatar)sebesar30^0,maka:
   a. Gambarkan sketsa puncak gunung, posisi pesawat dan ketinggian daritanah
   b. Tentukan jarak pesawat ke puncak gunung
6. Dua anak mengamati puncak pohon dari tempat yang berseberangan seperti tampak pada gambar di bawah ini. Apabila anak pertama melihat dengan sudut elevasi 60° dan anak kedua dengan sudut elevasi 30° dan jarak kedua anak tersebut 200 m. Tentukan tinggi pohon tersebut!



7. Sebuah tangga disandarkan pada suatu pohon kelapa yang batangnya lurus dan mempunyai buah siap panen. Sudut yang dibentuk oleh tangga itu dengan tanah

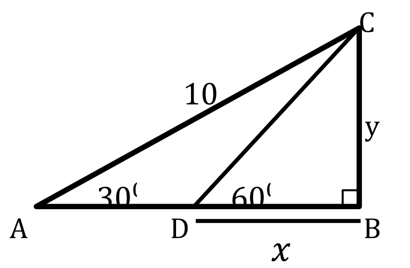
(horizontal) adalah 60°. Jarak kaki tangga ke batang pohon kelapa hingga dapat meraih buah adalah 5 m, hitunglah jarak lintasan yang ditempuh seseorang untuk dapat mengambil buah pohon kelapa tersebut.

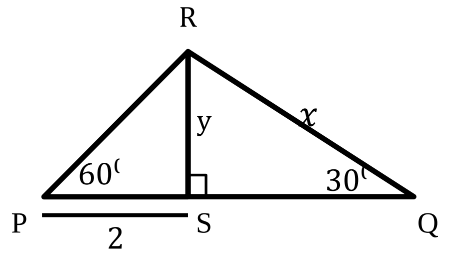
8. Rangka bagian atas sebuah rumah akan dibuat hiasan berupa ornament ukir dari kayu jati seperti tampak pada gambar.



Jika harga membuat ornament ukir Rp. 1.500.000,- per meter, berapa biaya yang harus dikeluarkan untuk membuat orrnament pada rumah tersebut?

Kunci Jawaban Evaluasi.

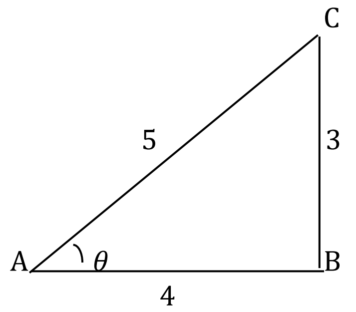
No.	Uraian	Skor
1	a. $240^0 = 240 \text{ x } \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{4}{3}$ rad b. $330^0 = 330 \text{ x } \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{11}{6}\pi$ rad	**5** **5**
2	a. $\frac{2\pi}{3}$ rad $= \frac{2.180^0}{3} = 120^0$ b. $\frac{7\pi}{6}$ rad $= \frac{7.180^0}{6} = 7.30^0 = 210^0$	**5** **5**
3	a. Dimisalkan titik-titik sudut segitiga A, B, C dan D seperti tampak pada gambar.  Diketahui : $\angle BAC = 30^0$ AC = 10 BC = y $\angle BDC = 60^0$ BD = x Dicari x. Untuk menentukan x, perhatikan segitiga BDC. $\tan \angle BDC = \frac{y}{x} \leftrightarrow \tan 60^0 = \frac{y}{x}$ Untuk bisa menentukan nilai x maka harus diketahui nilai y. Perhatikan segitiga ABC, maka berlaku: $\sin \angle BAC = \frac{y}{10}$ $\tan 60^0 = \frac{y}{x}$ $\sin 30^0 = \frac{y}{10}$ $\sqrt{3} = \frac{5}{x}$ $\frac{1}{2} = \frac{y}{10}$ $2y = 10 \Rightarrow y = 5$ $x = \frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ b. Dimisalkan titik-titik sudut segitiga adalah P, Q, R dan S seperti tampak pada gambar.	**1** **1** **2** **6** **1**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


∠RPQ = ∠RPS = 60^0
∠RQP = ∠RQS = 30^0
PS = 2
RS = y
Dicari x.
Untuk menentukan nilai x perhatikan segitiga RQS.

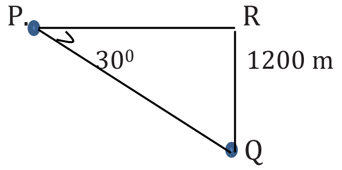
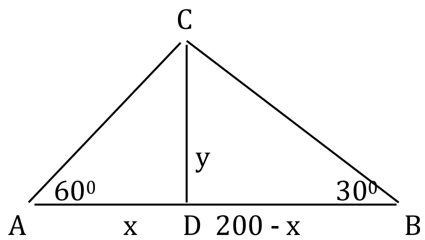
Sin ∠RQS = sin 30^0 = $\frac{RS}{RQ} = \frac{RS}{x}$ ↔ x = $\frac{RS}{\sin 30^0} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = 2y$
Perhatikan segitiga PSR

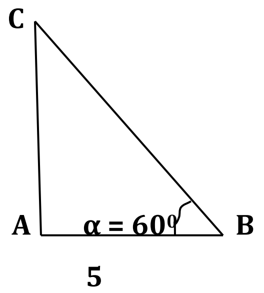
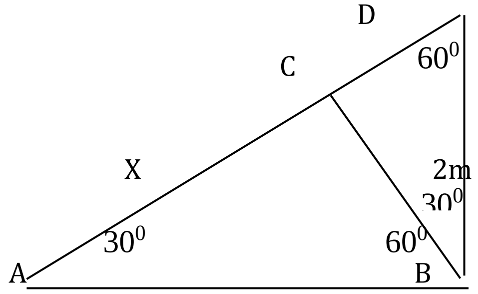
$\tan \angle RPS = \frac{y}{2}$
$\tan 60^0 = \frac{y}{2}$
$\sqrt{3} = \frac{y}{2}$
$y = 2\sqrt{3}$

$\sin\ 30^0 = \frac{y}{x}$
$\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{x}$
$x = 2.2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
</td>
<td>
1
2
6
</td>
</tr>
<tr>
<td>4</td>
<td>
Diketahui $\sin\theta = \frac{3}{5}$
Dari gambar kita dapatkan AB = $\sqrt{AC^2 - BC^2}$=$\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$


Dicari: $\left(\frac{\sin\theta \cdot \tan\theta - 1}{2\,tan^2\theta}\right)$

$\tan\theta = \frac{BC}{BA} = \frac{3}{4}$
$\frac{\sin\theta\ \cdot\ \tan\theta\ -\ 1}{2\,tan^2\theta} = \frac{\frac{3}{5}.\frac{3}{4} - 1}{2(\frac{3}{4})^2}$
$= \frac{\frac{9}{20} - 1}{2.\frac{9}{16}} = \frac{\frac{11}{20}}{\frac{18}{16}}$
$= \frac{\frac{11}{20}}{\frac{9}{8}} = \frac{11}{20} x \frac{8}{9}$
</td>
<td>
2
2
3
3
2
2
</td>
</tr>
</table>

	$= \frac{22}{45}$	**1**
5	Misalkan titik P posisi pesawat dan titik Q puncak gunung.  Jarak pesawat ke puncak gunung = PQ. Sin $\angle$ QPR = $\frac{QR}{PQ} \leftrightarrow \sin 30^0 = \frac{1200}{PQ}$ PQ = $\frac{1200}{\sin 30^0} = \frac{1200}{\frac{1}{2}}$ = 1200 x 2 (pembilang dan penyebut dikalikan 2) PQ = 2400 m	**2** **2** **4** **2**
6	Misalkan posisi anak pertama A, posisi anak ke dua B dan puncak pohon C. Jarak anak pertama dengan pohon x. Perhatikan gambar berikut:  $\angle CAD = 60^0$ AD = x, CD = y $\angle CBD = 30^0$ BD = 200 – x Dicari tinggi pohon = y Perhatikan segitiga ADC. tan $\angle$CAD = $\frac{y}{x} \leftrightarrow$ y = x.tan $\angle$CAD =x. tan 60^0…………………1) Pada segitiga CBD tan $\angle$CBD= $\frac{CD}{BD} = \frac{y}{200-x} \leftrightarrow y = (200-x).\tan 30^0$…………2) Dari persamaan 1) dan 2) didapat: X tan 60^0 = (200 – x).tan 30^0 X .$\sqrt{3}$ = (200 – x) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ x. 3 = (200 – x) .$\frac{1}{3}$.3 (Kedua ruas dikalikan $\sqrt{3}$) 3x = 200 – x 4x = 200 $\leftrightarrow$ x = 50 Subtitusikan x = 50 pada persamaan 1) y = 50. tan 30^0 = 50.$\frac{1}{3}\sqrt{3}$ y = $\frac{50}{3}\sqrt{3}$ Jadi tinggi pohon adalah $\frac{50}{3}\sqrt{3}$ meter.	**1** **1** **2** **2** **1** **1** **1** **1** **1** **1** **1** **1** **1**

7	 $\mathbf{\cos\ \alpha = \frac{AB}{BC} \leftrightarrow BC = \frac{AB}{\cos\alpha} = \frac{5}{\cos 60^0} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10}$ Jadi jarak lintasan yang ditempuh untuk mengambil pohon kelapa adalah 10 m	**1** **3** **1**
8	 Sudut puncak rangka = $180^0 - 30^0 - 30^0 = 120^0$ Perhatikan segitiga ABD: AD = $\frac{BD}{\sin 30^0} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$ DC = BD.cos 60^0 = $2.\frac{1}{2}$= 1 AC = X = 4 – 1 = 3 Panjang ornament ukir yang akan dibuat = 3 + 3 = 6 m Biaya yang harus dikeluarkan untuk membuat ornament adalah ukir = 6 x Rp. 1.500.000,- = Rp. 9.000.000,-	**3** **2** **3** **2** **3** **2**
	Skor Maksimum	**100**

DAFTAR PUSTAKA

Kemdikbud. 2014. *Matematika Kelas XI*. Jakarta : Puskurbuk.

Kemdikbud. 2019. *Paket Unit Pembelajaran Matematika Trigonometri*. Jakarta. Dirjen Guru dan Tenaga Kependidikan. Kementerian Pendidikan Nasional.

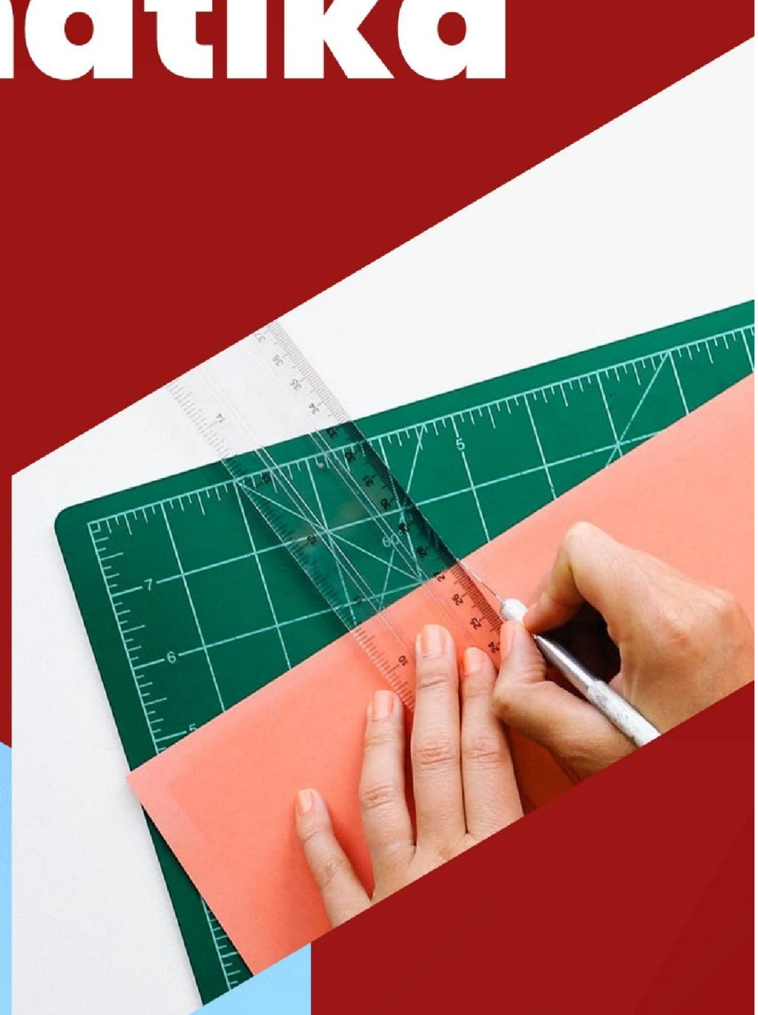
Larson, Ron. 2011. *Trygonometry*. Australia: Brooks.

Markaban. 2009. *Trigonometri*. Yogyakarta. PPPPTK Matematika.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS X

SUDUT-SUDUT BERELASI

MATEMATIKA WAJIB KELAS X

PENYUSUN

Tinasari Pristiyanti

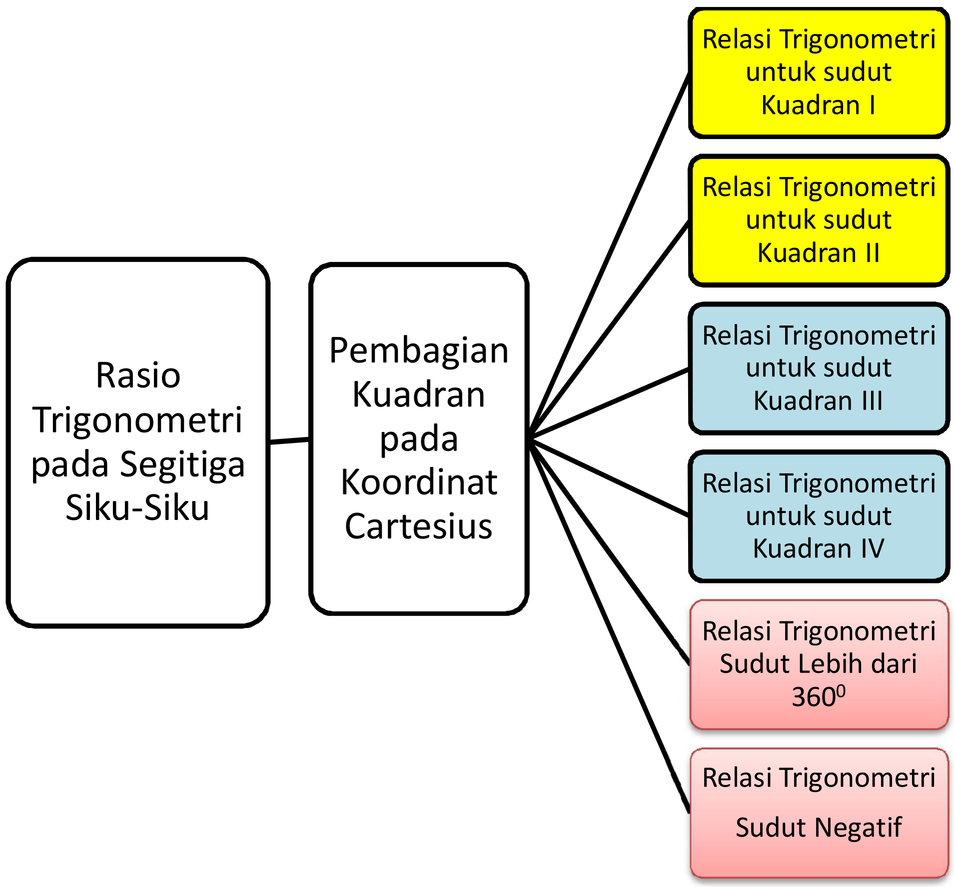
SMA Negeri 3 Bogor

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Trigonometri	:	fungsi yang menghubungkan besar sudut dengan perbandingan sisi-sisi segitaga siku-siku.
Koordinat Cartesius	:	digunakan untuk menentukan kedudukan titik dalam bidang dengan menggunakan dua bilangan yang biasa disebut koordinat x (absis) dan koordinat y (ordinat) dari titik tersebut.
Sinus (Sin)	:	dalam matematika adalah perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi miring (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90^{o})
Cosinus (Cos)	:	dalam matematika adalah perbandingan sisi segitiga yang terletak di sudut dengan sisi miring (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90^{o})
Tangen (Tan/Tg)	:	dalam matematika adalah perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi segitiga yang terletak di sudut (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90^{o})
Kuadran	:	adalah seperempat lingkaran, yaitu setiap dari empat bagian suatu bidang datar yang terbagi oleh suatu sumbu silang (atau sumbu-x dan sumbu-y)
Perbandingan Sudut Berelasi	:	Adalah perbandingan trigonometri sudut berelasi merupakan perluasan dari definisi dasar trigonometri tentang kesebangunan pada segitiga siku-siku yang hanya memenuhi untuk sudut kuadran I atau sudut lancip ($0 - 90°$)

PETA KONSEP


Rasio Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku
Pembagian Kuadran pada Koordinat Cartesius
Relasi Trigonometri untuk sudut Kuadran I
Relasi Trigonometri untuk sudut Kuadran II
Relasi Trigonometri untuk sudut Kuadran III
Relasi Trigonometri untuk sudut Kuadran IV
Relasi Trigonometri Sudut Lebih dari 360⁰
Relasi Trigonometri Sudut Negatif

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Umum
Kelas	:	X
Alokasi Waktu	:	3 x 2 JP (3 Kegiatan pembelajaran)
Judul Modul	:	Sudut-Sudut Berelasi

B. Kompetensi Dasar

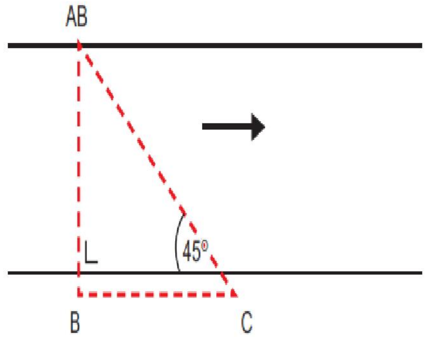
3. 8 Menggeneralisasi rasio trigonometri untuk sudut-sudut di berbagai kuadran dan sudut-sudut berelasi

4.8 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan rasio trigonometri sudut-sudut di berbagai kuadran dan sudut-sudut berelasi

C. Deskripsi Singkat Materi

Sumber: https://img.okezone.com/content/2019/10/28/320/2122764/daftar-jembatan-ikonik-di-indonesia-dari-papua-hingga-palembang-uO4yrK1vdT.jpg

Jembatan merupakan sarana yang sangat penting sebagai penghubung atau akses antar lokasi pada daerah-daerah dengan banyak sungai, atau rintangan-rintangan seperti lembah dalam, alur sungai, danau, saluran irigasi, kereta api dan jalan raya yang melintang tidak sebidang. Saat ini, petani pada beberapa daerah masih menggunakan sungai untuk mengangkut hasil panen dengan menggunakan sampan misalkan di Kalimantan. Kita dapat menaksir panjang jembatan yang akan dibangun di atas sungai menggunakan konsep sudut trigonometri. Berikut ilustrasinya:



AB dimisalkan dengan panjang yang dibutuhkan, titik A diwakili dengan pohon/benda lain yang ada di seberang sungai yang digunakan sebagai acuan. BC adalah jarak yang sengaja dibuat untuk mentaksir panjang jembatan.

Dengan menggunakan konsep di atas, diperoleh panjang AB dengan menggunakan sifat tangent maka diperoleh:

$$tan\ AB\ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow\ tan\ 45^0 = \frac{AB}{BC} \Rightarrow\ AB\ =\ 1.BC$$

Kita telah mengetahui bersama bahwa $tan\ 45^0 = 1$, maka diperoleh bahwa panjang AB = BC.

Kita ketahui bahwa dalam satu putaran besar sudutnya adalah 360^0. Sebagai sudut putar, sudut dikelompokkan menjadi empat wilayah atau kuadran didasarkan pada besarnya sudut, yaitu:

1. Sudut-sudut yang terletak di kuadran I, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara 0^0 sampai 90^0 atau $0^0 < x < 90^0$.
2. Sudut-sudut yang terletak di kuadran II, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara 90^0 sampai 180^0 atau $9^0 < x < 180^0$.
3. Sudut-sudut yang terletak di kuadran III, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara 180^0 sampai 270^0 atau $180^0 < x < 360^0$.
4. Sudut-sudut yang terletak di kuadran IV, yaitu sudut-sudut yang besarnya antara 270^0 sampai 360^0 atau $270^0 < x < 360^0$.
5. Selain sudut pada berbagai kuadran, terdapat pula sudut yang besarnya lebih besar dari 360^0 atau sudut negatif.

Pada modul kali ini kita akan mempelajari nilai trigonometri pada berbagai kuadran dan nilai-nilai sinus, cosinus dan tangen yang saling bersesuaian pada semua kuadran.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Materi bahasan pada modul ini terbagi menjadi **tiga** kegiatan pembelajaran, yaitu:

1. Kegiatan pembelajaran **pertama** membahas tentang sudut-sudut berelasi pada kuadran I dan kuadran II
2. Kegiatan pembelajaran pertama terbagi atas 2 bagian, yaitu bagian 1 membahas tentang sudut-sudut berelasi pada kuadran I. Bagian 2 membahas tentang sudut-sudut berelasi pada kuadran II.
3. Kegiatan pembelajaran **kedua** membahas tentang sudut-sudut berelasi pada kuadran III, kuadran IV dan sudut yang lebih besar dari 360^0

4. Kegiatan pembelajaran kedua terdiri atas 2 bagian. Bagian 1 membahas tentang sudut-sudut berelasi di kuadran III dan bagian 2 membahas tentang sudut-sudut berelasi di kuadran IV
5. Kegiatan pembelajaran **ketiga** membahas tentang sudut yang besarnya lebih dari 360^0 dan sudut bernilai negatif.
6. Kegiatan pembelajaran ketiga terdiri atas 2 bagian. Bagian 1 membahas tentang sudut yang besarnya lebih dari 360^0 dan bagian 2 membahas tentang sudut negatif.
7. Selesaikan setiap bagian dengan tuntas baru berlanjut ke bagian yang berikutnya.
8. Pahami tiap kegiatan dengan tuntas, jangan melanjutkan ke kegiatan berikutnya bila masih ada yang belum dipahami.
9. Setiap kegiatan belajar dilengkapi dengan latihan yang menjadi alat ukur tingkat penguasaan kalian, setelah mempelajari modul ini.
10. Jika kalian belum menguasai 70% dari latihan pada setiap kegiatan pembelajaran, maka kalian dapat mengulanginya kembali.
11. Apabila kalian masih mengalami kesulitan dalam memahami materi yang ada dalam modul ini, silahkan anda berdiskusi dengan teman sekelas yang berada di sekitar rumah anda.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **3** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan, dan soal evaluasi.

Pertama : Sudut-sudut berelasi pada kuadran I dan kuadran II

Kedua : Sudut-sudut berelasi pada kuadran II dan kuadran IV

Ketiga : Sudut-sudut berelasi yang besarnya lebih dari 360^0 dan sudut negatif.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
SUDUT – SUDUT BERELASI PADA KUADRAN I DAN II

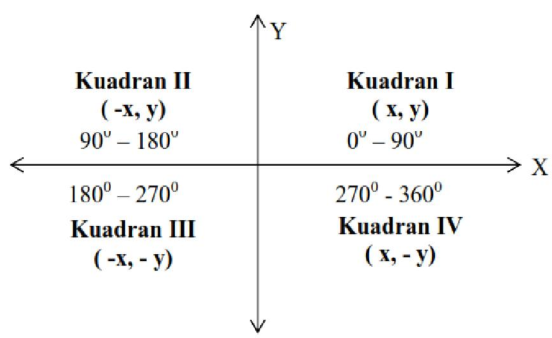
A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat:

1. Menentukan nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut yang berelasi di kuadran I
2. Menentukan nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut yang berelasi di kuadran II

B. Uraian Materi

Sumbu – sumbu pada koordinat membagi bidang koordinat menjadi empat daerah yang disebut sebagai kuadran. Berdasarkan itu maka sudut dalam sebuah koordinat Cartesius dapat dibagi menjadi 4 daerah seperti pada gambar berikut:



Pembagian sudut pada tiap kuadran dapat dibagi menjadi berikut:

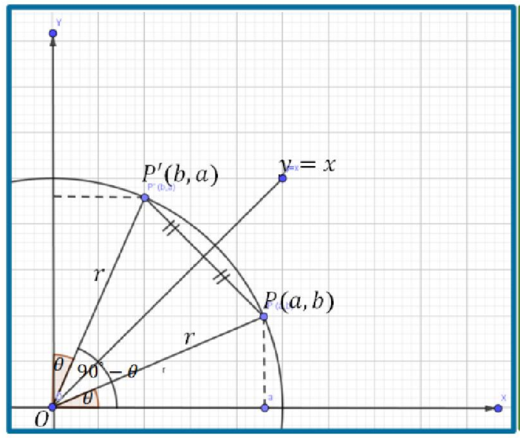
Kuadran	Sudut
Kuadran I	$0^0 < x < 90^0$
Kuadran II	$90^0 < x < 180^0$
Kuadran III	$180^0 < x < 270^0$
Kuadran IV	$270^0 < x < 360^0$

BAGIAN 1. SUDUT BERELASI PADA KUADRAN I

Sudut θ untuk $0^0 < \theta < 90^0$ memiliki relasi dengan sudut-sudut di kuadran I yang meliputi:

a) Relasi sudut θ dengan sudut $(90^0 - \theta)$

Perhatikan gambar berikut!



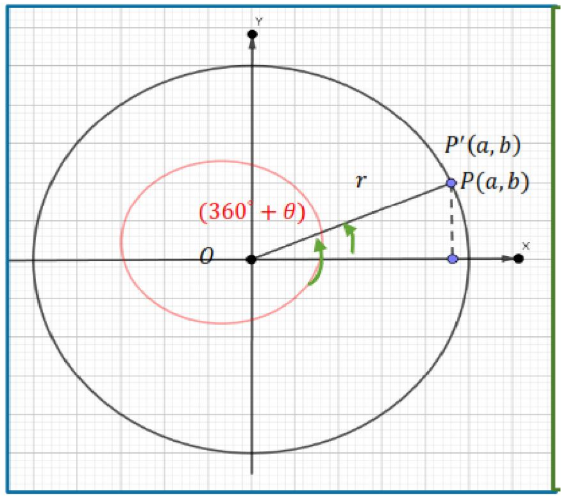
Diketahui sebuah lingkaran yang berpusat di titik O(0,0) dan berjari-jari r, titik P(x,y) dan $\theta = \angle POP'$

Untuk mendapatkan relasi sudut θ dengan sudut $(90^0 - \theta)$ maka titik P(x,y) dicerminkan terhadap garis y = x

Berdasarkan data di atas, dan ingat kembali rasio nilai trigonometri pada segitiga siku-siku maka diperoleh:

Nilai Perbandingan Trigonometri		Kesimpulan
Sudut θ dengan P(a,b)	Sudut $(90^0 - \theta)$ dengan P'(a,b)	Relasi sudut θ dengan sudut $(90^0 - \theta)$
$Sin\ \theta = \frac{b}{r}$	$Sin\ (90^0 - \theta) = \frac{a}{r}$	$Sin\ (90^0 - \theta) = Cos\ \theta$
$Cos\ \theta = \frac{a}{r}$	$Cos\ (90^0 - \theta) = \frac{b}{r}$	$Cos\ (90^0 - \theta) = Sin\ \theta$
$Tan\ \theta = \frac{b}{a}$	$Tan\ (90^0 - \theta) = \frac{a}{b}$	$Tan\ (90^0 - \theta) = \frac{1}{Tan\ \theta}$

b) Relasi sudut θ dengan sudut $(360^0 + \theta)$
Perhatikan gambar berikut!



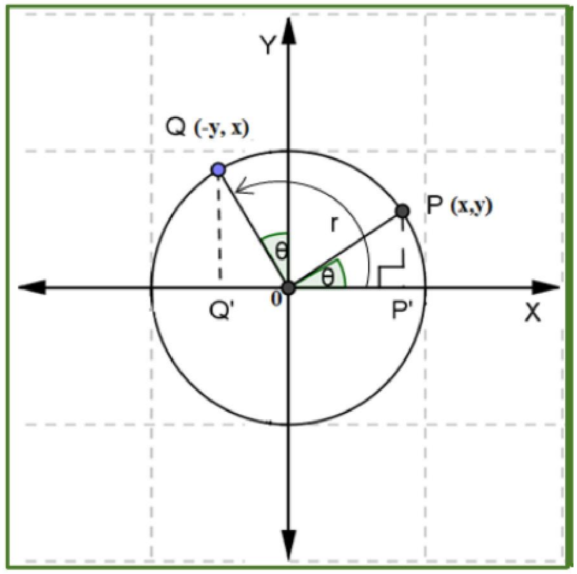
Diketahui sebuah lingkaran yang berpusat di titik O(0,0) dan berjari-jari r, titik P(x,y) dan $\theta = \angle POP'$
Untuk mendapatkan relasi sudut θ dengan sudut $(360^0 + \theta)$ maka rotasikan titik P(x,y) berlawanan arah jarum jam sejauh 360^0

Berdasarkan data di atas, maka dapat dibuat tabel sebagai berikut!

