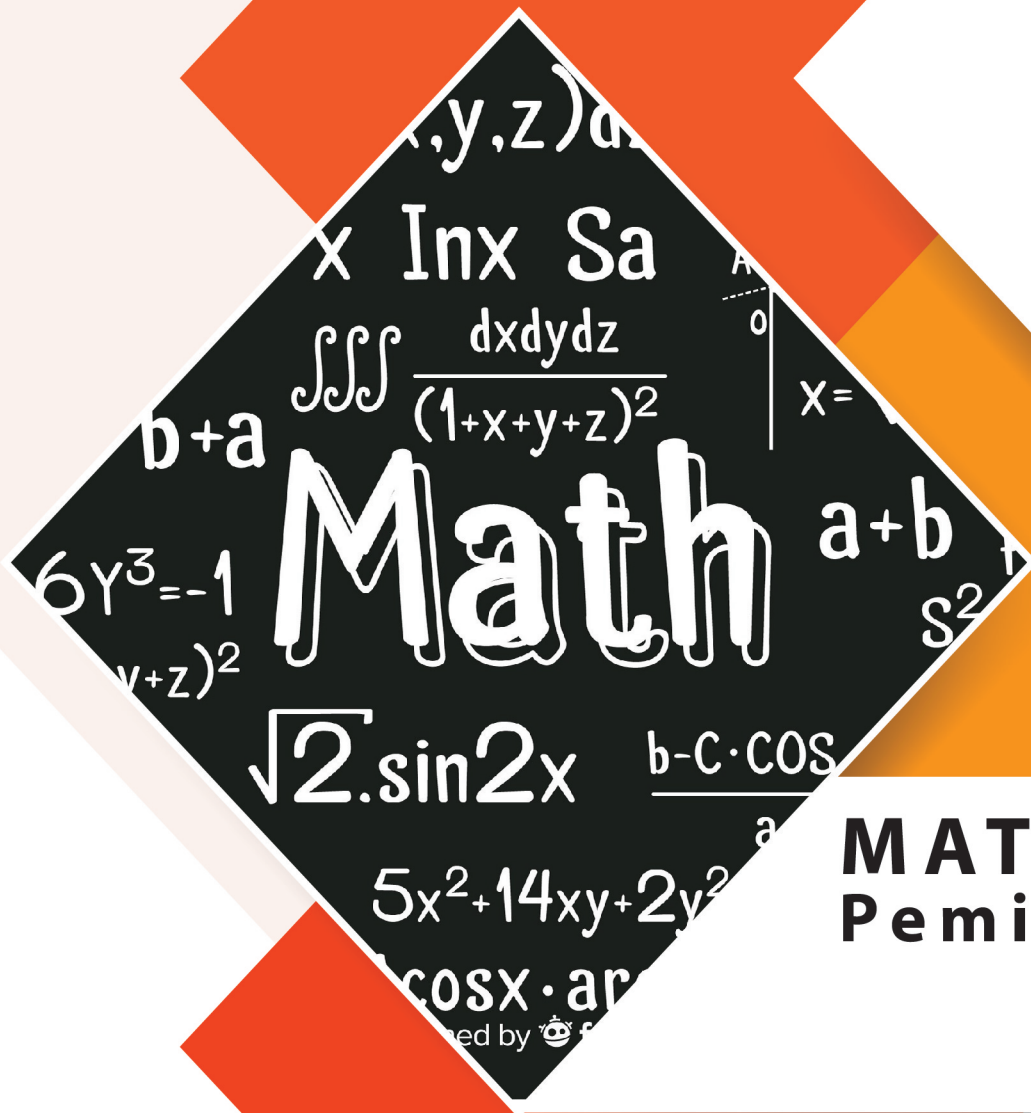




**SMA MUHAMMADIYAH 1
YOGYAKARTA**



MATEMATIKA Peminatan

Kelas XI

Modul Pembelajaran SMA

Mutiara Kusumawati, S.Pd.Si., M.Pd.

MODUL PEMBELAJARAN
MATEMATIKA PEMINATAN

KELAS XI SEMESTER 1
TAHUN AJARAN 2020/2021



Disusun oleh:
Mutiara Kusumawati, S.Pd.Si.,M.Pd

SMA MUHAMMADIYAH 1 YOGYAKARTA
TAHUN 2020



KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allaah *Subhanahu wa Ta'ala* yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan modul yang berjudul “Modul Pembelajaran Matematika Peminatan Kelas XI Semester I”. Ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada Ibu Dwi Lestari, M.Sc selaku dosen pembimbing penyusunan modul yang telah memberikan bimbingan dan arahan sehingga penulisan modul ini dapat diselesaikan tepat waktu. Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada rekan seperjuangan di SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta dan pihak-pihak lain yang tidak bisa penulis sebutkan satu per satu.

Modul ini disusun dengan mempertimbangkan kondisi dan kebutuhan peserta didik, terutama peserta didik SMA. Selain itu, penyusunan modul ini juga disusun berdasarkan konsep pembelajaran abad 21 dimana pembelajaran tidak lagi terpusat pada guru. Diharapkan peserta didik dapat memaksimalkan potensi dan kreativitasnya dengan bimbingan guru dalam proses pembelajaran.

Penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun untuk perbaikan kekurangan-kekurangan yang mungkin masih ada dalam modul ini. Akhirnya penulis berharap semoga modul ini dapat bermanfaat bagi proses pembelajaran matematika khususnya di SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta dan dunia pendidikan pada umumnya.

Yogyakarta, Mei 2020

Penulis

Mutiara Kusumawati, S.Pd.Si.,M.Pd



DAFTAR ISI

PENDAHULUAN.....	5
A. DISKRIPSI	5
B. PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL	6
BAB I PERSAMAAN TRIGONOMETRI	8
A. RENCANA BELAJAR SISWA (KD & IPK)	8
B. KEGIATAN PEMBELAJARAN	9
Kegiatan Pembelajaran 1	9
Kegiatan Pembelajaran 2	16
Kegiatan Pembelajaran 3	17
Kegiatan Pembelajaran 4	19
Kegiatan Pembelajaran 5	22
Kegiatan Pembelajaran 6	24
Kegiatan Pembelajaran 7	27
Kegiatan Pembelajaran 8	28
Kegiatan Pembelajaran 9	31
Kegiatan Pembelajaran 10	38
Kegiatan Pembelajaran 11	39
Kegiatan Pembelajaran 12	42
Kegiatan Pembelajaran 13	46
Kegiatan Pembelajaran 14	50
Kegiatan Pembelajaran 15	54
C. EVALUASI	55
1. PENILAIAN KOGNITIF	55
2. PENILAIAN KETERAMPILAN	55
3. PENILAIAN SIKAP	56
BAB II TRIGONOMETRI ANALITIKA.....	57
A. RENCANA BELAJAR SISWA (KD & IPK)	57
B. KEGIATAN PEMBELAJARAN	58
Kegiatan Pembelajaran 1	58
Kegiatan Pembelajaran 2	61
Kegiatan Pembelajaran 3	64
Kegiatan Pembelajaran 4	65
Kegiatan Pembelajaran 5	68
Kegiatan Pembelajaran 6	71
Kegiatan Pembelajaran 7	73
Kegiatan Pembelajaran 8	76
Kegiatan Pembelajaran 9	80



Kegiatan Pembelajaran 10	80
Kegiatan Pembelajaran 11	83
Kegiatan Pembelajaran 12	85
Kegiatan Pembelajaran 13	88
Kegiatan Pembelajaran 14	94
Kegiatan Pembelajaran 15	94
Kegiatan Pembelajaran 16	98
Kegiatan Pembelajaran 17	102
C. EVALUASI	103
1. PENILAIAN KOGNITIF	103
2. PENILAIAN KETERAMPILAN	103
3. PENILAIAN SIKAP	104
PENUTUP	105
DAFTAR PUSTAKA	106



PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Anda akan mempelajari materi tentang persamaan trigonometri dan trigonometri analitika pada modul ini. Persamaan trigonometri merupakan bagian dari trigonometri yang membahas cara menentukan penyelesaian persamaan trigonometri dalam berbagai bentuk persamaan. Anda akan mengenal berbagai cara untuk menyelesaikan persamaan trigonometri.

Materi pertama pada modul ini adalah persamaan trigonometri. Materi ini memuat 15 kegiatan pembelajaran yang membahas tentang bentuk-bentuk persamaan trigonometri, antara lain persamaan trigonometri bentuk sederhana, $a \sin x + b \cos x = k \cos(x - a)$, dan persamaan trigonometri bentuk khusus. Setelah mempelajari materi persamaan trigonometri ini, Anda diharapkan dapat menentukan penyelesaian dari berbagai bentuk persamaan trigonometri. Secara khusus, Anda diharapkan dapat:

1. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri sinus
2. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri cosinus
3. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri tangen
4. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri bentuk $\sin x = \cos x$ dan $\tan x = \cot x$
5. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri bentuk kuadrat
6. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri bentuk $a \cos x + b \sin x = c$

Materi kedua pada modul ini adalah trigonometri analitika. Materi ini memuat 17 Kegiatan Pembelajaran yang membahas tentang rumus-rumus trigonometri, antara lain rumus trigonometri jumlah dan selisih sudut, rumus trigonometri pada sudut rangkap sudut tengahan, rumus penjumlahan & pengurangan trigonometri, dan rumus perkalian trigonometri. Setelah mempelajari trigonometri analitika ini, Anda diharapkan dapat memahami rumus-rumus pada trigonometri. Secara khusus, Anda diharapkan dapat:

1. Memahami konsep sinus dan cosinus
2. Memahami hubungan antara fungsi sinus dan cosinus yang dinyatakan dalam rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus
3. Menganalisis rumus jumlah dan selisih trigonometri sehingga hubungan mengenai rumus sudut rangkap & tengahan serta penerapannya pada masalah nyata
4. Menentukan solusi dari permasalahan yang berkaitan dengan rumus-rumus trigonometri

B. Petunjuk Penggunaan Modul

Secara umum, modul ini mempelajari tentang persamaan trigonometri dan trigonometri analitika. Anda harus sudah menguasai materi prasyarat sebelum mempelajari modul ini. Materi trigonometri dasar yang telah Anda pelajari di kelas X sangat berhubungan dengan materi persamaan trigonometri.

Anda dapat mengerjakan latihan yang ada dalam modul ini untuk meningkatkan penguasaan Anda terhadap materi ini. Cara belajar dengan menggunakan modul dapat dilakukan secara mandiri (tanpa bantuan tutor/ pendidik), melalui tutor, atau menggunakan pembelajaran tatap muka. Tata cara penggunaan modul ini adalah sebagai berikut.

1. Mengikuti jadwal kontrak belajar yang telah disepakati dengan guru
2. Membaca dan memahami uraian materi pembelajaran
3. Mengidentifikasi materi pembelajaran yang sulit atau perlu bantuan konsultasi dengan guru, sedangkan materi lainnya dipelajari dan dikerjakan secara mandiri atau penguatan pembelajaran bersama guru
4. Melaksanakan tugas dalam modul dengan sebaik-baiknya untuk lebih memahami materi pembelajaran
5. Mengerjakan soal latihan dengan sebaik-baiknya untuk lebih mendalami materi pembelajaran
6. Mengerjakan evaluasi dengan sungguh-sungguh untuk mengetahui sejauh mana penguasaan terhadap materi yang telah dipelajari
7. Apabila Anda mengalami kesulitan dalam mengerjakan tugas atau latihan, Anda dapat berdiskusi dengan rekan sejawat atau berkonsultasi dengan guru
8. Apabila Anda telah menyelesaikan soal latihan, Anda dapat memeriksa kebenaran jawaban anda melalui kunci jawaban yang telah tersedia. Kerjakan ulang soal-soal yang masih belum dapat



dijawab dengan benar hingga Anda tidak lagi kesulitan dalam mengerjakan soal-soal tersebut

9. Apabila Anda mengalami kesulitan atau ingin mendalami materi, maka Anda dapat mempelajari referensi dari daftar pustaka atau sumber belajar yang lain

**BAB I
PERSAMAAN TRIGONOMETRI****A. Rencana Belajar Siswa (KD & IPK)**

Modul ini *insyaaAllaah* akan membantu Anda untuk dapat memahami materi persamaan trigonometri. Berikut ini disajikan Kompetensi Dasar (KD) dan Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK) pada materi tersebut.

Kompetensi Dasar (KD)	Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)
3.1 Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri	3.1.1. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri sinus 3.1.2. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri cosinus 3.1.3. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri tangen 3.1.4. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri bentuk $\sin x = \cos x$ dan $\tan x = \cot x$ 3.1.5. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri bentuk kuadrat 3.1.6. Menjelaskan dan menentukan penyelesaian persamaan trigonometri bentuk $a \cos x + b \sin x = c$
4.1 Memodelkan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan trigonometri.	4.2.1. Memodelkan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan trigonometri sinus 4.2.2. Memodelkan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan trigonometri cosinus 4.2.3. Memodelkan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan trigonometri tangen 4.2.4. Memodelkan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan trigonometri bentuk $\sin x = \cos x$ dan $\tan x = \cot x$ 4.2.5. Memodelkan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan trigonometri

Kompetensi Dasar (KD)	Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)
	bentuk kuadrat 4.2.6. Memodelkan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan trigonometri bentuk $a \cos x + b \sin x = c$

B. Kegiatan Pembelajaran

Kegiatan Pembelajaran 1:

Sudut dalam Satuan Derajat dan Radian serta Nilai Sudut Istimewa

Tujuan kegiatan pembelajaran

Melalui kegiatan pembelajaran 1, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan satuan sudut serta menentukan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan sudut istimewa secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Saat Anda duduk di kelas X, Anda sudah mempelajari mengenai satuan sudut dalam derajat maupun radian. Pada kesempatan kali ini, Anda akan kembali mengingat materi tersebut karena sangat erat kaitannya dengan materi utama yang akan Anda pelajari dalam pokok bahasan Persamaan Trigonometri.

Masih ingatkah Anda bahwa sudut dapat dinyatakan antara lain dalam satuan derajat dan radian. Ukuran sudut pusat untuk satu putaran penuh yaitu 360° . Coba Anda isi titik-titik berikut.

$$\frac{1}{4} \text{ putaran} = \dots^{\circ}$$

$$\frac{1}{2} \text{ putaran} = \dots^{\circ}$$

Sedangkan ukuran sudut pusat untuk satu putaran penuh dalam radian adalah 2π radian. Artinya, $360^{\circ} = 2\pi$ radian. Sehingga $180^{\circ} = \pi$ radian. Coba Anda isi titik-titik berikut.

$$60^{\circ} = \dots \pi \text{ radian}$$

$$90^{\circ} = \dots \pi \text{ radian}$$

Bagaimana jika sudutnya tidak tepat setengah atau seperempat putaran? Berikut ini langkah untuk mengubah satuan sudut dari derajat menjadi radian dan sebaliknya. Perhatikan uraian pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Contoh 1:

Nyatakan sudut berikut dalam satuan radian:

- a. 150°
- b. 210°

Penyelesaian:

- a. $150^{\circ} = 150^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{5\pi}{6}$ radian
- b. $210^{\circ} = 210^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{7\pi}{6}$ radian

Contoh 2:

Nyatakan sudut berikut dalam satuan derajat:

- a. $\frac{\pi}{2}$ radian
- b. $\frac{2}{3}\pi$ radian

Penyelesaian:

- a. $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = 90^{\circ}$
- b. $\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = 120^{\circ}$

Latihan 1

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Nyatakan sudut berikut dalam satuan radian.

