SMA MUHAMMADIYAH 1 YOGYAKARTA

MATEMATIKA
Peminatan

Kelas XII

Modul Pembelajaran SMA

Ratna Juwita, M. Pd.

2020/2021

MODUL MATEMATIKA PEMINATAN KELAS XII

Ratna Juwita, M.Pd.
SMA MUHAMMADIYAH 1 YOGYKARTA

Semester 1

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warrahmatullahi wabarrakatuh

Puji syukur penulis haturkan kehadirat Allah SWT yang telah memperkenankan untuk menyelesaikan modul ini. Tak lupa shalawat serta salam semoga tetap tercurah pada junjungan kita nabi Muhammad SAW, keluarganya, sahabatnya dan insya Allah kita semua sebagai umatnya sampai akhir zaman. Aamiin.

Modul ini disusun, sebagai bahan pembelajaran mandiri bagi peserta didik kelas XII program MIPA untuk menambah pengetahuan tentang materi mamematika wajib di kelas XII.

Pembahasan tentang materi matematika peminatan disajikan dengan rinci. Modul ini memaparkan materi, contoh soal, latihan untuk mengukur capaian setiap kegiatan pembelajaran, serta evaluasi untuk mengukur capaian setiap kompetensi dasarnya.

Demikianlan, mudah-mudahan modul ini dapat bermanfaat bagi peserta didik maupun guru dalam menstransfer ilmu. Penulis mengucapkan terima kasih kepada SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta yang telas memfasilitasi dan dosen pengampu kuliah Psikologi Pembelajaran Matematika UNY yang telah memberikan pembimbingaan serta pendampingan dalam menyusun modul ini.

Wassalamu'alaikum warrahmatullahi wabarrakatuh

Yogyakarta, Juni 2020
Penulis,

Ratna Juwita, M.Pd

DAFTAR ISI

Halaman

PENDAHULUAN

A. DESKRIPSI

Perubahan zaman serba digital, apalagi pandemi covid-19 yang memberi imbas terutama didunia pendidikan yang tatap muka harus disulap online. Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang melejit serta seni dan budaya, berpengaruh pada perkembangan dan perubahan kehidupan bermasyarakat, berbangsa, dan bernegara di Indonesia. Hal tersebut menuntut perlunya perbaikan sistem pendidikan nasional termasuk penyempurnaan kurikulum.

Kurikulum merupakan seperangkat rencana dan pengaturan mengenai tujuan, isi, dan bahan pelajaran serta cara yang digunakan sebagai pedoman penyelenggaraan kegiatan pembelajaran untuk mencapai tujuan pendidikan tertentu. Oleh karena itu, kurikulum disusun dan dikembangkan oleh satuan pendidikan dengan mengacu pada Standar Isi (SI) dan Standar Kompetensi Lulusan (SKL). Kurikulum yang dikembangkan oleh satuan pendidikan disebut dengan Kurikulus Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP). Komponen dari KTSP antara lain adalah Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP), modul, Lembar Kerja Peserta Didik (LKPD). Komponen tersebut harus dibuat oleh guru sebagai penunjang aktivitas pembelajaran.

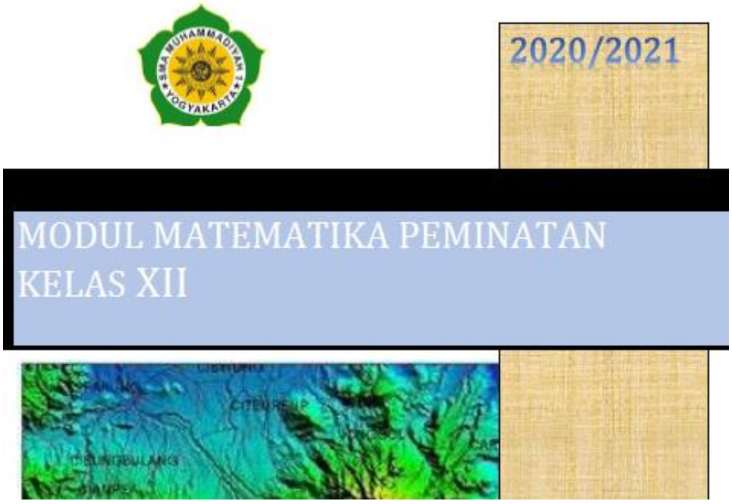
Modul sebagai salah satu sumber/media pembelajaran mempunyai peranan yang penting dalam meningkatkan sumber daya manusia khususnya peserta didik SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta. Setiap bab dari modul ini dimulai dari uraian materi yang diselingi dengan motivasi, contoh-contoh soal, latihan, serta diakhir disajikan evaluasi kompetensi untuk mengukur ketercapaian setiap kompetensi dasar atau setiap babnya.

Modul ini sebagai salah satu sumber/media pembelajaran mempunyai peranan yang penting dalam meningkatkan sumber daya manusia khususnya siswa SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta. Modul Matematika Peminatan kelas XII di semester 1 terdiri dari 4 bab, yaitu:

- Bab I Limit Fungsi Trigonometri
- Bab II Limit Fungsi di Titik Tak Berhingga
- Bab III Turunan Fungsi Trigonometri
- bab IV Aplikasi Turunan

Setiap bab ini dimulai dari uraian materi yang diselingi dengan motivasi, contoh-contoh soal, Latihan soal, serta diakhir ada evaluasi kompetensi untuk mengukur ketercapaian setiap kompetensi dasar atau setiap modulnya.

B. PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL



Judul Modul

Judul Modul merupakan bahasan umum dari materi yang dibahas dalam suatu modul.

Rencana Belajar Siswa

Rencana Belajar Siswa berisi pemaparan Kompetensi Dasar dan Indikator Pencapaian Kompetensi, beserta keterangan target waktu belajarnya.

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.1	Menjelaskan dan menentukan limit fungsi trigonometri.	3.1.1	Memahami definisi limit fungsi trigonometri
		3.1.2	Menemukan konsep limit fungsi trigonometri
		3.1.3	Menetukan penyelesaian dari limit fungsi trigonometri di satu titik
4.1	Menyelesaikan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri.	4.1.1	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari

B. KEGIATAN BELAJAR I

1. **Tujuan Kegiatan Pembelajaran I**

Melalui pembelajaran online, peserta didik dapat **berfikir kritis dan kreatif** dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri dari masalah kontekstual serta **memiliki sikap disiplin.**

Kegiatan Belajar

Kegiatan belajar berisi tujuan kitiatan pembelajaran, uraian materi,

3. **Kegiatan Pembelajaran 1.1**

a. **Pengertian limit Fungsi Trigonometri**

Limit fungsi trigonometri merupakan nilai paling dekat suatu sudut yang ada pada fungsi trigonometri. Cara menghitung limit fungsi trigonometri bisa langsung disubtitusikan. Hal ini seperti halnya limit fungsi aljabar. Hanya saja, ada fungsi trigonometri yang harus diubah terlebih dahulu ke identitas trigonometri (limit tak tentu). Limit tak tentu itu sendiri adalah limit yang jika kita langsung gantikan nilainya, maka menjadi 0. Untuk limit tak tentu ini, kita sebenarnya tak harus menggunakan identitas namun menggunakan teorema

Kegiatan Siswa

Berisi suatu kegiatan yang dilakukan siswa dalam rangka memahami, menyelidiki, dan menggali konsep

Untuk lebih memahami tentang limit fungsi trigonometri, perhatikan contoh berikut.

Contoh Soal 1.1.1

Carilah nilai limit berikut $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$.

Penyelesaian

Contoh Soal

Membantu siswa dalam menyelesaiakan suatu permasalahan

Latihan

Dimaksudkan untuk memantau materi atau penilaian (cek) terhadap kegiatan belajar mengajar yang telah berlangsung, seberapa jauh Nanda telah menguasai materi

c. Latihan 1.1

Carilah nilai limit berikut.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{7x}$
2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{6x}{4 \sin 5x}$
3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 4x}$
4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{9x}{\tan 4x}$
5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5 \tan 6x}{3x}$
6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin 5x}{3 \sin 2x}$

d. Tes Formatif 1.1

Yuk Ukur Kemampuan Diri Sendiri ☺

Dilarang membuka materi dan kerjakan sendiri!

Petunjuk:

Pilihlah satu jawaban yang tepat.

"Jujurlah pada diri sendiri; hal tersebut akan membukakan pintu apapun." (Vernon Howard)

1. Hasil dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{6x}$ adalah . . . .

Tes Formatif

Untuk mengukur kemampuan individu sebelum melanjutkan ke materi berikutnya. Anada minimal mendapat nilai 80 agar bisa melajutkan materi berikutnya. Jika nilai masih dibawah 80, maka harus mengulang kembali mempelajari

Evaluasi Bab

Meliputi penilaian kognitif, penilaian ketrampilan, dan penilaian sikap untuk mengukur ketercapaian daya serap siswa.

5. Evaluasi Bab I

a. Penilaian Kognitif Bab I

Memahami limit fungsi trigonometri dan pemecahan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri.

Penilaian Ketrampilan

Penilaian untuk mungukur ketrampilan siswa pada materi tersebut.

b. Penilaian Ketrampilan Bab I

Tugas Praktik

Petunjuk : Diskusikan bersama teman dengan membuat kelompok beranggotakan 4 peserta didik kerjakan dengan terstruktur.

1) Tentukan nilai limit fungsi $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)(1-\cos(6x-6))}{(x^2-2x+1)\tan(5x-5)}$.
2) Nilai $\lim\limits_{x \to \infty} cos\frac{\pi}{2^2} cos\frac{\pi}{2^3} \dots cos\frac{\pi}{2^{n-1}} cos\frac{\pi}{2^n} \dots = \cdots$ (Lomba Matematika UGM 2006)

C. Penilaian Sikap

Penilaian Diri

Petunjuk:
Bacalah dengan baik setiap pernyataan dan berilah tanda cek (√) pada kolom yang sesuai dengan keadaan dirimu yang sebenarnya.
Serahkan kembali format yang sudah kamu isi kepada Bapak/Ibu Guru.

Nama/No Absen : ....

Kelas/Semester : ....

Hari, Tanggal : ....

Mata Pelajaran : ....

Nama Guru : ....

No	Pernyataan	Ya	Tidak
Selama kegiatan belajar mandiri saya:			
1.	Mengusulkan ide pada kelompok		
2.	Sibuk mengerjakan tugas saya sendiri		

Penilaian Sikap

Pada penilaian ini menggunakan penilaian diri untuk mengetahui penilaian sikap setiap siswa.

BAB 1
LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

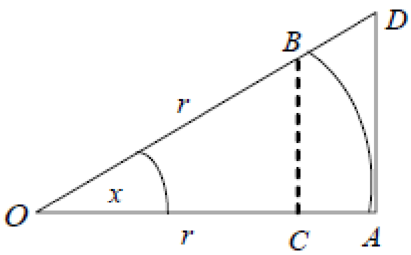
A. RENCANA BELAJAR SISWA I

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.1	Menjelaskan dan menentukan limit fungsi trigonometri.	3.1.1	Memahami definisi limit fungsi trigonometri
		3.1.2	Menemukan konsep limit fungsi trigonometri
		3.1.3	Menetukan penyelesaian dari limit fungsi trigonometri di satu titik
4.1	Menyelesaikan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri.	4.1.1	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari

B. KEGIATAN BELAJAR I

1. **Tujuan Kegiatan Pembelajaran I**
   Melalui pembelajaran online, peserta didik dapat **berfikir kritis dan kreatif** dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri dari masalah kontekstual serta **memiliki sikap disiplin.**
2. **Kegiatan Pembelajaran 1.1**
   a. **Pengertian limit Fungsi Trigonometri**
   Limit fungsi trigonometri merupakan nilai paling dekat suatu sudut yang ada pada fungsi trigonometri. Cara menghitung limit fungsi trigonometri bisa langsung disubtitusikan. Hal ini seperti halnya limit fungsi aljabar. Hanya saja, ada fungsi trigonometri yang harus diubah terlebih dahulu ke identitas trigonometri (limit tak tentu). Limit tak tentu itu sendiri adalah limit yang jika kita langsung gantikan nilainya, maka menjadi 0. Untuk limit tak tentu ini, kita sebenarnya tak harus menggunakan identitas namun menggunakan teorema limit trigonometri. Selain itu, bisa juga dengan menggunakan identitas dan teorema. Maka dari itu, jika suatu fungsi limit trigonometri digantikan nilai yang mendekatinya menghasilkan, maka kita harus memecahkannya dengan cara yang lainnya seperti mengubah bentuk trigonometri lainnya yang senilai.

b. Menentukan Nilai Lmit Fungsi Trigonometri



Perhatikan gambar di samping. Dari gambar di samping diketahui panjang jari-jari lingkaran = *r*, besar sudut *AOB* adalah *x* radian, *BC* dan *AD* tegak lurus *OA* untuk $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{BC}{OB} = sinx \rightarrow BC = OB \sin x$$
$$BC = r \sin x$$

$$\frac{AD}{OA} = tanx \rightarrow AD = OA \tan x$$
$$AD = r \tan x$$

L ΔABC < L juring OAB < L OAD

$\frac{1}{2}$ OC BC < $\frac{1}{2}\ x\ r^2$ < $\frac{1}{2}$ OA AD

$\frac{1}{2}$ OC $r \sin x$ < $\frac{1}{2}\ x\ r^2$ < $\frac{1}{2}$ OA $r \tan x$ $: \frac{1}{2} r^2$

$$\frac{\frac{1}{2}\ \mathrm{OC}\, r \sin x}{\frac{1}{2}\ r^2} < \frac{\frac{1}{2}\ x\, r^2}{\frac{1}{2}\ r^2} < \frac{\frac{1}{2}\ \mathrm{OA}\, r \tan x}{\frac{1}{2}\ r^2}$$

$$\frac{\mathrm{OC} \sin x}{r} < x < \frac{\mathrm{OA} \tan x}{r}$$

$$\cos x \sin x < x < \frac{\mathrm{r}\ \tan x}{r}$$

$$\cos x \sin x < x < \tan x \quad : \sin x$$

$$\cos x < \frac{\mathrm{x}}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

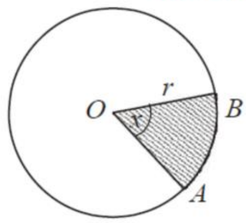
$$\lim_{x \to 0} \cos x < \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\sin x} < \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos 0 < \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\sin x} < \frac{1}{\cos 0}$$

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\sin x} < 1$$

Maka $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\sin x} = 1$ atau $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Ingat!!