Nilai Perbandingan Trigonometri		**Kesimpulan**
Sudut θ dengan P(a,b)	Sudut $(360^0 + \theta)$ dengan P'(a,b)	Relasi sudut θ dengan sudut $(360^0 + \theta)$
$Sin\ \theta = \frac{b}{r}$	$Sin\ (360^0 + \theta) = \frac{b}{r}$	$Sin\ (360^0 + \theta) = Sin\ \theta$
$Cos\ \theta = \frac{a}{r}$	$Cos\ (360^0 + \theta) = \frac{a}{r}$	$Cos\ (360^0 + \theta) = Cos\ \theta$
$Tan\ \theta = \frac{b}{a}$	$Tan\ (360^0 + \theta) = \frac{b}{a}$	$Tan\ (360^0 + \theta) = Tan\ \theta$

BAGIAN 2. SUDUT BERELASI PADA KUADRAN II

a) Relasi sudut θ dengan sudut $(90^0 + \theta)$

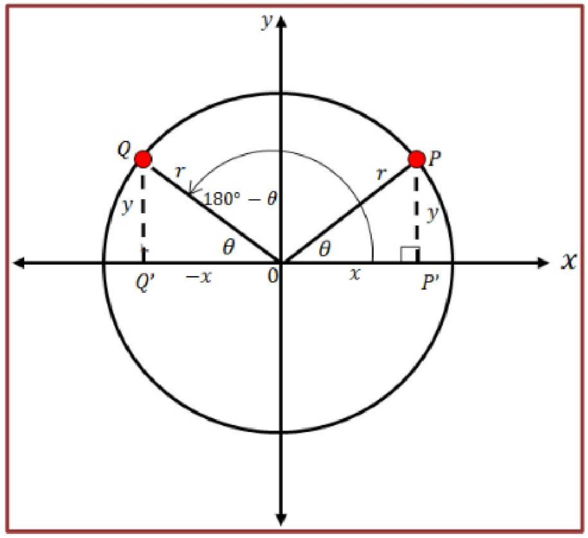


Diketahui sebuah lingkaran yang berpusat di titik O(0,0) dan berjari-jari r, titik P(x,y) dan $\theta = \angle POP'$
Untuk mendapatkan relasi sudut θ dengan sudut $(90^0 + \theta)$ maka cerminkan titik P(x,y) terhadap sumbu-y

Berdasarkan data di atas, maka diperoleh:

Nilai Perbandingan Trigonometri		**Kesimpulan**
Sudut θ dengan P(a,b)	Sudut $(90^0 + \theta)$ dengan P'(a,b)	Relasi sudut θ dengan sudut $(90^0 + \theta)$
$Sin\,\theta = \frac{y}{r}$	$Sin\,(90^0 + \theta) = \frac{x}{r}$	$Sin\,(90^0 + \theta) = Cos\,\theta$
$Cos\,\theta = \frac{x}{r}$	$Cos\,(90^0 + \theta) = -\frac{y}{r}$	$Cos\,(90^0 + \theta) = -Sin\,\theta$
$Tan\,\theta = \frac{y}{x}$	$Tan\,(90^0 + \theta) = -\frac{x}{y}$	$Tan\,(90^0 + \theta) = -\frac{1}{Tan\,\theta}$

b) Relasi sudut θ dengan sudut $(180^0 - \theta)$



Diketahui sebuah lingkaran yang berpusat di titik O(0,0) dan berjari-jari r, titik P(x,y) dan $\theta = \angle POP'$
Untuk mendapatkan relasi sudut θ dengan sudut $(180^0 - \theta)$ maka cerminkan titik P(x,y) terhadap sumbu-y

Berdasarkan data di atas, maka diperoleh:

Nilai Perbandingan Trigonometri		**Kesimpulan**
Sudut θ dengan P(a,b)	Sudut $(180^0 - \theta)$ dengan P'(a,b)	Relasi sudut θ dengan sudut $(180^0 - \theta)$
$Sin\ \theta = \frac{y}{r}$	$Sin\ (180^0 - \theta) = \frac{y}{r}$	$Sin\ (180^0 - \theta) = Sin\ \theta$
$Cos\ \theta = \frac{x}{r}$	$Cos\ (180^0 - \theta) = -\frac{x}{r}$	$Cos\ 180^0 - \theta) = -\ Cos\ \theta$
$Tan\ \theta = \frac{y}{x}$	$Tan\ (180^0 - \theta) = -\frac{y}{x}$	$Tan\ (180^0 - \theta) = -Tan\ \theta$

Untuk lebih memahami relasi sudut-sudut dalam kuadran I dan II dan untuk mendapatkan nilai-nilai trigonometrinya, maka kalian perhatikan contoh berikut ini.

CONTOH 1

Untuk setiap perbandingan trigonometri berikut, nyatakan dalam perbandingan trigonometri sudut komplemennya!

a) Sin 20°
b) Tan 40°
c) Cos 53°

Jawab:

a) Sin 20° = Sin (90° - 70°) = Cos 70°
   Hal ini berarti bahwa nilai Sin 20° sama dengan nilai Cos 70°
b) Tan 40° = Tan (90° - 50°) = Cot 50°
   Hal ini berarti bahwa nilai Tan 40° sama dengan nilai Cot 50°
c) Cos 53° = Cos (90° - 37°) = Sin 37°
   Hal ini berarti bahwa nilai Cos 53° sama dengan nilai Sin 73°

CONTOH 2

Nyatakan Tan 143° dalam sudut 37° !

Jawab:

Sudut 143° terletak pada kuadran II, sehingga tan 143° bernilai negatif.

Tan 143° = Tan (180° – 37°) = - Tan 37°

Maka Tan 143° dapat dinyatakan dalam sudut 37° sebagai -Tan 37°.

CONTOH 3

Tentukan nilai dari Sin 150°. Cosec 135°.

Jawab:

Sudut 150^0 dan 135^0 keduanya berada di kuadran I, maka kita menggunakan relasi sudut di kuadran I.

$$Sin\ 150^0 . Cosec\ 135^0 = Sin\ (180-30)^0 . \frac{1}{Sin\ (180-45)^0}$$

$$= Sin\ 30^0 . \frac{1}{Sin\ 45^0} = \frac{1}{2} . \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

C. Rangkuman

Berdasarkan pembahasan di atas, maka sudut-sudut berelasi pada kuadran I dan II dapat disimpulkan sebagai berikut:

KUADRAN I

$$Sin\ (90^0 - \theta) = Cos\ \theta$$
$$Cos\ (90^0 - \theta) = Sin\ \theta$$
$$Tan\ (90^0 - \theta) = \frac{1}{Tan\ \theta}$$

$$Sin\ (360^0 + \theta) = Sin\ \theta$$
$$Cos\ (360^0 + \theta) = Cos\ \theta$$
$$Tan\ (360^0 + \theta) = Tan\ \theta$$

KUADRAN II

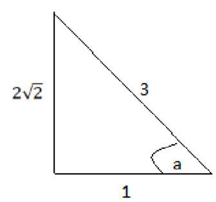
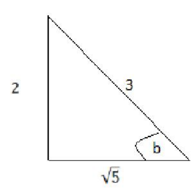
$$Sin\ (90^0 + \theta) = Cos\ \theta$$
$$Cos\ (90^0 + \theta) = -Sin\ \theta$$
$$Tan\ (90^0 + \theta) = -\frac{1}{Tan\ \theta}$$

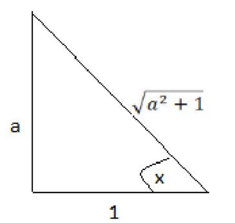
$$Sin\ (180^0 - \theta) = Sin\ \theta$$
$$Cos\ 180^0 - \theta) = -Cos\ \theta$$
$$Tan\ (180^0 - \theta) = -Tan\ \theta$$

D. Latihan Soal

1. Tentukan nilai eksak dari bentuk berikut: (nyatakan dalam bentuk paling sederhana)
    a. cot 150^0
    b. cos 120^0
2. Tentukan nilai trigonometri berikut dalam sudut lancip
    a. sin 165^0
    b. tan 105^0
3. Diketahui nilai $cos\ a\ = -\frac{1}{3}$ dan a berada dikuadran II maka tentukan nilai $sin\ a$.
4. Diketahui nilai $sin\ b\ = \frac{2}{3}$ dan a berada dikuadran II maka tentukan nilai $tan\ b$
5. Tentukan bentuk sederhana dari $\frac{sin\ 70^0.sec\ 140^0\ tan\ 50^0}{cos\ 20^0.sec\ 40^0\ tan\ 130^0}$.
6. Tentukan bentuk sederhana dari $\frac{cos\ 75^0.sec\ 15^0}{cos\ 15^0.cot\ 165^0}$.
7. Tentukan nilai dari $cos^2\ 30^0 - sin^2\ 135^0\ + 8\ sin\ 45^0\ cos\ 135^0$.
8. Jika x di kuadran II dan tan x = a, maka tentukan nilai sin (90+x).

PEMBAHASAN

No	Pembahasan	Skor Maksimal
1	a. $\cot 150^0 = \frac{1}{\tan 150^0} = \frac{1}{\tan (180-30)^0} = \frac{1}{-\tan 30} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ b. $\cos 120^0 = \cos (180-60)^0 = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$	5 5
2.	a. $\sin 165^0 = \sin (180-15)^0 = \sin 15^0$ b. $\tan 105^0 = \tan (90+15)^0 = -\cot 15^0$	5 5
3.	Karena a berada di kuadran II, maka $90^0 < a < 180^0$. Karena a berada di kuadran II, mana nilai dari sin a adalah positif. Dengan menggunakan rasio trigonometri pada segitiga siku-siku maka diperoleh bahwa: Dengan melihat segitiga siku-siku di samping, maka diperoleh bahwa: $\sin a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 	10
4.	Pembahasan: Karena b berada di kuadran II, maka nilai tan b adalah negatif. Perhatikan segitiga siku-siku dibawah ini: Dengan melihat segitiga siku-siku disamping, maka diperoleh bahwa: $\tan b = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$ 	10
5.	Pembahasan: $\frac{\sin 70^0 . \sec 140^0 \tan 50^0}{\cos 20^0 . \sec 40^0 \tan 130^0}$ $= \frac{\sin 70^0 . \sec 140^0 \tan 50^0}{\cos (90-70)^0 . \sec (180-140)^0 \tan (180-50)^0}$ $= \frac{\sin 70^0 . \sec 140^0 \tan 50^0}{\sin 70^0 . (-\sec 140^0) . (-\tan 50^0)} = 1$	10
6.	$\frac{\cos 75^0 . \sec 15^0}{\cos 15^0 . \cot 165^0} = \frac{\cos 75^0 . \sec 15^0}{\cos (90-75)^0 . \cot (180-15)^0}$ $= \frac{\cos 75^0 . \sec 15^0}{-\cos 75^0 . -1\,(\cot 15^0)}$	10

	$= \dfrac{-1.\ cos\ 15^0}{cos\ 15^0 . sin\ 15^0} = -\dfrac{1}{sin\ 15^0}$ $= cosec\ 15^0$	
7.	$cos^2\ 30^0 - sin^2\ 135^0 + 8\ sin\ 45^0\ cos\ 135^0$ $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 8.\frac{1}{2}$ $= \frac{1}{4} - 4 = 3\frac{3}{4}$	10
8.	Karena x berada di kuadran II, maka $90^0 < x < 180^0$, maka nilai dari Sin x adalah positif. Dengan menggunakan rasio trigonometri pada segitiga siku-siku Dengan melihat segitiga siku-siku di samping, maka diperoleh: $Sin\ x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ Sin (90+x) = Sin x = $\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ 	10
	Jumlah Skor	80
	Jumlah nilai	$\dfrac{Skor}{Jumlah\ Skor}\ X\ 100$

E. Penilaian Diri

Berilah tanda ceklist (V) pada kotak yang kalian anggap paling sesuai. Setelah mempelajari dan mengerjakan pembelajaran 1 pada modul ini, bagaimana penguasaan kalian terhadap materi-materi berikut:

No	Materi	Tidak Menguasai	Kurang Menguasai	Menguasai
1	Menentukan nilai trigonometri sudut berelasi di kuadran I dalam bentuk sudut $(90\text{-}x)^0$			
2.	Menentukan nilai trigonometri sudut berelasi di kuadran I dalam bentuk sudut $(360\text{-}x)^0$			
3.	Menentukan nilai trigonometri sudut berelasi di kuadran II dalam bentuk sudut $(90+x)^0$			
4.	Menentukan nilai trigonometri sudut berelasi di kuadran II dalam bentuk sudut $(180\text{-}x)^0$			

Catatan:

1. Jika soal latihan kalian memperoleh nilai <70% maka kembali pelajari dan ulang kembali pembelajaran 1 dari awal.
2. Jika dari ceklist yang kalian buat <80% tidak atau kurang dikuasai, maka kembali pahami dan ulang kembali kegiatan pembelajaran 1 dari awal.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
SUDUT – SUDUT BERELASI PADA KUADRAN III DAN IV

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan dapat:

1. Menentukan nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut yang berelasi di kuadran III
2. Menentukan nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut yang berelasi di kuadran IV

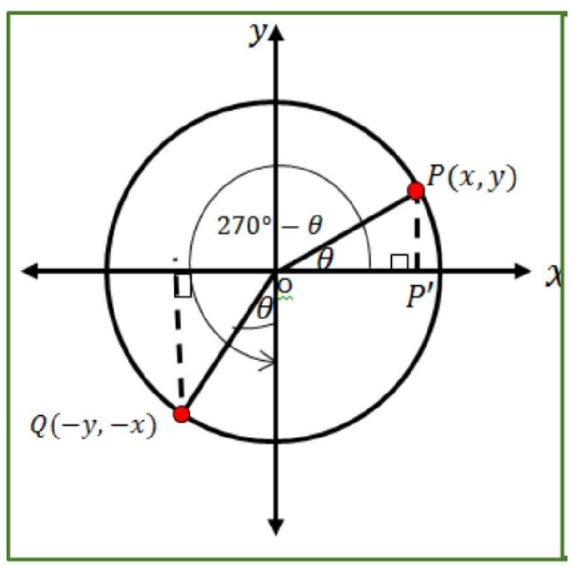
B. Uraian Materi

Pada pembelajaran ini kalian akan melanjutkan untuk membahas sudut berelasi untuk sudut yang berada pada kuadran III dan kuadran IV. Sama seperti pada pembelajaran sebelumnya, maka pada pembelajaran kali ini kita juga akan mendapatkan 4 (empat) bentuk sudut berelasi.

BAGIAN 1. SUDUT BERELASI PADA KUADRAN III

Sudut θ untuk $0^0 < x < 90^0$, memiliki relasi dengan sudut-sudut di kuadran III meliputi relasi sudut θ dengan sudut $(270^0 - \theta)$ atau relasi sudut sudut θ dengan sudut $(180^0 + \theta)$

a) Relasi sudut θ dengan sudut $(270^0 - \theta)$



Diketahui sebuah lingkaran yang berpusat di titik O(0,0) dan berjari-jari r, titik P(x,y) dan $\theta = \angle POP'$

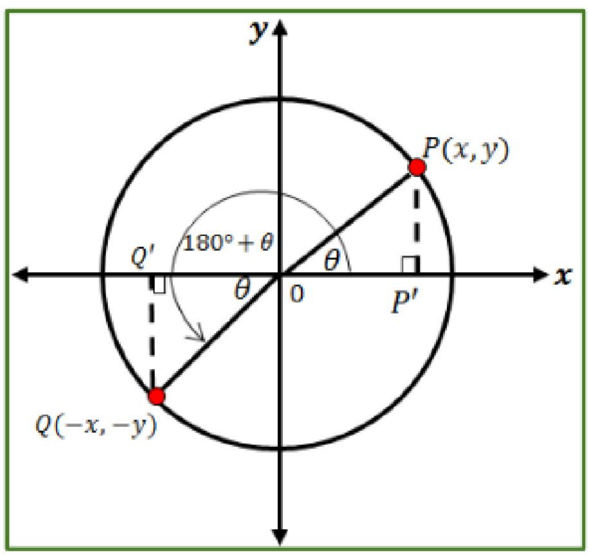
Untuk mendapatkan relasi sudut θ dengan sudut $(270^0 - \theta)$ maka cerminkan titik P(x,y) terhadap garis y = x dan dilanjutkan dengan rotasi sejauh 180^0 berlawanan arah jarum jam.

Berdasarkan data di atas, maka diperoleh:

Nilai Perbandingan Trigonometri		Kesimpulan
Sudut θ dengan P(a,b)	Sudut $(270^0 - \theta)$ dengan Q'(-y, -x)	Relasi sudut θ dengan sudut $(270^0 - \theta)$
$sin\,\theta = \frac{y}{r}$	$sin\ (270^0 - \theta) = -\frac{x}{r}$	$sin\ (270^0 - \theta) = -Cos\,\theta$
$cos\,\theta = \frac{x}{r}$	$cos\ (270^0 - \theta) = -\frac{y}{r}$	$cos\ (270^0 - \theta) = -\,Sin\,\theta$
$tan\,\theta = \frac{y}{x}$	$tan\ (270^0 - \theta) = \frac{x}{y}$	$tan\ (270^0 - \theta) = \frac{1}{Tan\,\theta}$

Dari tabel di atas terdapat beberapa perbandingan trigonometri sudut θ dengan sudut $(270^0 - \theta)$ yang bernilai sama dengan tanda positif dan negatif yang berbeda/sama.

b) Relasi sudut θ dengan sudut $(180^0 + \theta)$



Diketahui sebuah lingkaran yang berpusat di titik O(0,0) dan berjari-jari r, titik P(x,y) dan $\theta = \angle POP'$

Untuk mendapatkan relasi sudut θ dengan sudut $(180^0 + \theta)$ maka cerminkan titik P(x,y) dirotasikan sejauh 180^0 berlawanan arah jarum jam.

Berdasarkan data di atas, maka diperoleh:

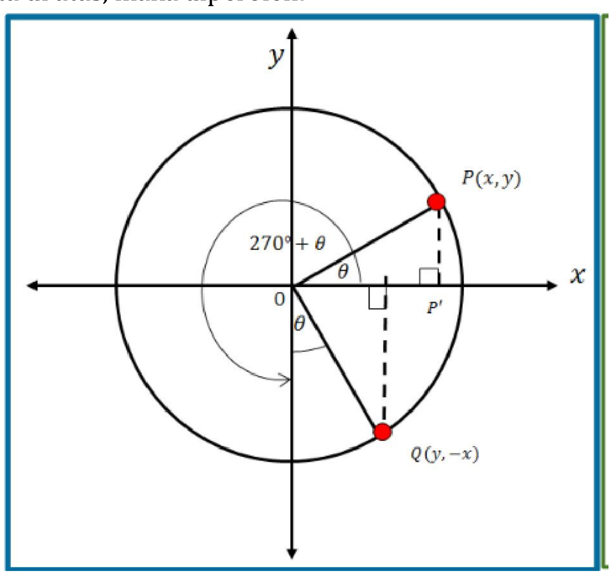
Nilai Perbandingan Trigonometri		Kesimpulan
Sudut θ dengan P(a,b)	Sudut $(180^0 + \theta)$ dengan Q'(-y, -x)	Relasi sudut θ dengan sudut $(180^0 + \theta)$
$sin\,\theta = \frac{y}{r}$	$sin\ (180^0 + \theta) = -\frac{y}{r}$	$sin\ (180^0 + \theta) = -sin\,\theta$
$cos\,\theta = \frac{x}{r}$	$cos\ (180^0 + \theta) = -\frac{x}{r}$	$cos\ (180^0 + \theta) = -\,cos\,\theta$
$tan\,\theta = \frac{y}{x}$	$tan\ (180^0 + \theta) = \frac{y}{x}$	$tan\ (180^0 + \theta) = tan\,\theta$

Dari tabel di atas terdapat beberapa perbandingan trigonometri sudut θ dengan sudut $(180^0 + \theta)$ yang bernilai sama dengan tanda positif/negatif yang berbeda/sama.

BAGIAN 2. SUDUT BERELASI PADA KUADRAN IV

Sudut θ untuk $0^0 < x < 90^0$, memiliki relasi dengan sudut-sudut di kuadran IV meliputi relasi sudut θ dengan sudut $(270^0 + \theta)$ atau relasi sudut sudut θ dengan sudut $(360^0 + \theta)$.

a) Relasi sudut θ dengan sudut $(270^0 + \theta)$
   Berdasarkan data di atas, maka diperoleh:

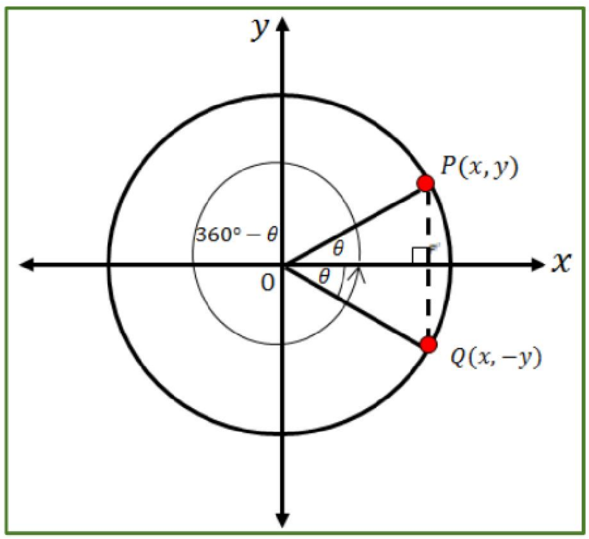


Diketahui sebuah lingkaran yang berpusat di titik O(0,0) dan berjari-jari r, titik P(x,y) dan $\theta = \angle POP'$.
Untuk mendapatkan relasi sudut θ dengan sudut $(270^0 + \theta)$ maka cerminkan titik P(x,y) terhadap garis y = x dan dilanjutkan pencerminan terhadap sumbu-x.

Nilai Perbandingan Trigonometri		Kesimpulan
Sudut θ dengan P(a,b)	Sudut $(270^0 + \theta)$ dengan Q'(y, -x)	Relasi sudut θ dengan sudut $(270^0 + \theta)$
$\sin\theta = \frac{y}{r}$	$\sin\ (270^0 + \theta) = -\frac{x}{r}$	$\sin\ (270^0 + \theta) = -\cos\theta$
$\cos\theta = \frac{x}{r}$	$\cos\ (270^0 + \theta) = \frac{y}{r}$	$\cos\ (270^0 + \theta) = \sin\theta$
$\tan\theta = \frac{y}{x}$	$\tan\ (270^0 + \theta) = -\frac{x}{y}$	$\tan (270^0 + \theta) = -\frac{1}{\tan\theta}$

Dari tabel di atas terdapat beberapa perbandingan trigonometri sudut θ dengan sudut $(270^0 + \theta)$ yang bernilai sama dibedakan tanda negatif atau positifnya

b) Relasi sudut θ dengan sudut $(360^0 - \theta)$
Berdasarkan data di atas, maka diperoleh:



Diketahui sebuah lingkaran yang berpusat di titik O(0,0) dan berjari-jari r, titik P(x,y) dan $\theta = \angle POP'$.
Untuk mendapatkan relasi sudut θ dengan sudut $(360^0 - \theta)$ maka cerminkan titik P(x,y) dicerminkan terhadap sumbu-x.

Diketahui sebuah lingkaran yang berpusat di titik O(0,0) dan berjari-jari r, titik P(x,y) dan $\theta = \angle POP'$
Untuk mengetahui relasi sudut θ dengan sudut $(180^0 - \theta)$, maka titik P(x, y) diputar sejauh 90^0 berlawanan arah jarum jam.

Berdasarkan di atas, maka diperoleh:

Nilai Perbandingan Trigonometri		Kesimpulan
Sudut θ dengan P(a,b)	Sudut $(360^0 - \theta)$ dengan Q'(y, -x)	Relasi sudut θ dengan sudut $(270^0 + \theta)$
$sin\,\theta = \frac{y}{r}$	$sin\ (360^0 - \theta) = -\frac{y}{r}$	$sin\ (360^0 - \theta) = -sin\,\theta$
$cos\,\theta = \frac{x}{r}$	$cos\ (360^0 - \theta) = \frac{x}{r}$	$cos\ (360^0 - \theta) = cos\,\theta$
$tan\,\theta = \frac{y}{x}$	$tan\ (360^0 - \theta) = -\frac{y}{x}$	$tan\,(360^0 - \theta) = -tan\,\theta$

Dari tabel di atas terdapat beberapa perbandingan trigonometri sudut θ dengan sudut $(360^0 - \theta)$ yang bernilai sama dibedakan tanda negatif atau positifnya

C. Rangkuman

Berdasarkan pembahasan di atas, maka sudut-sudut berelasi pada kuadran I dan II dapat disimpulkan sebagai berikut:

KUADRAN III

$$Sin\ (270^0 - \theta) = -Cos\,\theta$$
$$Cos\ (270^0 - \theta) = -Sin\,\theta$$
$$Tan\ (270^0 - \theta) = \frac{1}{Tan\,\theta}$$

$$Sin\ (180^0 + \theta) = -Sin\,\theta$$
$$os\ (180^0 + \theta) = -Cos\,\theta$$
$$an\ (180^0 + \theta) = Tan\,\theta$$

KUADRAN IV

$$Sin\ (270^0 + \theta) = -Cos\,\theta$$
$$Cos\ (270^0 + \theta) = Sin\,\theta$$
$$Tan\,(270^0 + \theta) = -\frac{1}{Tan\,\theta}$$

$$Sin\ (360^0 - \theta) = -Sin\,\theta$$
$$Cos\ (360^0 - \theta) = Cos\,\theta$$
$$Tan\,(360^0 - \theta) = -Tan\,\theta$$

D. Latihan Soal

Agar kalian lebih terampil dalam menentukan nilai trigonometri pada sudut-sudut yang berelasi pada kuadran III dan IV, maka pelajari beberapa latihan soal dibawah ini.

1. Tentukan nilai dari sin 240^0
2. Tentukan nilai dari cos $\left[-\frac{4}{3}\pi\right]$
3. Tentukan nilai dari $sin\ 240^0 + cos\ 315^0$

4. Tentukan nilai dari $sin\ \left(\frac{13}{3}\pi\right)\ .cos\ \left(\frac{11}{6}\pi\right)$
5. Tentukan nilai dari $cos\ 330^0 . sin\ [-210]^0 - \ tan\ (-315)^0\ .cot\ (-330)^0$
6. Diketahui $tan\ a = \frac{2}{3}$ dan a berada dikuadran III, maka tentukan nilai dari $\frac{cos\ a+6\ sin\ a}{3\ sin\ a-cos\ a}$
7. Nilai dari tan 2100^0 adalah ….
8. Diketahui tan 25 = p, maka tentukan nilai dari $\frac{tan\ 205^0-tan\ \ 115^0}{tan\ 245^0+tan\ \ 335^0}$

PEMBAHASAN

No	Pembahasan	Skor Maksimal
1.	sin 240^0 = sin (180 + 60) = - sin 60 = $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	10
2.	$\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = cos\ \left(-\frac{4}{3}.180\right) = cos(-240)$ $= cos\ (360 - 240) = cos\ (120) = -cos\ 60 = -\frac{1}{2}$	10
3.	$sin\ 240^0 + cos\ 315^0$ = sin (180 + 60) + cos (360-45) = - sin 60 + cos 45 $= -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$	10
4.	$sin\left(\frac{13}{3}\pi\right).cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) = sin\ (780).cos\ (330)$ $= sin\ (780 - 2.360).cos\ 30$ $= sin\ 60.cos\ 30 = \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $= \frac{3}{4}$	10
5.	$cos\ 330^0.sin\ [-210]^0 - tan\ (-315)^0.cot\ (-330)^0$ $= cos\ 30.sin\ 150 - tan\ 45.cot\ 30$ $= \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2} - 1.\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \sqrt{3} = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$	10
6.	Karena a dikuadran III, maka nilai sin a < 0, dan cos a < 0. Karena nilai $tan\ a = \frac{2}{3}$, maka dengan menggunakan perbandingan rasio segitiga siku-siku diperoleh bahwa: $sin\ a = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2}{13}\sqrt{13}$, dan $cos\ a = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3}{13}\sqrt{13}$. Maka: $\frac{cos\ a + 6\ sin\ a}{3\ sin\ a - cos\ a} = \frac{\frac{3}{13}\sqrt{13} + 6.\frac{2}{13}\sqrt{13}}{3.\frac{2}{13}\sqrt{13} - \frac{3}{13}\sqrt{13}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{13}(3 - 12)}{\frac{\sqrt{13}}{13}(6 - 3)}$ $= \frac{-9}{3} = -3$	10
7.	tan 2100^0 = tan (5x360 + 300) = tan 300 = - tan 60 = $-\sqrt{3}$	10
8.	$\frac{tan\ 205^0 - tan\ 115^0}{tan\ 245^0 + tan\ 335^0} = \frac{tan\ 25 + tan\ 65}{tan\ 65 - tan\ 25}$ $= \frac{tan\ 25 - \frac{1}{tan\ 25}}{\frac{1}{tan\ 25} - tan\ 25} = \frac{p - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p} - p} = \frac{(p^2 - 1)}{(1 - p^2)} = -1$	10
	Jumlah Skor	80
	Jumlah Nilai	$\frac{skor}{Jumlah\ Skor}\ x\ 100$

E. Penilaian Diri

Berilah tanda ceklist (V) pada kotak yang kalian anggap paling sesuai. Setelah mempelajari dan mengerjakan pembelajaran 2 pada modul ini, bagaimana penguasaan kalian terhadap materi-materi berikut:

No	Materi	Tidak Menguasai	Kurang Menguasai	Menguasai
1	Menentukan nilai trigonometri sudut berelasi di kuadran III dalam bentuk sudut $(180 - x)^0$			
2.	Menentukan nilai trigonometri sudut berelasi di kuadran III dalam bentuk sudut $(270 - x)^0$			
3.	Menentukan nilai trigonometri sudut berelasi di kuadran IV dalam bentuk sudut $(270 + x)^0$			
4.	Menentukan nilai trigonometri sudut berelasi di kuadran IV dalam bentuk sudut $(360 - x)^0$			

Catatan:

1. Jika soal latihan kalian memperoleh nilai <70% maka kembali pelajari dan ulang kembali pembelajaran 2 dari awal.
2. Jika dari ceklist yang kalian buat <70% tidak atau kurang dikuasai, maka kembali pahami dan ulang kembali kegiatan pembelajaran 2 dari awal.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
SUDUT LEBIH BESAR DARI 360⁰ DAN SUDUT NEGATIF

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan dapat:

1. Menentukan nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut yang berelasi dengan sudut lebih besar dari 360^0
2. Menentukan nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut yang berelasi dengan sudut negatif.

B. Uraian Materi

BAGIAN 1. SUDUT LEBIH BESAR DARI 360^0

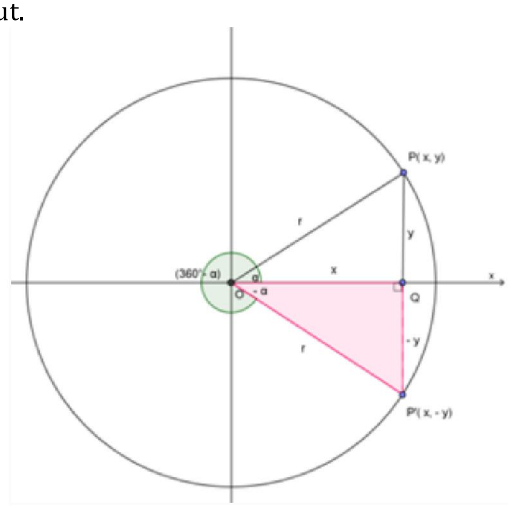
Kita ketahui bahwa besar sudut dalam satu kali lingkaran adalah 360^0. Maka jika kita mempunyai sudut yang besarnya lebih dari 360^0 sudut tersebut harus diubah terlebih dahulu menjadi bentuk $(\alpha + k.360^0)$, dengan k = 1, 2, 3, 4, …..

Dengan demikian diperoleh bahwa:
1. $sin\ (\alpha + k.360^0) = sin\ \alpha$
2. $cos\ (\alpha + k.360^0) = cos\ \alpha$
3. $tan\ (\alpha + k.360^0) = tan\ \alpha$

Contoh.
1. $sin\ (750^0) = sin\ (30 + 2\ x\ 360)^0 = sin\ 30^0 = \frac{1}{2}$
2. $cos\ (1500^0) = cos\ (60 + 4\ x\ 360)^0 = cos\ 60^0 = \frac{1}{2}$

BAGIAN 2. SUDUT NEGATIF

Perhatikan gambar berikut.