1. 90°
2. 30°
3. -100°
4. -360°
5. -390°

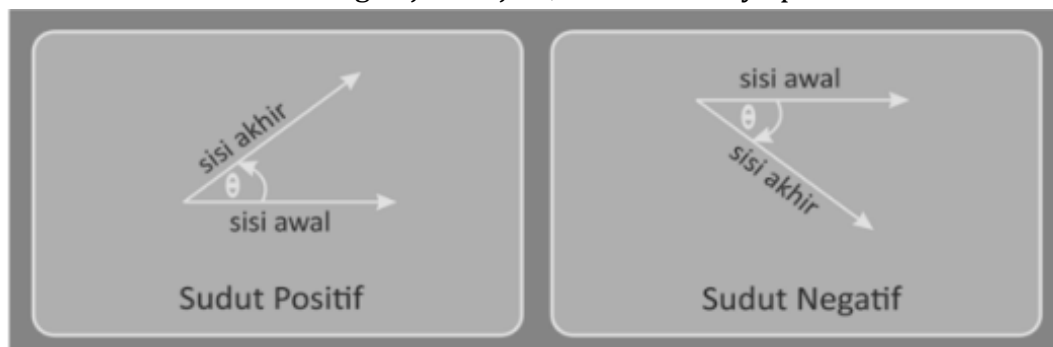
Nyatakan sudut berikut dalam satuan derajat.

6. $-\frac{\pi}{3}$ radian
7. $\frac{3\pi}{5}$ radian
8. $\frac{1}{4}\pi$ radian
9. $\frac{\pi}{6}$ radian
10. $-\frac{4\pi}{3}$ radian

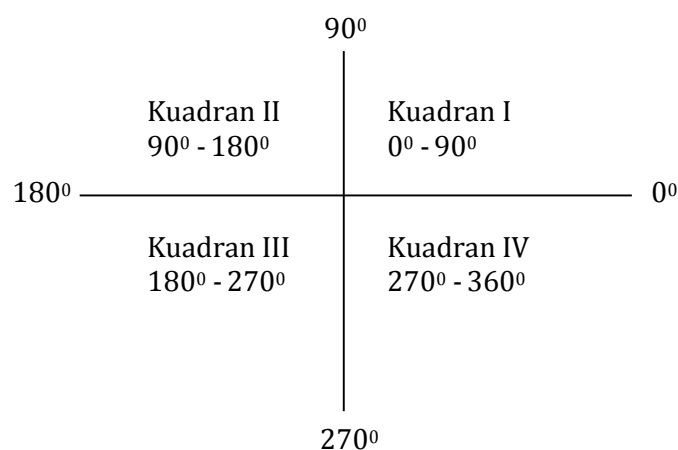
Kunci jawaban latihan 1

1. $\frac{1}{2}\pi$ radian
2. $\frac{1}{6}\pi$ radian
3. $-\frac{5}{9}\pi$ radian
4. -2π radian
5. $-\frac{13}{6}\pi$ radian
6. -60°
7. 108°
8. 45°
9. 30°
10. -240°

Barangkali Anda ada yang bertanya-tanya, apakah mungkin suatu sudut bernilai negatif? Perhatikan anak panah pada sudut teta (θ) di bawah ini. Apabila sudut searah dengan jarum jam, maka sudutnya negatif. Sebaliknya, apabila sudut berlawanan arah dengan jarum jam, maka sudutnya positif.



Pemahaman Anda perlu dimantapkan dengan mengingat kembali posisi sudut dalam kuadran.



Contoh soal & pembahasan

Tentukan letak sudut berikut dalam kuadran.

1. 30°
2. 120°
3. 245°
4. -30°
5. -330°
6. $-\frac{3}{4}\pi$
7. $\frac{5\pi}{4}$

Penyelesaian:

1. 30° di kuadran I
2. 120° di kuadran II
3. 245° di kuadran III
4. -30° di kuadran IV (sudutnya negatif, artinya ke bawah/ searah dengan jarum jam)
5. -330° di kuadran I (sudutnya negatif, artinya ke bawah/ searah dengan jarum jam)
6. $-\frac{3}{4}\pi = -\frac{3}{4}\pi \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = -135^{\circ}$ di kuadran III (sudutnya negatif, artinya ke bawah/ searah dengan jarum jam)
7. $\frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = 225^{\circ}$ di kuadran III

Latihan 2

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan letak kuadran sudut-sudut berikut ini.

1. 30°
2. 120°
3. -135°
4. 300°
5. 750°
6. $\frac{1}{4}\pi$
7. $\frac{1}{3}\pi$
8. $\frac{3}{4}\pi$
9. $-\frac{2}{3}\pi$
10. $-\frac{5}{4}\pi$



Kunci jawaban latihan 2

1. Kuadran I
2. Kuadran II
3. Kuadran III
4. Kuadran IV
5. Kuadran I
6. Kuadran I
7. Kuadran I
8. Kuadran II
9. Kuadran III
10. Kuadran II

Saat Anda duduk di kelas X, Anda sudah mempelajari mengenai nilai sudut istimewa. Anda akan kembali mengingat materi tersebut karena materi ini juga sangat erat kaitannya dengan materi utama yang akan Anda pelajari dalam pokok bahasan Persamaan Trigonometri.

Fungsi trigonometri meliputi $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, dan $\tan \alpha$. Selain itu, ada pula fungsi balikkannya, yaitu $\csc \alpha$, $\sec \alpha$, dan $\cot \alpha$. Ingatlah kembali materi berikut.

$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{de}{mi}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{sa}{mi}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{de}{sa}$$

Fungsi Balikan:

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \csc \alpha$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$$

$$\frac{1}{\tan \alpha} = \cot \alpha$$

Perlu Anda perhatikan nilai perbandingan trigonometri pada masing-masing kuadran.

a. Nilai trigonometri pada kuadran I

Titik $A(x, y)$ di kuadran I

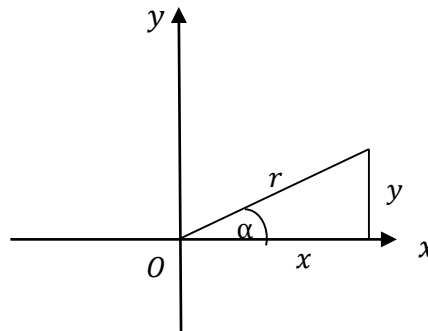
x = Absis positif

y = Ordinat positif

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{+}{+} \Rightarrow \text{positif}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{+}{+} \Rightarrow \text{positif}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{+}{+} \Rightarrow \text{positif}$$



b. Nilai trigonometri pada kuadran II

Titik $A(-x, y)$ di kuadran II

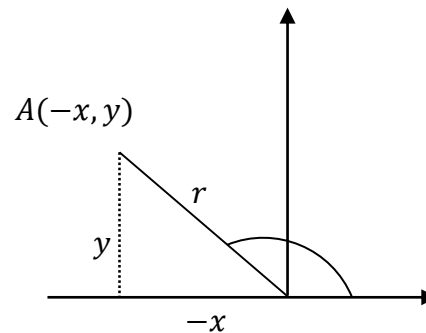
x = Absis negatif

y = Ordinat positif

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{+}{+} \Rightarrow \text{positif}$$

$$\cos \alpha = \frac{-x}{r} = \frac{-}{+} \Rightarrow \text{negatif}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{-x} = \frac{+}{-} \Rightarrow \text{negatif}$$



Dengan cara yang sama, coba Anda tentukan nilai trigonometri pada kuadran III & IV serta pada fungsi balikkannya. Isikan pada tabel di bawah ini.

	I	II	III	IV
Sin	+	+		
Cos	+	-		
Tan	+	-		
Csc				
Sec				
Cotg				

Selain nilai perbandingan trigonometri pada kuadran I sampai IV, Anda juga perlu mengingat kembali nilai-nilai sudut istimewa untuk masing-masing fungsi trigonometri. Coba isikan nilai-nilai sudut istimewa pada tabel berikut. Nilai-nilai ini harus Anda hafalkan.

	0°	30°	45°	60°	90°
<i>sin</i>					
<i>cos</i>					
<i>tan</i>					

Nilai-nilai sudut istimewa untuk fungsi balikan, tidak perlu Anda hafalkan. Anda dapat menentukan nilainya dengan mengikuti langkah pada contoh berikut. Namun jika Anda hafal, tentunya lebih baik.

Contoh soal & pembahasan

Contoh 1:

Tentukan nilai dari $\csc 30^{\circ}$!

Penyelesaian:

$$\csc 30^{\circ} = \frac{1}{\sin 30^{\circ}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Jadi, $\csc 30^{\circ} = 2$

Contoh 2:

Tentukan nilai dari $\cot 60^{\circ}$!

Penyelesaian:

$$\cot 60^{\circ} = \frac{1}{\tan 60^{\circ}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Selanjutnya, rasonalkan hasil tersebut.

$$\cot 60^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Jadi, $\cot 60^{\circ} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 1. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 3

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Isilah tabel berikut.

	0°	30°	45°	60°	90°
csc
sec
cot

Kunci jawaban latihan 3

	0°	30°	45°	60°	90°
csc	Tidak terdefinisi	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1
sec	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	Tidak terdefinisi
cot	Tidak terdefinisi	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Kegiatan Pembelajaran 2:**Tes Formatif 1 (Sudut dalam Satuan Derajat dan Radian serta Nilai Sudut Istimewa)****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Mengetahui penguasaan materi yang berkaitan dengan sudut dalam satuan derajat dan radian serta nilai sudut istimewa.

Untuk mengetahui penguasaan Anda terhadap materi ini, ikuti petunjuk berikut!

1. Bukalah google formulir dengan link :
<https://forms.gle/nbjSq8UM6wgienT7>
2. Bacalah petunjuknya dengan seksama

Kunci jawaban tes formatif 1

Kunci jawaban tes formatif 1 akan tampil setelah Anda memberikan jawaban pada setiap butir soal yang disajikan.

Umpan balik

Periksalah nilai tes formatif Anda. Tingkat penguasaan materi = nilai tes formatif.

Pengelompokan tingkat penguasaan materi:

93% - 100% : baik sekali

84% - 92% : baik

75% - 83% : cukup

< 75% : kurang

Apabila tingkat pemahaman Anda mencapai 75% atau lebih, Anda dapat melanjutkan dengan mempelajari materi pada kegiatan pembelajaran 3. Apabila

tingkat pemahaman Anda masih di bawah 75%, maka Anda harus mengulangi kembali materi kegiatan pembelajaran 1 (terutama bagian yang belum Anda kuasai).

Kegiatan Pembelajaran 3: Relasi Sudut pada Kuadran II

Tujuan kegiatan pembelajaran

Melalui kegiatan pembelajaran 3, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan relasi sudut pada kuadran II serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaannya secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Melalui kegiatan pembelajaran 3 sampai 6, Anda akan mempelajari nilai perbandingan trigonometri di berbagai kuadran. Pada kegiatan pembelajaran sebelumnya, Anda telah mempelajari nilai-nilai sudut pada kuadran I. Pada kegiatan pembelajaran ini, Anda akan mempelajari relasi sudut pada kuadran II.

Relasi sudut θ pada kuadran II dapat dituliskan sebagai $(180^\circ - \theta)$. Perhatikan relasi berikut.

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \theta) &= \sin \theta \\ \cos(180^\circ - \theta) &= -\cos \theta \\ \tan(180^\circ - \theta) &= -\tan \theta \\ \\ \csc(180^\circ - \theta) &= \csc \theta \\ \sec(180^\circ - \theta) &= -\sec \theta \\ \cot(180^\circ - \theta) &= -\cot \theta \end{aligned}$$

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai sudut pada kuadran II. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut!

Contoh 1:

Tentukan nilai dari $\cos 150^\circ$.

Penyelesaian:

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Contoh 2:

Tentukan nilai dari $\csc 120^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\csc 120^\circ &= \frac{1}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin(180^\circ - 60^\circ)} = \frac{1}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

Contoh 3:

Tentukan nilai dari $\tan 135^\circ$.

Penyelesaian:

$$\tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

Contoh 4:

Tentukan nilai dari $\sin \frac{3}{4}\pi$.

Penyelesaian:

$$\sin \frac{3}{4}\pi = \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Contoh 5:

Tentukan nilai dari $\cot \frac{5\pi}{6}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\cot \frac{5\pi}{6} &= \cot 150^\circ = \frac{1}{\tan 150^\circ} = \frac{1}{\tan(180^\circ - 30^\circ)} = \frac{-1}{\tan 30^\circ} \\ &= -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 3. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 4

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan nilai dari:

1. $\sin 135^\circ$
2. $\tan 120^\circ$
3. $\sec 135^\circ$

4. $\cot 135^\circ$
5. $\sin 180^\circ$
6. $\csc \frac{3\pi}{4}$
7. $\tan \frac{5\pi}{6}$
8. $\sec \frac{5\pi}{6}$
9. $\cos \frac{3\pi}{4}$
10. $\cos \pi$

Kunci jawaban latihan 4

1. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
2. $-\sqrt{3}$
3. $-\sqrt{2}$
4. -1
5. 0
6. $\sqrt{2}$
7. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
8. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
9. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
10. -1

Kegiatan Pembelajaran 4: Relasi Sudut pada Kuadran III**Tujuan kegiatan pembelajaran**

Melalui kegiatan pembelajaran 4, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan relasi sudut pada kuadran III serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaannya secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada kegiatan pembelajaran sebelumnya, Anda telah mempelajari nilai-nilai sudut pada kuadran II. Pada kegiatan pembelajaran 4 ini, Anda akan mempelajari relasi sudut pada kuadran III.

Relasi sudut θ pada kuadran III dapat dituliskan sebagai $(180^\circ + \theta)$. Perhatikan relasi berikut.

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ + \theta) &= -\sin \theta \\ \cos(180^\circ + \theta) &= -\cos \theta \\ \tan(180^\circ + \theta) &= \tan \theta \\ \\ \csc(180^\circ + \theta) &= -\csc \theta \\ \sec(180^\circ + \theta) &= -\sec \theta \\ \cot(180^\circ + \theta) &= \cot \theta \end{aligned}$$

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai sudut pada kuadran III. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut!

Contoh 1:

Tentukan nilai dari $\sin 240^\circ$.

Penyelesaian:

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Contoh 2:

Tentukan nilai dari $\cos 210^\circ$.

Penyelesaian:

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Contoh 3:

Tentukan nilai dari $\cot 210^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \cot 210^\circ &= \frac{1}{\tan 210^\circ} = \frac{1}{\tan(180^\circ + 30^\circ)} = \frac{1}{\tan 30^\circ} \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Contoh 4:

Tentukan nilai dari $\tan \frac{5\pi}{4}$.