Luas juring $= \frac{x}{2\pi} \pi r^2$

$= \frac{1}{2}\ x\ r^2$

Dari Persamaan :

$$\cos x \sin x < x < \tan x \qquad : \tan x$$

$$cos^2 x < \frac{\mathrm{x}}{\tan x} < 1$$

$$\lim_{x \to 0} cos^2 x < \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\tan x} < 1$$

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\tan x} < \ 1$$

Maka $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\tan x} = 1$ atau $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Dengan cara yang sama didapat rumus:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\sin x} = 1 \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{ax}}{\sin ax} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\tan x} = 1 \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{ax}}{\tan\ ax} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

Untuk lebih memahami tentang limit fungsi trigonometri, perhatikan contoh berikut.

Contoh Soal 1.1.1

Carilah nilai limit berikut $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$.

Penyelesaian

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} \times \frac{2x}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{3x}$$

$$= 1 \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Contoh Soal 1.1.2

Carilah nilai limit berikut $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{3\sin 3x}$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{5x}{3\sin 3x} &= \lim_{x\to 0} \frac{5x}{3\sin 3x} \times \frac{3x}{3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x}{3\sin 3x} \times \frac{5x}{3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\ \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{5x}{3x} \\
&= \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{5}{3} \\
&= \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

Contoh Soal 1.1.3

Carilah nilai limit berikut $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\tan 4x}$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\tan 4x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\tan 4x} \times \frac{4x}{4x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4x}{\tan 4x} \times \frac{2x}{4x} \\
&= 1 \times \frac{2}{4} \\
&= \frac{2}{4} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Contoh Soal 1.1.4

Carilah nilai limit berikut $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\tan 4x}{\sin 6x}$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x}{\sin 6x} &= \lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x}{\sin 6x} \times \frac{4x}{4x} \times \frac{6x}{6x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x}{4x} \times \frac{6x}{\sin 6x} \times \frac{4x}{6x} \\
&= 3 \times 1 \times 1 \times \frac{4}{6} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Contoh Soal 1.1.5

Carilah nilai limit berikut $\lim\limits_{x\to 0} 2x \cot x$.

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 0} 2x\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan x}$$
$$= \lim_{x\to 0} 2 \times \frac{x}{\tan x}$$
$$= 2\times 1$$
$$= 2$$

Ingat!!

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

c. Latihan 1.1

Carilah nilai limit berikut.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{7x}$
2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{4\sin 5x}$
3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 4x}$
4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9x}{\tan 4x}$
5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\tan 6x}{3x}$
6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 5x}{3\sin 2x}$
7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{\tan 4x}$
8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 8x}{4\sin 4x}$
9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\tan 2x}{2\tan 3x}$
10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\tan x}{\sin 2x\tan 3x}$

d. Tes Formatif 1.1

Yuk Ukur Kemampuan Diri Sendiri ☺

Dilarang membuka materi dan kerjakan sendiri!

Petunjuk:

Pilihlah satu jawaban yang tepat.

"Jujurlah pada diri sendiri; hal tersebut akan membukakan pintu apapun."
(Vernon Howard)

1. Hasil dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{6x}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{2}$
   B. 2
   C. $\sin \frac{1}{2} x$
   D. $\sin 2x$
   E. $\frac{1}{2} \sin x$

2. Hasil dari $\lim\limits_{x \to 0} 2 \frac{\sin x}{8x}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{2}$
   B. $\frac{1}{4}$
   C. $\frac{1}{8}$
   D. $\sin 4x$
   E. $\frac{1}{4} \sin x$

3. Hasil dari $3 \lim\limits_{x \to 0} \frac{6x}{sin\ x}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{2}$
   B. 2
   C. 18
   D. $\sin 18x$
   E. $\sin 6x$

4. Hasil dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4 \tan 3x}{2x}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{2}$
   B. $\frac{3}{2}$
   C. 4
   D. 6
   E. 12

5. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{tan\ 9x}$ adalah . . . .
    A. $\frac{1}{3}$
    B. 3
    C. $\tan \frac{1}{3} x$
    D. $\tan 3x$
    E. $\frac{1}{3}\ \tan x$

6. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin 3x}{tan^2 x}$ adalah . . . .
    A. 1
    B. 3
    C. 6
    D. 9
    E. 12

7. Hasil dari $\lim_{x \to \pi} \sin \frac{x}{2}$ adalah . . . .
    A. $-\frac{1}{2}$
    B. 0
    C. $\frac{1}{2}$
    D. 1
    E. ∞

8. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\tan 5x}$adalah . . . .
    A. 0
    B. $\frac{1}{5}$
    C. $\frac{2}{5}$
    D. 1
    E. ∞

9. Hasil dari $\lim_{x\to 0} \frac{2\,sin^2 x}{\tan x}$adalah . . . .
   A. -2
   B. 0
   C. 1
   D. 2
   E. ∞

10. Hasil dari $\lim_{x\to 0} \frac{(x-2)\ \cos x}{\sin\ (x-2)}$adalah . . . .
    A. $(x-2)$
    B. -2
    C. $\frac{1}{2}$
    D. 1
    E. 2

3. Kegiatan Pembelajaran 1.2

a. Limit Fungsi Trigonometri dengan Rumus-Rumus Trigonometri

Dalam mengerjakan soal limit fungsi trigonometri yang kompleks kita perlu mengubah fungsi trigonometri ke bentuk yang lain. Rumus-rumus trigonometri telah kalian pelajari ketika duduk di kelas XI, berikut adalah rumus-rumus trigonometri.

Rumus Jumlah dan Kurang Dua Sudut :

1. $\sin(a+b) = \sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b$
2. $\sin(a-b) = \sin a\ \cos b - \cos a\ \sin b$
3. $\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b$
4. $\cos(a-b) = \cos a\ \cos b + \sin a\ \sin b$
5. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\ \tan b}$
6. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\ \tan b}$

Rumus Jumlah dan Kurang :

1. $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
2. $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
3. $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
4. $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
5. $\tan a + \tan b = \frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$
6. $\tan a - \tan b = \frac{2\sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$

Rumus Perkalian :

1. $\sin a\ \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\}$
2. $\cos a\ \sin b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) - \sin(a-b)\}$
3. $\sin a\ \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\}$
4. $\cos a\ \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\}$

Rumus Sudut Rangkap :

1. $\sin 2a = 2\sin a\ \cos a$
2. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
   $= 2\cos^2 a - 1$
   $= 1 - 2\sin^2 a$
3. $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

Rumus Setegah Sudut :

1. $\sin\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$

2. $\cos\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$

3. $\tan\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$

Contoh Soal 1.2.1

Nilai dari $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ adalah....

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 2\times 1\times 1$$

$$= 2$$

Ingat!!

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

Contoh Soal 1.2.2

Nilai dari $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{x-\frac{\pi}{4}}$ adalah....

Penyelesaian

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{x-\frac{\pi}{4}} =$$

Misal $y = x - \frac{\pi}{4}$

$$x = y + \frac{\pi}{4}$$

Ingat!!

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

Untuk $x \to \frac{\pi}{4}$, maka $y = 0$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos 2(y + \frac{\pi}{4})}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\cos(2y + \frac{\pi}{2})}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\cos 2y \times \cos\frac{\pi}{2} - \sin 2y \times \sin\frac{\pi}{2}}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\cos 2y \times 0 - \sin 2y \times 1}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{0 - \sin 2y}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-\sin 2y}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-\sin 2y}{y} \times \frac{2y}{2y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-\sin 2y}{2y} \times \frac{2y}{y}$$

$$= -1 \times 2$$

$$= -2$$

Contoh Soal 1.2.3

Nilai dari $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ adalah....

Penyelesaian

Ingat!!

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cdot \sin \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{1}{2}\{(x+h)+x\}\sin\frac{1}{2}\{(x+h)-x\}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\ \sin\frac{1}{2}h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\ \sin\frac{1}{2}h}{2\times\frac{1}{2}h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$$
$$= \cos\left(x+\frac{1}{2}\times 0\right)\times 1$$
$$= \cos x\times 1$$
$$= \cos x$$

b. Latihan 1.2

Carilah nilai limit berikut.

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{\cos x}$
2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos 2x}$
3) $\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{sin^2 x}$
4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan 3x\ \ \sin x}{x^2}$
5) $lim_{x\to 0}\frac{tan^2 3x}{1-cos2x}$

c. Tes Formatif 1.2

Yuk Ukur Kemampuan Diri Sendiri ☺

Dilarang membuka materi dan kerjakan sendiri!

Petunjuk:

Pilihlah satu jawaban yang tepat.

"Jujurlah pada diri sendiri; hal tersebut akan membukakan pintu apapun." (Vernon Howard)

1. Hasil dari $\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 x}{1-cosx}$ adalah . . . .

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 0

D. 2

E. 4

2. Hasil dari $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2 + \sin 2x}{1 + \sin x \cos x}$ adalah . . . .

A. -4

B. -2

C. 1

D. 2

E. 4

3. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2}$ adalah . . . .

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. 4

E. 8

4. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x^2 \cot \frac{1}{2} x}$ adalah . . . .

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

E. 4

5. Hasil dari $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 6x}{x \ tan\ 2x}$ adalah . . . .
   A. -9
   B. -3
   C. 1
   D. 3
   E. 9

6. Hasil dari $\lim_{x\to 0} \frac{cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{tan\ 7x}$ adalah . . . .
   A. $-\frac{3}{7}\sqrt{3}$
   B. $-\frac{2}{7}\sqrt{3}$
   C. $-\frac{1}{7}\sqrt{3}$
   D. $\frac{1}{7}$
   E. $\frac{2}{7}$

7. Hasil dari $\lim_{x\to 0} \frac{4-4cos^2 x}{x\ sin2x}$ adalah . . . .
   A. -4
   B. -2
   C. -1
   D. 0
   E. 2

8. Hasil dari $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$ adalah . . . .
   A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   B. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$
   C. 0
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. $\sqrt{2}$

9. Nilai limit fungsi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \tan x}{2cos^2 x - 2}$ adalah . . . .

   A. $-\frac{1}{4}$

   B. $-\frac{1}{2}$

   C. 0

   D. $\frac{1}{2}$

   E. 1

10. Hasil dari $\lim\limits_{x \to 1} \frac{sin(x-1)-(1-\cos(6x-6))}{(x^2-2x+1)\ tan\ (5x-5)}$ adalah . . . .

   A. $-\frac{19}{5}$

   B. $\frac{18}{5}$

   C. $\frac{19}{5}$

   D. $\frac{21}{5}$

   E. $\frac{23}{5}$

4. Evaluasi Bab I

a. Penilaian Kognitif Bab I

Memahami limit fungsi trigonometri dan pemecahan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri.

A. Pilihlah satu jawaban yang benar

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin \frac{3x}{2} = ...$

   A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

   B. 0

   C. $\frac{1}{2}$

   D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

   E. $\sqrt{2}$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x \cos x}{5x} = ...$
   A. $\frac{1}{5}$
   B. $\frac{2}{5}$
   C. $\frac{3}{5}$
   D. $-\frac{2}{5}$
   E. $-\frac{1}{5}$

3. $\lim_{x \to 2} \frac{\tan x}{(x^2 - 4)} = ...$
   A. 2
   B. 1
   C. 0
   D. $\frac{1}{2}$
   E. $\frac{1}{4}$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = ...$
   A. $-\frac{1}{4}$
   B. $-\frac{1}{2}$
   C. $\frac{1}{4}$
   D. $\frac{1}{2}$
   E. 1

5. $\lim_{x \to 5} \frac{(4x - 10)\sin(x - 5)}{x^2 - 25} = ...$
   A. -3
   B. -1
   C. 1
   D. 2
   E. 4

6. Nilai $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=....$
   A. 0
   B. $\frac{1}{4}$
   C. $\frac{1}{2}$
   D. 1
   E. ∞

7. Nilai $\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-1)\sin 6x}{2x+3x^2+x^3}=....$
   A. 5
   B. 3
   C. 2
   D. -2
   E. -3

8. Nilai $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin x}{x\cos x}=....$
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 3
   E. 4

9. Nilai $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x}=....$
   A. -4
   B. -2
   C. 0
   D. 2
   E. 4

10. Nilai $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\sin 4x}{(x-\frac{\pi}{4})\cos x}=....$
   A. $-4\sqrt{2}$
   B. $-2\sqrt{2}$
   C. $\sqrt{2}$
   D. $2\sqrt{2}$
   E. $4\sqrt{2}$

B. Kerkajakan soal-soal berikut dengan teliti!

1. Nilai dari $\lim_{x \to 0} \frac{3\sin x}{2x} = ...$

2. Nilai dari $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{\sin(4x - 2)}$ adalah....

3. Hasil dari $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 12x + 18}{1 - \cos^2(x - 3)}$ adalah....

4. Nilai dari $\lim_{x \to 1} \frac{1 - \cos(6x - 6)}{(x^2 + x - 2)\tan(4x^2 - 4)}$ adalah....

5. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 4x}{2x^2(x - 3)\cos 2x}$ adalah....

Penilaian:

Pilihan Ganda	Uraian	Nilai Akhir

Keterangan Nilai Benar:

Pilihan Ganda : 100 (10 poin per soal)

Uraian : 100 (masimal 20 poin per saol)

Total : $\frac{poin\ pilihan\ ganda + uraian}{2}$

b. Penilaian Ketrampilan Bab I

Tugas Praktik

Petunjuk : Diskusikan bersama teman dengan membuat kelompok beranggotakan 4 peserta didik kerjakan dengan terstruktur.