Pada gambar di atas diperoleh bahwa pada ∠QOP = α yang berlawanan arah dengan jarum jam. Sedangkan ∠QOP' = $-\alpha$ adalah sudut yang berlawanan dengan arah jarum jam. Ingat kembali bahwa satu putaran lingkaran besarnya adalah 360^0.

Maka diperolah bahwa:

1. $sin\ (-\alpha) = sin\ (360^0 - \alpha)$. Karena sudut $(-\alpha)$ berada dikuadran IV, maka nilai sinus bernilai negatif, maka diperoleh bahwa nilai $sin\ (-\alpha) = sin\ (360^0 - \alpha) = -sin\ \alpha$
2. $cos\ (-\alpha) = Cos\ (360^0 - \alpha)$. Karena sudut $(-\alpha)$ berada dikuadran IV, maka nilai cosinus bernilai positif, maka diperoleh bahwa nilai $cos\ (-\alpha) = cos\ (360^0 - \alpha) = cos\ \alpha$
3. $tan\ (-\alpha) = tan\ (360^0 - \alpha)$. Karena sudut $(-\alpha)$ berada dikuadran IV, maka nilai tangen bernilai negatif, maka diperoleh bahwa nilai $tan\ (-\alpha) = tan\ (360^0 - \alpha) = -\ tan\ \alpha$

Contoh.

1. $sin\ (-45^0) = -sin\ 45^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
2. $cos\ (-225^0) = cos\ 225^0 = cos\ (180 + 45) = -cos\ 45^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
3. $tan\ \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -tan\ \frac{5\pi}{6} = -tan\ \left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -tan\ \frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

C. Rangkuman

1. Jika sudut A lebih besar dari 360, mak asudut A harus diubah terlebih dahulu sehingga berbentuk $(\alpha + k.360^0)$, dengan k = 1, 2, 3, 4, ..., sehingga diperoleh bahwa:

$$\boxed{\begin{array}{c} sin\ (\alpha + k.360^0) = sin\ \alpha \\ cos\ (\alpha + k.360^0) = cos\ \alpha \\ tan\ (\alpha + k.360^0) = tan\ \alpha \end{array}}$$

2. Jika sudut A adalah sudut negatif, maka artinya sudut A berlawanan arah dengan jarum jam. Sehingga diperoleh bahawa:

$$\boxed{\begin{array}{c} sin\ (-\alpha) = -sin\ \alpha \\ cos\ (-\alpha) = cos\ \alpha \\ tan\ (-\alpha) = -tan\ \alpha \end{array}}$$

D. Latihan Soal

Untuk lebih memahami materi terkait dengan nilai rasio trigonometri untuk sudut yang berelasi dengan besar sudut lebih besar dari 360^0 dan sudut negatif, maka kerjakan soal-soal di bawah ini sebagai latihan.

1. Nilai dari Sin 480^0 = ….
   A. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   B. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

E. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. Nilai $cos\ (-1530^0). tan\ (2010^0) = \cdots$.
   A. -1
   B. 0
   C. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   E. $\frac{3}{2}$

3. Nilai sin 150^0 + cos 510^0 + tan 4110^0 – tan 210^0 adalah ….
   A. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$
   B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
   C. $\frac{1}{2} - \frac{7}{6}\sqrt{3}$
   D. $\frac{1}{2} + \frac{7}{6}\sqrt{3}$
   E. $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}$

4. Nilai $sin\ \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ adalah ….
   A. -1
   B. $-\frac{1}{2}$
   C. 0
   D. $\frac{1}{2}$
   E. 1

5. Nilai dari $cos\ 150^0 + sin\ 45^0\ + \frac{1}{2}cot\ (-330^0) = \ldots$.
   A. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   B. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   D. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. 1

PEMBAHASAN

1. Jawaban : A
   Pembahasan:
   sin 480^0 = sin ($1 \times 360^0 + 120^0$) = sin 120^0 = - sin 60^0 = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
2. Jawaban : B
   Pembahasan:
   Ingat bahwa cos _(-a) = cos a.
   $$cos\ (-1530^0).tan\ (2010^0) = cos\ (4.360^0 + 90^0).tan\ (5\ x\ 360^0 + 210^0)$$
   $$= cos\ 90^0\ .tan\ 30^0 = 0\ x\ \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0$$
3. Jawaban: C
   Pembahasan:
   sin 150^0 + cos 510^0 + tan 4110^0 – tan 210^0 =
   sin 150^0 + cos ($360^0 + 150^0$) + tan ($11 \times 360^0 + 150^0$)– tan 210^0 =
   = sin 150^0 + cos 150^0 + tan 150^0 – tan 210^0
   $= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$
   $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{2}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2} - \frac{7}{6}\sqrt{3}$

4. Jawaban : A
   Pembahasan:
   $$sin\ \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -sin\ \frac{\pi}{2} = -1$$
5. Jawaban : C
   Pembahasan :
   $$cos\ 150^0 + sin\ 45^0 + \frac{1}{2}\ cot\ (-330^0) = -cos\ 30^0 + sin\ 45^0 - \frac{1}{2}\ \frac{1}{tan\ 330^0}$$
   $$= -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

E. Penilaian Diri

Berilah tanda ceklist (V) pada kotak yang kalian anggap paling sesuai. Setelah mempelajari dan mengerjakan pembelajaran 3 pada modul ini, bagaimana penguasaan kalian terhadap materi-materi berikut:

No	Materi	Tidak Menguasai	Kurang Menguasai	Menguasai
1	Menentukan nilai trigonometri sudut berelasi dengan besar sudut lebih dari 360^0			
2.	Menentukan nilai trigonometri sudut berelasi dengan besar sudut negatif			

Catatan:
1. Jika soal latihan kalian memperoleh nilai <70% maka kembali pelajari dan ulang kembali pembelajaran 3 dari awal.
2. Jika dari ceklist yang kalian buat <50% tidak atau kurang dikuasai, maka kembali pahami dan ulang kembali kegiatan pembelajaran 3 dari awal.

EVALUASI

PILIHLAH JAWABAN YANG BENAR

1. Nilai dari cos 75°– sin 165° adalah …
   A. $\frac{1}{4}\sqrt{2}$
   B. 0
   C. $\frac{1}{4}\sqrt{6}$
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. 1
2. Nilai dari $\frac{\sin 70^0 \sec 140^0 . \tan 50^0}{\cos 20^0 . \sec 40^0 . \tan 130^0} = \cdots$
   A. -1
   B. 0
   C. 1
   D. Tan 20^0
   E. Sec 20^0
3. Nilai dari sin 75 – cos 15 + cos 45 = …
   A. $\sqrt{3}$
   B. $\sqrt{2}$
   C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   D. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$
   E. 1
4. Nilai dari $\frac{\sin 75° - \sin 15°}{\cos 105° + \cos 15°}$= ….
   A. $-\sqrt{3}$
   B. $-\sqrt{2}$
   C. $\frac{1}{3}$
   D. 2
   E. -1
5. Nilai cos 1110^0 adalah ….
   A. $\sqrt{3}$
   B. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   C. -$\sqrt{3}$
   D. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   E. $\frac{1}{2}$
6. Hasil dari $\frac{\sin 27° + \sin 63°}{\cos 138° + \cos 102°}$ = …
   A. $-\sqrt{2}$
   B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
   C. 1
   D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
   E. $\sqrt{2}$

7. Nilai dari $\frac{sin\ 150^0 + sin\ 120^0}{cos\ 120^0 - cos\ 300^0} = \ldots$
   A. $\frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{3}\right)$
   B. -1
   C. $\frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)$
   D. 1
   E. $2 + \sqrt{3}$
8. Jika $cot\ 54^0 = \frac{1}{x}$, maka $cot\ 36^0 = \cdots$
   A. x
   B. $-x$
   C. $\frac{1}{x-1}$
   D. $\frac{1}{x+1}$
   E. $x - 1$
9. $tan\ \alpha = \frac{4}{3}$ dengan $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, maka $cos\ \alpha - sin\ \alpha = \cdots$
   A. $-\frac{2}{5}$
   B. $\frac{1}{5}$
   C. $-\frac{1}{5}$
   D. $\frac{7}{5}$
   E. $-\frac{1}{5}$
10. Jika tan 40^0 = a maka nilai dari $\frac{tan\ 140^0 - tan\ 130^0}{1 + tan\ 140^0 . tan\ 130^0} = \cdots$
   A. $\frac{1 + a^2}{a}$
   B. $\frac{1 - a^2}{a}$
   C. $\frac{1 + a^2}{2a}$
   D. $\frac{1 - a^2}{2a}$
   E. $\frac{\sqrt{1 - a^2}}{2a}$
11. Jika a = 210^0, maka:
   1) $2\ (sin\ a + cos\ a) = 1 + \sqrt{3}$
   2) $tan\ a + cot\ a = \frac{4}{3}\sqrt{3}$
   3) $sin\ a + cos\ a = -\left(1 + \sqrt{3}\right)$
   4) $cosec\ a + sec\ a = -\frac{2}{3}\left(3 + \sqrt{3}\right)$

   Pernyataan yang benar adalah ….
   A. 1), 2) dan 3)
   B. 1) dan 3)
   C. 2) dan 4)
   D. 4) saja
   E. Semua pernyataan benar
12. Nilai dari $\frac{sin\ 30 + cos\ 330}{tan\ 45 + cos\ 210} = \cdots$.
   A. $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}\right)$
   B. $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$
   C. $-\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$
   D. $-\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{6}\right)$
   E. $-\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{6}\right)$

13. Jika $sin\ x = \frac{1}{5}\sqrt{5}$, maka $cos\ x - 5cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2sin(\pi - x) = \cdots$.
    A. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$
    B. $-\sqrt{5}$
    C. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
    D. $\frac{3}{5}\sqrt{5}$
    E. $\frac{9}{5}\sqrt{5}$
14. Diketahui tan x = 2,4 dengan x berada di kuadran III. Nilai cos x adalah ….
    A. $-\frac{12}{13}$
    B. $-\frac{5}{13}$
    C. $\frac{3}{13}$
    D. $\frac{5}{13}$
    E. $\frac{12}{13}$
15. sin 300^0 + cos 45^0 + $\frac{1}{2}$ tan (-300^0) = ….
    A. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
    B. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
    C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
    D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
    E. $\sqrt{2}$
16. tan (-45^0) + sin 120^0 + cos 225^0 – cos 30^0 = ….
    A. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$
    B. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
    C. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
    D. $-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
    E. $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
17. $tan\ x = \frac{1}{2}$ maka nilai dari $2\ sin\ x + sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) + cos\ (\pi - x) = \cdots$.
    A. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$
    B. 1
    C. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$
    D. 0
    E. $-\frac{1}{5}\sqrt{5}$
18. Jika $cos\ x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan x terletak pada kuadran II, maka nilai tan x = ….
    A. $\sqrt{3}$
    B. $\frac{2}{5}$
    C. $\frac{1}{9}\sqrt{3}$
    D. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
    E. $-\sqrt{3}$

19. $\frac{sin\ 270.cos\ 135.tan\ 135}{sin\ 150.cos\ 225} = \cdots.$
    A. $-\frac{1}{2}$
    B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
    C. 1
    D. -2
    E. 2
20. cos 1200⁰ setara dengan ….
    A. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
    B. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
    C. $-\frac{1}{2}$
    D. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
    E. $\frac{1}{2}$

KUNCI JAWABAN.

1. B
2. C
3. C
4. E
5. E
6. D
7. A
8. A
9. B
10. D
11. D
12. C
13. E
14. B
15. C
16. D
17. C
18. D
19. D
20. C

DAFTAR PUSTAKA

2017. https://smatika.blogspot.com/2017/04/perbandingan-trigonometri-sudut-berelasi.html). April 22. Accessed September 16, 2020.

Research, Tim Quantum. 2020. *Super Master Pelajaran SMA/MA Kelas X Semester 1 dan 2 Saintek*. Bandung: Yrama Widya.

Sembiring, Suwah. 2009. *Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya.

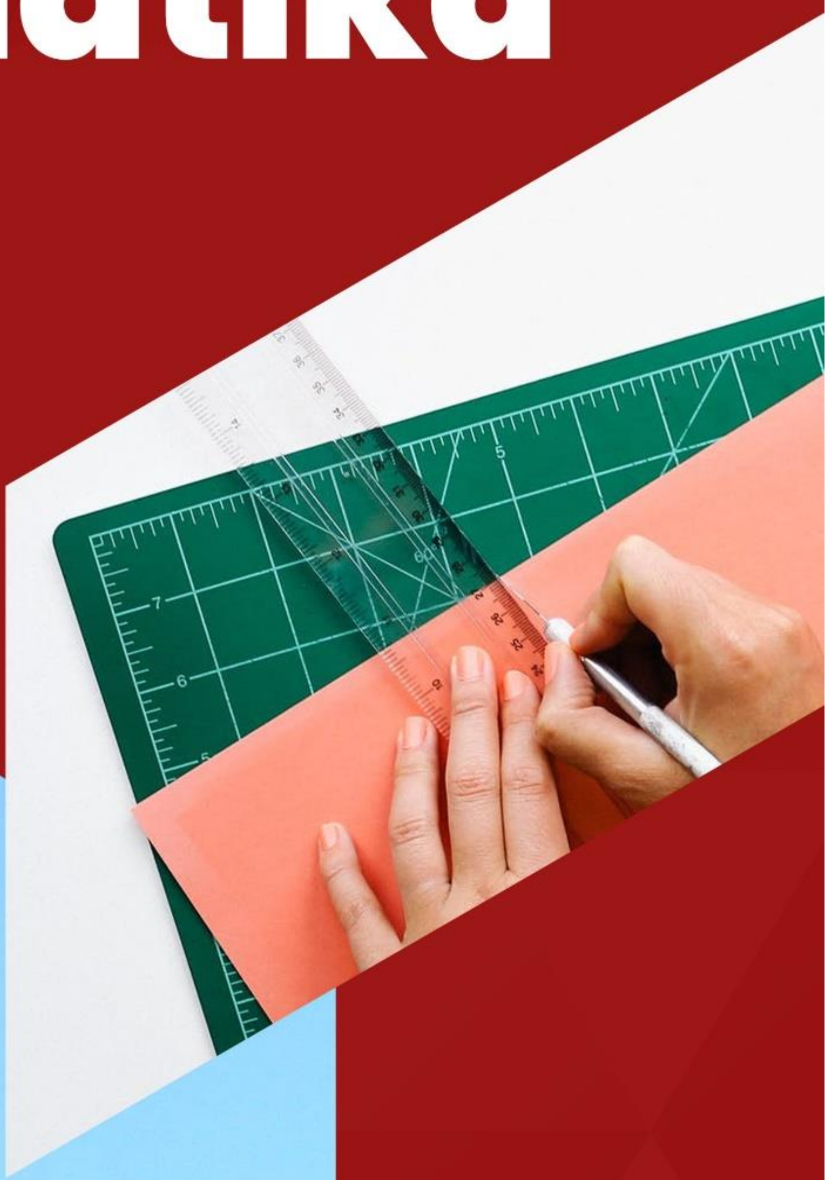
Sulistyowati, Nuning. n.d. *"Trigonometri*". Matematika.blogspot.com. Accessed September 16, 2020.

Tohari, Anas. n.d. "http://belajarmatematikadanfisika.blogspot.com/2013/01/grafik-fungsi-trigonometri.html." Modul Matematika Kelas X. Accessed September 16, 2020.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS X

ATURAN SINUS, COSINUS DAN LUAS SEGITIGA

KELAS X MATEMATIKA WAJIB

PENYUSUN
Tinasari Pristiyanti

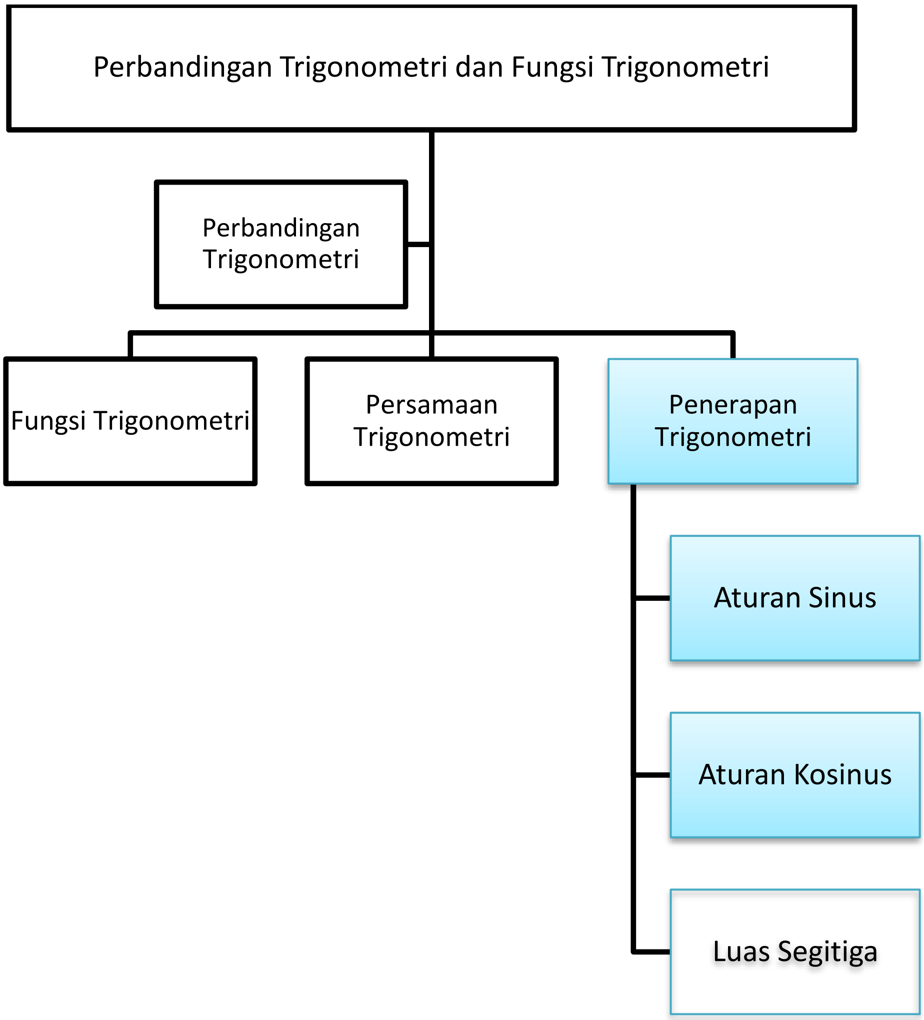
SMA Negeri 3 Bogor

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Trigonometri	:	adalah ilmu matematika yang mempelajari tentang sudut, sisi, dan perbandingan antara sudut terhadap sisi
Koordinat cartesius	:	Suatu sistem koodinat yang menggunakan dua garis lurus yang saling tegak lurus dan berarah dalam menentukan kedudukan suatu titil pada bidang
Sinus	:	perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi miring
Cosinus	:	perbandingan panjang dalam sebuah segitiga antara sisi samping sudut dengan sisi miringnya
Koordinat kutub	:	Suatu koordinat yang menggunakan sebuah sinar garis sebagai patokan muka dalam menentukan kedudukan suatu titik pada bidang.

PETA KONSEP


Perbandingan Trigonometri dan Fungsi Trigonometri
Perbandingan Trigonometri
Fungsi Trigonometri
Persamaan Trigonometri
Penerapan Trigonometri
Aturan Sinus
Aturan Kosinus
Luas Segitiga

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Wajib
Kelas	:	X
Alokasi Waktu	:	2 Kegiatan Pembelajaran (2 x 90 menit)
Judul Modul	:	Aturan Sinus dan Cosinus

B. Kompetensi Dasar

3. 9 Menjelaskan aturan sinus dan cosinus

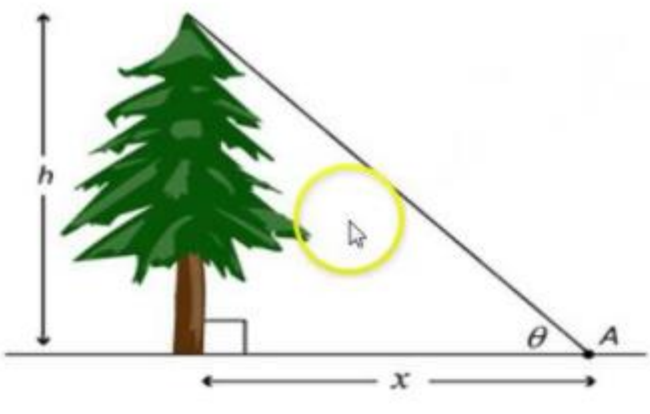
4.9 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan aturan sinus dan cosinus

C. Deskripsi Singkat Materi

Matematika adalah hasil sebuah pemikiran manusia terhadap fenomena yang terkaji yang ada disekitar kita dan bagaimana kita dapat menyelesaikannya. Kejadian disekitar kita tidak langsung berhuhungan dengan matematika, namun matematika adalah alat bantu supaya masalah yang kita hadapi dapat kita selesaikan. Hal ini membuat mengapa matematika salah satu ilmu penting yang harus kita kuasai.

Salah satu cabang matematika adalah Trigonometri. Trigonometri adalah suatu sistem perhitungan yang berkaitan dengan panjang dan sudut pada segitiga. Trigonometri banyak membantu disiplin ilmu lain dalam perhitungannya, seperti astronomi termasuk navigasi, di laut, udara, dan angkasa, teori musik, akustik, optik dan masih banyak lagi. Aturan Sinus dan Cosinus merupakan salah satu hasil dari penerapan Trigonometri dalam bidang kehidupan sehari-hari.

Perhatikan ilustrasi berikut!



Amin berdiri sejauh 20 meter dari sebuah pohon dan memandang pucuk pohon cemara dengan sudut pandang sebesar 30^0.
Bagaimana cara kita menentukan tinggi pohon cemara?

Permasalahan di atas dapat kita selesaikan dengan menggunakan trigonometri. Aplikasi trigonometri yang sering kita gunakan adalah dikenal dengan Aturan Sinus, Aturan Cosinus dan Luas Segitiga. Aturan Sinus adalah aturan penting yang berfungsi untuk menghubungkan sisi dan sudut segitiga. Aturan Sinus dapat digunakan dalam segitiga apapun dengan sisi dan sudut berlawanannya diketahui.
Sedangkan aturan Cosinus adalah menghubungkan ketiga sisi ke satu sudut. Aturan Cosinus digunakan untuk menjelaskan hubungan antara nilai Cosinus dan kuadrat panjang sisi pada salah satu sudut segitiga. Sedangkan aturan Luas Segitiga digunakan untuk menentukan luas segitiga jika diketahu sudut apit dan sisi apit dari sebuah segitiga.
Selain Aturan Sinus dan Aturan Cosinus, maka ada juga aturan dalam segitiga yang terkait dengan Luas Segitiga. Suatu segitiga sembarang dapat kita hitung luasnya tidak hanya dengan menggunakan rumus luas segitiga biasa yang kita kerjakan, namun dengan menggunakan trigonometri. Ketiga hal tersebut akan sama-sama kita pelajari dalam modul ini.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Agar modul ini bisa kalian gunakan secara maksimal maka diharapkan melakukan langkah – langkah sebagai berikut:
1. Pelajari dan pahami peta konsep yang disajikan dalam setiap modul.
2. Pelajarilah dan pahami tujuan yang tercantum dalam setiap kegiatan pembelajaran.
3. Sebelum mempelajari materi ini, maka sebaiknya kalian telah memahami materi terkait dengan rasio trigonometri dan nilai trigonometri sudut-sudut istimewa
4. Pelajarilah uraian materi secara sistematis dan mendalam setiap kegiatan pembelajaran.
5. Kerjakanlah latihan soal di setiap akhir kegiatan pembelajaran untuk mengukur tingkat penguasaan materi.
6. Lanjutkan pada kegiatan pembelajaran berikutnya jika sudah mencapai ketuntasan yang diharapkan dengan nilai minimal 75.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Kegiatan Pembelajaran Pertama : Aturan Sinus

Kegiatan Pembelajaran Kedua : Aturan Cosinus dan Luas Segitiga

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Aturan Sinus

A. Tujuan Pembelajaran

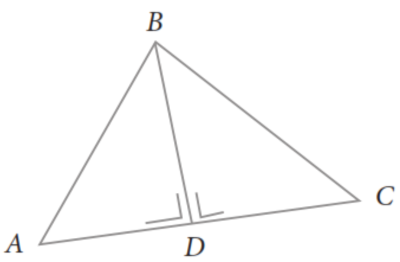
Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini kalian diharapkan:
1. Mampu menjelaskan aturan sinus dengan benar
2. Mampu menyelesaikan aturan sinus dengan benar
3. Mampu menggunakan Aturan Sinus untuk menyelesaikan masalah kontekstual

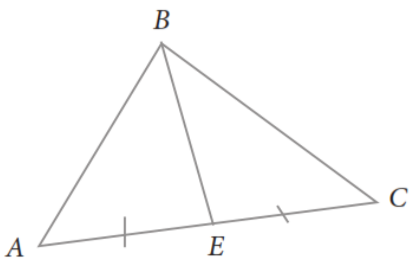
B. Uraian Materi

Pada bahasan kali ini, kita akan menemukan rumus-rumus trigonometri yang berlaku pada sembarang segitiga. Dalam sebuah segitiga sembarang maka yang menjadi permasalahan utama adalah menentukan panjang sisi dan besar sudut segitiga. Jika hanya sebuah panjang sebuah segitiga diketahui, apakah kita dapat menentukan panjang sisi-sisi yang lainnya? Atau apakah kita dapat menentukanbesar sudutnya? Sebaliknya, jika hanya sebuah sudut segitiga yang diketahui, apakah kita dapat menentukan besar sudut-sudut yang lain dan panjang sisi-sisinya?

Pada materi sebelumnya kita telah mempelajari bahwa dalam sebuah segitiga siku-siku sembarang kita dapat menentukan perbandingan trigonometrinya. Dengan mudah kita dapat menetukan nilai sinus, Cosinus dan perbandingan trigonometri lainnya. Pertanyaan akan muncul bagaimana jika menggunakan konsep perbandingan trigonometri tersebut pada suatu segitiga sama kaki, segitiga sam asisi atau bahkan segitiga sembarang? Untuk menjawab pertanyaan tersebut maka ingatlah kembali konsep yang pernah kita ketahui sebelumnya terkait dengan garis tinggi dan garis berat sebuah segitiga sembarang.

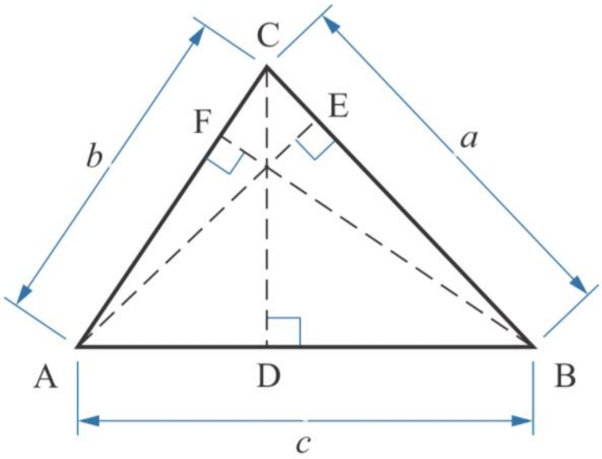
Perhatikan gambar berikut:





Ingat kembali bahwa pada setiap segitiga sembarang, diperoleh bahwa garis tinggi adalah suatu garis yang dibentuk dari suatu sudut dan berpotongan tegak lurus dengan sisi dihadapannya. Maka pada gambar di atas diperoleh bahwa BD merupakan salah satu garis tinggi dari segitiga ABC. Sedangkan garis berat adalah suatu garis yang dibentuk dari suatu sudut dan memotong sisi dihadapannya menjadi dua bagian sama panjang. Maka pada gambar diatas, BE adalah garis berat segitiga ABC.

Perhatikan gambar dibawah ini!



Misalkan ABC adalah segitiga sembarang dengan panjang AB, BC dan AC masing-masing adalah c satuan, a satuan dan b satuan. Garia AE, BF dan CD masing-masing adalah garis tinggi segitiga ABC yang dibentuk dari ∠A, ∠B dan ∠C.

Perhatikan!

a. Segitiga siku-siku ACD dengan AD ⊥ CD.
   Maka dengan perbandingan trigonometri diperoleh bahwa:
   $$Sin\ A = \frac{CD}{AC}$$
   CD = AC Sin A atau CD = b Sin A persamaan (1)
b. Segitiga siku-siku BCD dengan BD ⊥ CD.
   Maka dengan perbandingan trigonometri diperoleh bahwa:
   $$Sin\ B = \frac{CD}{BC}$$
   CD = BC Sin B atau CD = a Sin B persamaan (2)

   Dari persamaan (1) dan (2) maka diperoleh bahwa:
   CD = b Sin A dan CD = a Sin B, maka
   b Sin A = a Sin B atau dapat dituliskan sebagai:
   $$\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B}$$ persamaan (3)

c. Segitiga siku-siku ABE dengan AE ⊥ EB.
   Maka dengan perbandingan trigonometri diperoleh bahwa:
   $$Sin\ C = \frac{AE}{AB}$$
   AE = AB Sin B atau AE = c Sin B persamaan (4)
d. Segitiga siku-siku ACE dengan AE ⊥ CE.
   Maka dengan perbandingan trigonometri diperoleh bahwa:
   $$Sin\ C = \frac{AE}{AC}$$
   AE = AC Sin C atau AE = b Sin C persamaan (5)

   Dari persamaan (4) dan (5) maka diperoleh bahwa:
   AE = c Sin B dan AE = b Sin C, maka
   c Sin B = b Sin C atau dapat dituliskan sebagai:
   $$\frac{c}{Sin\ C} = \frac{b}{Sin\ B}$$ persamaan (6)

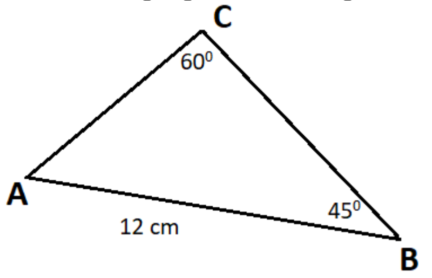
Berdasarkan persamaan (3) dan (6) maka diperoleh bahwa:

$$\boxed{\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C}}$$

Persamaan diatas disebut dengan **Aturan Sinus**

Contoh 1.

Diberikan segitiga sembarang ABC seperti pada gambar dibawah ini!



Tentukan panjang sisi AC?