Penyelesaian:

$$\tan \frac{5\pi}{4} = \tan 225^\circ = \tan (180^\circ + 45^\circ) = 1$$

Contoh 5:

Tentukan nilai dari $\sec \frac{7}{6}\pi$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\sec \frac{7}{6}\pi &= \sec 210^\circ = \frac{1}{\cos 210^\circ} = \frac{1}{\cos(180^\circ + 30^\circ)} = -\frac{1}{\cos 30^\circ} \\ &= -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 4. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 5

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan nilai dari:

1. $\sin 225^\circ$
2. $\cot 240^\circ$
3. $\cos 225^\circ$
4. $\tan 225^\circ$
5. $\operatorname{cosec} 270^\circ$
6. $\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{4}$
7. $\cot \frac{7\pi}{6}$
8. $\sin \frac{3\pi}{2}$
9. $\tan \frac{7\pi}{6}$
10. $\cos \frac{5\pi}{4}$

Kunci jawaban latihan 5

1. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
2. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
3. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
4. 1

5. -1
6. $-\sqrt{2}$
7. $\sqrt{3}$
8. -1
9. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
10. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Kegiatan Pembelajaran 5: Relasi sudut pada Kuadran IV

Tujuan kegiatan pembelajaran

Melalui kegiatan pembelajaran 5, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan relasi sudut pada kuadran IV serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaannya secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada kegiatan pembelajaran sebelumnya, Anda telah mempelajari nilai-nilai sudut pada kuadran II dan III. Pada kegiatan pembelajaran 5 ini, Anda akan mempelajari relasi sudut pada kuadran IV.

Relasi sudut θ pada kuadran IV dapat dituliskan sebagai $(360^\circ - \theta)$ dan $(-\theta)$. Perhatikan relasi berikut.

$$\begin{aligned}\sin(360^\circ - \theta) &= -\sin \theta \\ \cos(360^\circ - \theta) &= \cos \theta \\ \tan(360^\circ - \theta) &= -\tan \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\csc(360^\circ - \theta) &= -\csc \theta \\ \sec(360^\circ - \theta) &= \sec \theta \\ \cot(360^\circ - \theta) &= -\cot \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\csc(-\theta) &= -\csc \theta \\ \sec(-\theta) &= \sec \theta \\ \cot(-\theta) &= -\cot \theta\end{aligned}$$

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai sudut pada kuadran IV. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut !

Contoh 1:

Tentukan nilai dari $\sin 315^\circ$.

Penyelesaian:

$$\sin 315^\circ = \sin(360^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Contoh 2:

Tentukan nilai dari $\cos 330^\circ$.

Penyelesaian:

$$\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Contoh 3:

Tentukan nilai dari $\cot \frac{7}{4}\pi$.

Penyelesaian:

$$\cot \frac{7}{4}\pi = \cot 315^\circ = \frac{1}{\tan(360^\circ - 45^\circ)} = \frac{1}{-\tan 45^\circ} = \frac{1}{-1} = -1$$

Contoh 4:

Tentukan nilai dari $\sin(-45)^\circ$.

Penyelesaian:

$$\sin(-45)^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Contoh 5:

Tentukan nilai dari $\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$

Penyelesaian:

$$\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \cos(-30)^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Contoh 6:

Tentukan nilai dari $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Penyelesaian:

$$\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cot(-45^\circ) = \frac{1}{\tan(-45^\circ)} = \frac{1}{-\tan 45^\circ} = \frac{1}{-1} = -1$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 5. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 6

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan nilai dari:

1. $\cos 315^{\circ}$
2. $\tan 300^{\circ}$
3. $\operatorname{cosec} 315^{\circ}$
4. $\sin 330^{\circ}$
5. $\cot 315^{\circ}$
6. $\tan(-45)^{\circ}$
7. $\sec \frac{7\pi}{4}$
8. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
9. $\operatorname{csc}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
10. $\cos(-30)^{\circ}$

Kunci jawaban latihan 6

1. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
2. $-\sqrt{3}$
3. $-\sqrt{2}$
4. $-\frac{1}{2}$
5. -1
6. -1
7. $\sqrt{2}$
8. $-\frac{1}{2}$
9. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
10. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Kegiatan Pembelajaran 6: Relasi sudut pada Sudut yang lebih dari 360° **Tujuan kegiatan pembelajaran**

Melalui kegiatan pembelajaran 6, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan relasi sudut pada sudut yang lebih dari 360° serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaannya secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada kegiatan pembelajaran sebelumnya, Anda telah mempelajari nilai-nilai sudut pada kuadran II, III, dan IV. Pada kegiatan pembelajaran 6 ini, Anda akan mempelajari relasi sudut pada sudut yang lebih dari 360^0 . Dalam hal ini termasuk sudut negatif yang kurang dari 360^0 .

Relasi sudut θ pada sudut yang lebih dari 360^0 dapat dituliskan sebagai $(\theta + k \cdot 360^0)$. Perhatikan relasi berikut.

$$\sin(\theta + k \cdot 360^0) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + k \cdot 360^0) = \cos \theta$$

$$\tan(\theta + k \cdot 360^0) = \tan \theta$$

$$\csc(\theta + k \cdot 360^0) = \csc \theta$$

$$\sec(\theta + k \cdot 360^0) = \sec \theta$$

$$\cot(\theta + k \cdot 360^0) = \cot \theta$$

Keterangan: $k \in$ bilangan bulat. k adalah banyaknya putaran

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai sudut pada kuadran IV. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut!

Contoh 1:

Tentukan nilai dari $\sin 390^0$.

Penyelesaian:

$$\sin 390^0 = \sin(30^0 + 1 \cdot 360^0) = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$$

Contoh 2:

Tentukan nilai dari $\sec 780^0$.

Penyelesaian:

$$\sec 780^0 = \sec(60^0 + 2 \cdot 360^0) = \sec 60^0 = \frac{1}{\cos 60^0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Contoh 3:

Tentukan nilai dari $\tan(-405^\circ)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\tan(-405^\circ) &= \tan(-45^\circ + (-1)(360^\circ)) \Rightarrow \text{Artinya, sudut berputar } 1 \text{ putaran lebih } 45^\circ \\ &= \tan(-45^\circ) \text{ dengan putaran searah dengan jarum jam} \\ &= -\tan 45^\circ \\ &= -1\end{aligned}$$

Contoh 4:

Tentukan nilai dari $\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) &= \cos(-750^\circ) \\ &= \cos(-30^\circ + (-2)(360^\circ)) \Rightarrow \text{Artinya, sudut berputar } 2 \text{ putaran lebih } 30^\circ \\ &= \cos(-30^\circ) \text{ dengan putaran searah dengan jarum jam} \\ &= \cos 30^\circ \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 6. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 7

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan nilai dari:

1. $\cos 720^\circ$
2. $\tan 780^\circ$
3. $\csc 570^\circ$
4. $\sin 480^\circ$
5. $\sec 420^\circ$
6. $\cos \frac{7\pi}{2}$
7. $\cot \frac{7\pi}{3}$
8. $\tan \frac{8\pi}{3}$
9. $\sin \frac{7\pi}{2}$
10. $\sec \frac{9\pi}{4}$

Kunci jawaban latihan 7

1. 1
2. $\sqrt{3}$
3. -2
4. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
5. 2
6. 0
7. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
8. $-\sqrt{3}$
9. -1
10. $\sqrt{2}$

Kegiatan Pembelajaran 7:

Tes Formatif 2 (Nilai Sudut Berelasi di Berbagai Kuadran)

Tujuan kegiatan pembelajaran

Mengetahui penguasaan materi yang berkaitan dengan nilai sudut berelasi di berbagai kuadran.

Kesimpulan nilai sudut berelasi di berbagai kuadran:

<p>Kuadran II : Relasi θ dengan $(180^\circ - \theta)$ $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$ $\csc(180^\circ - \theta) = \csc \theta$ $\sec(180^\circ - \theta) = -\sec \theta$ $\cot(180^\circ - \theta) = -\cot \theta$</p>	<p>Kuadran I : $\sin \theta = \sin \theta$ $\cos \theta = \cos \theta$ $\tan \theta = \tan \theta$ $\csc \theta = \csc \theta$ $\sec \theta = \sec \theta$ $\cot \theta = \cot \theta$</p>	
<p>Kuadran III : Relasi θ dengan $(180^\circ + \theta)$ $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$ $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$ $\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$ $\csc(180^\circ + \theta) = -\csc \theta$ $\sec(180^\circ + \theta) = -\sec \theta$ $\cot(180^\circ + \theta) = \cot \theta$</p>	<p>Kuadran IV: Relasi θ dengan $(360^\circ - \theta)$ $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$ $\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$ $\tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$ $\csc(360^\circ - \theta) = -\csc \theta$ $\sec(360^\circ - \theta) = \sec \theta$ $\cot(360^\circ - \theta) = -\cot \theta$</p>	<p>Relasi θ dengan $(-\theta)$ $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ $\csc(-\theta) = -\csc \theta$ $\sec(-\theta) = \sec \theta$ $\cot(-\theta) = -\cot \theta$</p>

Untuk mengetahui penguasaan Anda terhadap materi ini, ikuti petunjuk berikut!

1. Bukalah google formulir dengan link:
<https://forms.gle/Qdmse2rg77s7UWxq9>
2. Bacalah petunjuknya dengan seksama

Kunci jawaban tes formatif 2

Kunci jawaban tes formatif 2 akan tampil setelah Anda memberikan jawaban pada setiap butir soal yang disajikan.

Umpan balik

Periksalah nilai tes formatif Anda. Tingkat penguasaan materi = nilai tes formatif.

Pengelompokan tingkat penguasaan materi:

93% - 100% : baik sekali

84% - 92% : baik

75% - 83% : cukup

< 75% : kurang

Apabila tingkat pemahaman Anda mencapai 75% atau lebih, Anda dapat melanjutkan dengan mempelajari materi pada kegiatan pembelajaran 8. Apabila tingkat pemahaman Anda masih di bawah 75%, maka Anda harus mengulangi kembali materi kegiatan pembelajaran 3 sampai 6 (terutama bagian yang belum Anda kuasai).

Kegiatan Pembelajaran 8: Persamaan Trigonometri Sederhana

Tujuan kegiatan pembelajaran

Melalui kegiatan pembelajaran 8, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan persamaan trigonometri sederhana serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada kegiatan pembelajaran sebelumnya, Anda telah mempelajari nilai-nilai sudut berelasi di berbagai kuadran. Pada kegiatan pembelajaran 8 ini, Anda akan

mempelajari persamaan trigonometri sederhana yang sangat erat kaitannya dengan materi sebelumnya.

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang mengandung fungsi trigonometri. Menyelesaikan persamaan trigonometri berarti menentukan **seluruh** nilai sudut sehingga persamaan tersebut bernilai benar untuk daerah asal tertentu. Maka, Anda perlu mengingat relasi sudut di berbagai kuadran. Misalkan α adalah sudut di kuadran I maka relasi sudut di kuadran yang lain adalah sebagai berikut.

- ❖ Pada kuadran I berlaku α
- ❖ Pada kuadran II berlaku $180^\circ - \alpha$
- ❖ Pada kuadran III berlaku $180^\circ + \alpha$
- ❖ Pada kuadran IV berlaku $-\alpha$ atau $360^\circ - \alpha$

Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh soal & pembahasan

Contoh 1:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sin x = \frac{1}{2}$ dalam interval $0^\circ < x < 360^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \sin x = \frac{1}{2} &\Rightarrow \sin \text{ bernilai positif pada kuadran I \& II} \\ &\Rightarrow \sin \text{ bernilai } \frac{1}{2} \text{ pada sudut } 30^\circ \end{aligned}$$

Di kuadran I:	Atau	Di kuadran II:
$x = 30^\circ$		$x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{30^\circ, 150^\circ\}$.

Contoh 2:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\cos x = -\frac{1}{2}$ dalam interval $0 < x < 2\pi$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \cos x = -\frac{1}{2} &\Rightarrow \cos \text{ bernilai negatif pada kuadran II \& III} \\ &\Rightarrow \cos \text{ bernilai } \frac{1}{2} \text{ pada sudut } 60^\circ \end{aligned}$$

Di kuadran II:	Atau	Di kuadran III:
$x = 180^\circ - 60^\circ$		$x = 180^\circ + 60^\circ$
$= 120^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$		$= 240^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$
$= \frac{2}{3}\pi$		$= \frac{4}{3}\pi$

Sudut boleh diubah ke bentuk radian di bagian akhir

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right\}$.

Contoh 3:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $2 \cdot \cos x = 1$ dalam interval $0 < x < \pi$.

Penyelesaian:

$$2 \cdot \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \text{ bernilai positif pada kuadran I \& IV}$$

$$\Rightarrow \cos \text{ bernilai } \frac{1}{2} \text{ pada sudut } 60^\circ = \frac{1}{3}\pi \rightarrow$$

Sudut boleh diubah ke bentuk radian di bagian awal

Di kuadran I: Atau Di kuadran IV:

$$x = \frac{1}{3}\pi$$

$$x = -\frac{1}{3}\pi \text{ (TM)}$$

Tidak ada nilai x yang memenuhi karena interval yang diminta soal adalah $0 < x < \pi$ (kuadran I dan II).

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{1}{3}\pi\right\}$.

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 8. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 8

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini!

Tentukan penyelesaian dari persamaan trigonometri berikut!

1. $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dalam interval $0^\circ < x < 360^\circ$
2. $\cos x = -\frac{1}{2}$ dalam interval $0^\circ < x \leq 360^\circ$
3. $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dalam interval $0 < x < \pi$
4. $\sin x = -1$ dalam interval $0 < x \leq 2\pi$
5. $\cot x - \sqrt{3} = 0$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
6. $3 \tan x = -\sqrt{3}$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
7. $3 \sec x + 2\sqrt{3} = 0$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
8. $\operatorname{cosec} x - 2 = 0$ dalam interval $0 \leq x \leq 2\pi$
9. $3 \cot x = \sqrt{3}$ dalam interval $0 \leq x \leq 2\pi$
10. $3 \operatorname{cosec} x + 2\sqrt{3} = 0$ dalam interval $0 \leq x \leq \pi$

Kunci jawaban latihan 8

1. $x \in \{45^\circ, 135^\circ\}$
2. $x \in \{120^\circ, 240^\circ\}$
3. $x \in \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$
4. $x \in \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

5. $x \in \{30^{\circ}, 210^{\circ}\}$
6. $x \in \{150^{\circ}, 330^{\circ}\}$
7. $x \in \{150^{\circ}, 210^{\circ}\}$
8. $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
9. $x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$
10. $x \in \{ \}$ dengan kata lain tidak ada nilai x yang memenuhi persamaan tersebut

Kegiatan Pembelajaran 9: Penyelesaian Umum Persamaan Trigonometri

Tujuan kegiatan pembelajaran

Melalui kegiatan pembelajaran 9, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian umum persamaan trigonometri serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada kegiatan pembelajaran sebelumnya, Anda telah mempelajari persamaan trigonometri sederhana. Pada kegiatan pembelajaran 9 ini, Anda akan mempelajari persamaan trigonometri bentuk umum yang sangat erat kaitannya dengan materi sebelumnya.