1) Tentukan nilai limit fungsi $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)(1-\cos(6x-6))}{(x^2-2x+1)\tan(5x-5)}$.
2) Nilai $\lim_{x \to \infty} cos\frac{\pi}{2^2}\, cos\frac{\pi}{2^3} \ldots cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\, cos\frac{\pi}{2^n} \ldots = \cdots$ (Lomba Matematika UGM 2006)

c. Penilaian Sikap Bab I

Penilaian Diri

Petunjuk:
Bacalah dengan baik setiap pernyataan dan berilah tanda cek (√) pada kolom yang sesuai dengan keadaan dirimu yang sebenarnya.
Serahkan kembali format yang sudah kamu isi kepada Bapak/Ibu Guru.

Nama/No Absen :

....

Kelas/Semester :

....

Hari, Tanggal :

....

Mata Pelajaran :

....

Nama Guru :

....

No	Pernyataan	Ya	Tidak
Selama kegiatan kelompok saya:			
1.	Mengusulkan ide pada kelompok		
2.	Sibuk mengerjakan tugas saya sendiri		
3.	Tidak berani bertanya karena mali ditertawakan		
4.	Menertawakan pendapat teman		
5.	Aktif mengajukan pertanyaan dengan sopan		
6.	Melaksanakan kesepakatan kelompok, meskipun tidak sesuai dengan pendapat saya		
7.	Menjawab pertanyaan yang diberikan oleh guru		
8.	Melengkapi jawaban teman		
9.	Bicara sendiri dengan teman diluar masalah yang didiskusikan		

10.	Mengikuti kegiatan kelompok dengan baik sampai selesai		

Pernyataan bersifat positif (nomor 1, 5, 6, 7, 8, 10) dan bersifat negatif (nomor 2, 3, 4, dan 9).

Jumlah Butir Positif	Jumlah Butir Negatif	Skor	Nilai

$$\text{Skor nilai} = \frac{\text{Jumlah butir positif}}{\text{jumlah pernyataan}} \times 100$$

Kode nilai/predikat :

a. SB = Sangat Baik = 90-100
b. B = Baik = 80-89
c. C = cukup = 70-79
d. K = Kurang = <70

BAB 2
LIMIT FUNGSI TAK BERHINGGA

A. RENCANA BELAJAR SISWA II

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.2	Menjelaskan dan menentukan limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.	3.2.1	Memahami limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.
		3.2.2	Menemukan konsep limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.
		3.2.3	Menetukan penyelesaian dari suatu limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.
4.2	Menyelesaikan masalah berkaitan dengan eksistensi limit diketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.	4.2.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

B. KEGIATAN BELAJAR II

1. Tujuan Kegiatan Pembelajaran II

Melalui pembelajaran online, peserta didik dapat **berfikir kritis dan kreatif** dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi tak berhingga dari masalah kontekstual serta **memiliki sikap disiplin.**

2. Kegiatan Pembelajaran 2.1

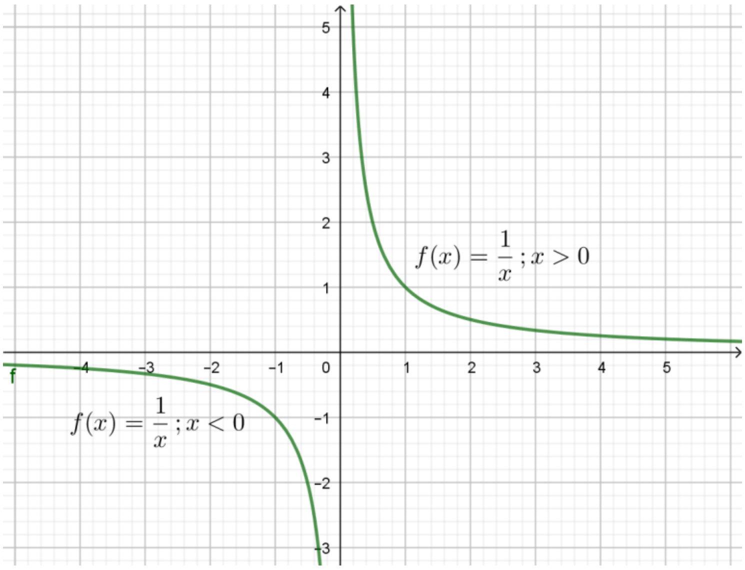
a. Memahami Limit Fungsi di Titik Tak Berhingga

Perhatikan bilangan-bilangan berikut.

Tabel 1. Bilangan-Bilangan Mendekati 0

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1.000}$	...	$\frac{1}{100.000}$	$\frac{1}{1.000.000}$	...
0,1	0,01	0,001	...	0,00001	0,000001	0,00 ... 1

Tampak bahwa semakin besar pembaginya, nilai $\frac{1}{x}$ menjadi semakin kecil mendekati 0. Hal ini dapat ditulis untuk $x \to \infty$, nilai $\frac{1}{x} \to 0$. Perhatikan gambar 1 dibawah. Kita dapat melihat bahwa semakin besar nilai x, grafik semakin mendekati sumbu X, yang berarti $\frac{1}{x}$ semakin mendekati 0. Dengan demikian dikatakan $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.



Gambar 1

b. Menentukan Limit Tak Berhingga Dalam Bentuk Pecahan

Bentuk limit apabila dikerjakan dengan substitusi yaitu nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ diperoleh $\frac{\infty}{\infty}$. Seperti halnya $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$. Limit fungsi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $f(x)$ dan $g(x)$ fungsi pangkat dikerjakan berdasarkan $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$. Misalkan pangkat tertinggi dari variabel fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ adalam m maka variabel pangkat tertinggi adalah x^m . Nilai limitnya dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{\frac{1}{x^m}}{\frac{1}{x^m}}$$

Contoh Soal 2.1.1

Carilah nilai limit dari $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+6x+3}{4x^2-5x-7}$

Penyelesaian

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}-\frac{7}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}{4-\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}$$

$$= \frac{2+\frac{6}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}}{4-\frac{5}{\infty}-\frac{7}{\infty^2}}$$

$$= \frac{2+0+0}{4-0-0}$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Contoh Soal 2.1.2

Carilah nilai limit dari $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-x^2}{5x^2+6}$

Penyelesaian

$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-x^2}{5x^2+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}}{\frac{5x^2}{x^3}+\frac{6}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4-\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}+\frac{6}{x^3}} = \frac{4-\frac{1}{\infty}}{\frac{5}{\infty}+\frac{6}{\infty^3}} = \frac{4-0}{0+0} = \frac{4}{0} = \infty$ (tidak ada limitnya)

Contoh Soal 2.1.3

Carilah nilai limit dari $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2+4x-5}{5x^4-5}$

Penyelesaian

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2+4x-5}{5x^4-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{10x^2}{x^4}+\dfrac{4x}{x^4}-\dfrac{5}{x^4}}{\dfrac{5x^4}{x^4}-\dfrac{5}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{10}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{5}{x^4}}{5-\dfrac{5}{x^4}}$$

$$=\frac{\dfrac{10}{\infty^2}+\dfrac{4}{\infty^3}-\dfrac{5}{\infty^4}}{5-\dfrac{5}{\infty^4}}$$

$$=\frac{0+0-0}{5-0}$$

$$=\frac{0}{5}$$

$$=0$$

c. Latihan 2.1

Carilah nilai limit berikut.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+7}{4x^2-5}=\ldots.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+6x-7}{10x^2+3}=\ldots.$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-5}{6x^3+4x-1}=\ldots.$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x^2-5x+7}{x^3-8x^2-6x+1}=\ldots.$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-5}{x^3+4x+3}=\ldots.$

d. Tes Formatif 2.1

Yuk Ukur Kemampuan Diri Sendiri ☺

Dilarang membuka materi dan kerjakan sendiri!

Petunjuk:

Pilihlah satu jawaban yang tepat.

"Jujurlah pada diri sendiri; hal tersebut akan membukakan pintu apapun." (Vernon Howard)

1. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+5x-3}$ adalah . . . .

   A. $\frac{1}{3}$

   B. $\frac{2}{3}$

   C. 1

   D. 2

   E. 3

2. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-4x^2-5x+7}{x^3-8x^2-6x+1} = \ldots.$

   A. -4

   B. -2

   C. 1

   D. 2

   E. 4

3. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-5x+4}{2x^3-3x^2-4x+2} = \ldots.$

   A. $\frac{1}{2}$

   B. 1

   C. 2

   D. 4

   E. 8

4. Hasil dari $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+4}{3x^2-4x+2}-\frac{3}{x+1}\right)=....$

   A. $\frac{1}{4}$

   B. $\frac{1}{2}$

   C. 1

   D. 2

   E. 4

5. Hasil dari $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{27x^2+4}{x^2-x+2}\right)$ adalah . . . .

   A. -9

   B. -3

   C. 1

   D. 3

   E. 9

6. Hasil dari $\frac{2}{5}\lim_{x\to\infty}\frac{15x^2+1}{x^2-x+2}$ adalah . . . .

   A. $-\frac{1}{7}\sqrt{3}$

   B. $-\frac{1}{5}\sqrt{3}$

   C. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

   D. 0

   E. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

7. Hasil dari $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x^2-4x+2}-\frac{3x-1}{x+1}\right)=....$

   A. -4

   B. -2

   C. -1

   D. 0

   E. 2

8. Hasil dari $\lim_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+1}\times\frac{3x-1}{2x+1})=....$
   A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   B. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$
   C. 0
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. $\sqrt{2}$

9. Nilai limit fungsi $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-9}{x^2-2x+3}-2x)=....$
   A. $-\frac{1}{4}$
   B. $-\frac{1}{2}$
   C. 0
   D. $\frac{1}{2}$
   E. 1

10. Hasil dari $\lim_{x\to\infty}(x-\frac{x^3-x-6}{x^2-2x+3})=....$
    A. $-\frac{19}{5}$
    B. $\frac{18}{5}$
    C. $\frac{19}{5}$
    D. $\frac{21}{5}$
    E. $\frac{23}{5}$

3. Kegiatan Pembelajaran 2.2

a. Menentukan Limit Tak Berhingga dalam Bentuk Akar

Nilai dari bentuk limit $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2+px+q}$ diperoleh dengan perhitungan menggunakan perkalian sekawan.

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2+px+q}\right)\times\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2+px+q}}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2+px+q}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(ax^2+bx+c\right)-\left(ax^2+px+q\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2+px+q}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-p)x-(c-q)}{x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}}\right)}$$

Selanjutnya kita bagi pembilang dan penyebut dengan variabel pangkat tertinggi adalah x^m, disini berarti x^1 atau x.

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{(b-p)x}{x}\right)-\frac{(c-q)}{x}}{\frac{x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}}\right)}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-p)-\frac{(c-q)}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-p)-\frac{(c-q)}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}}}$$

$$=\frac{(b-p)-\frac{(c-q)}{\infty}}{\sqrt{a+\frac{b}{\infty}+\frac{c}{\infty^2}}+\sqrt{a+\frac{p}{\infty}+\frac{q}{\infty^2}}}$$

$$=\frac{(b-p)-0}{\sqrt{a+0+0}+\sqrt{a+0+0}}$$

$$=\frac{b-p}{2\sqrt{a}}$$

Dari uraian diatas dapat kita simpulkan bahwa:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2+px+q} = \frac{b-p}{2\sqrt{a}}$$

berlaku apabila koefisien x^2 pada kedua tanda akar sama.

Contoh Soal 2.2.1

Carilah nilai limit dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-5x+2}$

Penyelesaian

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-5x+2} = \frac{-4-(-5)}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Contoh Soal 2.2.2

Carilah nilai limit dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-4x+1}-(2x+3)$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-4x+1}-(2x+3) &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{(2x+3)^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{4x^2+12x+9} \\
&= \frac{-4-12}{2\sqrt{4}} \\
&= \frac{-16}{4} \\
&= -4
\end{aligned}$$

Contoh Soal 2.2.3

Carilah nilai limit dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+7x+5}-\sqrt{4x^2-12x+9}$.

Penyelesaian

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+7x+5}-\sqrt{4x^2-12x+9}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+7x+5}-\sqrt{4x^2-12x+9}.\frac{\sqrt{2x^2+7x+5}+\sqrt{4x^2-12x+9}}{\sqrt{2x^2+7x+5}+\sqrt{4x^2-12x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2+7x+5)-(4x^2-12x+9)}{\sqrt{2x^2+7x+5}+\sqrt{4x^2-12x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+7x+5-4x^2+12x-9}{\sqrt{2x^2+7x+5}+\sqrt{4x^2-12x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2+19x-4}{\sqrt{2x^2+7x+5}+\sqrt{4x^2-12x+9}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2x^2}{x^2}+\frac{19x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{2x^2}{x^4}+\frac{7x}{x^4}+\frac{5}{x^4}}+\sqrt{\frac{4x^2}{x^4}-\frac{12x}{x^4}+\frac{9}{x^4}}}$$

(bagi dengan variabel pangkat tertinggi)

Jika variabel pangkat tertinggi x^2 maka masuk di dalam akar meniadi x^4

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2+\frac{19}{x}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}+\frac{5}{x^4}}+\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{12}{x^3}+\frac{9}{x^4}}}$$

$$= \frac{-2+\frac{19}{\infty}-\frac{4}{\infty^2}}{\sqrt{\frac{2}{\infty^2}+\frac{7}{\infty^3}+\frac{5}{\infty^4}}+\sqrt{\frac{4}{\infty^2}-\frac{12}{\infty^3}+\frac{9}{\infty^4}}}$$

$$= \frac{-2+0-0}{\sqrt{0+0+0}+\sqrt{0-0+0}}$$

$$= \frac{-2}{0}$$

$$= -\infty$$

b. Latihan 2.2

Carilah nilai limit berikut.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+6x+3}-\sqrt{4x^2-2x+1} = ...$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-9}-\sqrt{x^2-2x+3} = ...$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-5x+2}-(2x-1) = ...$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-9x+10}-x+4 = ...$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} x+4-\sqrt{x^2-4x+8} = ...$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)-\sqrt{9x^2-x+8}=....$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\ \sqrt{x^2-4x-5}-x-2=.....$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\ (3x+1)-\sqrt{9x^2-6x+3}=....$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{4x^2-2x+1}=....$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{4x^2+6x+3}-(x-1)=....$

c. Tes Formatif 2.2

Yuk Ukur Kemampuan Diri Sendiri ☺

Dilarang membuka materi dan kerjakan sendiri!