Jawab:
Jika panjang sisi AB = c = 12 cm, dan sisi AC = b cm maka diperoleh bahwa

$$\frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C}$$

$$\frac{b}{Sin\ 45^0} = \frac{12}{Sin\ 60^0}$$

$$b = \frac{12\ Sin\ 45^0}{Sin\ 60^0} = \frac{12.\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Ingat!
Bentuk irrasional, maka harus diubah dengan mengalikan dengan sekawannya

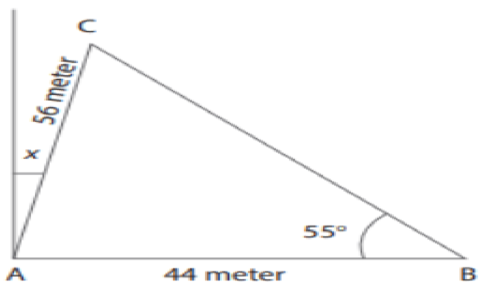
Maka bentuk diatas akan menjadi

$$b = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{2}\ \sqrt{3}}{\sqrt{3}\ \sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{6}$$

Maka panjang AC = b = $4\sqrt{6}$ cm

Contoh 2.
Pada awalnya, Menara Pisa dibangun dengan ketinggian 56 m. Ternyata, tanah di lokasi pembangunan menara rentan akan kerapuhan, sehingga terjadi kemiringan. Pada jarak 44 m dari dasar menara diperoleh sudut elevasi 55^0, tentukan derajat kemiringan menara dari posisi awalnya!

Jawab:
Permasalahan di atas dapat kita ilustrasikan seperti pada gambar dibawah ini!



Kita dapat menggunakan aturan sinus untuk menyelesaikan permasalahan di atas.
Dari ilustrasi di atas maka diperoleh bahwa:

$$\frac{AB}{Sin\ C} = \frac{AC}{Sin\ B}$$

maka

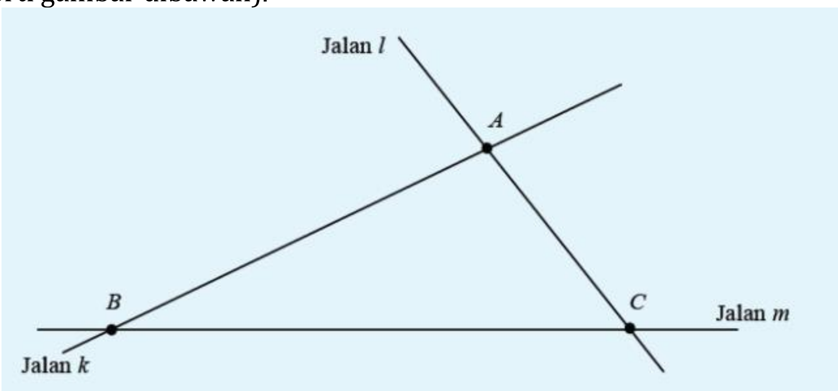
$\frac{44}{Sin\ C} = \frac{56}{Sin\ 55^0}$ maka diperoleh bahwa:

$$Sin\ C\ = \frac{44. Sin\ 55^0}{56} = 0{,}6436$$

Dengan menggunakan kalkulator, maka diperoleh bahwa $\angle C = 40^0$.
Karena besar sudut dalam sebuah segitiga adalah 90^0 maka
$\angle C = 180^0 - (\angle B + \angle C) = 180^0 - 95^0 = 85^0$.
Sehingga kemiringan Menara Pisa = $90^0 - 85^0 = 5^0$

Contoh 3.

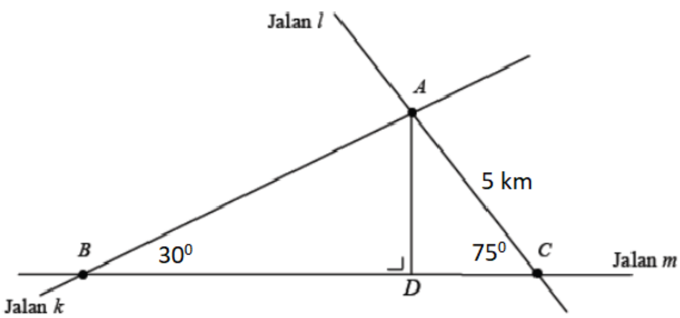
Jalan K dan jalan L berpotongan di kota A. Dinas tata kota ingin untuk menghubungkan Kota B dengan Kota C dengan membangun jalan M yang memotong kedua jalan yang ada (seperti gambar dibawah).



Jarak antara Kota A dan Kota C adalah 5 km, dan sudut yang dibentuk oleh jalan M dan jalan L sebesar 75^0 sedangkan sudut yang dibentuk oleh jalan K dan jalan M adalah 30^0. Tentukan jarak kota A dan Kota B!

Jawab:

Berdasarkan ilustrasi gambar di atas, maka buatlah garis tinggi segitiga ABC dari A.



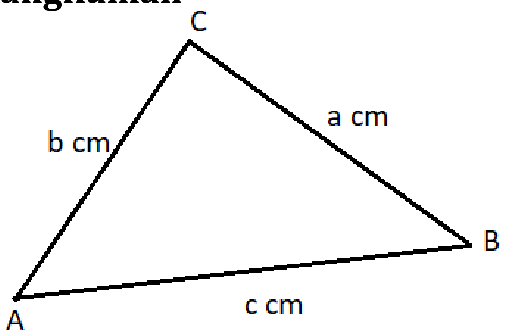
Dengan menggunakan aturan segitiga, maka diperoleh bahwa:

$$\frac{AB}{Sin\ C} = \frac{AC}{Sin\ B} \text{ atau } AB = \frac{AC\ Sin\ C}{Sin\ B}$$

$$AB = \frac{5\ .Sin\ 75^0}{\frac{1}{2}} = \frac{5\ .0{,}965}{\frac{1}{2}} = 10\ .0{,}965 = 9{,}65$$

Jadi jarak antara Kota A dan Kota B adalah 9,65 km.

C. Rangkuman



Pada sembarang segitiga ABC dengan panjang masing-masing sisi adalah a, b dan c dan ∠A, ∠B dan ∠C maka berlaku Aturan Sinus sebagai berikut:

$$\boxed{\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C}}$$

D. Latihan Soal

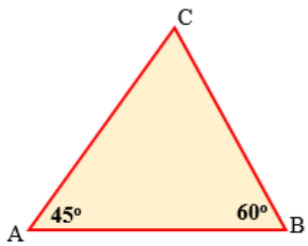
Kerjakan soal-soal berikut dengan memilih jawaban yang paling tepat!

1. Berdasarkan aturan sinus, maka hubungan antara panjang sisi dan besar sudut dalam segitiga ABC berikut yang benar adalah ....
   A. $a = \frac{Sin\ A.Sin\ B}{b}$
   B. $a = \frac{c.Sin\ B}{Sin\ C}$
   C. $b =$ a Sin B
   D. $c = \frac{b.SinC}{Sin\ B}$
   E. c = b.Sin A

2. Pada segitiga ABC dengan panjang a = 8 cm, b = $4\sqrt{2}$ cm dan ∠A = 45^0, maka besar ∠B adalah ....
   A. 30^0
   B. 45^0
   C. 55^0
   D. 60^0
   E. 75^0

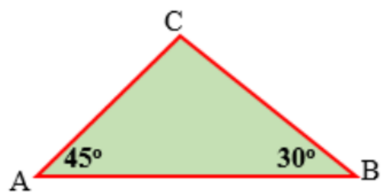
3. Diberikan segitiga ABC dengan besar ∠A = 30^0, ∠C = 105^0 dan panjang BC = 10 cm. Maka panjang AC adalah ....
   A. 5 cm
   B. $5\sqrt{3}$ cm
   C. $10\sqrt{2}$ cm
   D. $10\sqrt{3}$ cm
   E. $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm

4. Perhatikan gambar dibawah ini!



Perbandingan panjang antara BC : AC adalah ....
   A. 3 : 4
   B. 4 : 3
   C. $\sqrt{2} : \sqrt{3}$
   D. $\sqrt{3} : 2\sqrt{2}$
   E. $\sqrt{3} : \sqrt{2}$

5. Perhatikan gambar dibawah ini!



Dua orang mulai berjalan masing-masing dari titik A dan titik B pada saat yang bersamaan. Supaya A dan B sampai dititik C pada waktu yang bersamaan pula maka kecepatan berjalan dari titik A harus ....
A. 2 kali kecepatan orang yang berjalan dari tiitk B
B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ kali kecepatan orang yang berjalan dari tiitk B
C. $\sqrt{2}$ kali kecepatan orang yang berjalan dari tiitk B
D. $2\sqrt{2}$ kali kecepatan orang yang berjalan dari tiitk B
E. $\sqrt{3}$ kali kecepatan orang yang berjalan dari tiitk B

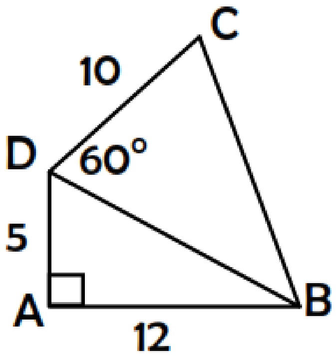
6. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi a dan b berturut-turut 9 cm dan 12 cm. Sudut B = 42^0 maka besar sudut C adalah .... (gunakan bahwa Sin 42^0 = 0,669 dan Cos 42^0 = 0.743)
A. 30^0
B. 72^0
C. 102^0
D. 108^0
E. 252^0

7. Diketahui segitiga MAB dengan AB = 300 cm, sudut MAB = 60^0 sudut ABM = 75^0, maka panjang AM = ...
A. $150\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm
B. $150\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ cm
C. $150\left(3+\sqrt{3}\right)$ cm
D. $150\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ cm
E. $150\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$ cm

8. Dalam segitiga ABC dengan panjang sisi AC = 8, BC = $4\sqrt{2}$ besar sudut ABC = 45^0 maka nilai Tan $\angle$BAC = ...
A. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$
B. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
E. $\sqrt{2}$

9. Pada sebuah segitiga ABC diketahui bahwa $\angle A = 30^0$ dan $\angle B = 60^0$. Jika panjang sisi a + c = 9 cm, maka panjang sisi b adalah ....
A. $2\sqrt{3}$
B. $3\sqrt{3}$
C. $2\sqrt{3}$
D. $3\sqrt{2}$
E. 3

10. Perhatikan gambar berikut!



Diberikan segitiga ABCD seperti pada gambar di samping. Luas ABCD adalah ….

A. $60 + \frac{65}{2}\sqrt{3}$
B. $30 + 136\sqrt{3}$
C. $30 + 65\sqrt{3}$
D. $30 + \frac{65}{2}\sqrt{3}$
E. $10 + 130\sqrt{3}$

PEMBAHASAN SOAL LATIHAN

1. **Jawaban : D**

   Pembahasan:

   Aturan Sinus menyebutkan bahwa $\frac{c}{Sin\ C} = \frac{b}{Sin\ B} \Rightarrow c = \frac{b\ Sin\ C}{Sin\ B}$

2. **Jawaban: A**

   Pembahasan:

   Dengan menggunakan aturan sinus maka diperoleh bahwa:

   $$\frac{b}{Sin\ B} = \frac{a}{Sin\ A} \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{Sin\ B} = \frac{8}{Sin\ 45^0} \Rightarrow Sin\ B = \frac{4\sqrt{2}\ .\frac{1}{2}\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2}$$

   Karena $Sin\ B = \frac{1}{2}$ maka besar ∠B = 30^0

3. **Jawaban: C**

   Pembahasan:

   Karena jumlah sudut dalam sebuah segitiga adalah 180^0, maka

   ∠B = $180^0 - (30^0 + 105^0) = 45^0$.

   Dengan menggunakan Aturan Sinus maka diperoleh bahwa:

   $$\frac{AC}{Sin\ 45^0} = \frac{10}{Sin\ 30^0} \Rightarrow \frac{AC}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AC = 10\sqrt{2}$$

4. **Jawaban: C**

   Pembahasan:

   Jumlah sudut dalam seuah segtiga = 180^0 maka diperoleh bahwa

   ∠B = 180^0 – (∠A + ∠C) = $180^0 - 145^0 = 45^0$.

   Panjang BC = a = 10 cm, maka panjang AC = b dapat diperoleh dari

   $$\frac{b}{Sin\ B} = \frac{a}{Sin\ A}$$

   $\frac{b}{Sin\ 45^0} = \frac{10}{Sin\ 30^0}$ atau $b = \frac{10\ .\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 10\sqrt{2}$ cm

5. **Jawaban : B**

   Pembahasan:

   Ingatlah kembali konsep terkait dengan kecepatan, dimana $v = \frac{s}{t}$ atau $t = \frac{s}{v}$

   Dengan v = kecepatan, s = jarak dan t adalah waktu tempuh

   Gunakan aturan segitiga diperoleh bahwa: $\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B} \Rightarrow \frac{Sin\ B}{Sin\ A} = \frac{b}{a}$

   Waktu yang dibutuhkan untuk orang yang berjalan dari titik A sama dengan waktu tembuh yang berjalan dari titik B, maka diperoleh bahwa $t_A = t_B$

   Maka $t_A = t_B \Rightarrow \frac{s_A}{v_A} = \frac{s_B}{v_B} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{s_A}{v_B}$

   Dengan $s_A = b$ dan $s_B = a$ maka diperoleh bahwa:

   $$\frac{v_A}{v_B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{Sin\ B}{Sin\ A} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{Sin\ 30^0}{Sin\ 45^0} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

   Maka diperoleh bahwa : $v_A = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ v_B$

6. **Jawaban : D**

Pembahasan :

Dengan menggunakan aturan sinus maka diperoleh:

$$\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B}$$

$$\frac{9}{Sin\ A} = \frac{12}{Sin\ 42}$$

$$\frac{9}{Sin\ A} = \frac{12}{0{,}669}$$

Maka

$$Sin\ A\ = \frac{9\ x\ 0.669}{12} = 0.50$$

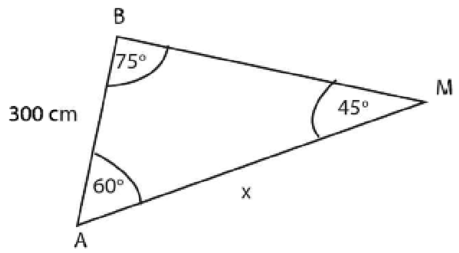
Sehingga diperoleh $\angle A = 30^0$

Karena besar sudut dalam sebuah segitiga adalah 180^0 maka

$\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B) = 180^0 - (30^0 + 42^0) = 180^0 - 72^0 = 108^0$

7. **Jawaban : A**

Pembahasan:



⇔ $\angle AMB = 180° - (75° + 60°) = 45°$

⇔ Perhatikan ΔABM!

$$\frac{x}{\sin 75°} = \frac{300}{\sin 45°}$$

$$\frac{x}{\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{300}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{75(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

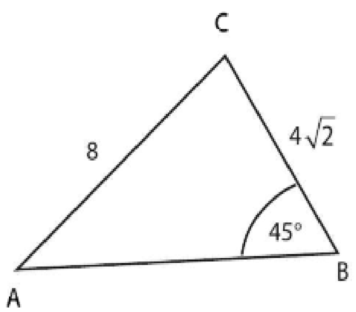
$$x = 75(\sqrt{12}+\sqrt{4})$$

$$x = 75(2\sqrt{3}+2)$$

$$x = 150(1+\sqrt{3})$$

8. **Jawaban : B**

Pembahasan:



⇔ Perhatikan ΔABC!

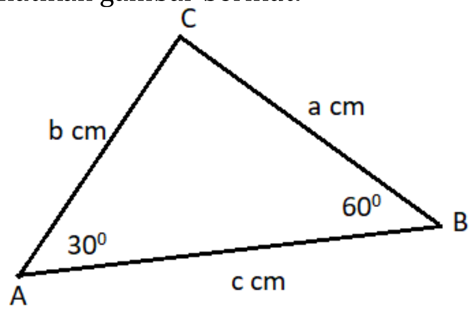
$$\frac{4\sqrt{2}}{\sin \angle BAC} = \frac{8}{\sin 45°}$$

$$\sin\ \angle BAC = \frac{4\sqrt{2}.\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\angle BAC = 30°$$

⇔ $\tan\ \angle BAC = \tan\ 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

9. **Jawaban: B**
Pembahasan:
Perhatikan gambar berikut:



Karena jumlah sudut dalam sebuah segitiga = 180^0 maka diperoleh bahwa:
$\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B) = 180^0 - (30^0 + 60^0) = 90^0$.
Dengan menggunakan aturan sinus maka:
$\frac{a}{Sin\ 30^0} = \frac{c}{Sin\ 90^0}$ maka $\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{1}$ atau c = 2a.
Karena a + c = 9 dan c = 2a maka a + 2a = 3a = 9 → maka a = 3
Jika a = 3 maka c = 9 – 3 = 6 cm.
Untuk menentukan panjang sisi b, maka diperoleh bahwa:
$\frac{b}{Sin\ 60^0} = \frac{a}{Sin\ 30^0}$ → $\frac{b}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{3}{\frac{1}{2}}$ → $b = 3\sqrt{3}$

10. **Jawaban: D**
Pembahasan:
Berdasarkan dengan Phytagoras:
$BD = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$
Luas ABCD = Luas ABD + Luas BCD = $\frac{1}{2}.5.12 + \frac{1}{2}.1.13\ Sin\ 60^0 = 30 + \frac{65}{3}\sqrt{3}$

F. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom "Ya" jika kalian mampu dan "Tidak" jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

Kemampuan Diri	Ya	Tidak
Mampu menjelaskan Aturan Segitiga dalam sebuah segitiga sembarang		
Mampu menyelesaikan aturan sinus dengan benar		
Mampu menyelesaikan masalah konstektual yang berhubungan dengan Aturan Sinus		

Kalian bisa meneruskan ke materi berikut jika semua kolom diceklist "YA". Jika masih ada kolom yang "TIDAK", maka baca kembali dan kembali ke bagian awa. Dari modul ini.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Aturan Cosinus dan Luas Segitiga

A. Tujuan Pembelajaran

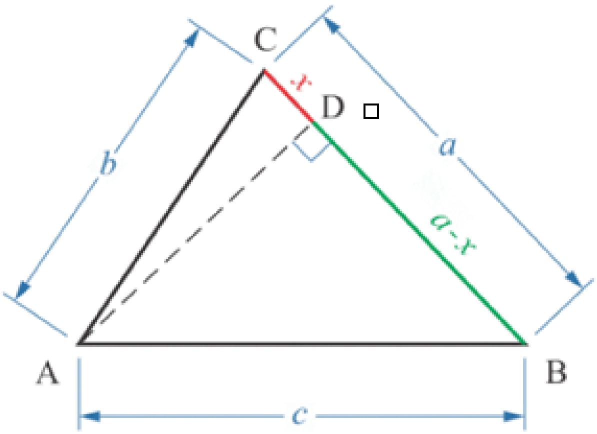
Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan siswa:
1. Mampu menjelaskan aturan cosinus dengan benar
2. Mampu menjelaskan penyelesaian aturan cosinus dengan benar
3. Mampu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan aturan cosinus dengan benar
4. Mampu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan aturan Luas Segitiga dengan benar

B. Uraian Materi

1. Aturan Cosinus

Aturan cosinus adalah salah aturan dalam trigonometri yang menjelaskan hubungan antara kuadrat panjang sisi dengan nilai cosinus dari salah satu sudut dalam sebuah segitiga. Aturan cosinus digunakan untuk menentukan besar salah satu sudut segitiga saat tiga sisi segitiga diketahui. Selain itu aturan cosinus dapat pula digunakan untuk menentukan salah satu sisi segitiga saat diketahui dua sisi dan sudut apitnya. Pembuktian rumus aturan cosinus dapat dilihat dari uraian dibawah ini.

Perhatikan gambar dibawah ini!
Misalkan panjang AB = c cm, BC = a cm, dan AC = b cm. Jika panjang CD = x cm, maka panjang BD = (a – x) cm.



a) Perhatikan segitiga ACD dimana AD tegak lurus CD.
Maka dengan menggunakan Teorema Phytagoras diperoleh bahwa:
$AD^2 = AC^2 - CD^2$ atau $AD^2 = b^2 - x^2$ persamaan (1)
Ingatlah kembali bahwa:
$Cos\ C = \frac{CD}{AC} = \frac{x}{b}$ atau $x = b\ Cos\ C$ persamaan (2)

Perhatikan segitiga ABD dimana AD tegak lurus BD.
Maka dengan menggunakan Teorema Phytagoras diperoleh bahwa:
$AD^2 = AB^2 - BD^2$ atau $AD^2 = c^2 - (a - x)^2$ persamaan (3)

Berdasarkan persamaan (1) dan (3) maka diperoleh bahwa:

$$c^2 - (a-x)^2 = b^2 - x^2$$
$$c^2 - (a^2 - 2ax + x^2) = b^2 - x^2$$
$$c^2 - a^2 + 2ax - x^2 = b^2 - x^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax \qquad \text{persamaan (4)}$$

Substitusikan persamaan (2) ke (4) maka diperoleh:
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a(x)$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ C}$$

Dengan cara sama seperti di atas, dengan membuat garis tinggi dari masing-masing tiitk sudut yang lainnya yaitu ∠C dan ∠B maka akan diperoleh aturan cosinus untuk sisi-sisi yang lain sebagai berikut:

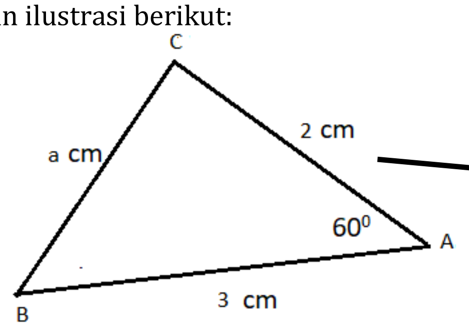
$$\boxed{a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\ Cos\ A} \text{ dan } \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ C}$$

Cobalah untuk membuktikan dengan mengikuti langkah seperti nomor 1!

Untuk lebih kalian memahami Aturan Cosinus, maka perhatikan beberapa contoh berikut ini

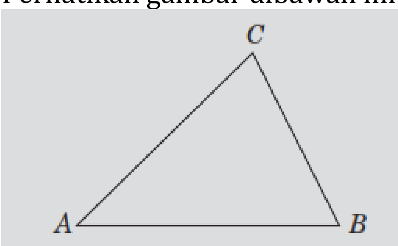
Contoh 1.
Diketahui segitiga ABC dengan panjang b = 2 cm, c = 3 cm dan ∠A = 60^0. Maka tentukan panjang sisi a?

Jawaban:
Perhatikan ilustrasi berikut:



Dengan menggunakan Aturan Cosinus maka diperoleh:
$$a^2 = 2^2 + 3^2 - 2.2.3.\,Cos\ 60^0$$
$$a^2 = 4 + 9 - 2.2.3.\frac{1}{2}$$
$$a^2 = 13 - 6$$
Maka a = $\sqrt{7}$

Contoh 2.
Perhatikan gambar dibawah ini!



Titik A dan C merupakan titik-titik ujung sebuah terowongan yang dilihat dari titik B dan besar sudut penglihatan ∠CBA = 60^0. Jika panjang AB = 2x meter dan BC = $\frac{3x}{2}$ meter, maka tentukan panjang terowongan?

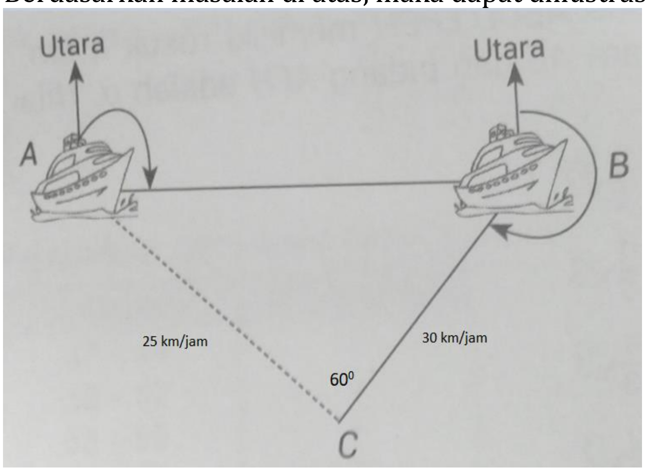
Jawaban:
Melihat ilustrasi diatas, maka masalah tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan Aturan Cosinus. Mengapa?
Karena dari informasi yang diberikan diketahui 2 sisi apit dan 1 sudut yang diapit oleg 2 sisi tersebut.
Sehingga dapat diperoleh bahwa:

$$AC^2 = (2x)^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 2.2x.\frac{3x}{x}.Cos\ 60^0$$
$$= 4x^2 + \left(\frac{9x}{4}\right)^2 - 3x^2$$
$$= \frac{13}{4}x^2$$

Maka panjang terowongan adalah AC = $\frac{1}{2}\sqrt{13}x$

Contoh 3.
Dua buah kapal tanker berangkat dari titik yang sama dengan arah berbeda sehingga membentuk sudut 60^0. Kapal pertama bergerak dengan kecepatan 30 km/jam dan kapal kedua bergerak dengan kecepatan 25 km/jam. Tentukan jarak kedua kapal setelah berlayar selama 2 jam perjalanan?

Jawaban:
Berdasarkan masalah di atas, maka dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Misalkan kapal A dan B secara Bersama-samma bergerak dari titik C dan berlayar dengan membentuk sudut sebesar 60^0. Kapak A mempunyai kecepatan 30 km/jam dan kapal B mempunyai kecepatan 25 km/jam.

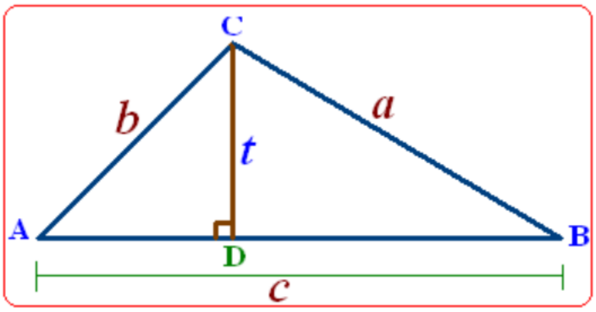
Kapal A dan B telah berlayar selama 2 jam, maka dengan menggunakan rumus bahwa s = v x t , dengan v adalah kecepatan dan t adalah lamanya kapal berlayar, maka jarak yang telah ditempuh oleh kapal A adalah:
S_A = 30 km/jam x 2 jam = 60 km
S_B = 25 km/jam x 2 jam = 50 km

Jarak antara kapal A dan B setelah 2 jam berlayar dapat ditentukan dengan menggunakan Aturan Cosinus:
Misalkan jarak antara kapal A dan B setelah berlayar selama 2 jam adalah AB, maka

$$AB^2 = (60)^2 + (50)^2 - 2..60.50\ Cos\ 60^0$$
$$= 3600 + 2500 - 3000$$
$$= 3100$$

Sehingga jarak antara kapal A dan B adalah $10\sqrt{31}$ km

b) Aturan Luas Segitiga
Perhatikan segitiga dibawah ini!



Perhatikan segitiga ACD.
Maka diperoleh bahwa $Sin\ A = \frac{t}{b}$ maka diperoleh bahwa t = b Sin A
Luas Segitiga dapat diperoleh dari:
Luas Segitiga ABC $= \frac{1}{2}$ x Alas x Tinggi $= \frac{1}{2}\ AB\ x\ CD = \frac{1}{2}\ x\ c\ x\ b\ Sin\ A$

Maka diperoleh bahwa:
Luas Segitiga ABC $= \frac{1}{2}\ x\ c\ x\ b\ Sin\ A$

Perhatikan segitiga DBC.
Maka diperoleh bahwa $Sin\ \boldsymbol{B} = \frac{t}{a}$ maka diperoleh bahwa t = a Sin B
Luas Segitiga dapat diperoleh dari:
Luas Segitiga ABC $= \frac{1}{2}$ x Alas x Tinggi $= \frac{1}{2}\ AB\ x\ CD = \frac{1}{2}\ x\ c\ x\ a\ Sin\ B$

Maka diperoleh bahwa:
Luas Segitiga ABC $= \frac{1}{2}\ x\ c\ x\ a\ Sin\ B$

Dengan cara yang sama maka kita bisa peroleh juga bahwa:

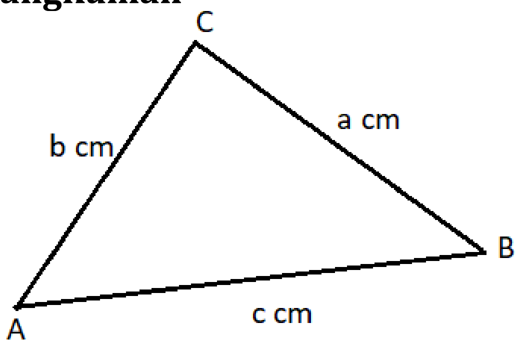
Apakah kalian bisa mendapatkannya secara mandiri?

Luas Segitiga ABC $= \frac{1}{2}\ x\ a\ x\ b\ Sin\ C$

Contoh 1.
Diberikan segitiga ABC dengan panjang AC = 6 cm, BC = 8 cm dan besar sudut C sebesar 30^0. Luas segitiga ABC adalah….

Jawab.
Luas Segitiga ABC $= \frac{1}{2}.AC\ .BC\ Sin\ A = \frac{1}{2}\ 6\ x\ 8\ x\ Sin\ 30^0 = \frac{1}{2}\ x\ 6\ x\ 8\ x\ \frac{1}{2} = 12\ cm^2$

C. Rangkuman



Pada sembarang segitiga ABC dengan panjang masing-masing sisi adalah a, b dan c dan ∠A, ∠B dan ∠C maka berlaku **Aturan Cosinus** sebagai berikut:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ C$$
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\ Cos\ A$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ C$$

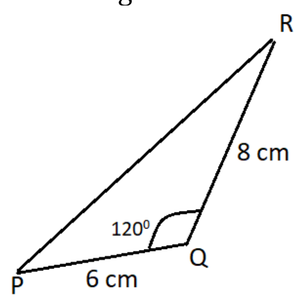
Pada sembarang segitiga ABC dengan dengan panjang masing-masing sisi adalah a, b dan c dan ∠A, ∠B dan ∠C maka berlaku **Aturan Luas Segitiga** sebagai berikut:

$$Luas\ ABC = \frac{1}{2} x\ a\ x\ b\ x\ Sin\ C = \frac{1}{2} x\ a\ x\ c\ x\ Sin\ B\ = \frac{1}{2} x\ b\ x\ c\ x\ Sin\ A$$

D. Latihan Soal

Setelah mengikuti kegiatan pembelajaran di atas, maka berlatihlah dengan soal-soal dibawah ini!

1. Perhatikan gambar berikut:



Panjang sisi PR adalah ....