Secara umum, untuk menyelesaikan persamaan trigonometri digunakan rumus:

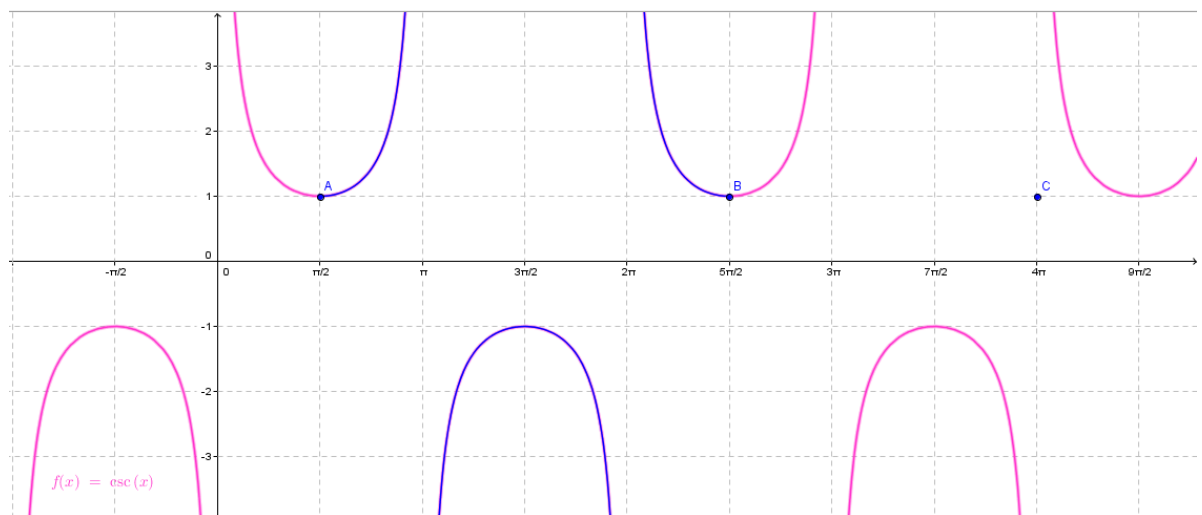
1. $\sin x = \sin \alpha$ atau $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} \alpha$
Penyelesaian dalam satuan derajat: $x = \alpha + k \cdot 360^{\circ}$
atau $x = (180^{\circ} - \alpha) + k \cdot 360^{\circ}$
Penyelesaian dalam satuan radian: $x = \alpha + k \cdot 2\pi$
atau $x = (\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi$
2. $\cos x = \cos \alpha$ atau $\sec x = \sec \alpha$
Penyelesaian dalam satuan derajat: $x = \alpha + k \cdot 360^{\circ}$
atau $x = -\alpha + k \cdot 360^{\circ}$
Penyelesaian dalam satuan radian: $x = \alpha + k \cdot 2\pi$ atau $x = -\alpha + k \cdot 2\pi$
3. $\tan x = \tan \alpha$ atau $\cot x = \cot \alpha$
Penyelesaian dalam satuan derajat: $x = \alpha + k \cdot 180^{\circ}$
Penyelesaian dalam satuan radian: $x = \alpha + k \cdot \pi$

Sebelum membahas materi lebih lanjut, sangat penting bagi Anda untuk memperhatikan periode masing-masing fungsi. Apakah Anda tau yang dimaksud dengan periode? Periode adalah panjang interval sudut sedemikian sehingga bagian kurva berulang. Satu periode terdiri dari satu bukit dan satu lembah. Dari manakah periode ini diperoleh? Perhatikan grafik fungsi sinus, cosinus, dan tangen berikut.

1. Grafik fungsi sinus

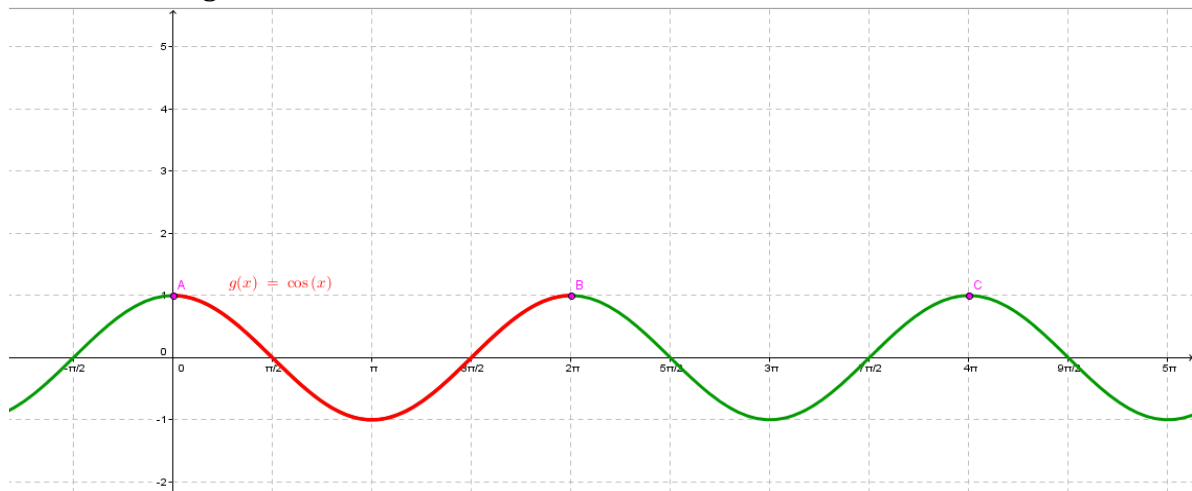


Grafik di atas menunjukkan bahwa bagian kurva (dalam hal ini fungsi $y = \sin x$) berulang dari titik A sampai titik B, yaitu pada interval $0 \leq x \leq 2\pi$. Jika dilanjutkan dengan sudut lebih dari 2π atau kurang dari 0, maka nilai kurvanya akan berulang. Dengan kata lain, **periode fungsi $\sin x$ adalah 2π atau 360°** .

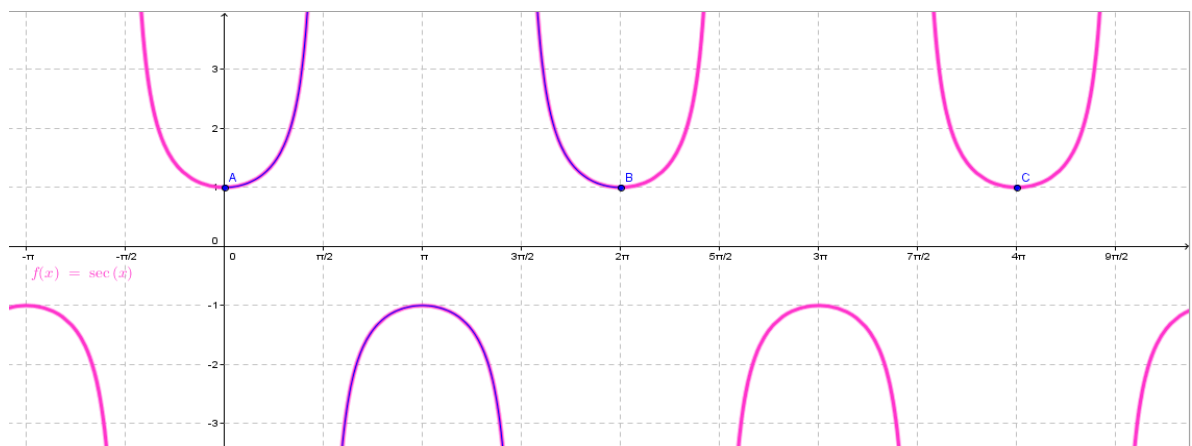


Grafik di atas menunjukkan bahwa bagian kurva (dalam hal ini fungsi $y = \csc x$) berulang dari titik A sampai titik B, yaitu pada interval $0 \leq x \leq 2\pi$. Jika dilanjutkan dengan sudut lebih dari 2π atau kurang dari 0, maka nilai kurvanya akan berulang. Dengan kata lain, **periode fungsi \csc adalah 2π atau 360°** .

2. Grafik fungsi cosinus

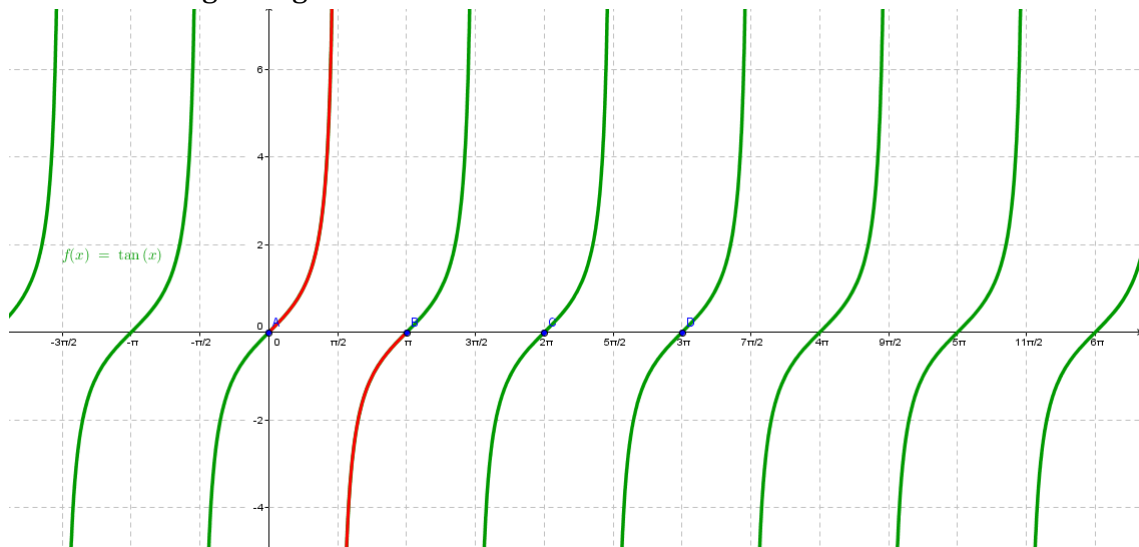


Grafik di atas menunjukkan bahwa bagian kurva (dalam hal ini fungsi $y = \cos x$) berulang dari titik A sampai titik B, yaitu pada interval $0 \leq x \leq 2\pi$. Jika dilanjutkan dengan sudut lebih dari 2π atau kurang dari 0, maka nilai kurvanya akan berulang. Dengan kata lain, **periode fungsi $\cos x$ adalah 2π atau 360°** .

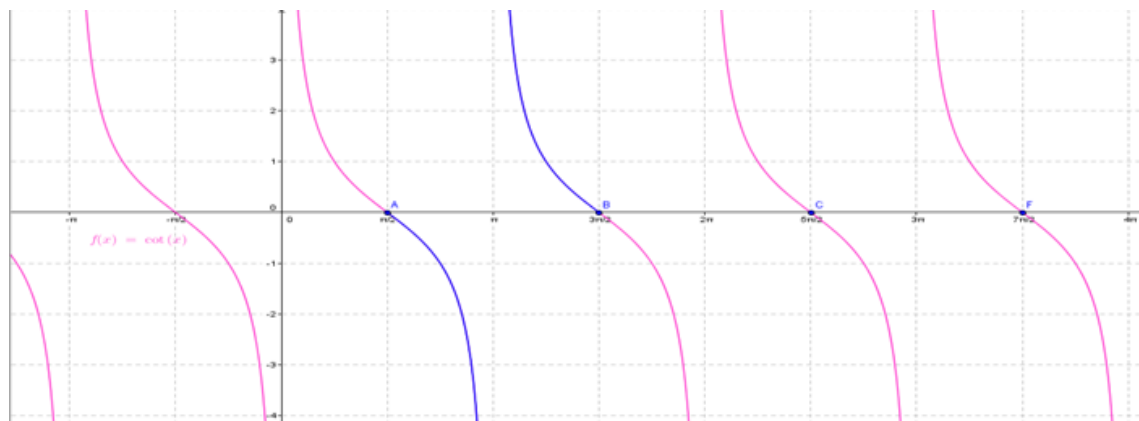


Grafik di atas menunjukkan bahwa bagian kurva (dalam hal ini fungsi $y = \sec x$) berulang dari titik A sampai titik B, yaitu pada interval $0 \leq x \leq 2\pi$. Jika dilanjutkan dengan sudut lebih dari 2π atau kurang dari 0, maka nilai kurvanya akan berulang. Dengan kata lain, **periode fungsi $\sec x$ adalah 2π atau 360°** .

3. Grafik fungsi tangen



Grafik di atas menunjukkan bahwa bagian kurva (dalam hal ini fungsi $y = \tan x$) berulang dari titik A sampai titik B, yaitu pada interval $0 \leq x \leq \pi$. Jika dilanjutkan dengan sudut lebih dari π atau kurang dari 0, maka nilai kurvanya akan berulang. Dengan kata lain, **periode fungsi $\tan x$ adalah π atau 180°** .



Grafik di atas menunjukkan bahwa bagian kurva (dalam hal ini fungsi $y = \cot x$) berulang dari titik A sampai titik B, yaitu pada interval $0 \leq x \leq \pi$. Jika dilanjutkan dengan sudut lebih dari π atau kurang dari 0, maka nilai kurvanya akan berulang. Dengan kata lain, **periode fungsi $\cot x$ adalah π atau 180°** .

Jika Anda masih bertanya-tanya tentang cara menggambar grafik di atas, simaklah langkah menggambar grafik fungsi trigonometri pada tautan <https://www.youtube.com/watch?v=tzXkForXcA0>.

Kembali ke materi penyelesaian umum persamaan trigonometri, Anda perlu memperhatikan hal-hal berikut.

1. Pastikan persamaan yang Anda selesaikan sudah memenuhi bentuk umum persamaan trigonometri, yaitu $\sin x = \sin \alpha$, $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} \alpha$, $\cos x = \cos \alpha$, $\sec x = \sec \alpha$, $\tan x = \tan \alpha$ atau $\cot x = \cot \alpha$.
2. Pastikan himpunan penyelesaian yang Anda temukan memenuhi interval pada soal.
3. Pastikan satuan sudut yang Anda gunakan sesuai dengan satuan sudut pada soal.

Contoh soal & pembahasan

Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 1:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ dalam interval $0^\circ < x < 360^\circ$.

Penyelesaian:

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin \text{ bernilai } \frac{1}{2} \text{ pada sudut } 30^\circ$$

Maka persamaannya menjadi:

$$\sin x = -\sin 30^\circ$$

Mengingat relasi sudut pada kuadran IV yaitu $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \sin 2x &= -\sin 30^\circ \\ \Leftrightarrow \sin 2x &= \sin(-30^\circ) \end{aligned}$$

Sudut ini bersesuaian dengan relasi sudut pada kuadran III yaitu $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$ dan relasi sudut pada kuadran IV yaitu $\sin(-\theta) = -\sin \theta$. Anda dapat memilih salah satu untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Pada uraian ini, penyelesaian ditentukan menggunakan relasi sudut pada kuadran IV.