Petunjuk:

Pilihlah satu jawaban yang tepat.

"Jujurlah pada diri sendiri; hal tersebut akan membukakan pintu apapun." (Vernon Howard)

1. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{4x^2+6x+3}$ adalah....
   A. -3
   B. -2
   C. -1
   D. 2
   E. *3*

2. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-3x+4}-x+2=....$
   A. $-\frac{7}{2}$
   B. $-\frac{3}{2}$
   C. $-\frac{1}{2}$
   D. $\frac{1}{2}$
   E. $\frac{7}{2}$

3. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{5-4x+3x^2}-\sqrt{4-3x+3x^2}}{2x} = ...$
   A. -4
   B. -2
   C. 1
   D. 2
   E. 4

4. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2x+9}-\sqrt{x^2-1} = ...$
   A. $\frac{1}{2}$
   B. 1
   C. 2
   D. 4
   E. 8

5. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-x+2}-(2x+2) = ...$
   A. $\frac{1}{4}$
   B. $\frac{1}{2}$
   C. 1
   D. 2
   E. 4

6. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-x+6}-x+4 = ...$
   A. -9
   B. -3
   C. 1
   D. 3
   E. 9

7. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} (4x+1)-\sqrt{16x^2-6x+25} = ...$

   A. $-\frac{1}{7}\sqrt{3}$

   B. $-\frac{1}{5}\sqrt{3}$

   C. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

   D. 0

   E. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

8. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2}}{x} = ...$

   A. -4

   B. -2

   C. -1

   D. 0

   E. 2

9. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}(\sqrt{x^2-x+12}-\sqrt{x^2+6x}) = ...$

   A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

   B. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$

   C. 0

   D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

   E. $\sqrt{2}$

10. Nilai limit fungsi $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{4x^2+x+3}$

   A. $-\frac{1}{4}$

   B. $-\frac{1}{2}$

   C. 0

   D. $\frac{1}{2}$

   E. 1

4. Evaluasi Bab II

a. Penilaian Kognitif Bab II

Memahami limit fungsi tak berhingga dan pemecahan masalah.

A. Pilihlah satu jawaban yang benar

1. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 - x + 2}{3x^2 + 5x - 1}$ adalah . . . .

   A. $\frac{1}{3}$

   B. $\frac{2}{3}$

   C. 1

   D. 2

   E. 3

2. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 4}{x^3 - 3x^2 - 4x + 2} = ...$

   A. $\frac{1}{2}$

   B. 1

   C. 2

   D. 4

   E. 8

3. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{2x+4}{4x+2} - \dfrac{3}{x+1}) = ...$

   A. $\frac{1}{4}$

   B. $\frac{1}{2}$

   C. 1

   D. 2

   E. 4

4. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2-x+2}-\frac{3x-1}{x+1}\right)=....$

   A. -4
   B. -2
   C. -1
   D. 0
   E. 2

5. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{3x+1}\times\frac{x-1}{2x+1}\right)=....$

   A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   B. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$
   C. 0
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. $\sqrt{2}$

6. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{9x^2-x+8}-\sqrt{9x^2+6x+3}$ adalah....

   A. -3
   B. -2
   C. -1
   D. 2
   E. *3*

7. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-3x+4}-x+5=....$

   A. $-\frac{7}{2}$
   B. $-\frac{3}{2}$
   C. $-\frac{1}{2}$
   D. $\frac{1}{2}$
   E. $\frac{7}{2}$

8. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{5-4x+x^2}-\sqrt{4-3x+x^2}}{3x} = ...$

   A. -4
   B. -2
   C. 1
   D. 2
   E. 4

9. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-x+2}-(2x+3) = ...$

   A. $\frac{1}{4}$
   B. $\frac{1}{2}$
   C. 1
   D. 2
   E. 4

10. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} (4x+5)-\sqrt{16x^2-2x+8} = ...$

   A. $-\frac{1}{7}\sqrt{3}$
   B. $-\frac{1}{5}\sqrt{3}$
   C. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
   D. 0
   E. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

B. Kerkajakan soal-soal berikut dengan teliti!

1. Nilai dari $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+4}{x^3-x^2+2x+1} = ...$

2. Nilai dari $\lim_{x\to\infty} (\frac{x^2+1}{2x^2-x+2} - \frac{3x-1}{4x+1}) = ...$

3. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2 - x + 8} - \sqrt{4x^2 + 6x + 3}$ adalah....   4. Nilai dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 8} - x + 6$ adalah....   5. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} (3x - 4) - \sqrt{9x^2 + 2x + 6}$ adalah....
Penilaian:

Pilihan Ganda	Uraian	Nilai Akhir

Keterangan Nilai Benar:

Pilihan Ganda : 100 (10 poin per soal)

Uraian : 100 (masimal 20 poin per saol)

Total : $\frac{poin\ pilihan\ ganda + uraian}{2}$

b. Penilaian Ketrampilan Bab II

Tugas Praktik

Petunjuk : Diskusikan bersama teman dengan membuat kelompok beranggotakan 4 peserta didik kerjakan dengan terstruktur.

1. Tentukan nilai limit fungsi $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{2x-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right) = \cdots$ (UM UGM 2006)
2. Nilai $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{(5+4x)(x-5)(1-3x)}{(3-2x)(x^2-3x+7)} \right) = \cdots$ (UM UGM 2006)

c. Penilaian Sikap Bab II

Penilaian Diri

Petunjuk:
Bacalah dengan baik setiap pernyataan dan berilah tanda cek (√) pada kolom yang sesuai dengan keadaan dirimu yang sebenarnya.
Serahkan kembali format yang sudah kamu isi kepada Bapak/Ibu Guru.

Nama/No Absen : ....

Kelas/Semester : ....

Hari, Tanggal : ....

Mata Pelajaran : ....

Nama Guru : ....

No	Pernyataan	Ya	Tidak
Selama kegiatan kelompok saya:			
1.	Mengusulkan ide pada kelompok		
2.	Sibuk mengerjakan tugas saya sendiri		
3.	Tidak berani bertanya karena mali ditertawakan		
4.	Menertawakan pendapat teman		
5.	Aktif mengajukan pertanyaan dengan sopan		
6.	Melaksanakan kesepakatan kelompok, meskipun tidak sesuai dengan pendapat saya		
7.	Menjawab pertanyaan yang diberikan oleh guru		
8.	Melengkapi jawaban teman		
9.	Bicara sendiri dengan teman diluar masalah yang didiskusikan		

10.	Mengikuti kegiatan kelompok dengan baik sampai selesai		

Pernyataan bersifat positif (nomor 1, 5, 6, 7, 8, 10) dan bersifat negatif (nomor 2, 3, 4, dan 9).

Jumlah Butir Positif	**Jumlah Butir Negatif**	**Skor**	**Nilai**

$$\text{Skor nilai} = \frac{\text{Jumlah butir positif}}{\text{jumlah pernyataan}} \times 100$$

Kode nilai/predikat :

a. SB = Sangat Baik = 90-100
b. B = Baik = 80-89
c. C = cukup = 70-79
d. K = Kurang = <70

BAB 3
TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

A. RENCANA BELAJAR SISWA III

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.3	Menggunakan prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana.	3.3.1	Memahami prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana.
		3.3.2	Menemukan prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana.
		3.3.3	Menetukan penyelesaian dari suatu prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana.
4.3	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri.	4.3.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

B. KEGIATAN BELAJAR III

1. Tujuan Kegiatan Pembelajaran III

Melalui pembelajaran online, peserta didik dapat **berfikir kritis dan kreatif** dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri dari masalah kontekstual serta **memiliki sikap disiplin.**

2. Kegiatan Pembelajaran 3.1

a. Memahami Turunan Fungsi Trigonometri

Seperti halnya turunan fungsi aljabar, turunan fungsi trigonometri diperoleh dengan mencari limit $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, untuk $f(x)$ merupakan fungsi trigonometri. Dua buah fungsi yang dijadikan acuan untuk menentukan turunan fungsi trigonometri adalah fungsi sinus dan fungsi kosinus. Sebelum kita masuk pembahasan turunan fungsi trigonometri akan lebih baiknya kita mempelajari sifat-sifat turunan fungsi.

b. Sifat-sifat Turunan Suatu Fungsi

Sifat-sifat turunan fungsi aljabar berlaku juga pada fungsi trigonometri. Misalkan n bilangan rasional, c konstanta, $u(x)$ dan $v(x)$ fungsi-fungsi diferensiabel dengan turunannya masing-masing $u'(x)$ dan $v'(x)$. Jika $f'(x)$ turunannya dari $f(x)$, berlaku sifat-sifat sebagai berikut.

a. Turunan dari $f(x)=c$, adalah $f'(x)=0$

b. Turunan dari $f(x)=c\ u(x)$, adalah $f'(x)=c\ u'(x)$

c. Turunan dari $f(x)=u(x)\pm v(x)$, adalah $f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$

d. Turunan dari $f(x)=u(x)\times v(x)$, adalah $f'(x)=u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)$

e. Turunan dari $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)};v(x)\neq 0$, adalah $f'(x)=\dfrac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{\{v(x)\}^2}$

f. Turunan dari $f(x)=\{u(x)\}^n$ adalah $f'(x)=n\{u(x)\}^{n-1}\times u'(x)$

Contoh Soal 3.1.1

Tentukan turunan pertama dari $f(x)=2x^3-4x^2+6x-5$.

Penyelesaian

$$f(x)=2x^3-4x^2+6x-5$$
$$f'(x)=2\times 3x^{3-1}-4\times 2x^{2-1}+6\times 1x^{1-1}-0$$
$$f'(x)=6x^2-8x+6$$

Contoh Soal 3.1.2

Tentukan turunan pertama dari $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{3x-7};(3x-7)\neq 0$.

Penyelesaian

$$f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{3x-7}$$

Misalkan $u(x)=2\sqrt{x}=2x^{\frac{1}{2}}$, maka $u'(x)=2\times\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$v(x)=3x-7$, maka $v'(x)=3$

Dengan menggunakan aplikasi rumus $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)};v(x)\neq 0$ maka

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{\{v(x)\}^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\times(3x-7)-3\times 2\sqrt{x}}{(3x-7)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{3x-7}{\sqrt{x}}-6\sqrt{x}}{9x^2-42x+49}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{3x-7-6x}{\sqrt{x}}}{9x^2-42x+49}$$ kemudian kita dapat menyederhanakan bentuknya

$$f'(x)=\frac{3x-7-6x}{\sqrt{x}\left(9x^2-42x+49\right)}$$

$$f'(x)=\frac{-3x-7}{9x^2\sqrt{x}-42x\sqrt{x}+49\sqrt{x}}$$

c. Latihan 3.1

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut.

1) $f(x)=6x^3-x^2-2x-1$
2) $f(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}$
3) $f(x)=2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$
4) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{3x}{\sqrt{x}}$
5) $f(x)=(2x^2-2x)-(3x+4)$
6) $f(x)=(2x-1)(3x+2)$
7) $f(x)=(x^2+2x+1)(x+4)$
8) $f(x)=\frac{x+2}{6x-1};(6x-1)\neq 0$
9) $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x-3};x\neq 3$
10) $f(x)=(3x^2-2x)^5$

3. Kegiatan Pembelajaran 3.2

a. Turunan Fungsi Sinus

Seperti halnya turunan fungsi aljabar, turunan fungsi trigonometri diperoleh dengan

Misalkan diketahui $f(x) = \sin x$. Dengan menggunakan limit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, diperoleh:

> Ingat:
>
> Sin A – Sin B = 2 Cos $\frac{(A+B)}{2}$ Sin $\frac{(A-B)}{2}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(x+h+x) \times \sin\frac{1}{2}(x+h-x)}{h}$$

$$f'(x) = 2\lim_{h \to 0} \cos\frac{1}{2}(2x+h) \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$f'(x) = 2\lim_{h \to 0} \cos\frac{1}{2}(2x+h) \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \times \frac{\frac{1}{2}}{1}$$

$$f'(x) = 2\lim_{h \to 0} \cos(x + \frac{1}{2}h) \times \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 2\cos(x + \frac{1}{2}(0)) \times \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 2\cos x \times \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \cos x$$

> Jika $f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = \cos x$

b. Turunan Fungsi Kosinus

Dengan cara serupa misalkan diketahui $f(x)=\cos x$. Dengan menggunakan limit $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, diperoleh:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

Ingat:

Cos A – Cos B = – 2 Sin $\frac{(A+B)}{2}$ Sin $\frac{(A-B)}{2}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{1}{2}(x+h+x)\times\sin\frac{1}{2}(x+h-x)}{h}$$

$$f'(x)=-2\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{2}(2x+h)\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$f'(x)=-2\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{2}(2x+h)\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\times\frac{\frac{1}{2}}{1}$$

$$f'(x)=-2\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{1}{2}h)\times\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-2\sin(x+\frac{1}{2}(0))\times\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-2\sin x\times\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-\sin x$$

Jika $f(x)=\cos x$, maka $f'(x)=-\sin x$

Dengan langkah yang sama dapat kita peroleh:

a. Jika $f(x)=a\sin x$, maka $f'(x)=a\cos x$

b. Jika $f(x)=a\cos x$, maka $f'(x)=-a\sin x$

c. Jika $f(x)=\tan x$, maka $f'(x)=\sec^2 x$

d. Jika $f(x)=\csc x$, maka $f'(x)=-\csc x\cot x$

e. Jika $f(x)=\sec x$, maka $f'(x)=\sec x\tan x$

f. Jika $f(x)=\cot x$, maka $f'(x)=\csc^2 x$

Contoh Soal 3.2.1

Turunan pertama dari $f(x) = 2\sin x$.