A. 10 cm
B. $2\sqrt{37}$ cm
C. $4\sqrt{37}$ cm
D. $2\sqrt{48}$ cm
E. $10\sqrt{48}$ cm

2. Diketahui segitiga ABC dengan panjang sisi AB = 9 cm, AC = 8 cm dan BC = 7 cm. Nilai Sin A adalah .....

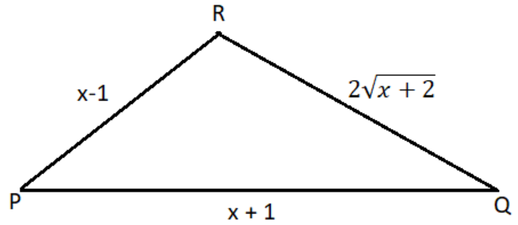
A. $\frac{2}{3}$
B. $\frac{3}{4}$
C. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$
D. $\frac{2}{3}\sqrt{5}$
E. $\frac{15}{64}$

3. Diketahui segitiga ABC dengan $\angle C = 30^0$, AC = 2a dan BC = $2a\sqrt{3}$. Maka panjang AB adalah ....
   A. a
   B. 2a
   C. $2a\sqrt{5}$
   D. $2a\sqrt{2}$
   E. $4a\sqrt{3}$

4. Sebuah segitiga ABC dengan panjang AB = 8 cm, BC = 13 cm dan AC = 15 cm. Jika x adalah sudut yang dibentuk antara sisi AB dan AC, maka nilai Sin x . Tan x = ...
   A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   B. $\frac{1}{2}$
   C. $\sqrt{3}$
   D. $\frac{3}{2}$
   E. $\frac{3}{4}$

5. Pada segitiga ABC dengan panjang $a = 2\sqrt{7}$, b = 4 dan c = 6, maka nilai dari Sin A = ...
   A. $\frac{1}{2}$
   B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   D. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$
   E. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

6. Perhatikan gambar dibawah berikut!



Tentukan panjang sisi-sisi segitiga diatas?

7. Sebuah kapal berlayar ke arah timur sejauh 30 km. Kemudian kapal melanjutkan perjalanan dengan arah 30^0 sejauh 60 km. Tentukan jarak terhadap posisi kapal berangkat?

PEMBAHASAN LATIHAN SOAL

1. Jawaban: **B**
   Pembahasan:
   Dengan menggunakan Aturan Cosinus maka diperoleh:
   $PR^2 = 6^2 + 8 - 2.6.8.Cos\ 120^0$
   $PR^2 = 100 - 2.6.8.\left(-\frac{1}{2}\right)$
   $PR^2 = 100 + 48 = 148$
   Maka PR = $2\sqrt{37}$

2. Jawaban: **C**
   Pembahasan:
   Untuk menentukan nilai Sin A, maka terlebih dahulu dihitung nilai dari Cos A. Nilai Cos A diperoleh dengan menggunakan aturan cosinus.
   Aturan cosinus:

   Ingat tentang rasio trigonometri

   $$Cos\ A = \frac{9^2 + 8^2 - 7^2}{2.9.8} = \frac{81 + 64 - 49}{2.9.8} = \frac{98}{144} = \frac{2}{3}$$

   Dengan menggunakan rasio trigonometri, maka diperoleh bahwa:
   $$Sin\ A = \frac{\sqrt{9-4}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

3. Jawaban: **B**
   Pembahasan:
   Dengan menggunakan Aturan Cosinus maka diperoleh:
   $AB^2 = (2a)^2 + (2a\sqrt{3})^2 - 2.2a.2a\sqrt{3}\ Cos\ 30^0$
   $PR^2 = 4a^2 + 12a^2 - 12a^2$
   $PR^2 = 4a^2$
   Maka PR = 2a

4. Jawaban: **D**
   Pembahasan:
   Karena x merupakan sudut antara AB dan AC, maka dengan menggunakan aturan cosinus diperoleh:
   $$Cos\ A = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2.AC.AB} = \frac{15^2 + 8^2 - 13^2}{2.15.8} = \frac{225 + 64 - 169}{240} = \frac{1}{2}$$
   Dengan menggunakan rasio trigonometri, maka diperoleh bahwa:
   $$Sin\ x.Tan\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{3}{2}$$

5. Jawaban: **C**
   Pembahasan:
   $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
   $$= \frac{(4)^2 + (6)^2 - (2\sqrt{7})^2}{2(4)(6)}$$
   $$= \tfrac{1}{2} \rightarrow A = 60^\circ$$
   $$\sin A = \sin 60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

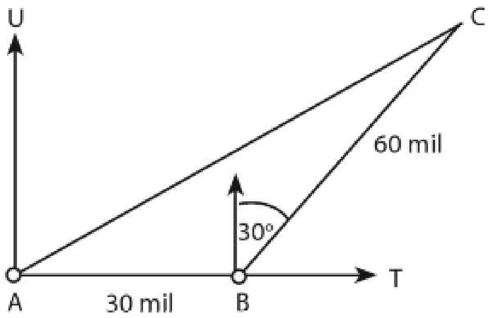
6. Jawaban: PQ = 6, PR = 4, RQ $= 2\sqrt{7}$

Pembahasan:
Untuk menentukan panjang sisi-sisi segitiga maka digunakan aturan cosinus.
Maka diperoleh bahwa:

$$\left(2\sqrt{x+2}\right)^2 = (x-1)^2 + (x+1)^2 - 2(x-1)(x+1)\ Cos\ 60^0$$
$$4\ (x+2) = x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 1)$$
$$4\ (x+2) = x^2 + 3$$

Maka diperoleh : $x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$ atau $x = -1$.
Kita hanya ambil x = 5 karena jika x = -1 maka panjang PQ = 0 (Tidak mungkin).
Maka dengan x = 5, maka diperoleh
PQ = 5 + 1 = 6, PR = 5 – 1 = 4 dan RQ = $2\sqrt{2+5} = 2\sqrt{7}$

7. Jawaban: $30\sqrt{7}$ km
Pembahasan:
Masalah yang diatas dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Jarak kapal terhadap posisi kapal perangkat adalah:

Jarak kapal terhadap posisi saat kapal berangkat adalah:

$$AC = \sqrt{(30)^2 + (60)^2 - 2(30)(60).\cos 120^\circ}$$
$$= \sqrt{900 + 3600 - 2(30)(60).(-\tfrac{1}{2})}$$
$$= \sqrt{6300} = \sqrt{900(7)} = 30\sqrt{7}$$

E. Penilaian Diri

Berilah tanda V pada kolom “Ya” jika kalian mampu dan “Tidak” jika belum mampu memahami kemampuan berikut:

Kemampuan Diri	Ya	Tidak
Mampu menjelaskan Aturan Cosinus dalam sebuah segitiga sembarang		
Mampu menyelesaikan aturan cosinus dengan benar		
Mampu menyelesaikan masalah konstektual yang berhubungan dengan Aturan cosinus		
Mampu menjelaskan Aturan Luas Segitiga dalam sebuah segitiga sembarang		
Mampu menyelesaikan masalah konstektual yang berhubungan dengan Luas Segitiga		

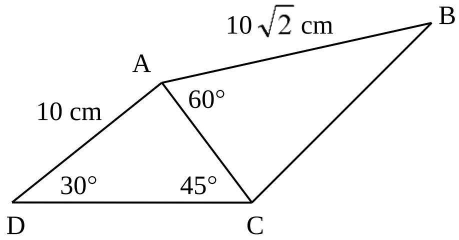
Kalian bisa meneruskan ke materi berikut jika semua kolom diceklist “YA”. Jika masih ada kolom yang “TIDAK”, maka baca kembali dan kembali ke bagian awal dari modul ini.

EVALUASI

Kerjakan evaluasi di bawah ini dengan jujur untuk mengetahui sejauh mana kalian sudah memahami materi terkait dengan Aturan Sinus dan Aturan Cosinus!

PILIHAN GANDA.

1. Perhatikan gambar berikut ini!



Panjang BC adalah …

A. $4\sqrt{2}$ cm
B. $6\sqrt{2}$ cm
C. $7\sqrt{3}$ cm
D. $5\sqrt{6}$ cm
E. $7\sqrt{6}$ cm

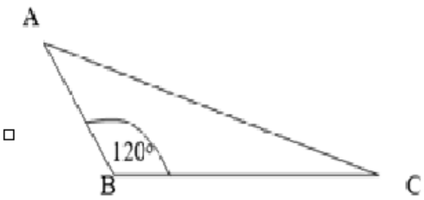
2. Pada segitiga ABC diketahui sisi $a = 4$, sisi $b = 6$ cm dan sudut B = 45^0. Nilai cosinus sudut A adalah …
   A. $\frac{1}{6}\sqrt{2}$
   B. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$
   C. $\frac{1}{6}7$
   D. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$
   E. $\frac{1}{3}\sqrt{7}$

3. Nilai sinus sudut A dalam segitiga ABC yang panjang sisi-sisnya : $a = \sqrt{7}$, $b = 3$ dan $c = 2$ adalah …
   A. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$
   B. $\frac{1}{2}$
   C. $\frac{3}{4}$
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   E. $\frac{1}{6}\sqrt{35}$

4. Dalam segitiga PQR diketahui q = 8, r = 5 dan sudut P = 60^o, panjang sisi p = ...
   A. $\sqrt{7}$
   B. 7
   C. 8
   D. 9
   E. $\sqrt{63}$

5. Pada segitiga ABC diketahui panjang sisi AB = 10 cm dan AC = 12 cm dan sinB = $\frac{4}{5}$, maka nilai dari cosC = ...
   A. 1
   B. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$
   C. $\frac{3}{4}$
   D. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$
   E. $\frac{9}{10}$

6. Perhatikan gambar berikut ini!



Jika panjang lintasan langsung dari A ke C adalah $a\sqrt{7}$ dan dari A ke B adalah a, maka panjang jalan dari A ke C melalui B adalah …

A. $2\frac{1}{2}a$
B. $3a$
C. $3\frac{1}{4}a$
D. $2\frac{1}{4}a$
E. $4a$

7. Diketahui segitiga ABC. Panjang sisi AC = b m, sisi BC = a cm dan $a + b = 10$ cm. Jika sudut A = 30° dan sudut B = 60°, maka panjang sisi AB = …

A. $10 + 5\sqrt{3}$ cm
B. $10 - 5\sqrt{3}$ cm
C. $10\sqrt{3} - 10$ cm
D. $5\sqrt{3} + 5$ cm
E. $5\sqrt{3} + 15$ cm

8. Dari pelabuhan P, kapal A berlayar ke arah 45⁰ dengan kecepatan 30 km/jam, sedangkan kapal B berlayar ke arah 345⁰ dengan kecepatan 35 km/jam. Berapakah jarak kapal A dan kapal B setelah 2 jam?

A. $8\sqrt{41}$ km
B. $8\sqrt{43}$ km
C. $10\sqrt{41}$ km
D. $10\sqrt{43}$km
E. $11\sqrt{41}$km

9. Dua orang yaitu P dan Q berjalan, masing-masing dari tempat A dan tempat B, mulai dari saat yang sama menuju tempat C. Jika sudut BAC = 45^0 dan agar kedua orang itu harus sampai di C pada waktu yang sama pula, berapa kalikah kecepatan P berjalan dibandingkan dengan kecepatan Q?

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ kali
B. $\sqrt{2}$ kali
C. 2 kali
D. $\sqrt{3}$ kali
E. $2\sqrt{2}$ kali

10. Luas suatu jajar genjang yang panjang sisi berturutan adalah 6 cm dan 9 cm, dan sebuah sudutnya sama dengan 60^0 adalah …

A. 27 cm^2
B. $27\sqrt{3}$ cm^2
C. $\frac{27}{2}\sqrt{3}$ cm^2
D. 45 cm^2
E. 54 cm^2

11. Pada segitiga ABC, diketahui bahwa a + b + c = 200. Jika besar sudut B = 30° dan besar sudut C = 120°, maka panjang sisi c = ...
    A. $200(\sqrt{3}-3)$
    B. 200
    C. $200(2\sqrt{3}+3)$
    D. $200(2\sqrt{3}-3)$
    E. $200(\sqrt{3}+3)$

12. Diketahui jari-jari lingkaran luar segi-12 beraturan adalah r. Luas segitiga-12 yang dpaat dibuat adalah ….
    A. $\frac{1}{4}r^2$
    B. $\frac{1}{2}r^2$
    C. $\frac{1}{2}r^2\sqrt{3}$
    D. $r^2\sqrt{3}$
    E. $3r^2$

13. Diketahui besar ∠B = 45°, panjang BC = 12 cm dan panjang AB = 17 cm. Maka luas segitiga ABC adalah ... cm^2
    A. $91\sqrt{2}$
    B. $81\sqrt{2}$
    C. $71\sqrt{2}$
    D. $61\sqrt{2}$
    E. $51\sqrt{2}$

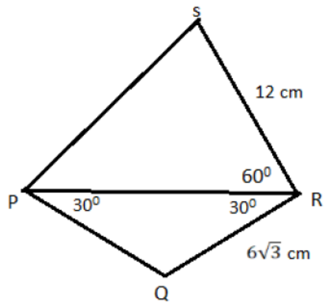
14. Nilai sinus sudut terkecil dari segitiga yang sisinya 5 cm, 6 cm dan $\sqrt{21}$ cm adalah …
    A. $\frac{1}{5}\sqrt{21}$
    B. $\frac{1}{6}\sqrt{21}$
    C. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
    D. $\frac{1}{6}\sqrt{5}$
    E. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$

15. Dalam segitiga ABC diketahui b = 8 cm , c = 5 cm dan sudut A = 60^0. Maka a = ….
    A. $\sqrt{7}$cm
    B. 7 cm
    C. 89 cm
    D. 49 cm
    E. $\sqrt{129}$ cm

16. Diketahui Δ ABC dengan panjang sisi AB = 3 cm, AC = 4 cm dan ∠CAB = 60°. CD adalah tinggi Δ ABC. Panjang CD = …
    A. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ cm
    B. $2\sqrt{3}$ cm
    C. 2 cm
    D. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm
    E. $\sqrt{3}$ cm

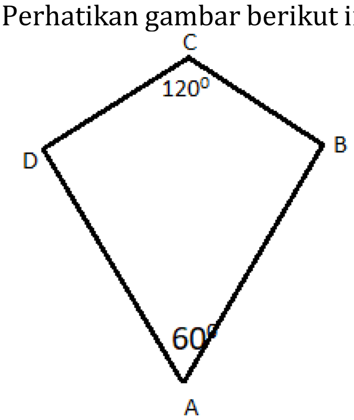
17. Diketahui Δ PQR dengan PQ = 3 cm, PR = 5 cm dan $\angle$QPR = 60°. Jika PS garis bagi $\angle$QPR, panjang PS = …
   A. $\frac{20}{9}\sqrt{3}$ cm
   B. $\frac{20}{9\sqrt{3}}$ cm
   C. $\frac{45}{4}\sqrt{3}$ cm
   D. $\frac{20}{3}\sqrt{3}$ cm
   E. $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm

18. Perhatikan gambar berikut!



Jika diketahui bahwa panjang PQ = PR, maka keliling segiempat PQRS adalah ….
   A. $(12 + 3\sqrt{133} + 12\sqrt{3})cm$
   B. $(12 + 133\sqrt{3} + 12\sqrt{3})cm$
   C. $(18 + 12\sqrt{3})cm$
   D. $(18 + 12\sqrt{3})cm$
   E. $(24 + 12\sqrt{3})cm$

19. Perhatikan gambar berikut ini!



Diberikan panjang AB = AD, BC = CD = 4 cm. $\angle$A = 60^0 dan $\angle$C = 120^0. Luas segiempat ABCD adalah ….
   A. $4\sqrt{3}$ cm^2
   B. $8\sqrt{3}$ cm^2
   C. $12\sqrt{3}$ cm^2
   D. $16\sqrt{3}$ cm^2
   E. $18\sqrt{3}$ cm^2

20. Pada segitiga ABC diketahui sisi AB = 6 cm, AC = 10 cm dan sudut A = 60°. Panjang sisi BC = …
   A. $2\sqrt{19}$ cm
   B. $3\sqrt{19}$ cm
   C. $4\sqrt{19}$ cm
   D. $2\sqrt{29}$ cm
   E. $3\sqrt{29}$ cm

KUNCI JAWABAN

1. D
2. D
3. B
4. B
5. B
6. C
7. E
8. D
9. B
10. B
11. D
12. E
13. E
14. E
15. B
16. B
17. C
18. E
19. C
20. A

DAFTAR PUSTAKA

2017. "https://smatika blogspot.com." *ttps://smatika.blogspot.com/2017/01/pembuktian-aturan-sinus-dan-aturan.html.* Januari 30. Accessed September 9, 2020.

2020."https://www.catatanmatematika.com." h*ttps://www.catatanmatematika.com/2020/03/bank-soal-aturan-sinus-dan-pembahasan.html.* Maret 3. Accessed September 10, 2020.

Indonesia, Forum Tentor. 2016. *The King Bedah Tuntas SKL UN SMA IPA .* Yogyakarta: Forum Edukasi.

Sukismo. 2018. *Erlangga X-Press UN SMA/MA Program IPA.* Jakarta: Erlangga.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI, PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020

JUJUR ADALAH LANGKAH AWAL BERANTAS KORUPSI

Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum

KELAS X

GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

KELAS X MATEMATIKA WAJIB

PENYUSUN
Tinasari Pristiyanti

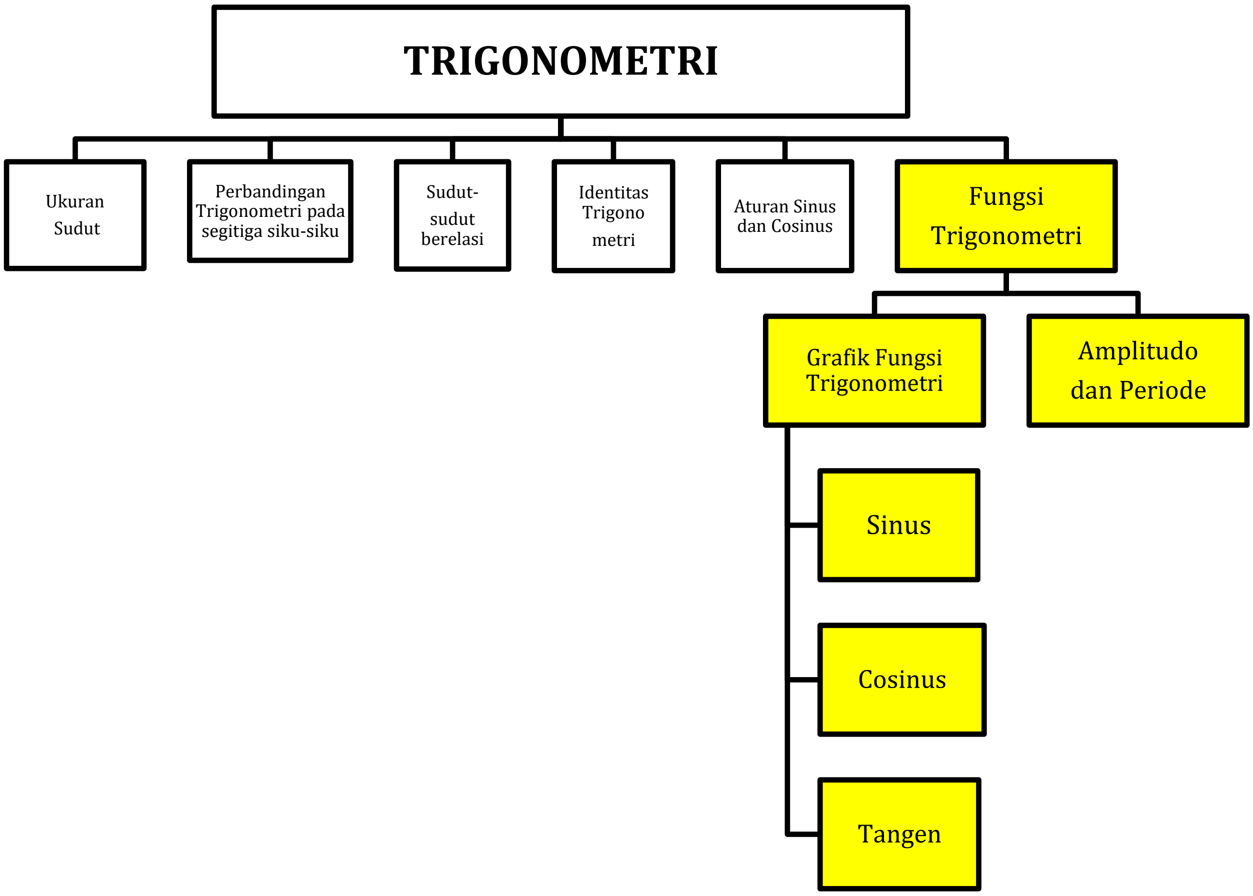
SMA Negeri 3 Bogor

DAFTAR ISI

GLOSARIUM

Fungsi	:	atau pemetaan merupakan relasi khusus dari himpunan domain ke kodomain, dengan aturan setiap anggota domain dipasangkan tepat satu ke anggota kodomain
Domain	:	daerah asal atau himpunan yang memuat elemen pertama himpunan pasangan berurut relasi R
Kodomain	:	daerah himpunan kawan, atau himpunan yang memuat elemen kedua himpunan pasangan berurut relasi R
Trigonometri	:	Cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang perbandingan ukuran sisi suatu segitiga apabila ditinjau dari salah satu sudut yang terdapat pada segitiga tersebut
Koordinat Cartesius	:	didefinisikan dengan dua garis sumbu yang saling tegak lurus dan terletak pada satu bidang (bidang xy)
Grafik fungsi	:	grafik fungsi f adalah himpunan pasangan berurutan, di mana f (x) = y.
Sinus/Sin	:	perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi miring (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90^o)
Cosinus/Cos	:	perbandingan sisi segitiga yang terletak di sudut dengan sisi miring (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90^o)
Tangen/Tan	:	perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi segitiga yang terletak di sudut (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90^o)

PETA KONSEP


TRIGONOMETRI
Ukuran Sudut
Perbandingan Trigonometri pada segitiga siku-siku
Sudut-sudut berelasi
Identitas Trigono metri
Aturan Sinus dan Cosinus
Fungsi Trigonometri
Grafik Fungsi Trigonometri
Amplitudo dan Periode
Sinus
Cosinus
Tangen

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	:	Matematika Wajib
Kelas	:	X
Alokasi Waktu	:	2 x 4 JP (8 JP)
Judul Modul	:	Fungsi Trigonometri

B. Kompetensi Dasar

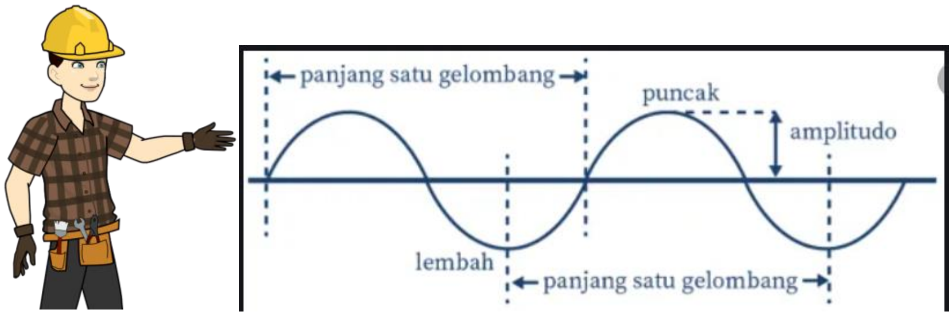
3. 10 Menjelaskan fungsi trigonometri dengan menggunakan lingkaran satuan

4.10 Menganalisa perubahan grafik fungsi trigonometri akibat perubahan pada konstanta pada fungsi y = a Sin b (x+c) + d.

C. Deskripsi Singkat Materi

Ilmu Trigonometri ini tentunya memiliki penerapan dan manfaat dalam kehidupan sehari-hari kita, diantaranya pada bidang teknik sipil, arsitek bangunan, dan astronomi. Misalnya dalam ilmu teknik sipil, ilmu trigonometri ini digunakan oleh seorang Surveyor (ahli ilmu ukur tanah). Pengukuran tanah adalah salah satu cabang ilmu alam untuk menentukan posisi ruang dimendsi tiga dari suatu tempat pada permukaan bumi. Yang paling sering kita jumpai adalah dalam ilmu arsitektur bangunan, ilmu trigonometri sering digunakan untuk menentukan sudut dalam proses pembuatan suatu bangunan atau gedung-gendung tinggi. Para arsitek tersebut bekerja dengan menggunakan perbandingan trigonometri.

Dalam dunia Teknik sipil, kita sering melihat seorang insinyur sipil dalam menguji kekuatan bangunan mengunakan getaran dan gelombang yang hasilnya berbentuk seperti grafik dibawah ini.



Bentuk grafik seperti di atas adalah bentuk grafik yang akan kita pelajari di dalam modul ini.

Fungsi trigonometri adalah fungsi yang menghubungkan besar sudut dengan perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku. Nilai fungsi trigonometri ini digunakan untuk menentukan besar sudut atau panjang sisi suatu segitiga.
Ada tiga bentuk dasar dari sebuah fungsi trigonometri yaitu fungsi sinus, fungsi cosinus dan fungsi tangen. Ketiga fungsi ini dapat dengan mudah digambarkan dengan bantuan satuan lingkaran sehingga diperoleh sebuah gambar grafik fungsi trigonometri. Grafik fungsi sinus

dan fungsi cosinus akan membentuk sebuah gelombang yang berulang dan periodik. Bentuk khas dari fungsi trigonometri ini maka dapat ditemukan karakteristik dari fungsi trigonometri jika terjadi perubahan pada amplitudo dan periodenya.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Materi bahasan pada modul ini terbagi menjadi dua kegiatan pembelajaran, yaitu:

1. Kegiatan pembelajaran pertama membahas tentang menentukan nilai sebuah fungsi trigonometri dengan menggunakan bantuan lingkaran satuan dan menggambar grafik fungsi trigonometri yaitu sinus, cosinus dan tangen dengan menggunakan hasil yang diperoleh dari lingkaran satuan.
2. **Pembelajaran pertama** terdiri dari tiga bagian, yaitu:
   a. Pada bagian 1 silahkan kalian pelajari terkait dengan pembuatan grafik trigonometri sinus dengan menggunakan lingkaran satuan.
   b. Pada bagian 2 silahkan kalian pelajari terkait dengan pembuatan grafik trigonometri cosinus dengan menggunakan lingkaran satuan.
   c. Pada bagian 3 silahkan kalian pelajari terkait dengan pembuatan grafik trigonometri tangen dengan menggunakan lingkaran satuan.
3. **Pembelajaran kedua** menganalisa perubahan grafik fungsi trigonometri akibat perubahan pada konstanta pada fungsi $y = a \sin b\ (x \pm c) \pm d$, $y = a\ cos\ b\ (x \pm c) \pm d$ dan $y = a\ tan\ b\ (x \pm c) \pm d$
4. Pahami tiap kegiatan dengan tuntas, jangan melanjutkan ke kegiatan berikutnya bila masih ada yang belum dipahami.
5. Setiap kegiatan belajar dilengkapi dengan latihan yang menjadi alat ukur tingkat penguasaan kalian, setelah mempelajari modul ini.
6. Jika kalian belum menguasai 80% dari latihan pada setiap kegiatan pembelajaran, maka kalian dapat mengulanginya kembali.
7. Apabila kalian masih mengalami kesulitan dalam memahami materi yang ada dalam modul ini, silahkan berdiskusi dengan

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Fungsi trigonometri dan Menggambar grafik fungsi trigonometri

Kedua : Grafik fungsi trigonometri dalam bentuk $y = a \sin b\ (x \pm c) \pm d$, $y = a\ cos\ b\ (x \pm c) \pm d$ dan $y = a\ tan\ b\ (x \pm c) \pm d$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
FUNGSI TRIGONOMETRI

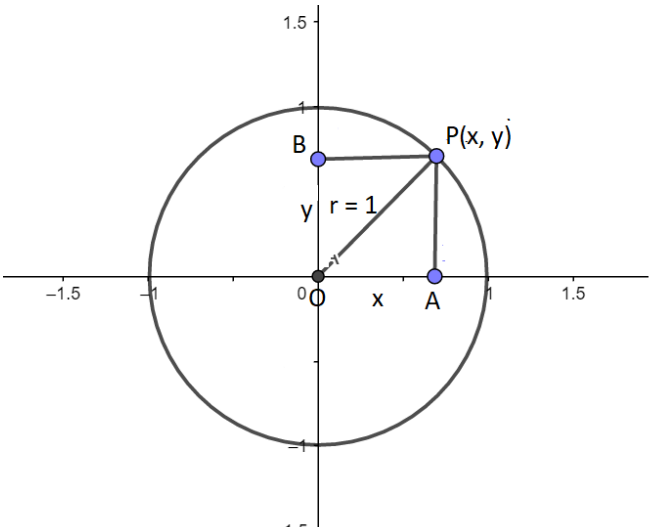
A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat:
1. Mendeskripsikan fungsi trigonometri
2. Menjelaskan fungsi trigonometri dengan menggunakan lingkaran satuan

B. Uraian Materi

Dalam menentukan grafik fungsi trigonometri dapat digunakan dua cara, yaitu dengan menggunakan tabel sudut-sudut istimewa trigonometri dan membuat lingkaran satuan. Pada bahasan kita akan membahas cara menggambarkan fungsi trigonometri sinus, cosinus dan tangen dengan menggunakan bantuan lingkaran satuan. Pembahasan kita akan dibagi menjadi tiga bagian bagian Grafik Sinus, Grafik Cosinus dan Grafik Tangen.

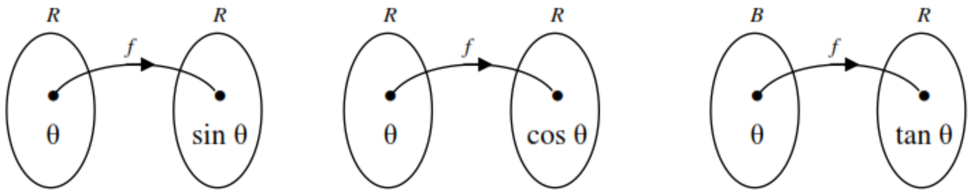
Pada bahasan sebelumnya kita telah membahas terkait dengan lingkaran satuan dengan jari-jari 1 satuan. Bahwa lingkaran satuan dengan jari-jari satu adalah lingkat yang berpusat di O(0,0) dengan jari-jari sebesar 1 satuan.
Dengan menggunakan definisi di atas, maka diperoleh gambar di bawah ini:



Dengan melihat gambar di atas, maka kita ingat kembali bahwa:
$Sin\ \theta\ = \frac{AP}{OP} = \frac{y}{r},\ Cos\ \theta\ = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{r},$ dan $Tan\ \theta\ = \frac{AP}{OA} = \frac{y}{x}$

Ingat kembali definisi fungsi adalah pemetaan yang menghubungkan semua anggota domain (daerah asal) ke tepat satu anggota kodomain (daerah hasil), maka fungsi trigonometri juga harus memenuhi ketentuan tersebut.
Pada fungsi trigonometri yang menjadi domain adalah besarnya sudut, atau pada gambar di atas adalah θ. Karena untuk setiap sudut θ hanya akan mempunyai satu nilai Sin θ, Cos θ, dan Tan θ yang merupakan anggota bilangan riil. Fungsi sinus,

cosinus dan tangen merupakan relasi dari himpunan sudut ke bilangan riil yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar (*i*) Gambar (*ii*) Gambar (*iii*)

Dengan:

a. gambar (i) menunjukan fungsi grafik sinus yang didefiniskan $f\,:\,\theta\ \rightarrow Sin\,\theta\,,\theta \in R$, dengan $f(\theta)\ =\ Sin\,\theta$
b. gambar (ii) menunjukan fungsi cosinus yang didefinisikan $f\,:\,\theta\ \rightarrow Cos\,\theta\,,\theta \in R$, dengan $f(\theta)\ =\ Cos\,\theta$
c. gambar (iii) adalah grafik fungsi tangen yang didefinisikan $f\,:\,\theta\ \rightarrow Tan\,\theta\,,\theta \in R$, dengan $f(\theta)\ =\ Tan\,\theta$

Fungsi $f(\theta)\ =\ Sin\,\theta,\ \ f(\theta)\ =\ Cos\,\theta, f(\theta)\ =\ Tan\,\theta$ kita sebut sebagai fungsi trigonometri. Adapun nilai Sin, Cos dan Tangen suatu sudut dapat bernilai positif maupun bernilai negatif atau nol tergantung letak sudutnya berada di kudrannya.