Maka penyelesaiannya:

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \sin(-30^\circ) \\ \Leftrightarrow 2x &= -30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ \Leftrightarrow x &= -15^\circ + k \cdot 180^\circ \\ \text{Untuk } k = 0 &\Rightarrow x = -15^\circ \text{ (TM)} \\ \text{Untuk } k = 1 &\Rightarrow x = 165^\circ \\ \text{Untuk } k = 2 &\Rightarrow x = 345^\circ \\ \text{Untuk } k = 3 &\Rightarrow x = 525^\circ \text{ (TM)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Atau } \sin 2x &= \sin(-30^\circ) \\ \Leftrightarrow 2x &= (180^\circ - (-30^\circ)) + k \cdot 360^\circ \\ \Leftrightarrow 2x &= 210^\circ + k \cdot 360^\circ \\ \Leftrightarrow x &= 105^\circ + k \cdot 180^\circ \\ \text{Untuk } k = 0 &\Rightarrow x = 105^\circ \\ \text{Untuk } k = 1 &\Rightarrow x = 285^\circ \\ \text{Untuk } k = 2 &\Rightarrow x = 465^\circ \text{ (TM)} \\ \text{Untuk } k = -1 &\Rightarrow x = -75^\circ \text{ (TM)} \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{105^\circ, 165^\circ, 285^\circ, 345^\circ\}$.

Contoh 2:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\cos(4x + 10^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dalam interval $0^\circ < x < 360^\circ$.

Penyelesaian:

$$\cos(4x + 10^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \cos \text{ bernilai } \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ pada sudut } 30^\circ$$

Maka persamaannya menjadi:

$$\cos(4x + 10^\circ) = -\cos 30^\circ$$

Mengingat relasi sudut pada kuadran II yaitu $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$, maka diperoleh:

$$\cos(4x + 10^\circ) = -\cos 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \cos(4x + 10^\circ) = \cos(180^\circ - 30^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \cos(4x + 10^\circ) = \cos 150^\circ$$

Sudut ini bersesuaian dengan relasi sudut pada kuadran II yaitu $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ dan relasi sudut pada kuadran III yaitu $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$. Anda dapat memilih salah satu untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Pada uraian ini, penyelesaian ditentukan menggunakan relasi sudut pada kuadran II.

Maka penyelesaiannya:

$$\cos(4x + 10^\circ) = \cos 150^\circ$$

$$\Leftrightarrow 4x + 10^\circ = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow 4x = 140^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 35^\circ + k \cdot 90^\circ$$

Untuk $k = 0 \Rightarrow x = 35^\circ$

Untuk $k = 1 \Rightarrow x = 125^\circ$

Untuk $k = 2 \Rightarrow x = 215^\circ$

Untuk $k = 3 \Rightarrow x = 305^\circ$

Untuk $k = 4 \Rightarrow x = 395^\circ$ (TM)

Untuk $k = -1 \Rightarrow x = -55^\circ$ (TM)

Atau $\cos(4x + 10^\circ) = \cos 150^\circ$

$$\Leftrightarrow 4x + 10^\circ = -150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow 4x = -160^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = -40^\circ + k \cdot 90^\circ$$

Untuk $k = 0 \Rightarrow x = -40^\circ$ (TM)

Untuk $k = 1 \Rightarrow x = 50^\circ$

Untuk $k = 2 \Rightarrow x = 140^\circ$

Untuk $k = 3 \Rightarrow x = 230^\circ$

Untuk $k = 4 \Rightarrow x = 320^\circ$

Untuk $k = 5 \Rightarrow x = 410^\circ$ (TM)

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{35^\circ, 50^\circ, 125^\circ, 140^\circ, 215^\circ, 230^\circ, 305^\circ, 320^\circ\}$.

Contoh 3:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\tan\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) + \sqrt{3} = 0$ dalam interval $0 < x < \pi$.

Penyelesaian:

$$\tan\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) = -\sqrt{3} \Rightarrow \tan \text{ bernilai } \sqrt{3} \text{ pada sudut } 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

Maka persamaannya menjadi:

$$\tan\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) = -\tan\frac{\pi}{3}$$

Mengingat relasi sudut pada kuadran II yaitu $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$, maka diperoleh:

$$\tan\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) = -\tan\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) = \tan\frac{2\pi}{3}$$

Maka penyelesaiannya:

$$\tan\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{9} + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{6\pi - \pi}{9} + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{9} + k \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{18} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{18} + k \cdot \frac{9\pi}{18}$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{18}\pi$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow x = \frac{14}{18}\pi = \frac{7}{9}\pi$$

$$\text{Untuk } k = 2 \Rightarrow x = \frac{23}{18}\pi \text{ (TM)}$$

$$\text{Untuk } k = -1 \Rightarrow x = -\frac{4}{18}\pi = -\frac{2}{9}\pi \text{ (TM)}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{5}{18}\pi, \frac{7}{9}\pi\right\}$.

Sudut ini bersesuaian dengan relasi sudut pada kuadran II yaitu $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$ dan relasi sudut pada kuadran IV yaitu $\tan(-\theta) = -\tan \theta$. Anda dapat memilih salah satu untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Pada uraian ini, penyelesaian ditentukan menggunakan relasi sudut pada kuadran II.

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 9. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 9

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri berikut ini.

1. $\sin 2x = \frac{1}{2}$ dalam interval $0^\circ < x < 360^\circ$
2. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ dalam interval $0^\circ < x \leq 360^\circ$
3. $\cos 3x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dalam interval $0 \leq x \leq \pi$
4. $3 \tan 2x - \sqrt{3} = 0$ dalam interval $0 < x < \pi$
5. $2 \sin 2x = \sqrt{3}$ dalam interval $0 < x < 2\pi$
6. $\cos(2x - 80^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
7. $\tan(3x - \frac{5}{6}\pi) = 1$ dalam interval $0 < x \leq \pi$
8. $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dalam interval $0 < x \leq \pi$
9. $2 \cos(x + 10^\circ) - \sqrt{3} = 0$ dalam interval $0^\circ < x < 360^\circ$
10. $5 \sin(2x + 10^\circ) + 5 = 0$ dalam interval $0^\circ < x < 180^\circ$

Kunci jawaban latihan 9

1. $\{15^\circ, 75^\circ, 195^\circ, 255^\circ\}$
2. $\{60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ\}$
3. $\{\frac{5}{18}\pi, \frac{7}{18}\pi, \frac{17}{18}\pi\}$
4. $\{\frac{1}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi\}$
5. $\{\frac{1}{6}\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi\}$
6. $\{25^\circ, 55^\circ, 205^\circ, 235^\circ\}$
7. $\{\frac{13}{36}\pi, \frac{25}{36}\pi, \frac{1}{36}\pi\}$
8. $\{ \}$
9. $\{\frac{1}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi\}$
10. $\{130^\circ\}$

Kegiatan Pembelajaran 10:**Tes Formatif 3 (Persamaan Trigonometri Sederhana & Bentuk Umum)****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Mengetahui penguasaan materi yang berkaitan dengan persamaan trigonometri sederhana & bentuk umum.

Untuk mengetahui penguasaan Anda terhadap materi ini, ikuti petunjuk berikut!

1. Bukalah google formulir dengan link:
<https://forms.gle/h9sV5NaAsvueo6GR9>
2. Bacalah petunjuknya dengan seksama

Kunci jawaban tes formatif 3

Kunci jawaban tes formatif 3 akan tampil setelah Anda memberikan jawaban pada setiap butir soal yang disajikan.

Umpan balik

Periksalah nilai tes formatif Anda. Tingkat penguasaan materi = nilai tes formatif.

Pengelompokan tingkat penguasaan materi:

93% - 100% : baik sekali

84% - 92% : baik

75% - 83% : cukup

< 75% : kurang

Apabila tingkat pemahaman Anda mencapai 75% atau lebih, Anda dapat melanjutkan dengan mempelajari materi pada kegiatan pembelajaran 11. Apabila tingkat pemahaman Anda masih di bawah 75%, maka Anda harus mengulangi kembali materi kegiatan pembelajaran 8 dan 9 (terutama bagian yang belum Anda kuasai).

Kegiatan Pembelajaran 11: *Persamaan Trigonometri Bentuk $a \sin x + b \cos x$*

Tujuan kegiatan pembelajaran

Melalui kegiatan pembelajaran 11, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan persamaan trigonometri bentuk $a \sin x + b \cos x$ serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada kegiatan pembelajaran 11, Anda akan mempelajari persamaan trigonometri bentuk $a \sin x + b \cos x$. Langkah penyelesaiannya sedikit berbeda dengan persamaan trigonometri sebelumnya. Bentuk persamaan ini tidak dapat

langsung diselesaikan dengan rumus umum penyelesaian persamaan trigonometri.

Perhatikan rumus di bawah ini.

$$a \sin x + b \cos x = k \cos(x - \alpha)$$

Dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\tan \alpha = \frac{\text{koefisien } \sin x}{\text{koefisien } \cos x} = \frac{a}{b}$$

Keterangan:

$a = \sin x$	$b = \cos x$	Letak α
+	+	I
+	-	II
-	-	III
-	+	IV

Langkah-langkah penyelesaian persamaan trigonometri bentuk $a \sin x + b \cos x$ adalah sebagai berikut.

1. Tentukan nilai k .
2. Tentukan nilai $\tan \alpha$ dan besar sudut α .
3. Buatlah persamaan bentuk $k \cos(x - \alpha)$ dan selesaikan.

Perhatikan uraian langkah penyelesaian persamaan trigonometri berikut untuk dapat lebih memahami materi di atas.

Contoh soal & pembahasan

Contoh 1:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $-\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

Penyelesaian:

$$-\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow a = -1, b = \sqrt{3}$$

Langkah 1: Tentukan nilai k .

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

Langkah 2: Tentukan nilai $\tan \alpha$ dan besar sudut α .

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 330^\circ \text{ karena } \alpha \text{ di kuadran IV}$$

Langkah 3: Buatlah persamaan bentuk $k \cos(x - \alpha)$ dan selesaikan.

$$\begin{aligned} -\sin x + \sqrt{3} \cos x &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow 2 \cos(x - 330^\circ) &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - 330^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \text{ bernilai } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ pada sudut } 45^\circ$$

Maka persamaannya menjadi:

$$\cos(x - 330^\circ) = \cos 45^\circ$$

Maka penyelesaiannya:

$$\cos(x - 330^\circ) = \cos 45^\circ$$

$$\text{Atau } \cos(x - 330^\circ) = \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow x - 330^\circ = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x - 330^\circ = -45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 375^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 285^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow x = 375^\circ \text{ (TM)}$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow x = 285^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow x = 735^\circ \text{ (TM)}$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow x = 645^\circ \text{ (TM)}$$

$$\text{Untuk } k = -1 \Rightarrow x = 15^\circ$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{15^\circ, 285^\circ\}$.

Contoh 2:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $-\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

Penyelesaian:

$$-\cos x + \sin x = \sqrt{2} \Rightarrow a = 1, b = -1$$

Langkah 1: Tentukan nilai k .

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Langkah 2: Tentukan nilai $\tan \alpha$ dan besar sudut α .

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ \text{ karena } \alpha \text{ di kuadran II}$$

Langkah 3: Buatlah persamaan bentuk $k \cos(x - \alpha)$ dan selesaikan.

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos(x - 135^\circ) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - 135^\circ) = 1 \Rightarrow \cos \text{ bernilai } 1 \text{ pada sudut } 0^\circ$$

Maka persamaannya menjadi:

$$\cos(x - 135^\circ) = \cos 0^\circ$$

Maka penyelesaiannya:

$$\cos(x - 135^\circ) = \cos 0^\circ$$

$$\text{Atau } \cos(x - 135^\circ) = \cos 0^\circ$$

$$\Leftrightarrow x - 135^\circ = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x - 135^\circ = -0^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 135^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 135^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow x = 135^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow x = 135^\circ$$

$$= 135^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3}{4}\pi$$

$$= 135^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow x = 495^\circ \text{ (TM)}$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow x = 495^\circ \text{ (TM)}$$

$$\text{Untuk } k = -1 \Rightarrow x = -225^\circ \text{ (TM)}$$

$$\text{Untuk } k = -1 \Rightarrow x = -225^\circ \text{ (TM)}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{3}{4}\pi\right\}$.

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 11. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 10

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan himpunan penyelesaian (HP) dari persamaan trigonometri:

1. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ dalam interval $0 < x < 2\pi$
2. $\sqrt{6} \sin x = 2 - \sqrt{2} \cos x$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
3. $3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = 3$ dalam interval $0^\circ < x < 360^\circ$
4. $\cos x + \sqrt{3} \sin x - 1 = 0$ dalam interval $0 < x \leq 2\pi$
5. $\cos 3x = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sin 3x$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

Kunci jawaban latihan 10

1. $HP = \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$
2. $HP = \{15^\circ, 105^\circ\}$
3. $HP = \{60^\circ\}$
4. $HP = \left\{ \frac{2\pi}{3}, 2\pi \right\}$
5. $HP = \{35^\circ, 115^\circ, 155^\circ, 235^\circ, 275^\circ, 355^\circ\}$

Kegiatan Pembelajaran 12:

Persamaan Trigonometri Bentuk Khusus (bagian 1)

Tujuan kegiatan pembelajaran

Melalui kegiatan pembelajaran 12, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan persamaan trigonometri bentuk $\sin x = \cos x$ dan $\tan x = \cot x$ serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Persamaan trigonometri bentuk khusus ini meliputi beberapa bentuk persamaan. Pada kegiatan pembelajaran 12 ini, Anda akan mempelajari persamaan trigonometri bentuk $\sin x = \cos x$ dan $\tan x = \cot x$.

Persamaan nilai *sin* dengan *cos* dan *tan* dengan *cot* sangat erat kaitannya dengan kesamaan berikut.

<p>Kuadran II : Relasi θ dengan $(90^\circ + \theta)$ $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$ $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$ $\tan(90^\circ + \theta) = -\cot \theta$ $\csc(90^\circ + \theta) = \sec \theta$ $\sec(90^\circ + \theta) = -\csc \theta$ $\cot(90^\circ + \theta) = -\tan \theta$</p>	<p>Kuadran I : Relasi θ dengan $(90^\circ - \theta)$ $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ $\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$ $\csc(90^\circ - \theta) = \sec \theta$ $\sec(90^\circ - \theta) = \csc \theta$ $\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$</p>
<p>Kuadran III : Relasi θ dengan $(270^\circ - \theta)$ $\sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta$ $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta$ $\tan(270^\circ - \theta) = \cot \theta$ $\csc(270^\circ - \theta) = -\sec \theta$ $\sec(270^\circ - \theta) = -\csc \theta$ $\cot(270^\circ - \theta) = \tan \theta$</p>	<p>Kuadran IV: Relasi θ dengan $(270^\circ + \theta)$ $\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta$ $\cos(270^\circ + \theta) = \sin \theta$ $\tan(270^\circ + \theta) = -\cot \theta$ $\csc(270^\circ + \theta) = -\sec \theta$ $\sec(270^\circ + \theta) = \csc \theta$ $\cot(270^\circ + \theta) = -\tan \theta$</p>

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Setelah mempelajari beberapa bentuk persamaan trigonometri, mungkin Anda ada yang bertanya-tanya bilamana rumus di atas harus digunakan? Nah, rumus di atas digunakan yaitu apabila persamaan trigonometri memuat fungsi yang berbeda di kedua ruasnya. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh 1:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sin x = -\cos x$ dalam interval $0^\circ \leq x < 360^\circ$!