Penyelesaian

$f(x) = 2\sin x$

$f'(x) = 2\cos x$

Contoh Soal 3.2.2

Turunan pertama dari $f(x) = 3\csc x$.

Penyelesaian

$f(x) = 3\csc x$

$f'(x) = -3\csc x \cot x$

Contoh Soal 3.2.3

Turunan pertama dari $f(x) = 2x \ \cos x$.

Penyelesaian

$f(x) = 2x \ \cos x$

Misalkan $u(x) = 2x,$ maka $u'(x) = 2$

$v(x) = \cos x,$ maka $v'(x) = -\sin x$

Dengan menggunakan sifat-sifat turunan fungsi bentuk $u'(x)$

, maka turunan dari $f(x)$:

$u(x) \times v(x)$

$f'(x) = 2 \times \cos x + (-\sin x) \times 2x$

$f'(x) = 2\cos x - 2x\sin x$

c. Latihan 3.2

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut.

1) $f(x) = 3\cos x$
2) $f(x) = 4\tan x$
3) $f(x) = 2\sec x$
4) $f(x) = \sin x + \cos x$
5) $f(x) = 4\sin x - \cot x$
6) $f(x) = \sin x \times \sec x$
7) $f(x) = (\sin x - 1)(\cos x + 1)$

8) $f(x) = 4x^2 \sin x$

9) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x+2}; x \neq -2$

10) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cot x}; \cot x \neq 0$

4. Kegiatan Pembelajaran 3.3

a. Turunan Fungsi Trigonometri Bentuk $f(u)$, dengan u Suatu Fungsi

Seperti halnya turunan fungsi aljabar, turunan fungsi trigonometri diperoleh dengan

Kalian tentunya sudah memahami turunan fungsi trigonometri dasar, seperti $y = \sin x,\ y = \cos x,$ dan $y = \tan x.$ Tidak jarang fungsi trigonometri berbentuk berikut.

$y = \sin 2x,\ y = \cos\left(3 - 2x^2\right),$ atau $y = \cos\left(x^2 - 2x\right).$ Untuk menentukan turunan fungsi trigonometri dengan bentuk tersebut dapat diselesaikan dengan dalil rantai yang sudah kalian pelajari sebelumnya pada turunan fungsi aljabar. Sebagai contoh, fungsi $y = \cos\left(x^2 - 2x\right)$ dapat ditulis sebagai $y = \cos u,$ dengan $u = x^2 - 2x.$

Dengan menggunakan dalil rantai, kita dapat menentukan turunannya, sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Dengan $y = \cos\left(x^2 - 2x\right)$, kita misalkan $u = x^2 - 2x.$

Untuk $y = \cos u,$ maka $\dfrac{dy}{du} = -\sin u$

Untuk $u = x^2 - 2x,$ maka $\dfrac{du}{dx} = 2x - 2$

Dengan demikian, turunandari fungsi $y = \cos\left(x^2 - 2x\right)$ adalah:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= -\sin u \times (2x-2) \\ &= -(2x-2)\sin u \\ &= (2-2x)\sin(x^2 - 2x) \end{aligned}$$
(substitusikan/ganti variabel u dengan semula)

Dengan menggunakan cara yang sama kita dapat menentukan turunan fungsi trigonometri bentuk lainnya, sebagai berikut:

a. Turunan dari $y = \sin g(u)$ adalah $y' = g'(u) \times \cos g(u)$

b. Turunan dari $y = \cos g(u)$ adalah $y' = -g'(u) \times \sin g(u)$

c. Turunan dari $y = \tan g(u)$ adalah $y' = g'(u) \times \sec^2 g(u)$

d. Turunan dari $y = \sec g(u)$ adalah $y' = g'(u) \times \sec g(u) \times \tan g(u)$

e. Turunan dari $y = \csc g(u)$ adalah $y' = -g'(u) \times \csc g(u) \times \cot g(u)$

f. Turunan dari $y = \cot g(u)$ adalah $y' = -g'(u) \times \csc^2 g(u)$

b. Latihan 3.2

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut.

1) $f(x) = 3\cos x \;\; f(x) = \cos 3x$
2) $f(x) = 2\tan(x-1)$
3) $f(x) = 2\csc(3x+4)$
4) $f(x) = \sin x^2 + \cos 2x$
5) $f(x) = \sin(x^2 - 1) - 3\tan 2x$
6) $f(x) = \cos 2x \times \sec 2x$
7) $f(x) = (\sin x^3 - 1)(2\cos x + 1)$
8) $f(x) = (x^2 - 2x + 1)\sin 2x$
9) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\cos 2x}; \cos 2x \neq 0$
10) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cot 2x}; \cot 2x \neq 0$

5. Kegiatan Pembelajaran 3.4

a. Menentukan Turunan Fungsi Trigonometri dengan Aturan Rantai

Tentunya kalian pernah menemui suatu fungsi trigonometri dalam bentuk berikut. $y = \sin^2 x$, $y = \sin^5 2x$, atau $y = 3\cos^4(x^2 - x)$. Apakah kalian akan menguraikannya terlebih dahulu, kemudian menurunkannya? Persoalan seperti itu akan lebih mudah jika dikerjakan dengan menggunakan aturan rantai. Prinsip menentukan turunan dengan menggunakan aturan rantai adalah mengubah fungsi yang akan diturunkan kedalam fungsi bentuk dasar,

$x^n, \sin x, \cos x, \sin^n u, \cos^n u,$ dan lain-lain. Selanjutnya, fungsi-fungsi dasar itu diturunkan seperti halnya aturan yang telah dijelaskan sebelumnya.

Sebagai contoh kita mencoba mencari turunan pertama dari $y = \sin^5 2x,$ fungsi tersebut dapat kita tulis dalam bentuk fungsi trigonometri dasar yaitu kita misalkan $2x$ adalah u. Dengan menggunakan dalil rantai, kita dapat menentukan turunannya, sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Dengan $y = \sin^5 2x,$, kita misalkan $u = 2x$

Untuk $y = \sin^5 u,$ maka $\dfrac{dy}{du} = 5\sin^4 u \times \cos u$

Untuk $u = 2x,$ maka $\dfrac{du}{dx} = 2$

Dengan demikian, turunan dari fungsi $y = \sin^5 2x,$ adalah:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= 5\sin^4 u \times \cos u \times 2 \\ &= 10\sin^4 u \times \cos u \\ &= 10\sin^4 2x \cos 2x \qquad \text{(substitusikan/ganti variabel } u \text{ dengan semula)}\end{aligned}$$

Dengan menggunakan cara yang sama kita dapat menentukan turunan fungsi trigonometri berpangkat bentuk lainnya, sebagai berikut:

a. Turunan dari $y = \sin^n g(u)$ adalah $y' = n \times \sin^{n-1} g(u) \times \cos g(u) \times g'(u)$

b. Turunan dari $y = \cos^n g(u)$ adalah $y' = n \times \cos^{n-1} g(u) \times (-\sin g(u)) \times g'(u)$

Contoh Soal 3.4.1

Tentukan turunan pertama dari $y = \cos^4(3x+2)$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} y &= \cos^4(3x+2) \\ y' &= 4 \times \cos^{4-1}(3x+2) \times (-\sin(3x+2)) \times 3 \\ y' &= 12\cos^3(3x+2)(-\sin(3x+2)) \\ y' &= -12\cos^3(3x+2)\sin(3x+2) \end{aligned}$$

Terkadang jawaban itu tidak tersedia pada option pilihan ganda, kita dapat mengubah ke dalam bentuk lain, seperti berikut.

$y' = -12\cos^3(3x+2)\sin(3x+2)$

$$y' = -6 \times 2\cos^2(3x+2)\cos(3x+2)\sin(3x+2)$$
$$y' = -6\cos^2(3x+2) \times 2\sin(3x+2)\cos(3x+2)$$
$$y' = -6\cos^2(3x+2)\sin 2(3x+2)$$
$$y' = -6\cos^2(3x+2)\sin(6x+4)$$

Ingat:

Sin 2a = 2 sin a cos

b. Latihan 3.4

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut.

1) $f(x) = \cos^2 x$
2) $f(x) = \sin^2 2x$
3) $f(x) = \cos^3(x+2)$
4) $f(x) = \sin^2(x^2 - 1) + \cos 2x$
5) $f(x) = 2x\cos^2(4x+1)$
6) $f(x) = (3x-2)\sin^2 x$
7) $f(x) = (\sin^2 x - 1)(\cos^2 x + 1)$
8) $f(x) = \sin 2x(\sin^2 x + 1)$
9) $f(x) = \dfrac{2x}{\cos^2 2x}; \cos^2 2x \neq 0$
10) $f(x) = \dfrac{\sin^2 2x}{\cos 2x}; \cos 2x \neq 0$

6. Evaluasi Bab III

a. Penilaian Kognitif Bab III

Memahami Turunan Fungsi Trigonometri dan pemecahan masalah.

A. Pilihlah satu jawaban yang benar

1. Turunan pertama dari $y = 2\cos^2 3x$ adalah . . . .

   A. $2\sin 6x$

   B. $4\cos 3x$

   C. $-12\sin 6x$

   D. $12\cos 3x$

   E. $-12\sin 3x\cos 3x$

2. Turunan pertama dari $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x}$ adalah . . . .

   A. $-\dfrac{1}{\cos 2x - 1}$

   B. $\dfrac{1}{\sin 2x - 1}$

   C. $-\dfrac{1}{\cos 2x + 1}$

   D. $\dfrac{\cos x}{\cos x + \sin x}$

   E. $\dfrac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$

3. Turunan pertama dari $y = \sin 3x \tan 4x$ adalah . . . .

   A. $\cos 3x \sec 4x + 3\sin 3x \sec^2 4x$

   B. $\cos 3x \tan^2 4x + 4\cos 3x \sec^2 4x$

   C. $3\cos 3x \tan 4x + 4\sin 3x \sec^2 4x$

   D. $3\cos 3x \tan 4x + 4\sin 3x \sec x$

   E. $4\cos 3x \tan 4x + 3\sin 3x \sec^2 4x$

4. Turunan pertama dari $y = \cos(2x^3 - x^2)$ adalah . . . .

   A. $(2x - 6x^2)\cos(6x^2 - 2x)$

   B. $\sin(6x^2 - 2x)$

   C. $-\sin(2x^3 - x^2)$

   D. $-\sin(2x^3 - x^2)\cos(6x^2 - 2x)$

   E. $(2x - 6x^2)\sin(6x^2 - 2x)$

5. Turunan pertama dari $y = \cos^3 5x$ adalah . . . .
   A. $5x\cos^3 5x$
   B. $-5x\cos^3 5x$
   C. $-15\cos^2 5x\sin 5x$
   D. $15x\cos^2 5x\sin 5x$
   E. $3x\cos^2 5x$

6. Turunan pertama dari $y = \dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ adalah . . . .
   A. $\tan 2x$
   B. $\sin^2 x$
   C. $\csc^2 x$
   D. $\cos^2 x$
   E. $\sec^2 x$

7. Turunan pertama dari $y = \sin^2(2x^3-1)$ adalah . . . .
   A. $2\sin(2x^3-1)$
   B. $\sin(4x^3-2)$
   C. $6x^3\sin(2x^3-1)$
   D. $\cos^2(2x^3-1)$
   E. $12x^2\sin(2x^3-1)\cos(2x^3-1)$

8. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = \cos^5(\pi-2x)$ adalah . . . .(UN SMA 2016)
   A. $f'(x) = 5\cos^3(\pi-2x)\sin(2\pi-4x)$
   B. $f'(x) = 5\cos^3(\pi-2x)\sin(\pi-2x)$
   C. $f'(x) = 5\cos^3(\pi-2x)\cos(2\pi-4x)$
   D. $f'(x) = -5\cos^3(\pi-2x)\sin(2\pi-4x)$
   E. $f'(x) = -5\cos^3(\pi-2x)\sin(\pi-2x)$

9. Turunan pertama $y = (3x^2 - 1)\sin(2x + 1)$ adalah . . . .
   A. $2\sin(2x^3 - 1)$
   B. $\sin(4x^3 - 2)$
   C. $2\sin(2x^3 - 1)$
   D. $2\sin(2x^3 - 1)$
   E. $2\sin(2x^3 - 1)$

10. Turunan pertama dari $y = \dfrac{(x^2 - 1)\sin x}{\cos 2x}$ adalah . . . .
    A. $2\sin(2x^3 - 1)$
    B. $\sin(4x^3 - 2)$
    C. $\sin(4x^3 - 2)$
    D. $\sin(4x^3 - 2)$
    E. $\sin(4x^3 - 2)$

B. Kerkajakan soal-soal berikut dengan teliti!

1. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = \cos(2x - 3)$ adalah....
2. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = (x - 1)^3 \cos 4x$ adalah....
3. Jika $f'(x)$ adalah turunan pertama dari $f(x) = \sin^2(x - 2)$ maka nilai dari $f'(2)$ adalah....
4. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = \dfrac{(2x - 1)^2 \cos 2x}{\sin 2x}$ adalah....
5. Jika $f'(x)$ adalah turunan pertama dari $f(x) = \tan(2x - 1)$ maka nilai dari $f'(x + 3)$ adalah....

Penilaian:

<u>Pilihan Ganda</u>	<u>Uraian</u>	<u>Nilai Akhir</u>

Keterangan Nilai Benar:

Pilihan Ganda	:	100 (10 poin per soal)
Uraian	:	100 (masimal 20 poin per saol)
Total	:	$\frac{poin\ pilihan\ ganda + uraian}{2}$

b. Penilaian Ketrampilan Bab III

Tugas Praktik

Petunjuk : Diskusikan bersama teman dengan membuat kelompok beranggotakan 4 peserta didik kerjakan dengan terstruktur.