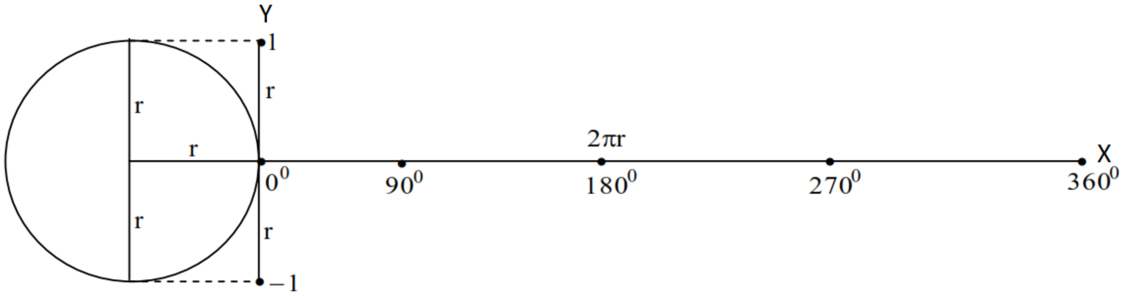
Menentukan nilai fungsi trigonometri sama seperti kita menentukan nilai fungsi yang lainnya, yaitu dengan melakukan substitusi nilai variable yang diberikan kedalam fungsinya. (Ingat kembali nilai-nilai sudut trigonometri, khususnya terkait dengan nilai sudut istimewa!)

Berikutnya akan kita bahas bagaimana menggambarkan grafik fungsi trigonometri dengan menggunakan lingkaran satuan atau lingkaran dengan jari-jari satuan. Untuk memahami fungsi trigonometri secara umum, maka kita terlebih dahulu membahasa grafik fungsi trigonometri dasar yaitu grafik y = Sinx, ,, y = cos x dan y = tan x.

Grafik fungsi trigonometri digambar dalam tata koordinat Cartesius yang menggunakan dua sumbu, yakni sumbu x sebagai nilai sudut dan sumbu y sebagai nilai fungsinya. Untuk melukis kedua sumbu ini dipakai aturan tersendiri, yaitu sebagai berikut:

a. Sumbu x sebagai nilai sudut, panjangnya sama dengan keliling lingkaran (2πr). Dalam satuan derajar sumbu ini dibagi menjadi 360 bagian dengan setiap bagiannya sama dengan 1^0. Sedangkan dalam satuan radian nilai-nilai tersebut dikonversikan ke dalam π radian.
b. Sumbu y sebagai nilai fungsinya, dengan skalanya dihitung satu satuan panjang sebagai panjang jari-jari lingkaran.

Dari ilustrasi di atas, maka dapat digambarkan koordinat Cartesius yang digunakan untuk menggambar fungsi trigonometri sebagai berikut:



Dengan menggunakan koordinat Cartesius di atas, maka dibawah akan kita bahas cara untuk menggambar grafik trigonometri sederhana y = sin x, y = cos x dan y = tan x dengan menggunakan lingkaran satuan sebagai berikut:

1. **Grafik Fungsi Sinus**

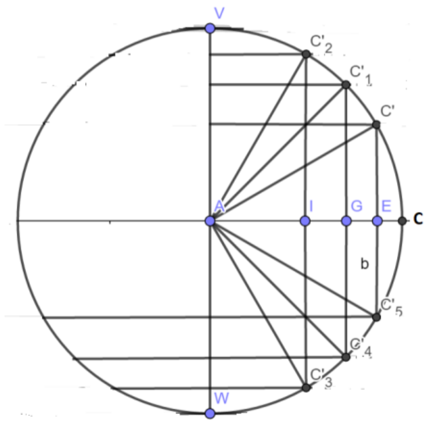
Untuk membuat grafik fungsi y = sin x, maka yang langkah-langkahnya adalah:

a. bidang gambar pada koordinat Cartesius dengan sumbu-x menunjukan besarnya sudut dan sumbu-y adalah nilai fungsi trigonometrinya.

b. buat lingkaran satuan yaitu lingkaran dengan jari-jari 1 satuan.

c. buatlah sudut pada lingkaran satuan yang bersesuaian dengan sudut istimewa yang telah kita pelajari sebelumnya.

Perhatikan gambar berikut ini:



Lingkaran disamping adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Maka panjang AC = 1 satuan.

Perhatikan 1:

Besar $\angle$CAC = 0^0.

Maka diperoleh bahwa AC adalah sebuah garis lurus sehingga besar sudut yang diperoleh adalah 0^0. Ingat bahwa Sin 0^0 = 0.

Perhatikan 2:

Besar $\angle$CAC' = 30^0.

Maka perhatikan segitiga CAC', diperoleh bahwa

$Sin\ 30^0 = \frac{C'E}{AC} = \frac{C'E}{1}$

Maka $C'E = Sin\ 30^0\ .1 = \frac{1}{2}$.

Sehingga panjang C'E = $\frac{1}{2}$.

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $EC'_5 = C'E = \frac{1}{2}$

Perhatikan 3:

Besar $\angle CAC'_1$ = 45^0.

Maka perhatikan segitiga CAC_1', diperoleh bahwa

$Sin\ 45^0 = \frac{GC_1'}{AC} = \frac{GC_1'}{1}$

Maka $GC_1' = Sin\ 45^0\ .1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Sehingga panjang GC_1' = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $EC_4' = GC_1' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Perhatikan 4:

Besar $\angle CAC_2'$ = 60^0.

Maka perhatikan segitiga CAC_2', diperoleh bahwa

$Sin\ 60^0 = \frac{AC_2'}{AC} = \frac{C'E}{1}$

Maka $AC_2' = Sin\ 60^0\ .1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Sehingga panjang AC_2' = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $AC_2' = IC_3' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Perhatikan 5:

Besar $\angle$CAV = 90^0.

Maka perhatikan segitiga CAV, diperoleh bahwa

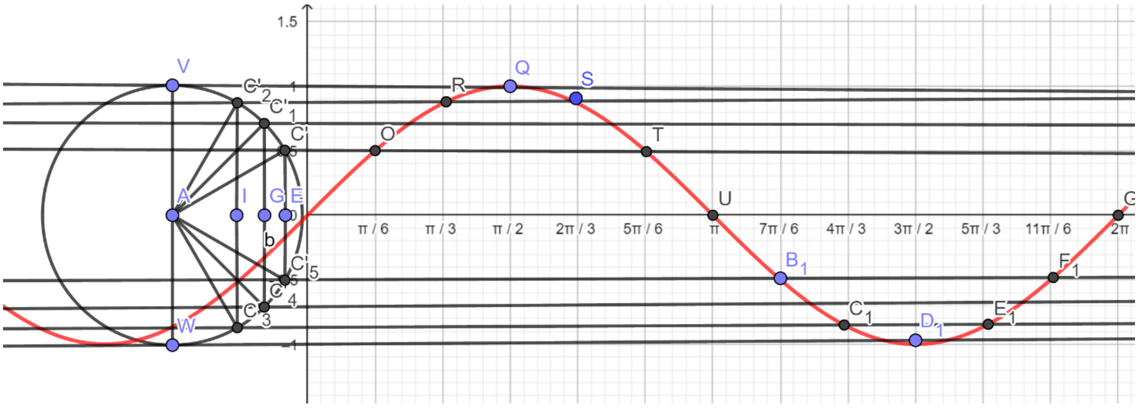
$Sin\ 90 = \frac{AV}{AC} = \frac{1}{1}$

Maka $AV = Sin\ 90^0\ .1 = 1$

Sehingga panjang AV = 1

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang AV = AW = 1.

Berdasarkan yang kita peroleh diatas, maka dapat menggambarkan grafik fungsi trigonometri y = sin x dengan meletakkan titik-titik yang kita peroleh melalui lingkaran satuan di atas sebagai berikut:



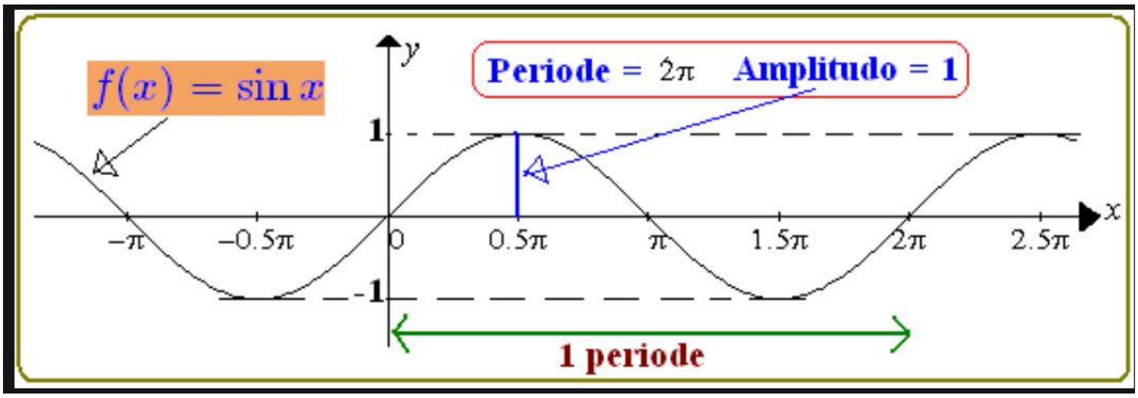
Maka grafik fungsi trigonometri y = sin x untuk nilai $0^0 \leq x \leq 2\pi^0$ diperoleh seperti pada grafik di atas.

Berdasarkan grafik di atas, maka dapat kita peroleh beberapa hal sebagai berikut:

a) untuk $x = \frac{\pi}{2}$ maka y = 1 adalah nilai maksimum fungsi y = sin x
b) untuk $x = \frac{3\pi}{2}$ maka y = -1 adalah nilai minimum fungsi y = sin x
c) grafik fungsi y = sin x memotong sumbu y pada x = $0^0, \pi$ dan 2π

d) grafik fungsi y = sin x mempunyai periode 2π, yaitu besar sudut yang dibutuhkan untuk membentuk 1 gelombang fungsi y = sin x

Kesimpulan dari a) sampai dengan d) dapat disimpulkan pada gambar dibawah ini:

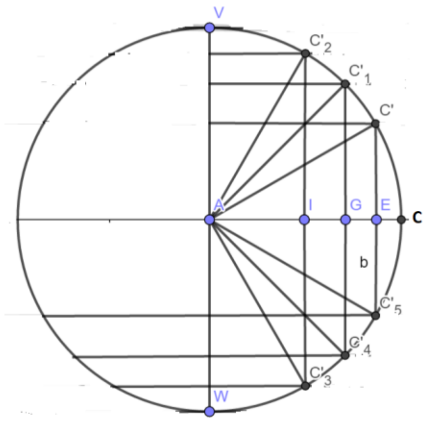


2. Grafik Fungsi Cosinus

Untuk membuat grafik fungsi y = cos x, maka yang Langkah-langkahnya adalah:

a. bidang gambar pada koordinat Cartesius dengan sumbu-x menunjukan besarnya sudut dan sumbu-y adalah nilai fungsi trigonometrinya.
b. buat lingkaran satuan yaitu lingkaran dengan jari-jari 1 satuan.
c. buatlah sudut pada lingkaran satuan yang bersesuaian dengan sudut istimewa yang telah kita pelajari sebelumnya.

Perhatikan gambar berikut ini:



Lingkaran disamping adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Maka panjang AC = 1 satuan.

Perhatikan 1:

Besar $\angle CAC = 0^0$.

Maka diperoleh bahwa AC adalah sebuah garis lurus sehingga besar sudut yang diperoleh adalah 0^0. Ingat bahwa Cos 0^0 = 1.

Perhatikan 2:

Besar $\angle CAC' = 30^0$.

Maka perhatikan segitiga CAC', diperoleh bahwa

$$Cos\ 30^0 = \frac{AE}{AC'} = \frac{AE}{1}$$

Maka $AE = Cos\ 30^0 \ .\ 1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Sehingga panjang $AE = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Maka dengan menggunakan Teorema Phytagoras, maka diperoleh bahwa panjang

$$(CE')^2 = (AC')^2 - (AE)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Maka $CE' = \frac{1}{2}$

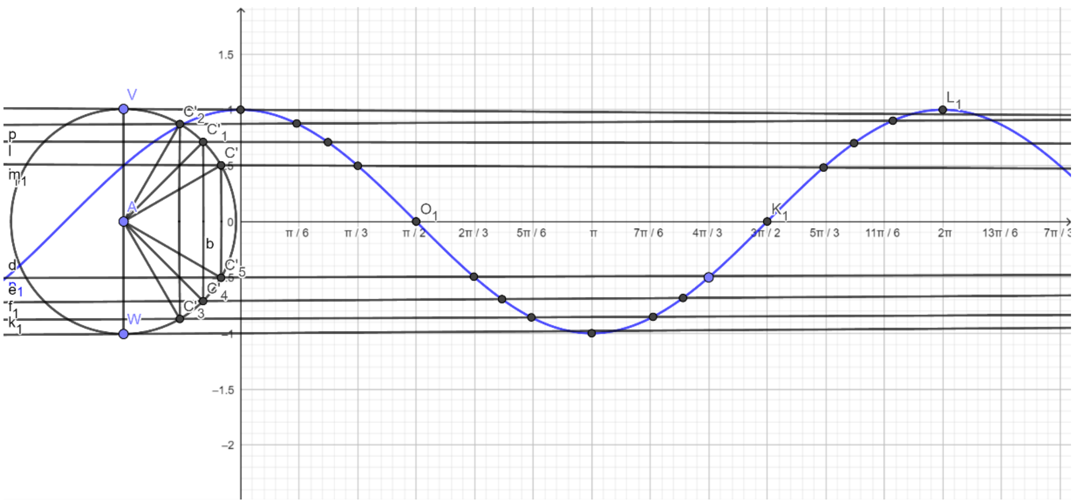
Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $EC_5' = C'E = \frac{1}{2}$

Perhatikan 3:
Besar $\angle CAC_1'$ = 45⁰.
Maka perhatikan segitiga CAC_1', diperoleh bahwa
$Cos\ 45^0 = \frac{AG}{AC_1'} = \frac{AG}{1}$
Maka $AG = Cos\ 45^0\ .1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
Maka dengan menggunakan Teorema Phytagoras, maka diperoleh bahwa panjang
$(GC_1')^2 = (AC_1')^2 - (AG)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$
Maka $GC_1' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $GC_4' = GC_1' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Perhatikan 4:
Besar $\angle CAC_2'$ = 60^0.
Maka perhatikan segitiga CAC_2', diperoleh bahwa
$Cos\ 60^0 = \frac{AI}{AC_2'} = \frac{AI}{1}$
Maka $AI = Cos\ 60^0\ .1 = \frac{1}{2}$.
Sehingga panjang $AI = \frac{1}{2}$
Maka dengan menggunakan Teorema Phytagoras, maka diperoleh bahwa panjang
$(IC_2')^2 = (AC_2')^2 - (AI)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$
Maka $IC_2' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $IC_3' = IC_2' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Perhatikan 5:
Besar $\angle$CAV = 90^0.
Maka perhatikan segitiga CAV, diperoleh bahwa
$Cos\ 90^0 = \frac{AV}{AC} = \frac{1}{1}$
Maka $AV = Cos\ 90^0\ .1 = 0$
Sehingga panjang AV = 0
Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang AV = AW = 0.

Berdasarkan yang kita peroleh diatas, maka dapat menggambarkan grafik fungsi trigonometri y = cos x dengan meletakan titik-titik yang kita peroleh melalui lingkaran satuan di atas sebagai berikut:

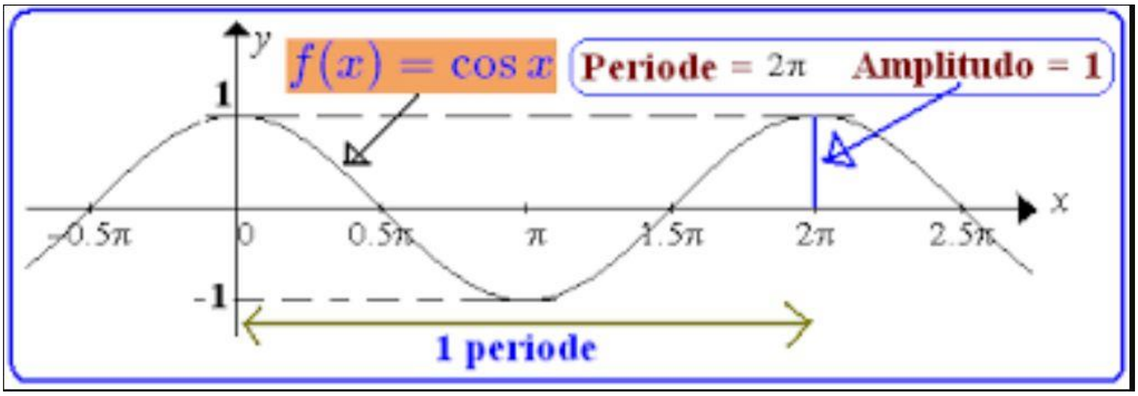


Maka grafik fungsi trigonometri y = cos x untuk nilai $0^0 \leq x \leq 2\pi^0$ diperoleh seperti pada grafik di atas.

Berdasarkan grafik di atas, maka dapat kita peroleh beberapa hal sebagai berikut:

a) untuk $x = 0$ maka y = 1 adalah nilai maksimum fungsi y = cos x
b) untuk $x = \pi$ maka y = -1 adalah nilai minimum fungsi y = cos x
c) untuk $x = 360^0$ maka y = 1 adalah nilai maksimum fungsi y = cos x
d) grafik fungsi y = cos x memotong sumbu-y pada x = $\frac{\pi}{2}$ dan $x = \frac{3\pi}{2}$
e) grafik fungsi y = cos x mempunyai periode 2π, yaitu besar sudut yang dibutuhkan untuk membentuk 1 gelombang fungsi y = cos x

Kesimpulan dari a) sampai dengan d) dapat disimpulkan pada gambar dibawah ini:

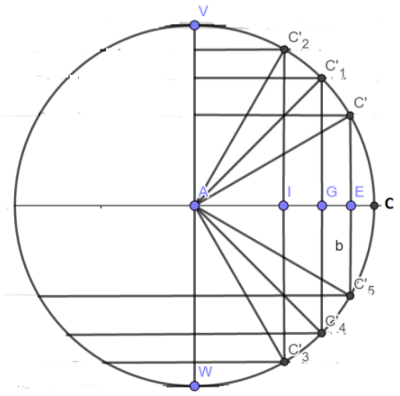


3. Grafik Fungsi Tangen

Untuk membuat grafik fungsi y = tan x, maka yang Langkah-langkahnya adalah:

a. bidang gambar pada koordinat Cartesius dengan sumbu-x menunjukan besarnya sudut dan sumbu-y adalah nilai fungsi trigonometrinya.
b. buat lingkaran satuan yaitu lingkaran dengan jari-jari 1 satuan.
c. buatlah sudut pada lingkaran satuan yang bersesuaian dengan sudut istimewa yang telah kita pelajari sebelumnya.

Perhatikan gambar berikut ini:



Lingkaran disamping adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Maka panjang AC = 1 satuan.

Perhatikan 1:

Besar $\angle$CAC = 0^0.

Maka diperoleh bahwa AC adalah sebuah garis lurus sehingga besar sudut yang diperoleh adalah 0^0. Ingat bahwa Tan 0^0 = 0

Perhatikan 2:

Besar $\angle$CAC' = 30^0.

Maka perhatikan segitiga CAC', diperoleh bahwa

$Tan\ 30^0 = \dfrac{C'E}{AE}$

Sebelumnya telah kita peroleh bahwa $C'E = \frac{1}{2}$ dan panjang $AE = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, maka dipeoleh bahwa $Tan\ 30^0 = \frac{C'E}{AE} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Perhatikan 3:

Besar $\angle CAC_1'$ = 45^0.

Maka perhatikan segitiga CAC_1', diperoleh bahwa

$Tan\ 45^0 = \frac{GC_1'}{AG}$.

Dari perhitungan sebelumnya telah kira peroleh bahwa panjang $GC' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan panjang $AG = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Maka $Tan\ 45^0 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$

Perhatikan 4:

Besar $\angle CAC_2'$ = 60^0.

Maka perhatikan segitiga CAC_2', diperoleh bahwa

$Tan\ 60^0 = \dfrac{IC_2'}{AI}$

Dari perhitungan sebelumnya diperoleh bahwa $IC_2' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $AI = \frac{1}{2}$. Maka diperoleh bahwa $Tan\ 60^0 = \frac{IC_2'}{AI} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

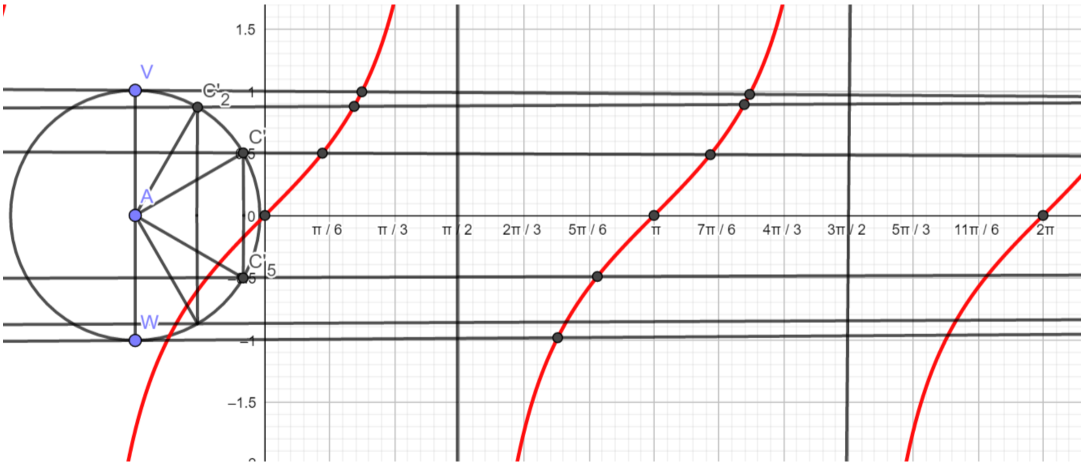
Perhatikan 5:

Besar $\angle$CAV = 90^0.

Maka perhatikan segitiga CAV, diperoleh bahwa

$Tan\ 90^0 = \frac{AV}{AC} = \frac{1}{0}$, sehingga diperoleh bahwa $Tan\ 90^0 = \infty$

Berdasarkan yang kita peroleh di atas, maka dapat menggambarkan grafik fungsi trigonometri y = tan x dengan meletakan titik-titik yang kita peroleh melalui lingkaran satuan di atas sebagai berikut:

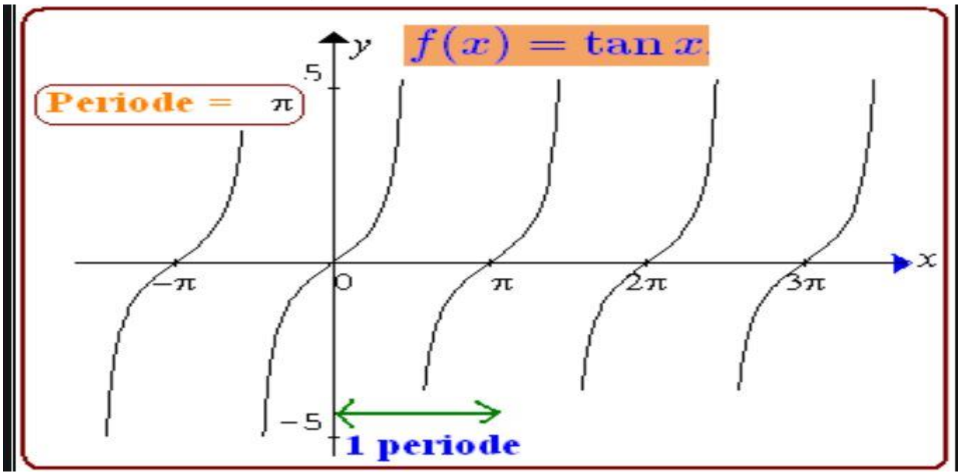


Maka grafik fungsi trigonometri y = tan x untuk nilai $0^0 \leq x \leq 2\pi^0$ diperoleh seperti pada grafik di atas.

Berdasarkan grafik di atas, maka dapat kita peroleh beberapa hal sebagai berikut:

a) grafik fungsi y = tan x memotong sumbu-y pada x = 0^0, x = π dan $x = 2\pi$
b) grafik fungsi y = tan x tidak mempunyai nilai maksimum dan tidak mempunyai nilai minimum.
c) Grafik fungsi y = tan x tidak mempunyai nilai untuk x = $\frac{\pi}{2}$ dan x = $\frac{3\pi}{2}$
d) grafik fungsi y = tan x mempunyai periode π, yaitu besar sudut yang dibutuhkan untuk membentuk 1 gelombang fungsi y = tan x

Kesimpulan dari a) sampai dengan d) dapat disimpulkan pada gambar dibawah ini:



Untuk kita lebih memahami lagi terkait dengan grafik fungsi trigonometri, maka kalian lihat beberapa contoh dibawah ini.

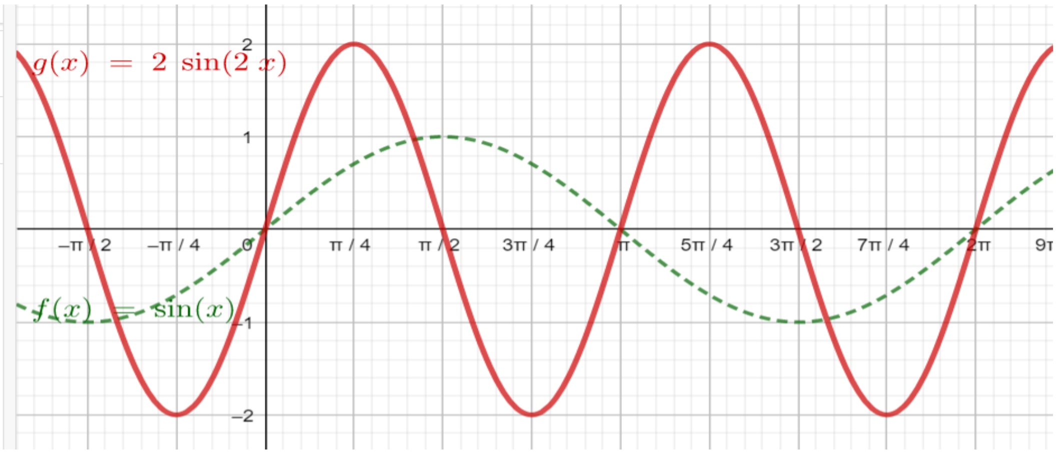
CONTOH 1

Gambarlah grafik dari y = 2 Sin 2x

Jawaban:

Langkah-langkah untuk menggambar grafik y = 2 Sin 2x adalah:

a. Pertama gambarlah dahulu grafik y = sin x dan y = Sin 2x sebagai dasar
b. Nilai maksimum y = sin x adalah 1, maka nilai maksimum y = 2 sin x = 2 (1) = 2. Dan juga nilai minimum y = sin x adalah -1, maka nilai minimum y = 2 sin x = 2 (-1) = -2.
c. Peroide grafik fungsi y = 2 Sin 2x sama dengan periode fungsi y = Sin 2x, karena sudutnya sama. Maka periodenya sama dengan $\frac{360^0}{2} = 180^0$
d. Perhatikan kembali grafik y = sin x, dengan periode sejauh 360^0, memotong sumbu-x di titik x = 0^0, 180^0, 360^0. Maka grafik y = Sin 2x dengan periode sejauh 180^0, memotong sumbu-x di titik x = 0^0, 90^0, 180^0.
e. Grafik y = sin x mencapai maksimum di x = 90^0 dengan nilai y_{max} = 2 dan mencapai minimum di x = 270^0 dengan nilai y_{min} = -2.
f. Berdasarkan informasi di atas, maka diperoleh grafik y = 2 Sin 2x sebagai berikut:



CONTOH 2

Gambarlah grafik dari $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$, untuk $0 \leq x \leq 360^0$

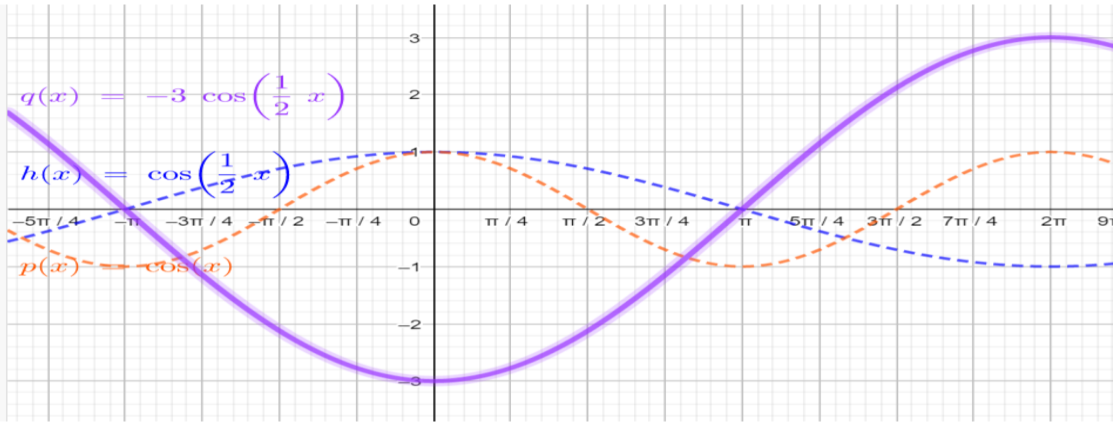
Jawaban:

Langkah-langkah untuk menggambar grafik $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$adalah:

a. Pertama gambarlah dahulu grafik y = cos x dan y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$
b. Nilai maksimum y = cos x adalah 1, maka nilai maksimum y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$= 1. Karena $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$, maka nilai y_{max} = -3 (1) = -3 menjadi **nilai minimum**
c. Nilai minimum y = cos x adalah -1, maka nilai minimum y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$= -1. Karena $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$, maka nilai y_{min} = -3 (-1) = 3 menjadi **nilai maksimum**
d. Periode grafik fungsi $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$ sama dengan periode fungsi y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$, karena sudutnya sama. Maka periodenya sama dengan $\frac{360^0}{\frac{1}{2}} = 720^0$

e. Perhatikan kembali grafik y = $Cos\ (x)$, dengan periode sejauh 36⁰, memotong sumbu-x di titik x =90^0, 270^0. Maka grafik y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$ dengan periode sejauh 720^0, memotong sumbu-x di titik x = 180^0, 540^0.

f. Berdasarkan informasi di atas, maka diperoleh grafik $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$ sebagai berikut:



CONTOH 3

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi y = 2 Sin 3x !