Ciri:

Persamaan berbentuk linear dan memuat fungsi *sin* & *cos* atau *tan* & *cot*

Solusi:

Gunakan relasi sudut di berbagai kuadran (menggunakan patokan 90° dan 270°)

Penyelesaian:

$$\sin x = -\cos x$$

Mengingat relasi sudut pada kuadran III yaitu $\sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta$, maka persamaannya menjadi:

$$\sin x = \sin(270^\circ - x)$$

Sudut ini bersesuaian dengan relasi sudut pada kuadran III yaitu $\sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta$ dan relasi sudut pada kuadran IV yaitu $\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta$. Anda dapat memilih salah satu untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Pada uraian ini, penyelesaian ditentukan menggunakan relasi sudut pada kuadran III.

Maka penyelesaiannya:

$$\sin x = \sin(270^\circ - x)$$

$$\Leftrightarrow x = (270^\circ - x) + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2x = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 135^\circ + k \cdot 180^\circ$$

Untuk $k = 0 \Rightarrow x = 135^\circ$

Untuk $k = 1 \Rightarrow x = 315^\circ$

Untuk $k = 2 \Rightarrow x = 495^\circ$

(TM)

Atau $\sin x = \sin(270^\circ - x)$, maka:

$$\Leftrightarrow x = 180^\circ - (270^\circ - x) + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = (-90^\circ + x) + k \cdot 360^\circ$$

Tidak ada nilai x yang memenuhi

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{135^\circ, 315^\circ\}$.

Contoh 2:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\tan 2x = \cot x$ dalam interval $0^\circ \leq x < 360^\circ$!

Penyelesaian:

$$\tan 2x = \cot x$$

Mengingat relasi sudut pada kuadran I yaitu $\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$, maka persamaannya menjadi:

$$\tan 2x = \tan(90^\circ - x)$$

Maka penyelesaiannya:

$$\tan 2x = \tan(90^\circ - x)$$

$$\Leftrightarrow 2x = (90^\circ - x) + k \cdot 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 3x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 30^\circ + k \cdot 60^\circ$$

Untuk $k = 0 \Rightarrow x = 30^\circ$

Untuk $k = 1 \Rightarrow x = 90^\circ$

Untuk $k = 2 \Rightarrow x = 150^\circ$

Untuk $k = 3 \Rightarrow x = 210^\circ$

Untuk $k = 4 \Rightarrow x = 270^\circ$

Untuk $k = 5 \Rightarrow x = 330^\circ$

Untuk $k = 6 \Rightarrow x = 390^\circ$ (TM)

Sudut ini bersesuaian dengan relasi sudut pada kuadran I yaitu $\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$ dan relasi sudut pada kuadran III yaitu $\tan(270^\circ - \theta) = \cot \theta$. Anda dapat memilih salah satu untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Pada uraian ini, penyelesaian ditentukan menggunakan relasi sudut pada kuadran I.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ\}$.

Contoh 3:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\sin x = \cos 25^\circ$ dalam interval $0^\circ \leq x < 360^\circ$!

Penyelesaian:

$$\sin x = \cos 25^\circ$$

Mengingat relasi sudut pada kuadran I yaitu $\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$, maka persamaannya menjadi:

$$\sin x = \sin(90^\circ - 25^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin 65^\circ$$

Sudut ini bersesuaian dengan relasi sudut pada kuadran I yaitu $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ dan relasi sudut pada kuadran II yaitu $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$. Anda dapat memilih salah satu untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Pada uraian ini, penyelesaian ditentukan menggunakan relasi sudut pada kuadran I.

Maka penyelesaiannya:

$$\sin x = \sin 65^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 65^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Untuk $k = 0 \Rightarrow x = 65^\circ$

Untuk $k = 1 \Rightarrow x = 425^\circ$

(TM)

Atau $\sin x = \sin 65^\circ$

$$\Leftrightarrow x = (180^\circ - 65^\circ) + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 115^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Untuk $k = 0 \Rightarrow x = 115^\circ$

Untuk $k = 1 \Rightarrow x = 475^\circ$ (TM)

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{65^\circ, 115^\circ\}$.

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 12. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 11

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan himpunan penyelesaian (HP) dari persamaan trigonometri:

1. $\sin x - \cos x = 0$ dalam interval $0 < x < 2\pi$
2. $\sin x = \cos 80^\circ$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
3. $\tan 2x = \cot 120^\circ$ dalam interval $0^\circ \leq x < 360^\circ$
4. $\sin(2x + 20^\circ) = \cos 100^\circ$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
5. $\tan(110^\circ - 2x) = -\cot 40^\circ$ dalam interval $0 \leq x \leq 2\pi$

Kunci jawaban latihan 11

1. $\{\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\}$
2. $\{10^\circ, 170^\circ\}$
3. $\{75^\circ, 165^\circ, 255^\circ, 345^\circ\}$
4. $\{85^\circ, 165^\circ, 265^\circ, 345^\circ\}$
5. $\{\frac{8}{18}\pi, \frac{17}{18}\pi, \frac{26}{18}\pi, \frac{35}{18}\pi\}$

Kegiatan Pembelajaran 13:**Persamaan Trigonometri Bentuk Khusus (bagian 2)****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Melalui kegiatan pembelajaran 13, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan persamaan trigonometri bentuk kuadrat serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada kegiatan pembelajaran 13 ini, Anda akan mempelajari persamaan trigonometri bentuk kuadrat. Maka, Anda perlu mengingat kembali langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan kuadrat. Perhatikan uraian di bawah ini.

Persamaan kuadrat $x^2 + 7x + 12 = 0$ diselesaikan dengan terlebih dahulu menentukan nilai $a = 1$, $b = 7$, dan $c = 12$. Berarti Anda harus mencari dua bilangan yang jumlahnya 7 dan hasil kalinya 12, yaitu 3 dan 4. Sehingga:

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 0 \text{ atau } x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \quad \Leftrightarrow x = -4$$

Maka, penyelesaian dari persamaan kuadrat tersebut adalah -3 dan -4.

Pada kasus lain, seperti $2x^2 - 3x - 2 = 0$ penyelesaiannya ditentukan dengan terlebih dahulu menentukan nilai $a = 2$, $b = -3$, dan $c = -2$. Berarti Anda harus mencari dua bilangan yang jumlahnya -7 dan hasil kalinya $2 \times (-2) = -4$, yaitu 1 dan -4.

Sehingga diperoleh:

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x - 4)(2x + 1)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x - 2)(2x + 1)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ atau } 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Maka, penyelesaian dari persamaan kuadrat tersebut adalah 2 dan $-\frac{1}{2}$.

Secara umum, faktor dari $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ diperoleh dengan menentukan nilai m dan n , yaitu:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ax + m)(ax + n)}{a} = 0$$

dengan $m + n = b$ dan $mn = ac$

Tidak kalah pentingnya, penjabaran di bawah ini juga sangat berkaitan dengan persamaan trigonometri bentuk kuadrat.

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Jika contoh soal di atas telah dapat dipahami, maka Anda dapat mempelajari penyelesaian persamaan trigonometri bentuk kuadrat pada uraian di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Contoh 1:

Tentukan penyelesaian dari persamaan $6 \sin^2 \theta - 5 \sin \theta - 4 = 0$ dalam interval $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Penyelesaian:

$$6 \sin^2 \theta - 5 \sin \theta - 4 = 0 \longrightarrow$$

Misalkan $x = \sin \theta$, maka diperoleh:

$$6x^2 - 5x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(6x - 8)(6x + 3)}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{2}(3x - 4)\cancel{3}(2x + 1)}{\cancel{6}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 4)(2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 4) = 0 \text{ atau } (2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \qquad \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Artinya,

$$\sin \theta = \frac{4}{3} \text{ atau } \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

➤ Untuk $\sin \theta = \frac{4}{3}$

Tidak ada nilai x yang memenuhi $\sin \theta = \frac{4}{3}$

➤ Untuk $\sin \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin$ bernilai $\frac{1}{2}$ pada sudut 30°

Ciri:

Persamaan berbentuk kuadrat dan memuat satu fungsi (sin saja atau cos saja atau tan saja) dengan sudut seragam

Solusi:

Gunakan langkah penyelesaian persamaan kuadrat

Maka persamaannya menjadi:

$$\sin \theta = -\sin 30^\circ$$

Mengingat relasi sudut pada kuadran IV yaitu $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, maka diperoleh:

$$\sin \theta = -\sin 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \sin(-30^\circ)$$

Sudut ini bersesuaian dengan relasi sudut pada kuadran III yaitu $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$ dan relasi sudut pada kuadran IV yaitu $\sin(-\theta) = -\sin \theta$. Anda dapat memilih salah satu untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Pada uraian ini, penyelesaian ditentukan menggunakan relasi sudut pada kuadran IV.

Maka penyelesaiannya:

$$\sin \theta = \sin(-30^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \theta = -30^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow x = -30^\circ \text{ (TM)}$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow x = 330^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 2 \Rightarrow x = 690^\circ \text{ (TM)}$$

$$\text{Atau } \sin \theta = \sin(-30^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \theta = (180^\circ - (-30^\circ)) + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \theta = 210^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow x = 210^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow x = 570^\circ \text{ (TM)}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{210^\circ, 330^\circ\}$.

Contoh 2:

Tentukan penyelesaian dari persamaan $2 \cos^2 2\theta - \cos 2\theta - 1 = 0$ dalam interval $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Penyelesaian:

$$2 \cos^2 2\theta - \cos 2\theta - 1 = 0$$

Misalkan $x = \cos 2\theta$, maka diperoleh:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x - 2)(2x + 1)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x - 1)(2x + 1)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) = 0 \text{ atau } (2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \qquad \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Artinya,

$$\cos 2\theta = 1 \text{ atau } \cos 2\theta = -\frac{1}{2}$$

➤ Untuk $\cos 2\theta = 1 \Rightarrow \cos$ bernilai 1 pada sudut 0°

Maka persamaannya menjadi:

$$\cos 2\theta = \cos 0^\circ$$

Maka penyelesaiannya:

$$\cos 2\theta = \cos(0^\circ)$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$\text{Atau } \cos 2\theta = \cos(-0^\circ)$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0^\circ + k \cdot 180^\circ$$

Untuk $k = 0 \Rightarrow x = 0^{\circ}$

Untuk $k = 1 \Rightarrow x = 180^{\circ}$

Untuk $k = 2 \Rightarrow x = 360^{\circ}$

➤ Untuk $\cos 2\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos$ bernilai $\frac{1}{2}$ pada sudut 60°

Untuk $k = 0 \Rightarrow x = 0^{\circ}$

Untuk $k = 1 \Rightarrow x = 180^{\circ}$

Untuk $k = 2 \Rightarrow x = 360^{\circ}$

Maka persamaannya menjadi:

$\cos 2\theta = -\cos 60^{\circ}$

Mengingat relasi sudut pada kuadran II yaitu $\cos(180^{\circ} + \theta) = -\cos \theta$, maka diperoleh:

$\cos 2\theta = \cos(180^{\circ} - 60^{\circ})$

$\Leftrightarrow \cos 2\theta = \cos(120^{\circ})$

Sudut ini bersesuaian dengan relasi sudut pada kuadran II yaitu $\cos(180^{\circ} - \theta) = -\cos \theta$ dan relasi sudut pada kuadran III yaitu $\cos(180^{\circ} + \theta) = -\cos \theta$. Anda dapat memilih salah satu untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Pada uraian ini, penyelesaian ditentukan menggunakan relasi sudut pada kuadran II.

Maka penyelesaiannya:

$\cos 2\theta = \cos(120^{\circ})$

$\Leftrightarrow 2\theta = 120^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$

$\Leftrightarrow \theta = 60^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}$

Untuk $k = 0 \Rightarrow x = 60^{\circ}$

Untuk $k = 1 \Rightarrow x = 240^{\circ}$

Untuk $k = 2 \Rightarrow x = 420^{\circ}$
(TM)

Atau $\cos 2\theta = \cos(-120^{\circ})$

$\Leftrightarrow 2\theta = -120^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$

$\Leftrightarrow \theta = -60^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}$

Untuk $k = 0 \Rightarrow x = -60^{\circ}$ (TM)

Untuk $k = 1 \Rightarrow x = 120^{\circ}$

Untuk $k = 2 \Rightarrow x = 300^{\circ}$

Untuk $k = 3 \Rightarrow x = 480^{\circ}$ (TM)

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{0^{\circ}, 60^{\circ}, 120^{\circ}, 180^{\circ}, 240^{\circ}, 300^{\circ}, 360^{\circ}\}$.

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 13. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 12

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan himpunan penyelesaian (HP) dari persamaan trigonometri:

1. $2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta = 2$ untuk $0 \leq \theta \leq \pi$
2. $-2 \sin^2 \theta + 7 \sin \theta - 3 = 0$ untuk $0 < \theta < \pi$
3. $2 \sin^2 x + \sin x = 1$ untuk $0^{\circ} \leq x \leq 180^{\circ}$
4. $2 - 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$ dalam interval $0 \leq x \leq 2\pi$
5. $\tan^2 x - \sqrt{3} \tan x = 0$ untuk $0^{\circ} \leq x < 360^{\circ}$
6. $\sin^2 3\theta + \sin 3\theta = 0$ untuk $0^{\circ} < \theta < 180^{\circ}$
7. $2 \sin^2 2\theta - 3 \sin 2\theta - 2 = 0$ dalam interval $0 < \theta < 2\pi$
8. $4 \cos^2 4\theta - 1 = 0$ untuk $0^{\circ} \leq \theta \leq 180^{\circ}$
9. $\tan^2 5\theta - 1 = 0$ untuk $0^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ}$
10. $2 \cos^2 2\theta + \cos 2\theta - 1 = 0$ dalam interval $0 < \theta < 2\pi$

Kunci jawaban latihan 12

1. $\left\{\frac{1}{3}\pi\right\}$
2. $\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$
3. $\{30^{\circ}, 150^{\circ}\}$
4. $\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$
5. $\{0^{\circ}, 60^{\circ}, 180^{\circ}, 240^{\circ}, 360^{\circ}\}$
6. $\{60^{\circ}, 90^{\circ}, 120^{\circ}\}$
7. $\left\{\frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi\right\}$
8. $\{15^{\circ}, 30^{\circ}, 60^{\circ}, 75^{\circ}, 105^{\circ}, 120^{\circ}, 150^{\circ}, 165^{\circ}\}$
9. $\{9^{\circ}, 27^{\circ}, 45^{\circ}, 63^{\circ}, 81^{\circ}\}$
10. $\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi\right\}$

Kegiatan Pembelajaran 14:**Persamaan Trigonometri Bentuk Khusus (bagian 3)****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Melalui kegiatan pembelajaran 14, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan persamaan trigonometri bentuk kuadrat serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada kegiatan pembelajaran 14 ini, Anda masih mempelajari persamaan trigonometri bentuk kuadrat. Berbagai bentuk persamaan trigonometri telah Anda pelajari pada materi-materi sebelumnya. Mungkin Anda menjadi bingung cara manakah yang harus digunakan. Pada dasarnya, masing-masing cara digunakan sesuai kasusnya. Ada kalanya persamaan trigonometri diselesaikan dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaannya menggunakan identitas trigonometri atau sifat kesamaan yang lainnya. Berikut ini kesamaan trigonometri yang sering digunakan dalam menyelesaikan persamaan trigonometri.