1. Sebuah partikel bergerak menurut persamaan $y = 4\cos^3(x - \frac{\pi}{6})$, dengan $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Variabel y dalam satuan cm dan x dalam satuan radian. Jika x bertambah $0{,}6$ radian per detik maka laju perubahan y terhadap waktu ketika $x = \frac{\pi}{3}$ adalah....

c. Penilaian Sikap Bab III

Penilaian Diri

Petunjuk:
Bacalah dengan baik setiap pernyataan dan berilah tanda cek (√) pada kolom yang sesuai dengan keadaan dirimu yang sebenarnya.
Serahkan kembali format yang sudah kamu isi kepada Bapak/Ibu Guru.

Nama/No Absen : ....
Kelas/Semester : ....
Hari, Tanggal : ....

Mata Pelajaran : ....

Nama Guru : ....

No	Pernyataan	Ya	Tidak
Selama kegiatan kelompok saya:			
1.	Mengusulkan ide pada kelompok		
2.	Sibuk mengerjakan tugas saya sendiri		
3.	Tidak berani bertanya karena mali ditertawakan		
4.	Menertawakan pendapat teman		
5.	Aktif mengajukan pertanyaan dengan sopan		
6.	Melaksanakan kesepakatan kelompok, meskipun tidak sesuai dengan pendapat saya		
7.	Menjawab pertanyaan yang diberikan oleh guru		
8.	Melengkapi jawaban teman		
9.	Bicara sendiri dengan teman diluar masalah yang didiskusikan		
10.	Mengikuti kegiatan kelompok dengan baik sampai selesai		

Pernyataan bersifat positif (nomor 1, 5, 6, 7, 8, 10) dan bersifat negatif (nomor 2, 3, 4, dan 9).

Jumlah Butir Positif	Jumlah Butir Negatif	Skor	Nilai

$$\text{Skor nilai} = \frac{\text{Jumlah butir positif}}{\text{jumlah pernyataan}} \times 100$$

Kode nilai/predikat :

a. SB = Sangat Baik = 90-100
b. B = Baik = 80-89
c. C = cukup = 70-79
d. K = Kurang = <70

BAB 4
APLIKASI TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

A. RENCANA BELAJAR SISWA IV

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.4	Menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	3.4.1	Memahami keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.
		3.4.2	Menemukan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.
		3.4.3	Menetukan penyelesaian dari keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.
4.4	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	4.4.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

B. KEGIATAN BELAJAR IV

1. Tujuan Kegiatan Pembelajaran IV

Melalui pembelajaran online, peserta didik dapat **berfikir kritis dan kreatif** dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan aplikasi turunan fungsi trigonometri dari masalah kontekstual serta **memiliki sikap disiplin.**

2. Kegiatan Pembelajaran 4.1

a. Turunan Kedua Fungsi Trigonometri

Kita telah mempelajari tentang turunan pertama suatu fungsi $f(x)$. Kali ini kita membahas turunan kedua suatu fungsi. Langkah yang akan kita lakukan adalah mencari turunan pertama dari suatu fungsi tersebut yaitu $f'(x)$, kemudian hasil dari $f'(x)$ kita turunkan lagi mendapatkan turunan kedua yaitu $f''(x)$.

Contoh Soal 4.1.1

Tentukan turunan kedua dari $f(x) = \sin 2x$.

Penyelesaian

$f(x) = \sin 2x$

$f'(x) = \cos 2x \times 2$

$f'(x) = 2\cos 2x$

$f''(x) = 2(-\sin 2x) \times 2$

$f''(x) = -4\sin 2x$

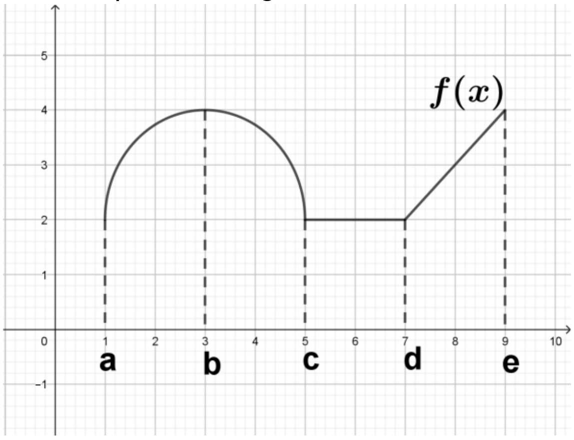
b. Latihan 4.1

1) Diketahui suatu fungsi $f(x) = 3\cos x$, turunan kedua dari $f(x)$ adalah....
2) Diketahui suatu fungsi $f(x) = 4\tan x$, $f''(x) = ...$
3) Turunan kedua dari fungsi $f(x) = 2\sec x$ adalah....
4) Diketahui suatu fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$, nilai dari $f''(\pi) = ...$
5) Diketahui suatu fungsi $f(x) = 4x^2 \sin x$, turunan kedua dari $f(x)$ adalah....
6) Turunan kedua dari fungsi $f(x) = (\sin x - 1)(\cos x + 1)$ adalah....
7) Diketahui suatu fungsi $f(x) = \dfrac{\sin x}{x+2}; x \neq -2$, $f''(x) = ...$
8) Diketahui suatu fungsi $f(x) = 4\sin x - \cot x$, $f''(\dfrac{\pi}{2}) = ...$
9) Diketahui suatu fungsi $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cot x}; \cot x \neq 0$, $f''(x) = ...$
10) Diketahui suatu fungsi $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x}; \cot x \neq 0$, $f''(x) = ...$

3. Kegiatan Pembelajaran 4.2

a. Fungsi Naik, Fungsi Turun dan Stasioner

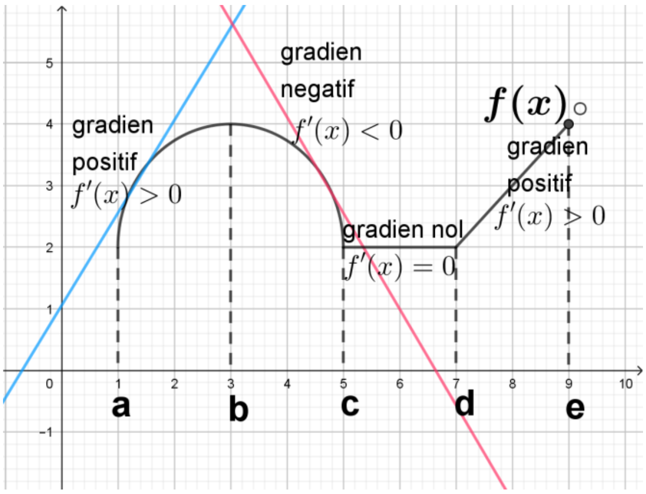
Untuk memudahkan memahami fungsi naik dan fungsi turun pada suatu interval, perhatikan gambar dibawah.



Gambar 1. Fungsi Naik , Turun dan Stasioner

Pada gambar diatas, grafik fungsi naik pada interval $a < x < b$ dan interval $d < x < e$, sedangkan pada interval $b < x < c$ grafik fungsi tersebut turun, pada interval $c < x < d$ grafik $f(x)$ tidak naik dan tidak turun.

Sekarang, perhatikan cara menentukan interval suatu fungsi naik atau turun. Misalkan diberikan fungsi $y = f(x)$.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">

Gambar 2. Interval Fungsi Naik ,Turun dan Stasioner</td>
<td>a. Jika untuk setiap x pada suatu interval $f'(x) > 0$ maka $f(x)$ fungsi yang naik pada interval tersebut. Hal ini dikarenakan gradien garis singgung pada titik-titik tersebut adalah positif (condong ke kanan).</td>
</tr>
<tr>
<td>b. Jika untuk setiap x pada suatu interval $f'(x) < 0$ maka $f(x)$ fungsi yang turun pada interval tersebut. Hal ini dikarenakan</td>
</tr>
</table>

	gradien garis singgung pada titik-titik tersebut adalah negatif (condong ke kiri).
	c. Jika suatu nilai x mengakibatkan $f'(x)=0$, maka $f(x)$ fungsi yang tidak naik atau tidak turun pada titik tersebut. Hal ini dikarenakan gradien garis singgung pada titik-titik tersebut adalah nol.

Perhatikan kembali gambar 1 dan gambar 2. Pada interval $a<x<b$ grafik fungsi naik, sedangkan pada interval $b<x<c$ grafik fungsi turun. Perubahan arah grafik ini terjadi pada titik $x=b$. Titik dimana terjadi perubahan arah grafik dari turun menjadi naik atau sebaliknya ini dinamakan titik stasioner. Pada titik stasioner ini $f'(x)=0$. Sedangkan nilai dari $f(b)$ dimana b adalah titik stasionernya dinamakan nilai stasioner.

Contoh Soal 4.2.1

Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun dari $f(x)=\sin x$.

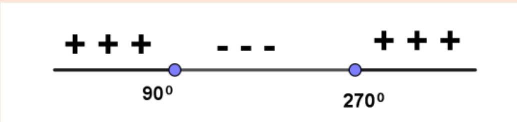
Penyelesaian

Interval fungsi naik $f'(x)>0$

$\cos x>0$

Untuk $\cos x=0$

Maka $x=90°$ dan $x=270°$



Interval fungsi naik berada pada interval positif . Maka **interval fungsi naik** dari $f(x)=\sin x$ adalah $x<90°$ atau $x>270°$.

Interval fungsi turun berada pada interval negatif . Maka **interval fungsi turun** dari $f(x)=\sin x$ adalah $90°<x<270°$.

b. Latihan 4.2

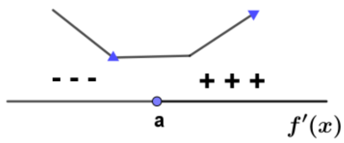
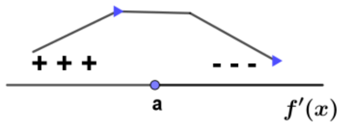
1. Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun dari $f(x) = \sin x + \cos x$, untuk interval $0° < x < 360°$ adalah....
2. Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun dari $f(x) = \cos 2x$, untuk interval $0° < x < 360°$ adalah....
3. Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun dari $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$, untuk interval $0 < x < 2\pi$ adalah....
4. Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun dari $f(x) = \sin 2x - 1$, untuk interval $0 < x < 2\pi$ adalah....
5. Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun dari $f(x) = \tan 2x$, untuk interval $0 < x < \pi$ adalah....

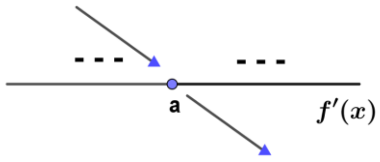
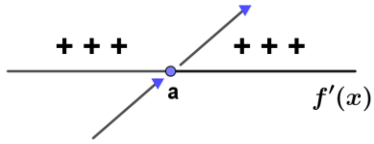
4. Kegiatan Pembelajaran 4.3

a. Stasioner Fungsi

Pada pembahasan sebelumnya suatu fungsi $f(x)$ tidak naik atau tidak turun pada suatu titik dikarenakan gradien garis singgung pada titik-titik tersebut adalah nol. Perubahan arah grafik ini terjadi pada titik $x = b$. Titik dimana terjadi perubahan arah grafik dari turun menjadi naik atau sebaliknya ini dinamakan titik stasioner. Pada titik stasioner ini $f'(x) = 0$. Sedangkan nilai dari $f(b)$ dimana b adalah titik stasionernya dinamakan nilai stasioner.

Kalian telah mengetahui titik dan nilai stasioner suatu fungsi. Terdapat 3 jenis nilai stasioner suatu fungsi, yaitu titik balik maksimum, titik balik minimum, dan titik belok.

a.	 Gambar 3. Titik Balik Minimum	Misalkan $x = a$ adalah stasioner. Apabila nilai x kurang dari a $(x < a)$ menyebabkan $f(x)$ turun dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x > a$ menyebabkan $f(x)$ naik, maka $(a, f(a))$ adalah **titik balik minimum**.
b.	 Gambar 4. Titik Balik Maksimum	Misalkan $x = a$ adalah stasioner. Apabila nilai x kurang dari a $(x < a)$ menyebabkan $f(x)$ naik dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x > a$ menyebabkan $f(x)$ turun, maka $(a, f(a))$ adalah **titik balik maksimum**.

c.	 Gambar 5. Titik Belok	Misalkan $x = a$ adalah stasioner. Apabila nilai x kurang dari a $(x < a)$ menyebabkan $f(x)$ turun dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x > a$ menyebabkan $f(x)$ juga turun, maka $(a, f(a))$ adalah **titik belok**.
d.	 Gambar 6. Titik Belok	Misalkan $x = a$ adalah stasioner. Apabila nilai x kurang dari a $(x < a)$ menyebabkan $f(x)$ naik dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x > a$ menyebabkan $f(x)$ juga naik, maka $(a, f(a))$ juga **titik belok**.

Contoh Soal 4.3.1

Tentukan nilai-nilai stasioner fungsi $f(x) = \sin x$ dan jenisnya.

Penyelesaian

stasioner $\rightarrow f'(x) = 0$

$\cos x = 0$

Maka $x = 90°$ dan $x = 270°$

Untuk $x = 90°$ maka $f(90°) = \sin 90° = 1$

Untuk $x = 270°$ maka $f(270°) = \sin 270° = -1$

Nilai $f(90°) > f(270°)$, maka nilai $f(90°)$ merupakan nilai maksimum dan koordinat $(90°, f(90°))$ merupakan titik balik maksimum, nilai $f(270°)$ merupakan nilai minimum dan koordinat $(270°, f(270°))$ merupakan titik balik minimum.

Jadi:
Nilai maksimum dari fungsi $f(x) = \sin x$ adalah 1
Nilai minimum dari fungsi $f(x) = \sin x$ adalah -1
Koordinat stasioner $(90°, 1)$ dan $(270°, -1)$

Jenis-jenis stasioner:
Titik balik maksimum $(90°, 1)$
Titik balik minimum $(270°, -1)$

b. Latihan 4.3

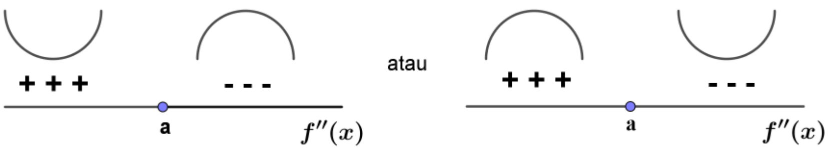
1. Tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ adalah....
2. Tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = \cos 2x$ adalah....
3. Tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$ adalah....
4. Tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = \sin 2x - 1$ adalah....
5. Tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = 2\sin x - 1$ adalah....