Jawaban:

Bentuk dasar dari fungsi y = 2 Sin 3x adalah y = Sin 3x.

Nilai maksimum y = Sin 3x sama dengan nilai maksimum y = sin x sama dengan 1.

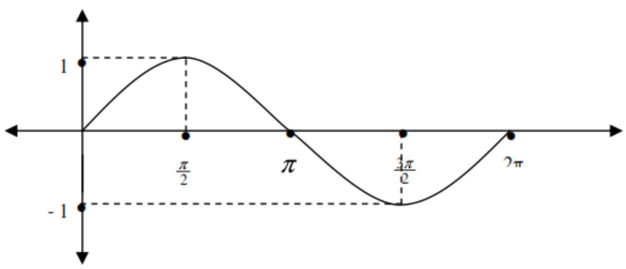
Maka nilai y_{max} = Sin 3x = 1. Maka nilai y_{max} = 2 Sin 3x = 2 (1) = 2

Nilai minimum y = Sin 3x sama dengan nilai minimum y = sin x sama dengan -1.

Maka nilai y_{min} = Sin 3x = -1. Maka nilai y_{max} = 2 Sin 3x = 2 (-1) = -2

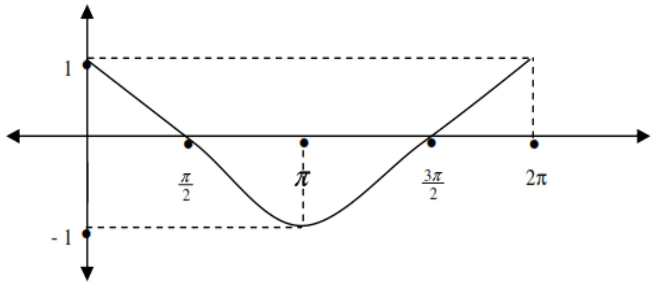
C. Rangkuman

1. Lingkaran satuan adalah lingkaran yang memiliki persamaan $x^2 + y^2 = 1$
2. Menggambar grafik fungsi trigonometri dapat digunakan dengan dua cara, yaitu dengan tabel nilai-nilai sudut istimewa dan menggunakan lingkaran satuan
3. Perbandingan nilai trigonometri dapat terlihat pada bidang Cartesius
4. Grafik y = sin x, untuk $0^0 \leq x \leq 2\pi$ adalah:



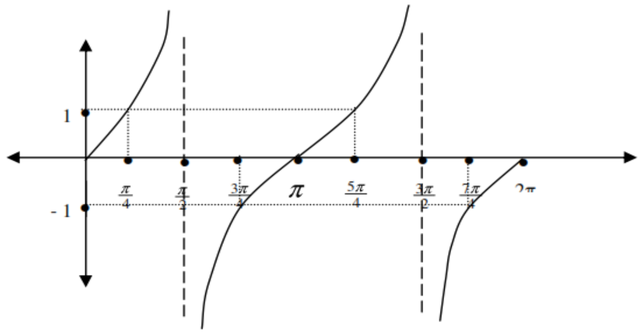
Sifat
a. *Max = 1*
b. *Min = - 1*
c. *sin (- x) = - sin x*
d. *Priode = 2π*

5. Grafik y = cos x, untuk $0^0 \leq x \leq 2\pi$ adalah:



Sifat
a. *Max = 1*
b. *Min = - 1*
c. *cos (- x) = - cos x*
d. *Priode = 2π*

6. Grafik y = tan x, untuk $0^0 \leq x \leq \pi$ adalah:



Sifat
a. *Tidak ada max dan min*
b. *Garis $\alpha = \pm 90$, ± 270, $\pm k.90$ k adalah bilangan ganjil adalah asimtot*
c. *tan (- x) = - tan x*
d. *Priode = π*

D. Latihan Soal

Untuk lebih memahami terkait fungsi trigonometri dan menggambar fungsi trigonometri dengan menggunakan lingkaran satuan, maka kerjakan latihan soal dibawah ini secara mandiri. Upayakan mengerjakan secara mandiri

PILIHAN GANDA

1. Diketahui grafik fungsi y_1 = 5 sin x dan y_2 = sin 5x. Pernyataan berikut yang benar adalah ….
   A. periode y_1 = periode y_2
   B. amplitudo y_1 = amplitudo y_2
   C. periode $y_1 = \frac{1}{5}$ kali periode y_2
   D. amplitudo $y_1 = \frac{1}{5}$ kali amplitudo y_2
   E. amplitudo y_1 =5 kali amplitudo y_2

2. Jika periode suatu fungsi trigonometri adalah 360^0, maka fungsi ini adalah:
   (1) sin x
   (2) cos x
   (3) sin (x + 180^0)
   (4) tan x
   Pernyataan yang benar adalah ….
   A. (1), (2) dan (3)
   B. (1) dan (3)
   C. (2) dan (4)
   D. (4) saja
   E. Semua pernyataan benar

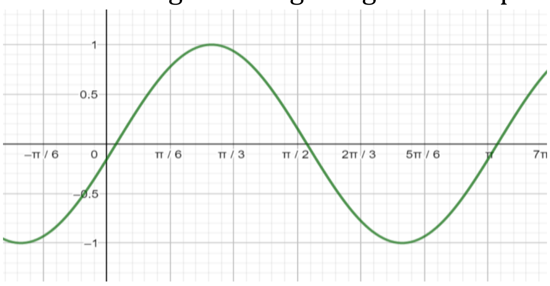
3. Sebuah grafik fungsi trigonometri mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:
   (1) Memotong sumbu-x di $x = k\pi$ dengan $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
   (2) Mempunyai asimtot tegak di $x = \frac{1}{2}k\pi$ dengan $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
   (3) Selalu berada di atas sumbu -x pada daerah $0 < x < \frac{1}{2}\pi$
   (4) Terletak dalam daerah -1 < y < 1

   Grafik fungsi trigonometri dengan ciri-ciri diatas adalah ….
   A. sin x
   B. cos x
   C. tan x
   D. sin 2x
   E. cos 2x

4. Dengan menggunakan skala dan kertas gambar yang sama, pada interval $0^0 < x < 90^0$ maka akan terlihat:
   (1) Maksimum sin x = maksimum cos x
   (2) Maksimum tan x > Maksimum cos x
   (3) Maksimum 3 sinx > Maksimum sin 3x
   (4) Maksimum 3 sin x > Maksimum 3 cos x

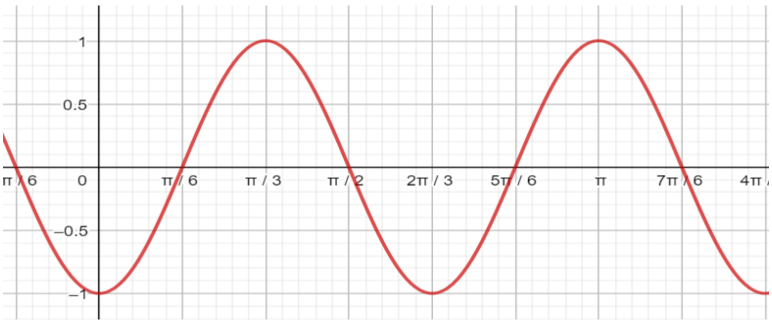
   Pernyataan yang bernilai benar adalah….
   A. (1), (2) dan (3) benar
   B. (1) dan (3) benar
   C. (2) dan (4) benar
   D. (4) saja
   E. Semua pernyataan benar

5. Persamaan grafik fungsi trigonometri pada gambar di bawah ini adalah …



   A. $y = -\cos(2x - 30)^0$
   B. $y = -\cos(2x + 30)^0$
   C. $y = \cos(2x - 30)^0$
   D. $y = -\sin(2x - 30)^0$
   E. $y = -\sin(2x + 30)^0$

6. Persamaan grafik di bawah ini adalah y = a cos kx, dengan $0^0 \le x \le 120^0$, maka nilai a dan k berturut-turut adalah ….



   A. -1 dan $\frac{1}{6}$
   B. 1 dan 3
   C. 2 dan $\frac{1}{3}$
   D. -1 dan 3
   E. -1 dan $\frac{1}{6}$

7. Fungsi $y = \frac{1}{2} Cos\ x + 1$ merupakan fungsi:
   (1) Periodik dengan periode 2π
   (2) Mempunyai nilai minimum $-1\frac{1}{2}$
   (3) Mempunyai nilai maksimum $1\frac{1}{2}$
   (4) Memotong sumbu-x di $x = \frac{\pi}{2}$

   Pernyataan yang benar adalah ….
   A. (1), (2) dan (3) benar
   B. (1) dan (3) benar
   C. (2) dan (4) benar
   D. (4) saja
   E. Semua pernyataan benar

8. Gambarkan grafik fungsi y = -2 sin x, untuk 0 $\leq x \leq 2\pi$

9. Gambarkan grafik fungsi y = - cos x + 1, untuk 0 $\leq x \leq 2\pi$

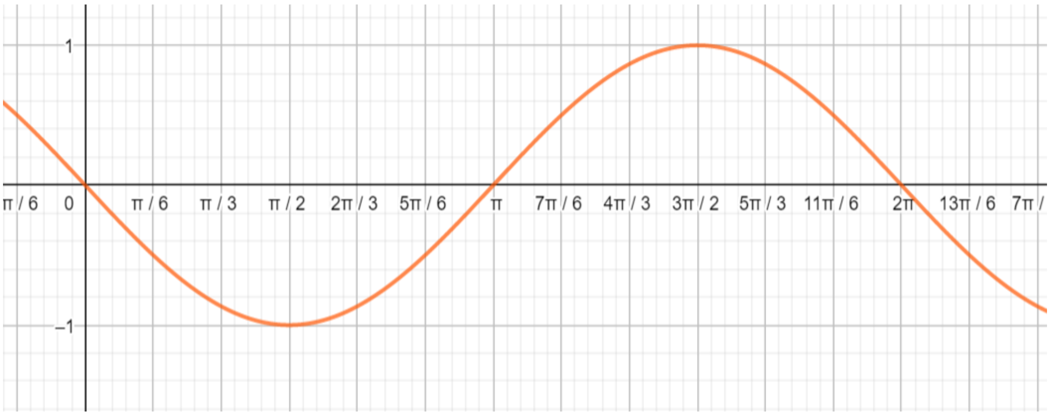
10. Gambarkan grafik fungsi y = tan x -2, untuk 0 $\leq x \leq 2\pi$

PEMBAHASAN

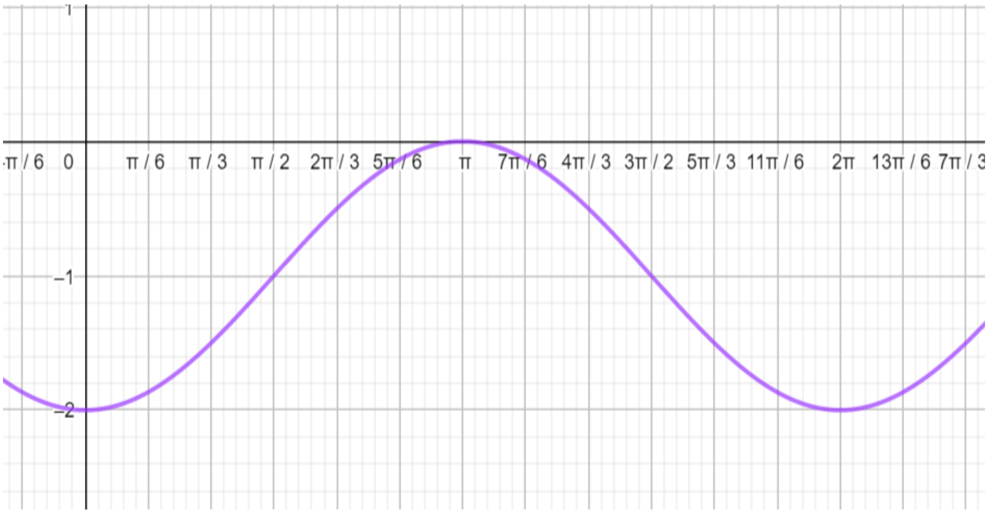
1. Jawaban: **E**
   Pembahasan:
   Bentuk umum fungsi sinus tersebut adalah $y = a\ Sin(kx)$
   Periode:
   Periode $y_1 = 5\ Sin\ x$ dengan k=1 adalah $P_1 = \frac{360^0}{1} = 360^0$,
   sedangkan periode $y_2 = Sin\ 5x$ dengan k=5 adalah $P_2 = \frac{360^0}{5} = 72^0$
   Dapat disimpulkan bahwa periode y_1 sama dengan 5 kali periode y_2.

   Amplitudo:
   Amplitudo y_1 = 5 sin x dengan a=5 adalah A_1=|a|=|5|=5, sedangkan amplitudo y_2 = Sin 5x dengan a=1 maka A_2=|a|=|1|=1.
   Dapat disimpulkan bahwa amplitudo y_1 sama dengan 5 kali amplitudo y_2.
2. Jawaban: **A**
   Pembahasan:
   Yang mempunyai periode 360^0 adalah y = sin x, y = cos x dan y = Sin (x-180^0)
3. Jawaban: **C**
   Pembahasan: Soal sudah jelas. Lihat kembali gambar grafik fungsi trigonometri y = tan x
4. Jawaban: **A**
   Pembahasan:
   Maksimum nilai y = sin x adalah 1
   Maksimum nilai y = cos x adalah 1
   Maksimum nilai y = 3 sin x = 3 (1) = 3 sedangkan maksimum nilai y = Sin 3x = 1 , maka Maksimum 3 Sin > Maksimum Sin 3x
5. Jawaban: **A**
   Pembahasan:
   Grafik di atas mempunyai nilai maksimum sama dengan 1 dan nilai minimum sama dengan -1.
   Dan grafik memotong sumbu x untuk x sama dengan 120^0.
6. Jawaban: **D**
   Pembahasan:
   Nilai maksimum dan minimum masing-masing adalah -1 dan 1, maka nilai a = 1.
   Periode grafik adalah 120^0 maka nilai k = 3.
   Maka misalkan disubstitusikan untuk x = 30^0 maka diperoleh a = -1.
7. Jawaban: **D**
   Pembahasan:
   Grafik fungsi $y = \frac{1}{2}Cos\ x + 1$ mempunyai nilai maksimum $\frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$ dan periodik diperoleh adalah 2π

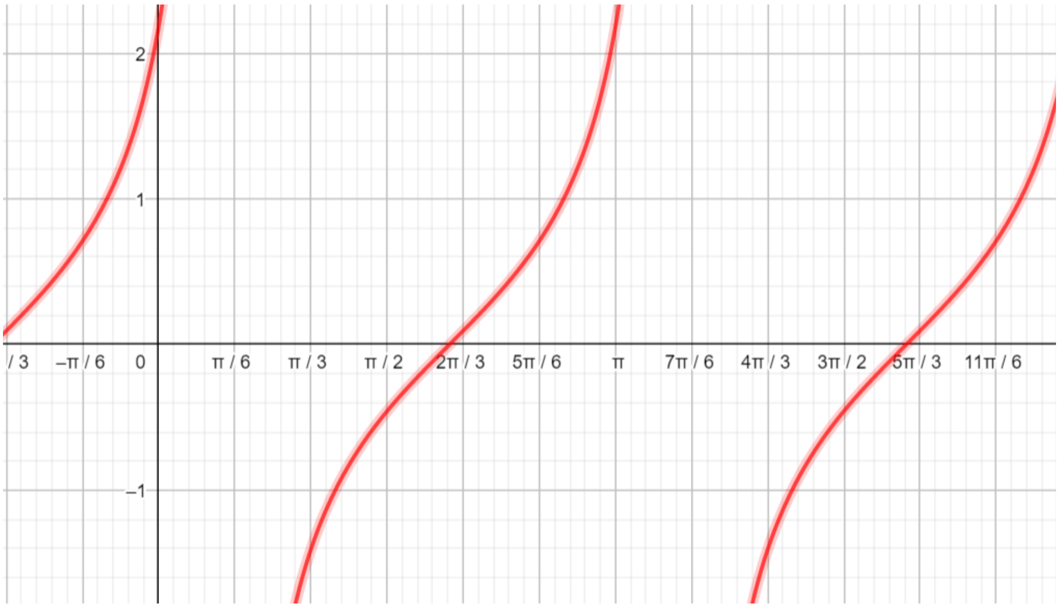
8. Jawaban: grafik fungsi y = -2 sin x, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$



9. Jawaban: y = - cos x + 1, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$



10. Jawaban: grafik fungsi y = tan x-2, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$



E. Penilaian Diri

Berilah tanda ceklist (V) pada kotak yang kalian anggap paling sesuai. Setelah mempelajari dan mengerjakan pembelajaran 1 pada modul ini, bagaimana penguasaan kalian terhadap materi-materi berikut:

No	Materi	Tidak Menguasai	Kurang Menguasai	Menguasai
1	Menggambar grafik fungsi y = sin x dengan menggunakan lingkaran satuan			
2.	Menggambar grafik fungsi y = cos x dengan menggunakan lingkaran satuan			
3.	Menggambar grafik fungsi y = tan x dengan menggunakan lingkaran satuan			
4.	Memahami grafik fungsi y = sin x			
5.	Memahami karakteristik grafik fungsi y = cos x			
6.	Memahami karakteristik grafik fungsi y = tan x			

Catatan :

1. Jika soal latihan kalian memperoleh nilai < 80% maka kembali pelajari dan ulang kembali pembelajaran 1 dari awal.
2. Jika dari ceklist yang kalian buat < 75% tidak atau kurang dikuasai, maka kembali pahami dan ulang kembali kegiatan pembelajaran 1 dari awal.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI BENTUK Y = A Sin b (X ±C) ±K

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran kedua ini diharapkan siswa dapat:

1. Menjelaskan perubahan grafik fungsi trigonometri yang diakibatkan oleh bentuk fungsi y = a Sin b (x±c) ± d.
2. Mengidentifikasi grafik fungsi trigonometri y = a Sin b (x±c) ± d.

B. Uraian Materi

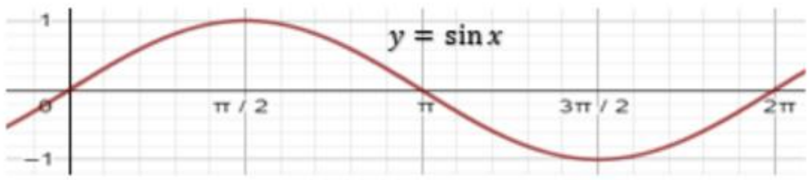
Sebagaimana telah diperoleh pada pembelajaran sebelumnya, bahwa fungsi trigonometri sinus, cosinus dan tangen adalah bentuk fungsi yang periodik. Fungsi periodic adalah fungsi yang sifatnya berulang-ulang secara teratur. Karena bersifat periodic, berarti ada periodenya.

Periode bisa kita sebut juga sebagai siklus yaitu pengulanagn hal yang sama setelah suatu selang tertentu. Fungsi y = sin x akan membentuk siklus/periode setiap 360^0. Hal ini bermakna bahwa setelah x mencapai 360^0, maka grafik fungsi y = sin x akan mengulang kembali ke awal.

Supaya lebih jelas kalian bisa melihat dari ilustrasi berikut ini!

1. Grafik Fungsi Sinus

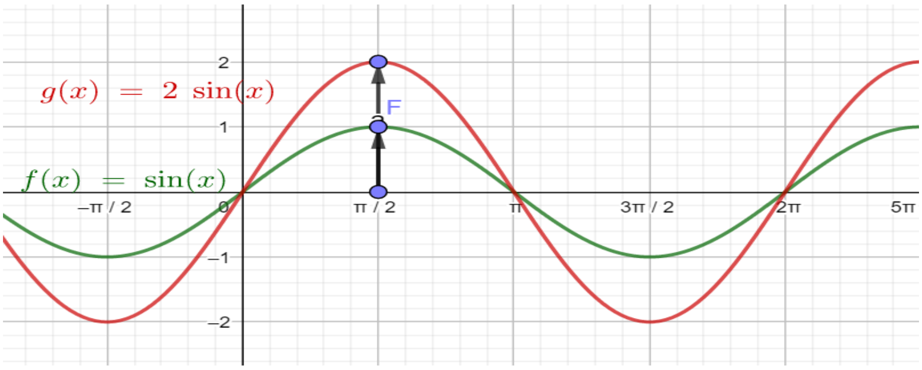
   Ingat kembali bentuk fungsi y = sin x, untuk $0^0 \leq x \leq 360^0$ sebagai berikut:

   Fungsi y = sin x mempunyai nilai maksimum di y = 1 dan nilai minimum di y = -1. Nilai maksimum atau nilai minimum untuk y = 1, maka y = 1 disebut juga sebagai amplitude dari grafik fungsi y = sin x.

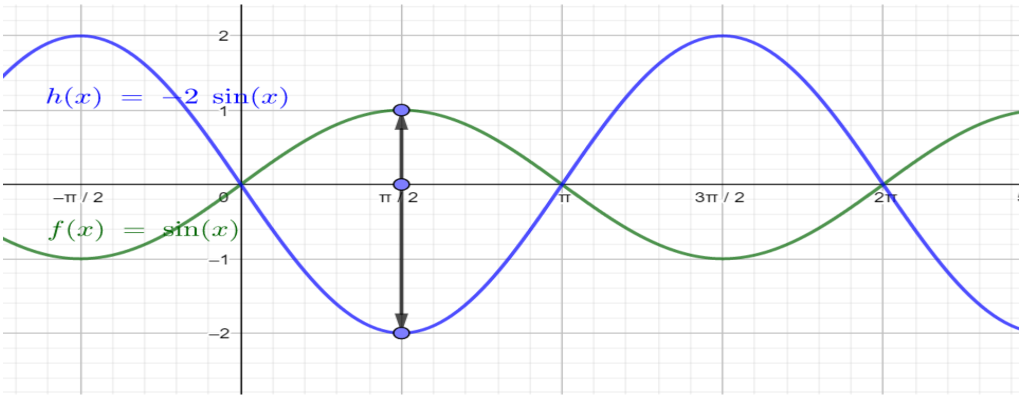
   Perhatikan pula bahwa grafik fungsi y = sin x mempunyai periode sejauh 360^0 untuk membentuk satu gelombang.

   a. Misalkan fungsi $y_2 = 2y_1$ atau $y_2 = 2\,Sin\,x,\ 0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsi nya menjadi seperti berikut:



Berdasarkan grafik di atas, perhatikan bahwa nilai maksimum y_2 = 2 sin x menjadi sama dengan 2 dan nilai minimum menjadi -2. Sedangkan periode dari y_2 = 2 sin x tetap sama dengan 360^0.

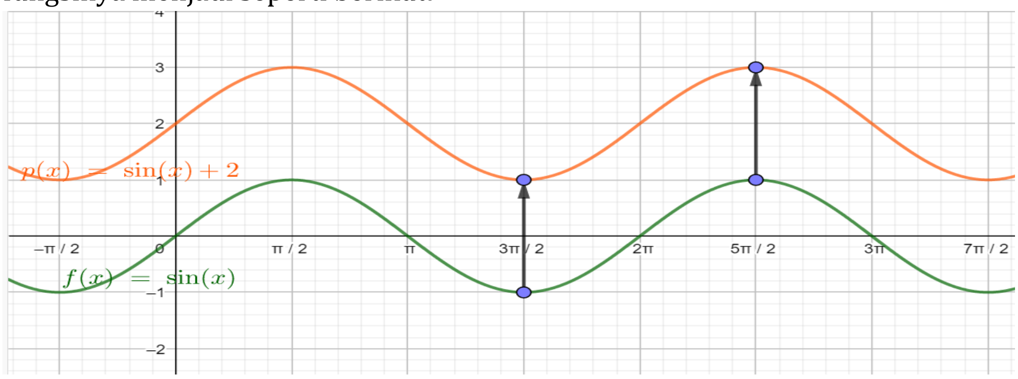
b. Misalkan fungsi $y_3 = -2y_1$ atau $y_3 = -2\,sin\,x$, $0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsi nya menjadi seperti berikut:



Berdasarkan grafik diatas perhatikan bahwa nilai maksimum y_3 = -2 sin x menjadi sama dengan 2 dan nilai minimum menjadi -2. Sedangkan periode dari y_3 = -2 sin x tetap sama dengan 360^0.

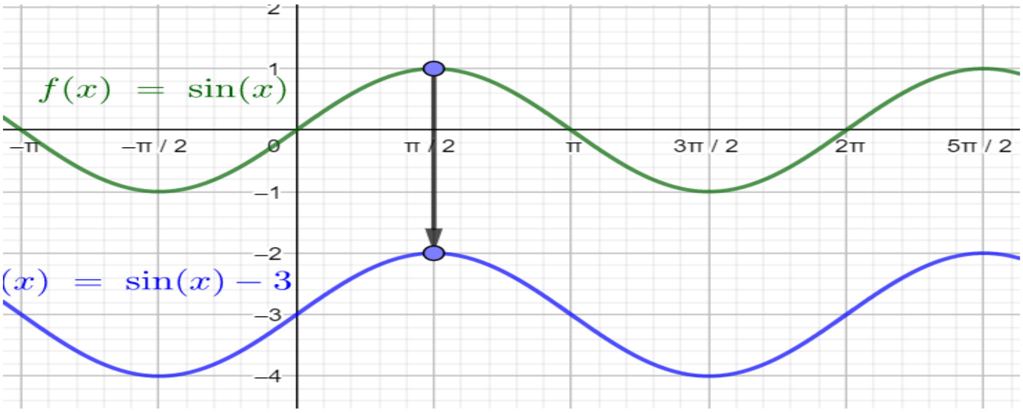
Berdasarkan a) dan b) maka diperoleh bahwa secara umum jika diberikan fungsi trigonometri y = k Sin x, maka nilai maksimum y = k dan nilai minimum = -k

c. Misalkan fungsi $y_4 = y_1 + 2$ atau $y_4 = sin\,x + 2$, $0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsinya menjadi seperti berikut:



Berdasarkan grafik fungsi trigonometri di atas, maka diperoleh bahwa nilai maksimum y_4 = 3 atau nilai maksimum y_4 = nilai maksimum y_1 + 2 = 1 + 2 = 3. Sedangkan nilai minimum y_4 = 1 atau nilai minimum y_4 = nilai minimum y_1+2=-1

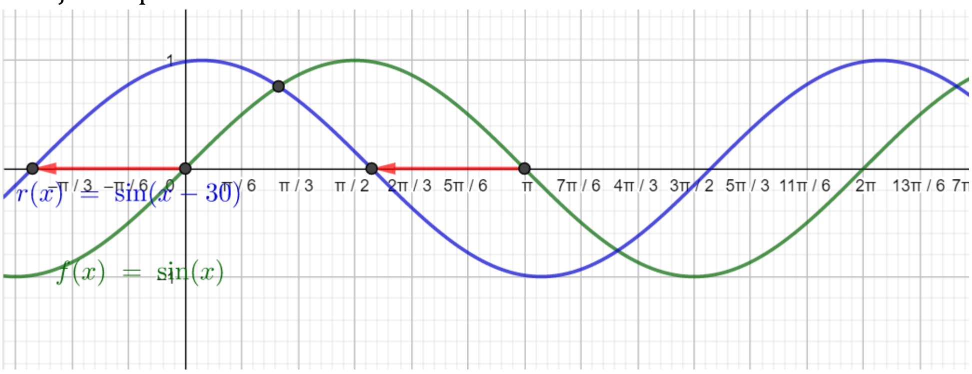
d. Misalkan fungsi $y_5 = y_1 - 3$ atau $y_4 = Sin\, x - 2,\ 0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsinya menjadi seperti berikut:



Berdasarkan grafik fungsi trigonometri di atas, maka diperoleh bahwa nilai maksimum y_5 = -2 atau nilai maksimum y_5 = nilai maksimum y_1 -3 = 1 -3 = -2. Sedangkan nilai minimum y_5 = -4 atau nilai minimum y_5 = nilai minimum y_1 – 3 = -1 - 3 = - 4.

Berdasarkan ilustrasi pada c) dan d) maka diperoleh jika y = sin x + c, maka y mempunyai nilai maksimum sama dengan 1 + c dan y mempunyai nilai minimum 1 – c.

e. Misalkan fungsi $y_6 = \text{Sin}\left(\text{x} - \frac{\pi}{6}\right),\ 0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsinya menjadi seperti berikut:



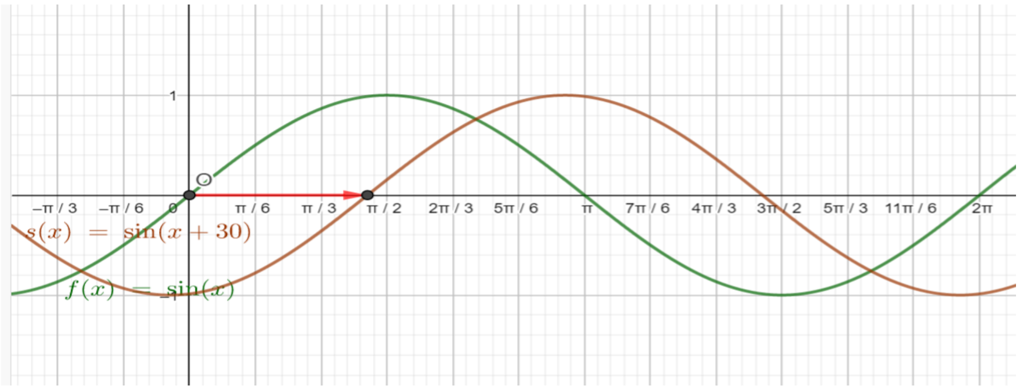
Berdasarkan gambar di atas, maka dapat diperoleh bahwa fungsi y = sin x memotong sumbu -x dititik x = $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$

Sedangkan pada grafik y = Sin (x - 30^0) diperoleh bahwa titik potong sumbu-x memenuhi untuk y = 0, maka diperoleh untuk:

i. Sin (x - 30^0) = 0 atau x - 30^0 = 0 atau x = 30^0, 150^0

ii. Sin (x - 30^0) = 0 atau x - 30^0 = 180^0 atau x = 210^0

f. Misalkan fungsi $y_7 = \text{Sin}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsinya menjadi seperti berikut:



Berdasarkan gambar di atas, maka dapat diperoleh bahwa fungsi y = sin x memotong sumbu -x dititik x = $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$

Sedangkan pada grafik y = Sin (x + 30^0) diperoleh bahwa titik potong sumbu-x memenuhi untuk y = 0, maka diperoleh untuk:

i. Sin (x + 30^0) = 0 atau x + 30^0 = 0 atau x = - 30^0 ,150^0

ii. Sin (x + 30^0) = 0 atau x + 30^0 = 180^0 atau x = 210^0

Berdasarkan ilustrasi yang ada di e) dan f), jika grafik fungsi trigonometri bertambah sejauh α^0 atau Sin (x + 30^0) maka diperoleh grafiknya dapat diperoleh dari grafik fungsi y = sin x yang digeser sejauh α^0 ke arah kanan sepanjang sumbu-x.