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \\ \Leftrightarrow \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\ \\ \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \\ \Leftrightarrow \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x \\ \Leftrightarrow \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

Perhatikan ciri-ciri soal dan langkah penyelesaian yang digunakan pada uraian contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Contoh 1:

Tentukan penyelesaian dari persamaan $2 \sin^2 \theta - 9 \cos \theta + 3 = 0$ dalam interval $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Penyelesaian:

$$2 \sin^2 \theta - 9 \cos \theta + 3 = 0$$

Karena persamaan memuat fungsi sin dan cos, maka perlu diubah sedemikian sehingga persamaan hanya memuat satu fungsi saja (sin saja atau cos saja).

Anda dapat menggunakan kesamaan $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, sehingga persamaannya menjadi:

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \theta - 9 \cos \theta + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 \theta) - 9 \cos \theta + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 - 2 \cos^2 \theta) - 9 \cos \theta + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2 \cos^2 \theta - 9 \cos \theta + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos^2 \theta + 9 \cos \theta - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Misalkan $x = \cos \theta$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 9x - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(2x - 1)(2x + 10)}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(2x - 1)2(x + 5)}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1) = 0 \text{ atau } (x + 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow x &= -5 \end{aligned}$$

Ciri:

Persamaan berbentuk kuadrat dan memuat fungsi sin & cos secara bersamaan dengan sudut seragam

Solusi:

Gunakan $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

Artinya,

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{ atau } \cos \theta = -5$$

➤ Untuk $\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos$ bernilai 1 pada sudut 60°

Maka persamaannya menjadi:

$$\cos \theta = \cos 60^\circ$$

Maka penyelesaiannya:

$$\cos \theta = \cos(60^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \theta = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow x = 60^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow x = 420^\circ \text{ (TM)}$$

Atau $\cos \theta = \cos(-60^\circ)$

$$\Leftrightarrow \theta = -60^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow x = -60^\circ \text{ (TM)}$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow x = 300^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 2 \Rightarrow x = 660^\circ \text{ (TM)}$$

➤ Untuk $\cos \theta = -5$

Tidak ada nilai x yang memenuhi $\cos \theta = -5$.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{60^\circ, 330^\circ\}$.

Contoh 2:

Tentukan penyelesaian dari persamaan $\cos 2x - 3 \sin x = 2$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Penyelesaian:

$$\cos 2x - 3 \sin x = 2$$

Karena persamaan memuat sudut x dan $2x$, maka perlu diubah sedemikian rupa sehingga persamaan perlu diubah agar hanya memuat satu sudut saja (x saja atau $2x$ saja).

Ciri:

Persamaan memuat sudut yang berbeda (x dan $2x$)

Solusi:

Gunakan $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Anda dapat menggunakan kesamaan $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 \theta$, sehingga persamaannya menjadi:

$$\cos 2x - 3 \sin x = 2$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2 \sin^2 x) - 3 \sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin^2 x - 3 \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$$

Misalkan $y = \sin x$, maka diperoleh:

$$2y^2 + 3y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+2)(2x+1)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+1)(2x+1)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1) = 0 \text{ atau } (2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Artinya,

$$\sin x = -1 \text{ atau } \sin x = -\frac{1}{2}$$

➤ Untuk $\sin x = -1 \Rightarrow \sin$ bernilai 1 pada sudut 90°

Maka persamaannya menjadi:

$$\sin x = -\sin 90^\circ$$

Sudut ini bersesuaian dengan relasi sudut pada kuadran III yaitu $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$ dan relasi sudut pada kuadran IV yaitu $\sin(-\theta) = -\sin \theta$. Anda dapat memilih salah satu untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Pada uraian ini, penyelesaian ditentukan menggunakan relasi sudut pada kuadran III.

Mengingat relasi sudut pada kuadran III yaitu $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$, maka diperoleh:

$$\sin x = \sin(180^\circ + 90^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin(270^\circ)$$

Maka penyelesaiannya:

$$\sin x = \sin(270^\circ)$$

$$\Leftrightarrow x = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow x = 270^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow x = 630^\circ \text{ (TM)}$$

$$\text{Atau } \sin x = \sin(270^\circ)$$

$$\Leftrightarrow x = (180^\circ - 270^\circ) + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = -90^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow x = -90^\circ \text{ (TM)}$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow x = 270^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 2 \Rightarrow x = 630^\circ \text{ (TM)}$$

➤ Untuk $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin$ bernilai $\frac{1}{2}$ pada sudut 30°

Maka persamaannya menjadi:

$$\sin x = -\sin 30^\circ$$

Sudut ini bersesuaian dengan relasi sudut pada kuadran III yaitu $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$ dan relasi sudut pada kuadran IV yaitu $\sin(-\theta) = -\sin \theta$. Anda dapat memilih salah satu untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Pada uraian ini, penyelesaian ditentukan menggunakan relasi sudut pada kuadran III.

Mengingat relasi sudut pada kuadran II yaitu $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$, maka diperoleh:

$$\sin x = \sin(180^\circ + 30^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin(210^\circ)$$

Maka penyelesaiannya:

$$\sin x = \sin(210^\circ)$$

$$\Leftrightarrow x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow x = 210^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow x = 570^\circ \text{ (TM)}$$

$$\text{Atau } \sin x = \sin(210^\circ)$$

$$\Leftrightarrow x = (180^\circ - 210^\circ) + k \cdot 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = -30^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 0 \Rightarrow x = -30^\circ \text{ (TM)}$$

$$\text{Untuk } k = 1 \Rightarrow x = 330^\circ$$

$$\text{Untuk } k = 2 \Rightarrow x = 690^\circ \text{ (TM)}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{210^\circ, 270^\circ, 330^\circ\}$.

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 13. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 13

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan himpunan penyelesaian (HP) dari persamaan trigonometri:

1. $\cos 2x = -\cos x$ dalam interval $0 < x < 2\pi$
2. $\cos 2x + \sin x = 0$ dalam interval $0^\circ \leq x < 180^\circ$
3. $4 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 2 \cos^2 x$ dalam interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
4. $\cos 4x + 3 \sin 2x = -1$ dalam interval $0^\circ \leq x < 180^\circ$
5. $\cos 2x + 3 \cos x - 1 = 0$ pada $0^\circ \leq x < 360^\circ$

Kunci jawaban latihan 13

1. $\left\{\frac{1}{3}\pi, \pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$
2. $\{90^\circ\}$
3. $\left\{\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$
4. $\{105^\circ, 165^\circ\}$
5. $\{60^\circ, 300^\circ\}$

Kegiatan Pembelajaran 15:**Tes Formatif 4 (Persamaan Trigonometri Bentuk Khusus)****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Mengetahui penguasaan materi yang berkaitan dengan persamaan trigonometri bentuk khusus.

Untuk mengetahui penguasaan Anda terhadap materi ini, ikuti petunjuk berikut!

1. Bukalah google formulir dengan link:
<https://forms.gle/k3VWGeFLuxb5qkpx7>
2. Bacalah petunjuknya dengan seksama

Kunci jawaban tes formatif 4

Kunci jawaban tes formatif 4 akan tampil setelah Anda memberikan jawaban pada setiap butir soal yang disajikan.

Umpan balik

Periksalah nilai tes formatif Anda. Tingkat penguasaan materi = nilai tes formatif.

Pengelompokan tingkat penguasaan materi:

93% - 100% : baik sekali

84% - 92% : baik

75% - 83% : cukup

< 75% : kurang

Apabila tingkat pemahaman Anda mencapai 75% atau lebih, Anda sudah menguasai materi ini. Apabila tingkat pemahaman Anda masih di bawah 75%, maka Anda harus mengulangi kembali materi kegiatan pembelajaran 11, 12, 13 dan 14 (terutama bagian yang belum Anda kuasai).

C. EVALUASI**1. Penilaian Kognitif**

Untuk mengetahui penguasaan Anda terhadap materi ini, ikuti petunjuk berikut!

1. Bukalah google formulir dengan link:
<https://forms.gle/1RybMATUqwnDQdx6>
2. Bacalah petunjuknya dengan seksama

Kunci Jawaban

Kunci jawaban evaluasi akan tampil setelah Anda memberikan jawaban pada setiap butir soal yang disajikan.

2. Penilaian Keterampilan

Slesaikan tugas portofolio berikut.

1. Tugas ini bersifat wajib & individu.
2. Buatlah *main mapping* dari seluruh materi yang telah Anda pelajari pada bab ini.
3. Kerjakan pada selemba kertas marmer putih.
4. Sajikan hasil kerja Anda dalam karya yang indah dan rapi.



5. Unggah hasil kerja anda pada link:

<https://forms.gle/8BWNy56oKgWUjMyA6>

3. Penilaian Sikap

Nilai sikap Anda ditentukan dari tanggung jawab dan kedisiplinan Anda dalam melakukan belajar mandiri & ketertiban dalam mengumpulkan tugas.

BAB II TRIGONOMETRI ANALITIKA

A. Rencana Belajar Siswa (KD & IPK)

Modul ini *insyaaAllaah* akan membantu Anda untuk dapat memahami materi Trigonometri Analitika. Berikut ini disajikan Kompetensi Dasar (KD) dan Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK) pada materi tersebut.

Kompetensi Dasar (KD)	Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)
3.2 Membedakan penggunaan jumlah dan selisih sinus dan cosinus	3.2.1. Memahami konsep sinus dan cosinus 3.2.2. Memahami hubungan antara fungsi sinus dan cosinus yang dinyatakan dalam rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus 3.2.3. Menganalisis rumus jumlah dan selisih trigonometri sehingga dapat membuat kesimpulan mengenai rumus jumlah dan selisih trigonometri dan penerapannya pada masalah nyata 3.2.4. Menentukan solusi dari permasalahan yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus atau cosinus
4.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus	4.2.1. Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus atau cosinus 4.2.2. Menentukan persamaan trigonometri yang identik terhadap persamaan yang diketahui dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus 4.2.3. Menentukan nilai perkalian fungsi trigonometri yang berkaitan dengan jumlah dan selisih sinus atau cosinus 4.2.4. Menyajikan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sinus dan cosinus

B. Kegiatan Pembelajaran

Kegiatan Pembelajaran 1:

Rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Dua Sudut pada Sinus (bagian 1)

Tujuan kegiatan pembelajaran

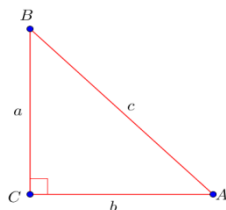
Melalui kegiatan pembelajaran 1, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut pada sinus serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Perhitungan dalam trigonometri melibatkan banyak menggunakan rumus. Namun, tahukah Anda? Jika Anda memahami lebih dalam, sebenarnya beberapa rumus yang ada merupakan pengembangan atau turunan dari rumus dasar yang telah Anda ketahui sebelumnya. Pada bagian ini, Anda akan mempelajari rumus trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut pada sinus, yaitu $\sin(A + B)$ dan $\sin(A - B)$. Perhatikan uraian berikut.

Anda pasti masih mengingat definisi nilai sinus dan cosinus pada segitiga siku-siku.



Dengan menggunakan definisi sinus dan cosinus, akan Anda dapati:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B$$

Pada segitiga ABC di atas, berlaku:

$$A + B + C = 180^\circ \text{ sehingga } A + B = 90^\circ$$

Maka, diperoleh:

$$\sin(A + B) = \sin 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \sin(A + B) = 1$$

Mengingat identitas trigonometri bahwa $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, maka akan Anda dapatkan:

$$\sin(A + B) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(A + B) = \sin^2 A + \cos^2 A$$

$$\Leftrightarrow \sin(A + B) = \sin A \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos A$$

Karena $\sin A = \cos B$ dan $\cos A = \sin B$, maka **$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$**

Nah, rumus $\sin(A - B)$ dapat Anda peroleh dengan cara berikut.

$$\sin(A - B) = \sin(A + (-B))$$

Menggunakan rumus $\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$, Anda dapatkan:

$$\sin(A - B) = \sin(A + (-B))$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = \sin A \cdot \cos(-B) + \cos A \cdot \sin(-B)$$

Ingatlah sifat sudut berelasi yang sudah pernah Anda pelajari, bahwa $\cos(-B) = \cos B$ dan $\sin(-B) = -\sin B$. Sehingga Anda dapatkan:

$$\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos(-B) + \cos A \cdot \sin(-B)$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot (-\sin B)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B}$$

Kesimpulan:

Hubungan jumlah dan selisih sudut pada sinus dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \sin(A + B) &= \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B \\ \sin(A - B) &= \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B \end{aligned}$$

Bertanda sama

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai sudut tertentu (sudut yang merupakan penjumlahan atau pengurangan sudut istimewa) tanpa menggunakan kalkulator. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh 1:

Tentukan nilai $\sin 75^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

Contoh 2:

Tentukan hasil dari $\sin 3x \cdot \cos 2x - \cos 3x \cdot \sin 2x$.

Penyelesaian:

$$\sin 3x \cdot \cos 2x - \cos 3x \cdot \sin 2x = \sin(3x - 2x) = \sin x$$

Contoh 3:

Tentukan hasil dari $\sin(30 + p)^0 \cdot \cos(30 - p)^0 + \cos(30 + p)^0 \cdot \sin(30 - p)^0$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} & \sin(30 + p)^0 \cdot \cos(30 - p)^0 + \cos(30 + p)^0 \cdot \sin(30 - p)^0 \\ &= \sin[(30 + p)^0 + (30 - p)^0] \\ &= \sin 60^0 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 1. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 1

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan nilai dari:

1. $\sin(60^0 + x)$
2. $\sin(y - 30^0)$
3. $\sin 15^0$
4. $\sin(-15^0)$
5. $\sin 105^0$
6. $\sin 195^0$
7. $\sin 225^0$
8. $\sin 20^0 \cdot \cos 10^0 + \cos 20^0 \cdot \sin 10^0$
9. $\sin 85^0 \cdot \cos 25^0 - \cos 85^0 \cdot \sin 25^0$
10. $\sin(45^0 - x) \cos(45^0 - y) + \cos(45^0 - x) \sin(45^0 - y)$

Kunci jawaban latihan 1

1. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} \cos x + \sin x)$
2. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} \sin y + \cos y)$
3. $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$
4. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$
5. $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$
6. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$
7. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

8. $\frac{1}{2}$
9. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
10. $\cos(x + y)$

Kegiatan Pembelajaran 2:**Rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Dua Sudut pada Sinus (bagian 2)****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Melalui kegiatan pembelajaran 2, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut pada sinus serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Kegiatan pembelajaran 2 ini masih membahas materi utama mengenai rumus jumlah dan selisih sudut pada sinus. Tentunya Anda masih ingat rumus berikut.

$$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$$

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai penjumlahan atau pengurangan dari dua sudut tertentu (tanpa Anda mengetahui besar sudut yang dijumlahkan atau dikurangkan). Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh 1:

Diketahui $\cos A = -\frac{4}{5}$ dan $\cos B = \frac{3}{5}$. Jika sudut A tumpul dan sudut B lancip, tentukan nilai $\sin(A - B)$.

Penyelesaian:

Perhatikan jenis sudut A dan B.