5. Kegiatan Pembelajaran 4.4

a. Menentukan Jenis-jenis Nilai Stasioner Menggunakan Turunan Kedua

Kalian telah memahami jenis-jenis nilai stasioner melalui turunan pertama. Kali ini kita akan mendeteksi nilai stasioner menggunakan turunan kedua dari fungsi tersebut. Konsep turunan kedua suatu fungsi sudah kamu pelajari di kelas XI. Misalkan terdapat suatu fungsi $f(x)$ yang kontinu dalam interval $b < x < c$ yang memuat $x = a$. Turunan pertama dan turunan kedua fungsi terdefinisi pada interval tersebut.

a. Jika $f'(a) = 0$ dan $f''(a) > 0$ maka $(a, f(a))$ adalah *titik balik minimum*.
b. Jika $f'(a) = 0$ dan $f''(a) < 0$ maka $(a, f(a))$ adalah *titik balik maksimum*.
c. Jika $f'(a) = 0$ dan $f''(a)$ bergantian tanda ((+) ke (-) atau sebaliknya) maka $(a, f(a))$ adalah *titik belok horizontal*.



Gambar 7. Garis Bilangan

Dengan demikian, untuk mendapatkan titik belok horizontal, selain turunan kedua harus sama dengan nol, perlu diselidiki bahwa turunan kedua itu berubah tanda dari positif ke nol, kemudian ke negatif, atau sebaliknya.

Contoh Soal 4.4.1

Tentukan titik-titik stasioner fungsi $f(x) = \sin x$ dengan menggunakan turunan kedua.

Penyelesaian

Stasioner $\rightarrow f'(x) = 0$

$\cos x = 0$

Maka $x = 90°$ dan $x = 270°$

Untuk $x = 90°$ maka $f(90°) = \sin 90° = 1$

Untuk $x = 270°$ maka $f(270°) = \sin 270° = -1$

$f''(x) = -\sin x$

Untuk $x = 90°$ maka $f''(90°) = -\sin 90° = -1$

Untuk $x = 270°$ maka $f''(270°) = -\sin 270° = -(-1) = 1$

Nilai $f''(90°) < 0$, maka koordinat $(90°, f(90°))$ yaitu $(90°, 1)$ merupakan titik balik maksimum, nilai $f''(270°) > 0$ maka koordinat $(270°, f(270°))$ yaitu $(270°, -1)$ merupakan titik balik minimum.

Jadi:
Nilai maksimum dari fungsi $f(x) = \sin x$ adalah 1
Nilai minimum dari fungsi $f(x) = \sin x$ adalah -1
Koordinat stasioner $(90°, 1)$ dan $(270°, -1)$

Jenis-jenis stasioner:
Titik balik maksimum $(90°, 1)$
Titik balik minimum $(270°, -1)$

b. Latihan 4.4

1. Dengan mengaplikasikan turunan kedua tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ adalah....
2. Dengan mengaplikasikan turunan kedua tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = \cos 2x$ adalah....
3. Dengan mengaplikasikan turunan kedua tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x$ adalah....
4. Dengan mengaplikasikan turunan kedua tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = \sin 2x - 1$ adalah....
5. Dengan mengaplikasikan turunan kedua tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = 2\sin x - 1$ adalah....

6. Kegiatan Pembelajaran 4.5

a. Uji Turunan Kedua untuk Kecekungan

Manfaat turunan kedua yang lain adalah untuk menentukan kecekungan kurva suatu fungsi. Dengan menggunakan turunan kedua (jika ada), kita dapat menentukan kecekungan kurva. Misal fungsi $f(x)$ terdeferensialkan dua kali (mempunyai turunan kedua) pada selang terbuka *I*.

a. Jika $f''(x) > 0$ maka fungsi f cekung ke atas pada *I*.
b. Jika $f''(x) < 0$ maka fungsi f cekung ke atas pada *I*.

Contoh Soal 4.5.1

Tentukan interval dimana fungsi $f(x) = \cos x$, untuk $0 < x < 2\pi$ cekung ke atas.

Penyelesaian

$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$

Fungsi $f(x) = \cos x$ cekung keatas apabila $f''(x) > 0$ sehingga

$f''(x) > 0$

$-\cos x > 0$

$\cos x < 0$

Kita cari pembuat nolnya,

$\cos x = 0$

$\cos x = \cos 90°$

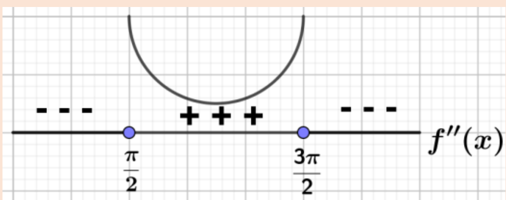
Maka $x = 90° + k \bullet 360°$

Untuk $k = 0$, diperoleh $x = 90° = \frac{\pi}{2}$ (memenuhi pada interval)

atau $x = -90° + k \bullet 360°$

Untuk $k = 0$, diperoleh $x = -90° = -\frac{\pi}{2}$ (tidak memenuhi pada interval)

Untuk $k = 1$, diperoleh $x = 270° = \frac{3\pi}{2}$ (memenuhi pada interval)



Gambar 8. Garis Bilangan

Jadi fungsi $f(x) = \cos x$, untuk $0 < x < 2\pi$ cekung ke atas pada interval $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

b. Latihan 4.5

1. Tentukan interval dimana fungsi $f(x) = \sin x$, untuk $0 < x < 2\pi$ cekung ke atas.
2. Tentukan interval dimana fungsi $f(x) = \cos 2x$, untuk $0 < x < 2\pi$ cekung ke bawah.
3. Tentukan interval dimana fungsi $f(x) = \sin x - 1$, untuk $0 < x < 360°$ cekung ke bawah.
4. Tentukan interval dimana fungsi $f(x) = 2\sin x - 1$, untuk $0 < x < 2\pi$ cekung ke atas.
5. Tentukan interval dimana fungsi $f(x) = 2\sin x - \sqrt{3}$, untuk $0 < x < 360°$ cekung ke atas.

7. Kegiatan Pembelajaran 4.6

a. Nilai Maksimum dan Nilai Minimum Suatu Fungsi dalam Interval Tertutup

Nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $y = f(x)$ dalam interval tertutup $a \le x \le b$ ditentukan sebagai berikut.

a. Tentukan nilai stasioner (maksimum dan minimum) fungsi $f(x)$ dalam interval itu.

b. Tentukan nilai $f(a)$ dan $f(b)$.

c. Nilai terbesar dari nilai-nilai itu merupakan nilai maksimum, sedangkan nilai terkecil merupakan nilai minimum.

Contoh Soal 4.6.1

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x) = \sin x$ pada interval $0° < x < 360°$.

Penyelesaian

- Menentukan nilai stasioner (maksimum dan minimum) fungsi $f(x)$ dalam interval itu.

stasioner $\rightarrow f'(x) = 0$

$\cos x = 0$

Maka $x = 90°$ dan $x = 270°$

Untuk $x = 90°$ maka $f(90°) = \sin 90° = 1$

Untuk $x = 270°$ maka $f(270°) = \sin 270° = -1$

- Menentukan nilai $f(a)$ dan $f(b)$.

Untuk $a = 0°$ maka $f(0°) = \sin 0° = 0$

Untuk $a = 360°$ maka $f(360°) = \sin 360° = 0$

- Nilai terbesar dari nilai-nilai itu merupakan nilai maksimum, sedangkan nilai terkecil merupakan nilai minimum.

Dari 4 nilai yang kita peroleh maka:
nilai maksimumnya adalah 1
nilai minimumnya adalah -1

b. Latihan 4.6

1. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x) = \sin x$, pada interval $0 < x < 2\pi$.
2. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x) = \cos 2x$, pada interval $0 < x < 2\pi$.
3. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x) = \sin x - 1$, pada interval $0 < x < 360°$.
4. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x) = 2\sin x - 1$, pada interval $0 < x < 2\pi$.
5. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x) = 2\sin x - \sqrt{3}$, pada interval $0 < x < 360°$.

8. Kegiatan Pembelajaran 4.7

a. Persamaan Garis Singgung Kurva

Persamaan garis singgung kurva $\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$ dimana $m = f'(x)$

merupakan gradien pada garis singgung kurva dan (x_1, y_1) adalah titik yang singgung dilalui.

Contoh Soal 4.7.1

Tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = \sin 2x$ ditik berabsis 0.

Penyelesaian

Untuk absis 0→ $x_1 = 0$ didapat $y_1 = f(x) = \sin 2x$

$$y_1 = f(0) = \sin 2(0) = \sin 0 = 0$$

$$m = f'(x) = 2\cos 2x$$
$$m = f'(0) = 2\cos 2(0) = 2\cos 0 = 2(1) = 2$$

Maka *persamaan* garis singgung kurva yang terbentuk:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = 2(x - 0)$$
$$y = 2x$$

b. Latihan 4.7

1. Garis singgung kurva $f(x) = \cos(2x + 60^{o})$ dititik $(0,\frac{1}{2})$ adalah...
2. Persamaan garis singgung pada kurva $y = \sin^2 x$ yang berabsis $\frac{\pi}{6}$ adalah....
3. Persamaan garis singgung pada kurva $y = 2\sin 2x$ yang berordinat 2 adalah....(**berordinat 2**$\rightarrow \boldsymbol{y_1 = 2}$)
4. Diketahui $f(x) = \tan x$. Tentukan garis singgung f(x) jika sejajar garis $y - x + 2 = 0$
5. Diketahui $f(x) = \tan x$. Tentukan garis singgung f(x) jika tegak lurus garis $4y + x + 2 = 0$

9. Kegiatan Pembelajaran 4.8

a. Menggambar Grafik Fungsi

Dalam menggambar grafik suatu fungsi $f(x)$, langkah-langkah yang kalian perhatikan adalah sebagai berikut.

1. Menentukan titik potong $f(x)$ dengan sumbu-sumbu koordinat (sumbu X dan sumbu Y).
2. Menentukan titik-titik stasioner atau titik ekstrem dan jenisnya.
3. Menentukan titik-titik bantu/ sembarang dalam fungsi untuk memperhalus grafik.

Contoh Soal 4.8.1

Tentukan grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - 1$, untuk $0 < x < 2\pi$.

Penyelesaian

Langkah 1 : Menentukan titik potong grafik terhadap sumbu koordinat.

Menentukan koordinat titik potong terhadap sumbu X maka $y = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}\cos 2x - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}\cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = 2$$

Karena nilai kosinus tersebut maksimum 1 maka tidak ada nilai x yang memenuhi. Artinya, grafik tidak pernah memotong sumbu X.

Menentukan koordinat titik potong terhadap sumbu Y maka $x = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - 1$$

$f(0)=\frac{1}{2}\cos 2(0)-1=\frac{1}{2}(1)-1=-\frac{1}{2}$

Dengan demikian, titik potong grafik terhadap sumbu Y di titik $(0,-\frac{1}{2})$.

Langkah 2 : Menentukan titik-titik stasioner

$f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-1$

$f'(x)=\frac{1}{2}(-\sin 2x)\times 2-0$

$f'(x)=-\sin 2x$

Titik stasioner diperoleh saat $f'(x)=0$, sehingga

$-\sin 2x=0$

$\sin 2x=0$

- $2x=0+k\bullet 2\pi$
  $x=0+k\bullet\pi$
  $x=0$ (untuk $k=0$)
  $x=\pi$ (untuk $k=1$)
  $x=2\pi$ (untuk $k=2$)
- $2x=(\pi-0)+k\bullet 2\pi$
  $x=\frac{\pi}{2}+k\bullet\pi$
  $x=\frac{\pi}{2}$ (untuk $k=0$)
  $x=\frac{3\pi}{2}$ (untuk $k=1$)

Sekarang kita cari titik-titik stasionernya.

Untuk $x=0$ maka $f(0)=\frac{1}{2}\cos 2(0)-1=-\frac{1}{2}$, diperoleh titik stsioner $(0,-\frac{1}{2})$

Untuk $x=\frac{\pi}{2}$ maka $f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\cos 2(\frac{\pi}{2})-1=-\frac{3}{2}$, diperoleh titik stsioner $(\frac{\pi}{2},-\frac{3}{2})$

Untuk $x=\pi$ maka $f(\pi)=\frac{1}{2}\cos 2(\pi)-1=-\frac{1}{2}$, diperoleh titik stsioner $(\pi,-\frac{1}{2})$

Untuk $x = \frac{3\pi}{2}$ maka $f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2}\cos 2(\frac{3\pi}{2}) - 1 = -\frac{3}{2}$, diperoleh titik stsioner $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3}{2})$

Untuk $x = 2\pi$ maka $f(2\pi) = \frac{1}{2}\cos 2(2\pi) - 1 = -\frac{1}{2}$, diperoleh titik stsioner $(2\pi, -\frac{1}{2})$

Selanjutnya kita tentukan jenis-jenis stasionernya.

Pada interval $0 < x < \frac{\pi}{2}$ fungsi turun karena $f'(x) < 0$.

Pada interval $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ fungsi turun karena $f'(x) > 0$.

Pada interval $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ fungsi turun karena $f'(x) < 0$.

Pada interval $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ fungsi turun karena $f'(x) > 0$.

Sekarang kita selidiki jenis stasionernya dengan menggunakan uji turunan kedua

$f'(x) = -\sin 2x$

$f''(x) = -2\cos 2x$

Untuk $x = 0$ maka $f''(0) = -2\cos 2(0) = -2 < 0$, sehingga titik $(0, -\frac{1}{2})$ merupakan titik balik maksimum.

Untuk $x = \frac{\pi}{2}$ maka $f''(\frac{\pi}{2}) = -2\cos 2(\frac{\pi}{2}) = 2 > 0$, sehingga titik $(\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2})$ merupakan titik balik minimum.