Sedangkan grafik fungsi trigonometri berkurang sejauh α^0 atau Sin (x - 30^0) maka diperoleh grafiknya dapat diperoleh dari grafik fungsi y = sin x yang digeser sejauh α^0 ke arah kiri sepanjang sumbu-x

Berdasarkan bahasan di atas, maka dapat kita buat kesimpulan secara umum bahwa grafik fungsi sinus yang dinyatakan dalam bentuk $y = k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh:

a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = |k| + c$

b. Nilai minimum fungsi adalah $y = -|k| + c$

c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|

d. Periode fungsi adalah $\frac{360^0}{a}$ atau $\frac{2\pi}{a}$

e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser kekiri sejauh β

f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser kekanan sejauh β

g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser ke atas sejauh c

h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser ke atas kebawah c

i. Grafik fungsi y = $= -k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

Dengan cara yang sama seperti di atas, maka untuk mendapatkan ilustrasi terkait dengan grafik fungsi cosinus yang dinyatakan dalam bentuk $y = k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh:

a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = \ |k| + c$
b. Nilai minimum fungsi adalah $y = \ -|k| + c$
c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
d. Periode fungsi adalah $\frac{360^0}{a}$ atau $\frac{2\pi}{a}$
e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser kekiri sejauh β
f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser kekanan sejauh β
g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser ke atas sejauh c
h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser ke atas kebawah c
i. Grafik fungsi y = $= -k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

Sedangkan untuk grafik tangen untuk mendapatkan ilustrasi terkait dengan grafik fungsi tangen yang dinyatakan dalam bentuk $y = k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh:

a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = \ \infty$
b. Nilai minimum fungsi adalah $y = \ -\infty$
c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
d. Periode fungsi adalah $\frac{180^0}{a}$ atau $\frac{\pi}{a}$
e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser kekiri sejauh β
f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser kekanan sejauh β
g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser ke atas sejauh c
h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser ke atas kebawah c
i. Grafik fungsi y = $= -k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

Untuk lebih memahami pembahasan di atas, perhatikan contoh-contoh soal dibawah ini.

CONTOH 1

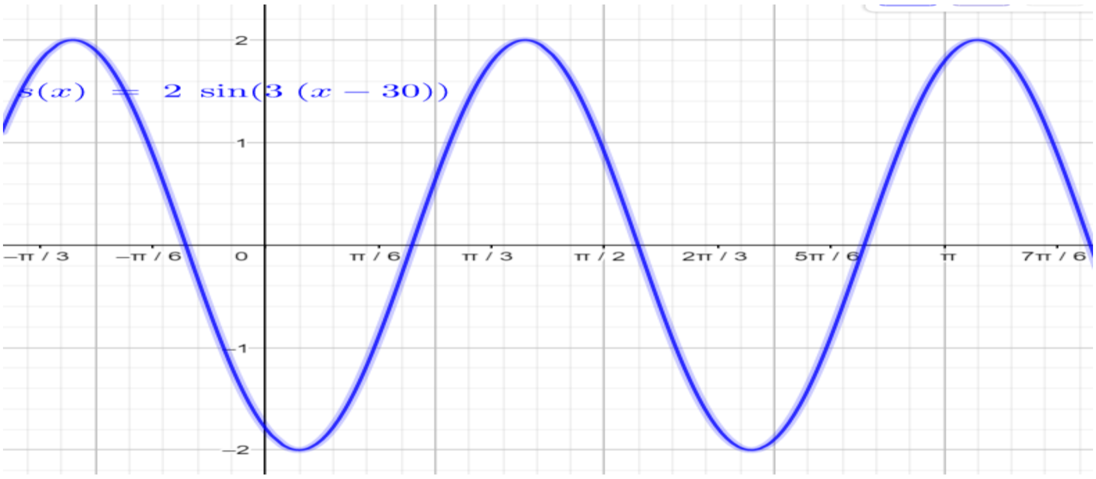
Gambarkan grafik y = 2 Sin 3(x - 30^0) untuk $0 \leq x \leq 180^0$

Jawaban:

Langkah - langkah untuk menggambar grafik y = 2 Sin 3(x - 30^0) adalah:

a. Pertama gambarlah dahulu grafik y = sin x dan y = 2 Sin 3x sebagai dasar
b. Nilai maksimum y_{max} = 2 Sin 3x = 2 (1) = 2 maka y_{max} = 2 Sin 3(x - 30^0) = 2 dan nilai y_{min} = 2 Sin 3x = 2 (-1) = -2 maka y_{min} =2 Sin 3(x - 30^0) = -2
c. Karena fungsi y = 2 Sin 3x dan y = 2 Sin 3(x - 30^0) mempunyai sudut yang sama. Maka periodenya sama dengan $\frac{360^0}{3} = \ 120^0$
d. Perhatikan kembali grafik y = sin x, dengan periode sejauh 360^0, memotong sumbu-x di titik x = 0^0, 180^0, 360^0. Maka grafik y = Sin 3x dengan periode sejauh 120^0, memotong sumbu-x di titik x = 0^0, 60^0, 120^0.

e. Berdasarkan informasi di atas, maka diperoleh grafik y = 2 Sin 3(x - 30^0) sebagai berikut:



CONTOH 2

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $y = -\frac{3}{2}\ Cos\ \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

Jawaban:

Bentuk dasar dari fungsi trigonometri $y = -\frac{3}{2}\ Cos\ \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ adalah bentuk $y = Cos\ x$.

a. Nilai y = cos x mempunyai nilai maksimum sama dengan 1. Maka diperoleh bahwa $y = -\frac{3}{2}\ Cos\ \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ mempunyai nilai y= $-\frac{3}{2}\ (1) = -\frac{3}{2}$.
Maka bentuk $y = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$ → ini merupakan nilai minimum

b. Nilai y = cos x mempunyai nilai minimum sama dengan -1. Maka diperoleh bahwa $y = -\frac{3}{2}\ Cos\ \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ mempunyai nilai y= $-\frac{3}{2}\ (-1) = \frac{3}{2}$.
Maka bentuk $y = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ → ini merupakan nilai maksimum

C. Rangkuman

Berdasarkan bahasan di atas, maka dapat kita simpulkan sebagai berikut:

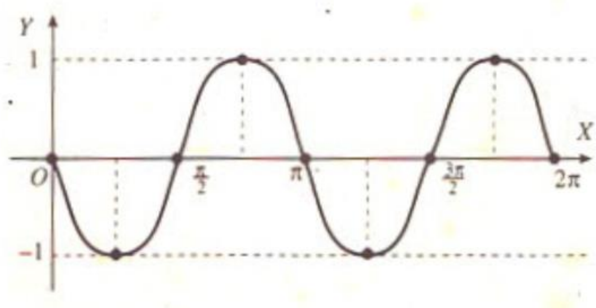
1. **Bentuk $y = k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh**:
   a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = |k| + c$
   b. Nilai minimum fungsi adalah $y = -|k| + c$
   c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
   d. Periode fungsi adalah $\frac{360^0}{a}$ atau $\frac{2\pi}{a}$
   e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser kekiri sejauh β
   f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser kekanan sejauh β
   g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser ke atas sejauh c
   h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser ke atas kebawah c
   i. Grafik fungsi y = $= -k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

2. **Bentuk $\boldsymbol{y = k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0 + c}$ dapat diperoleh:**
   a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = |k| + c$
   b. Nilai minimum fungsi adalah $y = -|k| + c$
   c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
   d. Periode fungsi adalah $\frac{360^0}{a}$ atau $\frac{2\pi}{a}$
   e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser kekiri sejauh β
   f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser kekanan sejauh β
   g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser ke atas sejauh c
   h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser ke atas kebawah c
   i. Grafik fungsi y = $= -k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi $y = k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

3. **Bentuk $\boldsymbol{y = k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0 + c}$ dapat diperoleh:**
   a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = \infty$
   b. Nilai minimum fungsi adalah $y = -\infty$
   c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
   d. Periode fungsi adalah $\frac{180^0}{a}$ atau $\frac{\pi}{a}$
   e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser kekiri sejauh β
   f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser kekanan sejauh β
   g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser ke atas sejauh c
   h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser ke atas kebawah c
   i. Grafik fungsi y = $= -k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

D. Latihan Soal

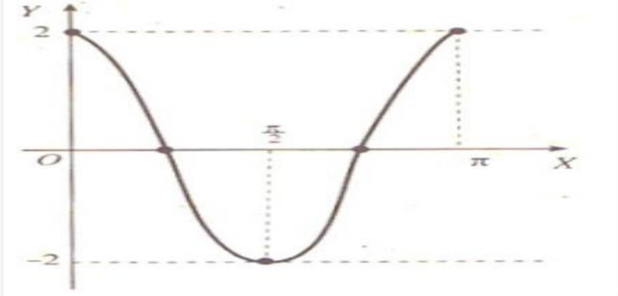
1. Grafik di bawah ini persamaannya adalah ….



A. y = sin x
B. y = sin 2x
C. y = sin (-x)
D. y = sin (-2x)
E. $y = \frac{1}{2} \cos 2x$

2. Persamaan grafik fungsi untuk gambar dibawah ini adalah ….

A. $y = \cos \frac{1}{2}x$
B. $y = 2 \cos \frac{1}{2}x$
C. $y = \cos x$
D. $y = 2 \cos x$
E. $y = 2 \cos 2x$



3. Nilai maksimum dan minimum dari fungsi $y = 5\ Cos\ 3x$ adalah ....
   A. 3 dan -3
   B. 4 dan -5
   C. 5 dan -5
   D. 6 dan -3
   E. 7 dan 5

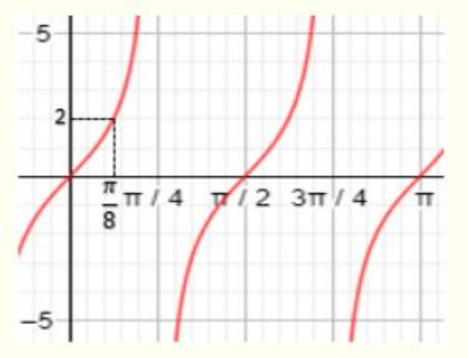
4. Nilai maksimum dan nilai minumum dari fungsi $y = -3\ Cos\ 2(x + 30^0)$ adalah ....
   A. -2 dan -3
   B. 2 dan -2
   C. -3 dan -5
   D. 3 dan -3
   E. 5 dan -5

5. Nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi $y = -3\ Sin\ (2x - 60^0\ ) - 5$ adalah ....
   A. -3 dan -5
   B. -2 dan -8
   C. 0 dan -5
   D. 2 dan -3
   E. 3 dan -7

6. Jika $0^0 \leq x \leq 180^0$ maka fungsi $y = 3\ Sin\ (2x - 30^0)$ mempunyai nilai maksimum di titik ....
   A. $(30^0, 3)$
   B. $(45^0, 3)$
   C. $(60^0, 3)$
   D. $(75^0, 3)$
   E. $(90^0, 3)$

7. Periode dari fungsi $y = 2\ Sin\ (3x - 30^0)$ adalah ....
   A. 90^0
   B. 120^0
   C. 150^0
   D. 180^0
   E. 360^0

8. Persamaan dari grafik di bawah ini adalah ....



   A. y = tan 2x
   B. y = 2 tan 2x
   C. $y = tan\ \frac{1}{2}x$
   D. y = -2 tan x
   E. y = 2 tan x

PEMBAHASAN

1. Jawaban: **D**

   Pembahasan:
   Grafik memotong sumbu-x dititik x = 0^0, 90^0, 180^0, 270^0, 360^0, maka fungsi mempunyai periode sama dengan 180^0
   Grafik mempunyai nilai maksimum sama dengan 1 dan mempunyai nilai minimum sama dengan -1
   Maka grafik di atas yang benar adalah y = Sin (-2x)
2. Jawaban: **B**

   Pembahasan:
   Grafik memotong sumbu-x dititik x =45^0,135^0 maka fungsi mempunyai periode sama dengan 180^0
   Grafik mempunyai nilai maksimum sama dengan 2 dan mempunyai nilai minimum sama dengan -2
   Maka grafik di atas yang benar adalah $y = 2\ Cos\ \frac{1}{2}x$
3. Jawaban: **C**

   Pembahasan:
   Bentuk dasar dari $y = 5\ Cos\ 3x$ adalah y = Cos 3x.
   Nilai maksimum y = Cos 3x adalah 1, maka nilai maksimum $y = 5\ Cos\ 3x = 5\ (1) = 5$
   Nilai minimum y = Cos 3x adalah -1, maka nilai minimum $y = 5\ Cos\ 3x = 5\ (-1) = -5$
4. Jawaban: **D**

   Pembahasan:
   Bentuk dasar dari $y = -3\ Cos\ 2(x + 30^0)$ adalah $y = -3\ Cos\ 2x$
   Nilai maksimum y = cos 2x adalah 1, maka $y = -3\ Cos\ 2x = -3\ (1) = -3$ → ini akan menjadi nilai minimum fungsi $y = -3\ Cos\ 2(x + 30^0)$
   Nilai minimum y = cos 2x adalah -1, maka $y = -3\ Cos\ 2x = -3\ (-1) = 3$ → ini akan menjadi nilai maksimum fungsi $y = -3\ Cos\ 2(x + 30^0)$
5. Jawaban: **B**

   Pembahasan:
   Bentuk dasar dari $y = -3\ cos\ 2(x + 30^0)$ adalah $y = -3\ Cos\ 2x$
   Nilai maksimum y = cos 2x adalah 1, maka $y = -3\ Cos\ 2x = -3\ (1) = -3$ → ini akan menjadi nilai minimum fungsi $y = -3\ cos\ 2(x + 30^0)$
   Nilai minimum y = cos 2x adalah -1, maka $y = -3\ cos\ 2x = -3\ (-1) = 3$ → ini akan menjadi nilai maksimum fungsi $y = -3\ cos\ 2(x + 30^0)$
6. Jawaban: **C**

   Pembahasan:
   Grafik fungsi $y = 3\ sin\ (2x - 30^0)$ mempunyai nilai maksimum sama dengan 3, maka $y = 3\ sin\ (2x - 30^0)$ = 3.
   Maka $sin\ (2x - 30^0) = 1$. Grafik fungsi Sinus mempunyai nilai 1 pada x = 90^0, maka $(2x - 30^0) = 90^0$ → 2x = 120^0 → x = 60^0

7. Jawaban: **B**

   Pembahasan:
   Bentuk dasar dari fungsi $y = 2\ sin\ (3x - 30^0)$ adalah y = 2 sin 3x.
   Fungsi y = 2 sin 3x mempunyai periode sama dengan $\frac{360^0}{3} = 120^0$

8 Jawaban: **B**

   Pembahasan:
   Periode grafik = 90^0 maka diperoleh y = k tan 2x
   Lakukan substitusi untuk $x\ = \frac{\pi}{8}$, maka diperoleh bahwa nilai y = 2. Substitusikan nilai ini ke bentuk y = k tan 2x, maka diperoleh k = 2.
   Maka diperoleh fungsi sama dengan y = 2 tan 2x

E. Penilaian Diri

Berilah tanda ceklist (V) pada kotak yang kalian anggap paling sesuai. Setelah mempelajari dan mengerjakan pembelajaran 1 pada modul ini, bagaimana penguasaan kalian terhadap materi-materi berikut:

No	Materi	Tidak Menguasai	Kurang Menguasai	Menguasai
1	Mampu menggambar grafik fungsi $y = k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
2.	Mampu menggambar grafik fungsi $y = k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
3.	Mampu menggambar grafik fungsi $y = k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
4.	Menentukan nilai maksimum/ minimum bentuk $y = k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
5.	Menentukan nilai maksimum/ minimum bentuk $y = k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
6.	Menentukan nilai maksimum/ minimum bentuk $y = k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
7.	Menentukan periode fungsi $y = k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
8.	Menentukan periode fungsi $y = k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0 + c$			
9.	Menentukan periode fungsi $y = k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0 + c$			

Catatan :

1. Jika soal latihan kalian memperoleh nilai < 80% maka kembali pelajari dan ulang kembali pembelajaran 1 dari awal.
2. Jika dari ceklist yang kalian buat < 75% tidak atau kurang dikuasai, maka kembali pahami dan ulang kembali kegiatan pembelajaran 1 dari awal.

EVALUASI

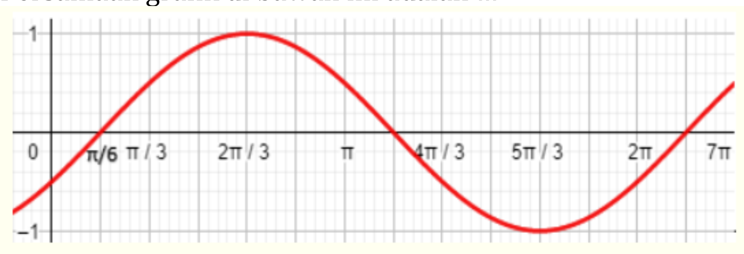
Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Nilai maksimum fungsi y = 2 Sin 3x + 3 adalah ....
   A. -2
   B. 0
   C. 2
   D. 3
   E. 5

2. Nilai minimum dari fungsi $y = -4\ Cos\ 3(x + 30^0) + 2$ adalah ....
   A. -2
   B. 0
   C. 2
   D. 1
   E. 4

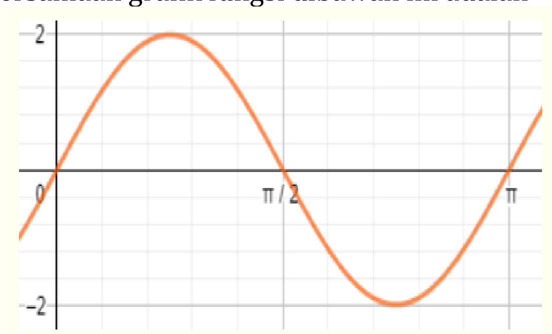
3. Jika $0^0 \leq x \leq 180^0$, maka fungsi $y = -3\ Cos\ 2x$ akan minimum untuk x sama dengan ....
   A. 0^0 dan 180^0
   B. 30^0 dan 120^0
   C. 45^0 dan 135^0
   D. 60^0 dan 150^0
   E. 90^0 dan 180^0

4. Persamaan grafik di bawah ini adalah ....



   A. y = sin x
   B. y = cos (x - 30^0)
   C. y = sin (x - 30^0)
   D. y = cos (x + 30^0)
   E. y = sin (x + 30^0)

5. Persamaan grafik fungsi dibawah ini adalah



   A.

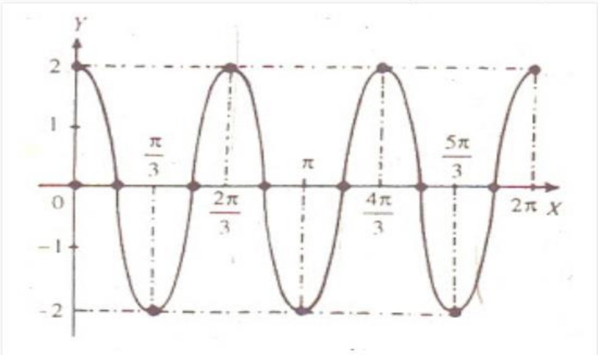
   A. y = sin x
   B. y = -2 sin 2x
   C. $y = 2\ sin\ \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$
   D. $y = -2\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$
   E. $y = 2\ cos\ \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$

6. Persamaan dari grafik dibawah ini adalah .....

A. $y = Sin\ 2(x - 30^0) + 1$
B. $y = Sin\ (2x - 30^0) + 1$
C. $y = Cos\ 2(x - 30^0) + 1$
D. $y = Cos\ (2x - 30^0) + 1$
E. $y = 2Sin\ (x + 30^0) + 1$

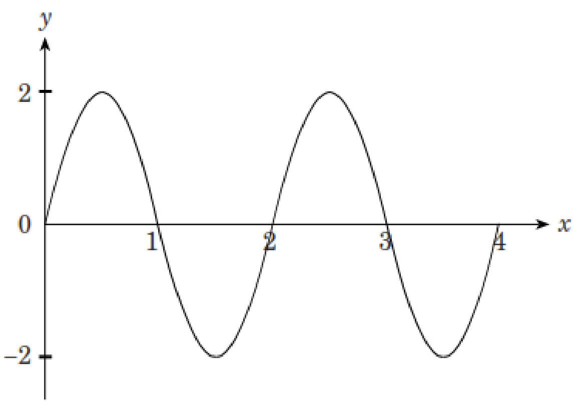
7. Nilai maksimum dari fungsi $y = -\frac{3}{8} Cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ adalah ....
   A. $\frac{3}{8}$
   B. $\frac{5}{8}$
   C. $\frac{6}{8}$
   D. $\frac{11}{8}$
   E. $\frac{13}{8}$

8. Perhatikan grafik dibawah ini!



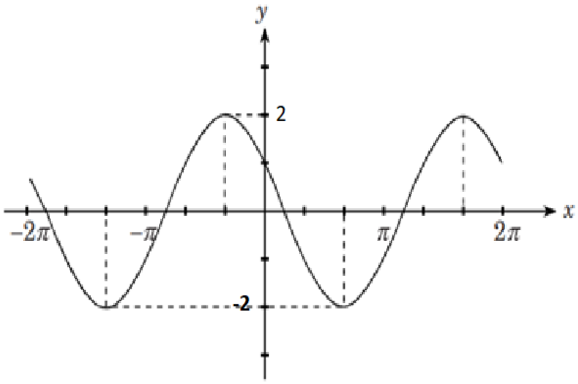
Periode grafik fungsi disamping adalah ...
   A. 30^0
   B. 60^0
   C. 90^0
   D. 120^0
   E. 180^0

9. Perhatikan grafik dibawah ini!



Jika grafik di atas berbentuk y = A Sin kx, maka nilai A dan k yang sesuai adalah ....
   A. A = -2 dan k = π
   B. A = -2 dan k = 2
   C. A = 2 dan k = π
   D. A = 2 dan k = 2π
   E. A = 2 dan k = 2

10. Persamaan grafik fungsi pada gambar di bawah adalah ….



A. $y = 2\ Cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$
B. $y = 2\ Cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$
C. $y = 2\ Cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$
D. $y = 2\ Cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$
E. $y = 2\ Cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$

11. Gambarkan grafik fungsi $y = \frac{1}{2}\ Sin\ (x - 45)$

12. Gambarkan grafik fungsi $y = 2 - Cos\ 2(x - 30)$

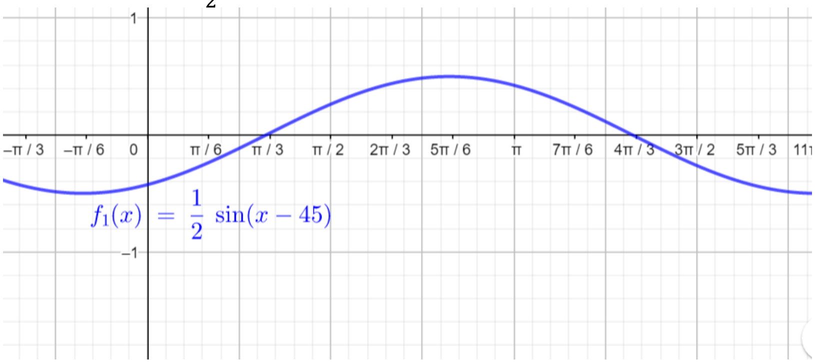
13. Gambarkan grafik fungsi $y = \frac{1}{2} + tan(2\ (x - 45))$

14. Gambarkan grafik fungsi $y = 2 - cos(2\ (x - 30))$

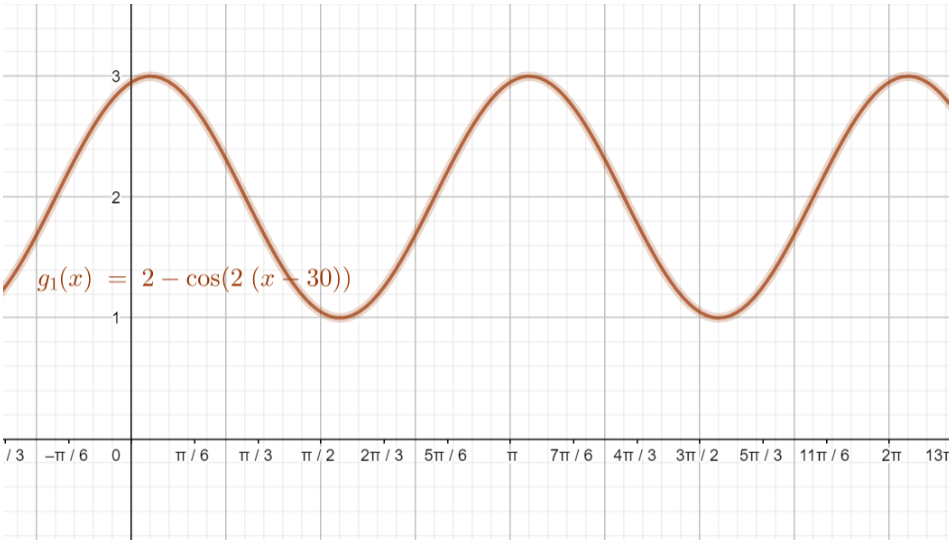
15. Gambarkan grafik fungsi $y = \frac{1}{3}\ \left(Sin(180 - 2x)\right)$

Kunci Jawaban.

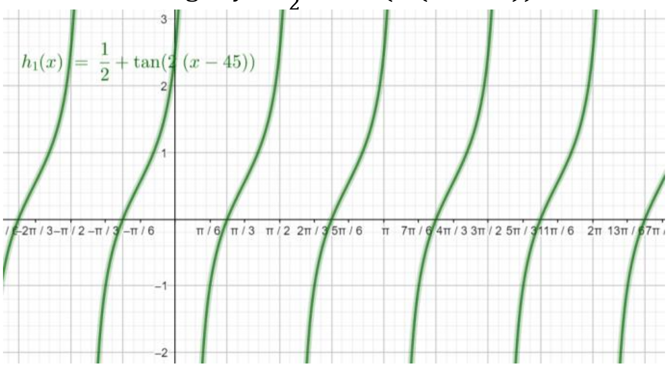
1. E
2. E
3. A
4. C
5. D
6. A
7. D
8. D
9. E
10. D
11. Grafik $y = \frac{1}{2}\ Sin\ (x - 45)$



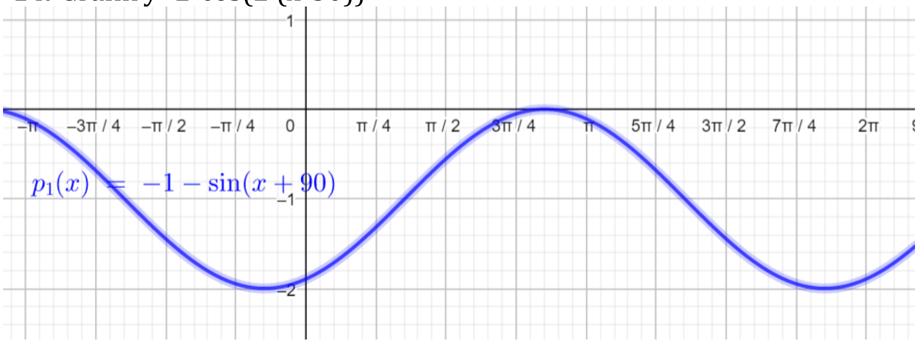
12. grafik fungsi $y = 2 - Cos\ 2(x - 30)$



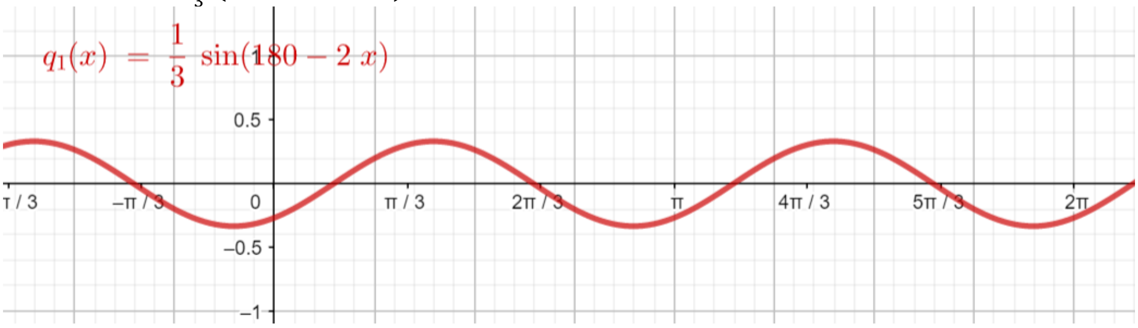
13. Grafik fungsi $y = \frac{1}{2} + tan(2\ (x - 45))$



14. Grafik y=2-cos(2 (x-30))



15. Grafik $y = \frac{1}{3}\left(Sin(180 - 2x)\right)$



DAFTAR PUSTAKA

dkk, Bornok Sinaga. 2017. Matematika Wajib SMA/MA Kelas X . Jakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

Herlin, Bob Foster. 2015. Soal dan Pembahasan Matematika. Jakarta: Erlangga.

2018. "https://www.maretong.com/2018/12/fungsi-trigonometri.html." https://www.maretong.com/2018/12/fungsi-trigonometri.html. Desember 19. Accessed September 16, 2020.

maya, Media. 2020. "https://mediamaya26.blogspot.com/2020/07/modul-fungsitrigonometri.html." https://mediamaya26.blogspot.com/2020/07/modul-fungsitrigonometri.html. Januari 19. Accessed September 15, 2020.

Research, Tim Quantum. 2020. Super Master Pelajaran SMA/MA Kelas X Semester 1 dan 2 Saintek. Bandung: Yrama Widya.