Untuk $x = \pi$ maka $f''(\pi) = -2\cos 2(\pi) = -2 < 0$, sehingga titik $(\pi, -\frac{1}{2})$ merupakan titik balik maksimum.

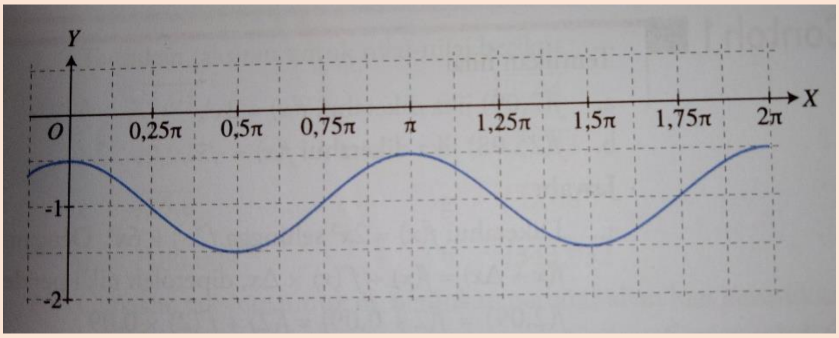
Untuk $x = \frac{3\pi}{2}$ maka $f''(\frac{3\pi}{2}) = -2\cos 2(\frac{3\pi}{2}) = 2 > 0$, sehingga titik $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3}{2})$ merupakan titik balik minimum.

Untuk $x = 2\pi$ maka $f''(2\pi) = -2\cos 2(2\pi) = -2 < 0$, sehingga titik $(2\pi, -\frac{1}{2})$ merupakan titik balik maksimum.

Berikut ini adalah grafik fungsi $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-1,$ untuk $0<x<2\pi$

Langkah 3 : Menentukan titik-titik bantu

Langkah 3 : Menggambar Grafik



b. Latihan 4.8

1. Tentukan grafik fungsi $f(x)=\sin 2x,$ untuk $0<x<2\pi$.
2. Tentukan grafik fungsi $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3}),$ untuk $0<x<2\pi$.
3. Tentukan grafik fungsi $f(x)=\sin x-1,$ untuk $0<x<360°$.
4. Tentukan grafik fungsi $f(x)=2\cos(2x-10°),$ untuk $0<x<360°$.
5. Tentukan grafik fungsi $f(x)=\tan 3x,$ untuk $0<x<\pi$.

10. Kegiatan Pembelajaran 4.9

a. Aplikasi Turunan Dalam Perhitungan Kecepatan dan Percepatan

Seperti yang telah disinggung di depan bahwa turunan banyak digunakan dalam berbagai disiplin ilmu. Salah satu aplikasi turunan adalah untuk menyelesaikan kasus-kasus yang berhubungan dengan kecepatan (kelajuan) dan percepatan. Sebagai contoh dalam bidang fisika dibahas tentang suatu gerak lurus berubah beraturan, yang berarti bahwa kecepatan benda selama bergerak tidaklah tetap. Misalkan sebuah benda bergerak dari suatu tempat ke tempat yang lain menenmpuh jarak s dalam waktu t . Kecepatan rata-rata benda itu ditentukan dengan

$$\text{Kecepatan rata-rata} = \frac{perubahan\quad jarak}{perubahan\quad waktu}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Jika kecepatan saat t dinotasikan dengan $v(t)$ maka kecepatan dirumuskan dengan:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Dengan kata lain, kecepatan pada waktu t adalah turunan pertama pertama dari fungsi jaraknya. Jika fungsi kecepatan terhadap waktu $v(t)$ kita turunkan lagi, maka akan kita peroleh percepatan.

Misalnya, percepatan saat t dinotasikan dengan $a(t)$, percepatan dirumuskan dengan

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Dengan kata lain, percepatan pada waktu t adalah turunan pertama dari fungsi kecepatan. Percepatan juga diartikan sebagai turunan kedua dari fungsi jaraknya, yaitu

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Apabila suatu percepatan bernilai negatif, berarti benda berlawanan arah dengan arah sebelumnya. Dalam hal ini dikatakan bahwa benda mengalami perlambatan.

Contoh Soal 4.9.1

Suatu benda bergerak sepanjang garis lurus. Jarak yang ditempuh benda tersebut dalam waktu t detik adalah $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 10t$ meter.

Tentukan:

a. Kecepatan benda saat $t = 2$ detik;
b. Percepatan benda saat $t = 5$ detik;

Penyelesaian

a. Kecepatan benda pada waktu t adalah $v(t) = \frac{ds}{dt} = 2t^2 - 9t + 10$.

Dengan demikian, kecepatan saat $t = 2$ detik adalah $v(2) = 0$. Hal ini berarti pada saat $t = 2$, benda berhenti sesaat karena pada waktu itu kecepatannya 0.

b. Percepatan benda pada waktu t adalah $v(t) = \frac{dv}{dt} = 4t - 9$.

Jadi, percepatan saat $t = 5$ detik adalah $a(5) = 4(5) - 9 = 11 m/s^2$.

b. Latihan 4.9

1. Sebuah mobil bergerak menurut rumus $s(t) = t^2 + 5t$, hitunglah kecepatan mobil tersebut setelah 8 detik.
2. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus. Panjang lintasannya s meter pada waktu t detik ditentukan oleh rumus $s(t) = 5 - 6t + 2t^2$.
   a. Tentukan panjang lintasan setelah $t = 1$ dan $t = 3$.
   b. Tentukan kecepatan rata-rata untuk antara $t = 1$ dan $t = 3$.
   c. Tentukan t jika kecepatannya nol.
   d. Hitunglah kecepatannya jika percepatannya nol.
3. Rusuk sebuah kubus yang terbuat dari kawat mengalami paemuaian sehingga mengalami pertambahan panjang 7 mm/detik. Tentukan laju pertambahan volume pada saat setiap rusuknya memiliki panjang 15 cm.
4. Sebuah benda berbentuk bola karena mengalami pemuaian. Tentukan laju perubahan volume bola pada saat jari-jarinya 7 cm. (ingat : Volume bola berjai-jari r adalah $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).
5. Sebuah benda dilemparkan ke atas dari ketinggian 256 kaki. Ketinggian benda setelah t detik pelemparan diberikan oleh $s = -16t^2 + 48t + 256$ kaki.
   a. Berapa kecepatan awalnya?
   b. Kapan benda mencapai kecepatan maksimum?
   c. Berapa ketinggian maksimumnya?
   d. Kapan benda membentur tanah?
   e. Berapa kecepatan benda ketika membentur tanah?

11. Evaluasi Bab IV

a. Penilaian Kognitif Bab IV

Memahami Aplikasi Turunan Fungsi Trigonometri dan pemecahan masalah.

A. Pilihlah satu jawaban yang benar

1. Koordinat titik stasioner dari $y = 2\sin 2x + 1, untuk\, 0 < x < \pi$ adalah . . . .

   A. $\left(\frac{\pi}{4}, -3\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$

   B. $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$

   C. $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4}, -3\right)$

   D. $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$

   E. $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4}, -3\right)$

2. Nilai minimum dari fungsi $f(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - 1, untuk\, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ adalah . . .

   A. 0

   B. $-\frac{1}{4}$

   C. $-\frac{1}{2}$

   D. $-\frac{3}{2}$

   E. -2

3. Nilai maksimum dari fungsi $12\sin x(1 - \sin x) + 3\sin^2 x$ adalah . . . .

   A. 8
   B. 6
   C. 5
   D. 4
   E. 3

4. Diketahui fungsi $f(x) = cmx + n\tan x$. Jika diketahui $f'(45°) = 3$ dan $f(60°) = 9$ maka nilai $m + n = ...$
   A. 0
   B. 1
   C. $\frac{\pi}{2}$
   D. 2
   E. π

5. Sebuah partikel bergerak menurut persamaan $y = 4\cos^3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, dengan $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Variabel y dalam satuan cm dan x dalam satuan radian. Jika x bertambah 0,6 radian per detik maka laju perubahan y terhadap waktu ketika $x = \frac{\pi}{3}$ adalah . . . .
   A. $-2{,}7 cm/s$
   B. $-1{,}8 cm/s$
   C. $-0{,}9 cm/s$
   D. $0{,}4 cm/s$
   E. $0{,}8 cm/s$

6. Titik stasioner dan jenisnya jika $f(x) = \sin x - \cos x$ untuk $0 \le x \le 2\pi$ adalah . . . .
   A. Titik balik maksimum $\left(\frac{3}{4}\pi, \sqrt{2}\right)$ dan titik balik minimum $\left(\frac{7}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$
   B. Titik balik maksimum $\left(\frac{1}{4}\pi, \sqrt{2}\right)$ dan titik balik minimum $\left(\frac{3}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$
   C. Titik balik maksimum $\left(\frac{1}{4}\pi, \sqrt{3}\right)$ dan titik balik minimum $\left(\frac{3}{4}\pi, -\sqrt{3}\right)$
   D. Titik balik maksimum $\left(\frac{3}{4}\pi, \sqrt{3}\right)$ dan titik balik minimum $\left(\frac{7}{4}\pi, -\sqrt{3}\right)$
   E. Titik balik maksimum $\left(\frac{3}{4}\pi, 1\right)$ dan titik balik minimum $\left(\frac{7}{4}\pi, -1\right)$

7. Pernyataan berikut yang benar tentang $y = 4\cos x + 3\sin x + 4$ adalah . . . .
   A. Nilai maksimumnya adalah 11
   B. Nilai maksimumnya adalah 9
   C. Nilai maksimumnya adalah 4
   D. Nilai maksimumnya adalah -3
   E. Nilai maksimumnya adalah 4

8. Persamaan garis singgung pada kurva $y = 2\sin 2x$ yang berordinat 2 adalah....
   A. $y = 2x - 1$
   B. $y = 2x + 2$
   C. $y = 2$
   D. $y + 2 = 0$
   E. $x = 2$

9. Koordinat titik balik minimum dari $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x - 1$ untuk $0 \le x \le 2\pi$ adalah . . . .
   A. $\left(\frac{4}{3}\pi, -1\right)$
   B. $\left(\frac{4}{3}\pi, -3\right)$
   C. $\left(\frac{1}{3}\pi, -1\right)$
   D. $\left(\frac{1}{3}\pi, 1\right)$
   E. $\left(\frac{1}{3}\pi, -3\right)$

10. Jika $f(x) = \sin 3x$, maka $f''(\frac{\pi}{4}) = ...$
   A. $-\frac{27}{2}\sqrt{2}$
   B. $-9\sqrt{2}$
   C. $-\frac{9}{2}\sqrt{2}$
   D. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   E. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

B. Kerkajakan soal-soal berikut dengan teliti!

1. Turunan kedua dari fungsi $f(x)=\cos(2x-3)$ adalah....
2. Tentukan titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x)=\cos 2x-2\sin x$.
3. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x-1,$ untuk $0\leq x\leq 2\pi.$
4. Interval fungsi naik dan turun dari fungsi $f(x)=2\cos 2x$ adalah....
5. Pada saat t detik, pusat sebuah pelampung gabus berada sejauh $3\sin 2t$ cm di atas atau dibawah paermukaan air. Berapa kecepatan pelampung pada saat $t=0,\ t=\left(\frac{\pi}{2}\right)$, dan $t=\pi.$

Penilaian:

Pilihan Ganda	Uraian	Nilai Akhir

Keterangan Nilai Benar:

Pilihan Ganda	:	100 (10 poin per soal)
Uraian	:	100 (masimal 20 poin per saol)
Total	:	$\frac{poin\ pilihan\ ganda+uraian}{2}$

b. Penilaian Ketrampilan Bab II

Tugas Praktik

Petunjuk : Diskusikan bersama teman dengan membuat kelompok beranggotakan 4 peserta didik kerjakan dengan terstruktur.

2. Sebuah partikel bergerak menurut persamaan $y=4\cos^3(x-\frac{\pi}{6}),$ dengan $0<x<\frac{\pi}{2}$. Variabel y dalam satuan cm dan x dalam satuan radian. Jika x bertambah $0{,}6$ radian per detik maka laju perubahan y terhadap waktu ketika $x=\frac{\pi}{3}$ adalah....

c. Penilaian Sikap Bab II

Penilaian Diri

Petunjuk:

Bacalah dengan baik setiap pernyataan dan berilah tanda cek (√) pada kolom yang sesuai dengan keadaan dirimu yang sebenarnya. Serahkan kembali format yang sudah kamu isi kepada Bapak/Ibu Guru.

Nama/No Absen : ....

Kelas/Semester : ....

Hari, Tanggal : ....

Mata Pelajaran : ....

Nama Guru : ....

No	Pernyataan	Ya	Tidak
Selama kegiatan kelompok saya:			
1.	Mengusulkan ide pada kelompok		
2.	Sibuk mengerjakan tugas saya sendiri		
3.	Tidak berani bertanya karena mali ditertawakan		
4.	Menertawakan pendapat teman		
5.	Aktif mengajukan pertanyaan dengan sopan		
6.	Melaksanakan kesepakatan kelompok, meskipun tidak sesuai dengan pendapat saya		
7.	Menjawab pertanyaan yang diberikan oleh guru		
8.	Melengkapi jawaban teman		
9.	Bicara sendiri dengan teman diluar masalah yang didiskusikan		
10.	Mengikuti kegiatan kelompok dengan baik sampai selesai		

Pernyataan bersifat positif (nomor 1, 5, 6, 7, 8, 10) dan bersifat negatif (nomor 2, 3, 4, dan 9).

Jumlah Butir Positif	Jumlah Butir Negatif	Skor	Nilai

$$\text{Skor nilai} = \frac{\text{Jumlah butir positif}}{\text{jumlah pernyataan}} \times 100$$

Kode nilai/predikat :

a. SB = Sangat Baik = 90-100
b. B = Baik = 80-89
c. C = cukup = 70-79
d. K = Kurang = <70

DAFTAR PUSTAKA

Ari Yuana, Rosihan. 2018. Perspektif Matematika 3. Solo: Pt Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.