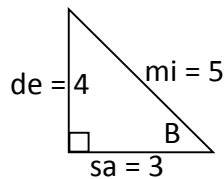
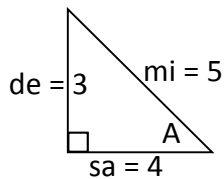
A sudut tumpul artinya sudut berada di kuadran II

B sudut lancip artinya sudut berada di kuadran I

$$\cos A = \frac{sa}{mi} = -\frac{4}{5} \text{ (cos bernilai negatif di kuadran II)}$$

$$\cos B = \frac{sa}{mi} = \frac{3}{5} \text{ (cos bernilai positif di kuadran I)}$$

Gunakan segitiga siku-siku untuk mendapatkan nilai $\sin A$ dan $\sin B$.



$$\sin A = \frac{de}{mi} = \frac{3}{5} \text{ (sin bernilai positif di kuadran II)}$$

$$\sin B = \frac{de}{mi} = \frac{4}{5} \text{ (sin bernilai positif di kuadran I)}$$

Sehingga, $\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{25}{25}$$

$$= 1$$

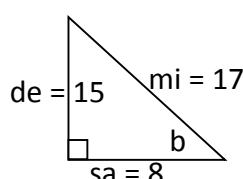
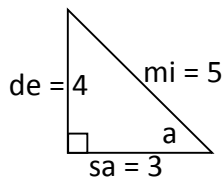
Contoh 2:

Diketahui $\sin a = \frac{4}{5}$ dengan a di kuadran II dan $\cos b = \frac{8}{17}$ dengan b di kuadran IV.

Tentukan $\sin(a + b)$ dan $\sin(a - b)$.

Penyelesaian:

Gunakan segitiga siku-siku untuk mendapatkan nilai $\cos a$ dan $\sin b$.



$$\cos a = \frac{sa}{mi} = -\frac{3}{5} \text{ (cos bernilai negatif di kuadran II)}$$

$$\sin b = \frac{de}{mi} = -\frac{15}{17} \text{ (sin bernilai negatif di kuadran IV)}$$

Sehingga:

$$\triangleright \sin(a + b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{17} - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{15}{17}\right)$$

$$= \frac{32}{85} - \frac{45}{85}$$

$$= -\frac{13}{85}$$

$$\triangleright \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{17} + \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{15}{17}\right)$$

$$= \frac{32}{85} + \frac{45}{85}$$

$$= \frac{77}{85}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 2. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 2

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini. Tentukan penyelesaian dari masalah berikut.

Diketahui $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ dan $\cos \beta = \frac{12}{13}$. Jika sudut α dan β lancip, maka:

1. Tentukan nilai $\sin(\alpha + \beta)$
2. Tentukan nilai $\sin(\alpha - \beta)$

Diketahui $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ dan $\tan \beta = \frac{12}{5}$. Jika sudut α tumpul dan β lancip, maka:

3. Tentukan nilai $\sin(\alpha + \beta)$
4. Tentukan nilai $\sin(\alpha - \beta)$

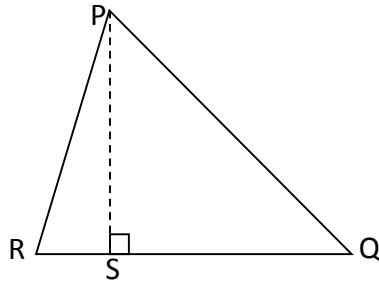
Diberikan nilai $\cos x = \frac{3}{5}$ dan $\sin y = \frac{5}{13}$, dengan x sudut lancip dan y sudut tumpul.

5. Tentukan nilai $\sin(x + y)$
6. Tentukan nilai $\sin(y - x)$

7. Pada segitiga ABC berlaku $\sin A = \frac{4}{5}$ dan $\sin B = \frac{8}{17}$. Tentukan nilai $\sin C$.

Petunjuk: $A + B + C = 180^\circ$ sehingga $C = 180^\circ - (A + B)$.

8. Diketahui $\sin A \cdot \cos B = \frac{15}{65}$ dan $\sin(A + B) = \frac{63}{65}$. Tentukan nilai dari $\cos A \cdot \sin B$.
9. Perhatikan gambar berikut ini.



Diketahui $PS = 12$ cm, $\sin Q = \frac{4}{5}$,
dan $\tan R = \frac{12}{5}$. Tentukan nilai $\sin P$.

10. Jika $\sin x = p$ dengan x adalah sudut tumpul, tentukan nilai $\sin(x - 135^\circ)$.
Petunjuk: buatlah segitiga siku-siku untuk menentukan nilai $\cos x$.

Kunci jawaban latihan 2

1. $\frac{63}{65}$
2. $\frac{33}{65}$
3. $-\frac{63}{65}$
4. $\frac{63}{65}$
5. $-\frac{33}{65}$
6. $-\frac{63}{65}$
7. $\frac{48}{65}$
8. $\frac{84}{65}$
9. $\frac{85}{65}$
10. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}(p - \sqrt{1 - p^2})$

Kegiatan Pembelajaran 3:

Tes Formatif 1 (Rumus Jumlah dan Selisih Sudut pada Sinus)

Tujuan kegiatan pembelajaran

Mengetahui penguasaan materi yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut pada sinus.

Untuk mengetahui penguasaan Anda terhadap materi ini, ikuti petunjuk berikut.

1. Bukalah google formulir dengan link:
<https://forms.gle/QWuiBW5rfRq5PVzD7>
2. Bacalah petunjuknya dengan seksama

Kunci jawaban tes formatif 1

Kunci jawaban tes formatif 1 akan tampil setelah Anda memberikan jawaban pada setiap butir soal yang disajikan.

Umpan balik

Periksalah nilai tes formatif Anda. Tingkat penguasaan materi = nilai tes formatif.

Pengelompokan tingkat penguasaan materi:

93% - 100% : baik sekali

84% - 92% : baik

75% - 83% : cukup

< 75% : kurang

Apabila tingkat pemahaman Anda mencapai 75% atau lebih, Anda dapat melanjutkan dengan mempelajari materi pada kegiatan pembelajaran 4. Apabila tingkat pemahaman Anda masih di bawah 75%, maka Anda harus mengulangi kembali materi kegiatan pembelajaran 1 dan 2 (terutama bagian yang belum Anda kuasai).

Kegiatan Pembelajaran 4:**Rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Dua Sudut pada Cosinus (Bagian 1)****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Melalui kegiatan pembelajaran 4, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut pada cosinus serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada bagian ini Anda akan mempelajari rumus trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut pada cosinus, yaitu $\cos(A + B)$ dan $\cos(A - B)$. Menggunakan hubungan sudut pada kuadran I dan juga rumus $\sin(A - B)$ yang telah Anda pelajari sebelumnya, Anda akan dapat memperoleh rumus $\cos(A + B)$ dan $\cos(A - B)$. Perhatikan uraian berikut.

$$\cos(A + B) = \sin(90^\circ - (A + B)) \Rightarrow \text{hubungan sudut pada kuadran I}$$

Anda pasti masih mengingat rumus $\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$.

Sehingga:

$$\cos(A + B) = \sin(90^\circ - (A + B))$$

$$\Leftrightarrow \cos(A + B) = \sin((90^\circ - A) - B)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A + B) = \sin(90^\circ - A) \cdot \cos B - \cos(90^\circ - A) \cdot \sin B$$

Mengingat hubungan sudut pada kuadran I bahwa $\sin(90^\circ - A) = \cos A$ dan $\cos(90^\circ - A) = \sin A$, maka Anda dapatkan:

$$\Leftrightarrow \cos(A + B) = \sin(90^\circ - A) \cdot \cos B - \cos(90^\circ - A) \cdot \sin B$$

$$\Leftrightarrow \cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

$$\Leftrightarrow \cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

Nah, rumus $\cos(A - B)$ dapat Anda peroleh dengan cara berikut.

$$\cos(A - B) = \cos(A + (-B))$$

Menggunakan rumus $\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$, Anda dapatkan:

$$\cos(A - B) = \cos(A + (-B))$$

$$\Leftrightarrow \cos(A - B) = \cos A \cdot \cos(-B) - \sin A \cdot \sin(-B)$$

Ingatlah sifat sudut berelasi yang sudah pernah Anda pelajari, bahwa $\cos(-B) = \cos B$ dan $\sin(-B) = -\sin B$. Sehingga Anda dapatkan:

$$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos(-B) - \sin A \cdot \sin(-B)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot (-\sin B)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B - (-\sin A \cdot \sin B)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

Kesimpulan:

Hubungan jumlah dan selisih sudut pada cosinus dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \cos(A + B) &= \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \\ \cos(A - B) &= \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \end{aligned}$$

Bertanda berlawanan

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai sudut tertentu (sudut yang merupakan penjumlahan atau pengurangan sudut istimewa) tanpa menggunakan kalkulator. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh 1:

Tentukan nilai $\cos 75^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)\end{aligned}$$

Contoh 2:

Tentukan hasil dari $\cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x$.

Penyelesaian:

$$\cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x = \cos(3x + 2x) = \cos 5x$$

Contoh 3:

Tentukan hasil dari $\cos(30 + p)^\circ \cdot \cos(30 - p)^\circ - \sin(30 + p)^\circ \cdot \sin(30 - p)^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\cos(30 + p)^\circ \cdot \cos(30 - p)^\circ - \sin(30 + p)^\circ \cdot \sin(30 - p)^\circ \\ &= \cos[(30 + p)^\circ + (30 - p)^\circ] \\ &= \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 4. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 3

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan nilai dari:

1. $\cos(30^\circ + x)$
2. $\cos(y - 45^\circ)$
3. $\cos 15^\circ$
4. $\cos 105^\circ$
5. $\cos(-15^\circ)$
6. $\cos 195^\circ$
7. $\cos 225^\circ$
8. $\cos 80^\circ \cdot \cos 10^\circ - \sin 80^\circ \cdot \sin 10^\circ$
9. $\cos 50^\circ \cdot \cos 20^\circ + \sin 50^\circ \cdot \sin 20^\circ$
10. $\cos(45^\circ - x) \cos(45^\circ - y) + \sin(45^\circ - x) \sin(45^\circ - y)$

Kunci jawaban latihan 3

1. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} \cos x - \sin x)$
2. $\frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos y + \sin y)$
3. $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$
4. $\frac{1}{4}\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})$
5. $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$
6. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$
7. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
8. 0
9. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
10. $\cos(y - x)$

Kegiatan Pembelajaran 5:**Rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Dua Sudut pada Cosinus (Bagian 2)****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Melalui kegiatan pembelajaran 5, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut pada cosinus serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Kegiatan pembelajaran 5 ini masih membahas materi utama mengenai rumus jumlah dan selisih sudut pada cosinus. Tentunya Anda masih ingat rumus berikut.

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai penjumlahan atau pengurangan dari dua sudut tertentu (tanpa Anda mengetahui besar sudut yang dijumlahkan atau dikurangkan). Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh 1:

Diketahui $\cos A = \frac{4}{5}$ dan $\cos B = \frac{3}{5}$. Jika sudut A dan B lancip, tentukan nilai $\cos(A - B)$.

Penyelesaian:

Perhatikan jenis sudut A dan B.

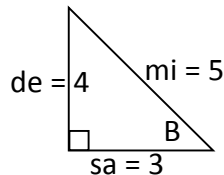
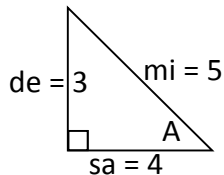
A sudut lancip artinya sudut berada di kuadran I

B sudut lancip artinya sudut berada di kuadran I

$$\cos A = \frac{sa}{mi} = \frac{4}{5} \text{ (cos bernilai positif di kuadran I)}$$

$$\cos B = \frac{sa}{mi} = \frac{3}{5} \text{ (cos bernilai positif di kuadran I)}$$

Gunakan segitiga siku-siku untuk mendapatkan nilai $\sin A$ dan $\sin B$.



$$\sin A = \frac{de}{mi} = \frac{3}{5} \text{ (sin bernilai positif di kuadran I)}$$

$$\sin B = \frac{de}{mi} = \frac{4}{5} \text{ (sin bernilai positif di kuadran I)}$$

Sehingga, $\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \\ &= \frac{24}{25} \end{aligned}$$

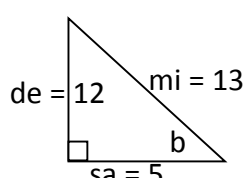
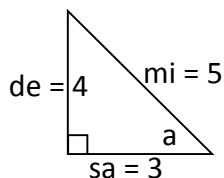
Contoh 2:

Diketahui $\sin a = \frac{4}{5}$ dengan a di kuadran I dan $\cos b = -\frac{5}{13}$ dengan b di kuadran II.

Tentukan $\cos(a + b)$ dan $\cos(a - b)$.

Penyelesaian:

Gunakan segitiga siku-siku untuk mendapatkan nilai $\cos a$ dan $\sin b$.



$$\cos a = \frac{sa}{mi} = \frac{3}{5} \text{ (cos bernilai positif di kuadran I)}$$

$$\sin b = \frac{de}{mi} = \frac{12}{13} \text{ (sin bernilai positif di kuadran II)}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} &\triangleright \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ &= \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} \\ &= -\frac{15}{65} - \frac{48}{65} \\ &= -\frac{63}{65} \\ &\triangleright \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ &= \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} \\ &= -\frac{15}{65} + \frac{48}{65} \\ &= \frac{33}{65} \end{aligned}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 5. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 4

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini. Tentukan penyelesaian dari masalah berikut.

Diketahui $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ dan $\cos \beta = \frac{12}{13}$. Jika sudut α dan β lancip, maka:

1. Tentukan nilai $\cos(\alpha + \beta)$
2. Tentukan nilai $\cos(\alpha - \beta)$

Diketahui $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ dan $\tan \beta = \frac{12}{5}$. Jika sudut α tumpul dan β lancip, tentukan nilai:

3. Tentukan nilai $\cos(\alpha + \beta)$
4. Tentukan nilai $\cos(\beta - \alpha)$

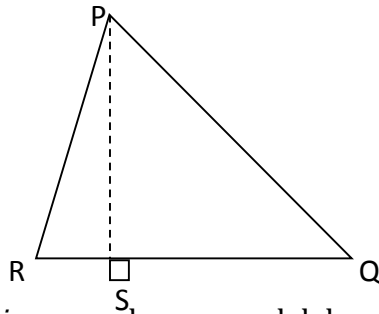
Jika $\cos x = \frac{5}{13}$ dan $\sin y = \frac{4}{5}$ dengan x dan y adalah sudut lancip, maka:

5. Tentukan nilai $\cos(y + x)$
6. Tentukan nilai $\cos(x - y)$
7. Diberikan nilai $\tan A = \frac{12}{5}$ dan $\sin B = \frac{4}{5}$, A dan B sudut lancip. Tentukan nilai $\cos(A - B)$.

8. Diketahui α dan β merupakan sudut lancip.

Jika $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}$, tentukan nilai dari $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$.

9. Perhatikan gambar berikut ini.



Diketahui $PS = 12$ cm, $\tan Q = \frac{4}{3}$, dan $\tan R = \frac{12}{5}$. Tentukan nilai $\cos P$.

10. Jika $\sin x = q$ dengan x adalah sudut tumpul, tentukan nilai $\cos(x + 120^\circ)$.

Petunjuk: buatlah segitiga siku-siku untuk menentukan nilai $\cos x$.

Kunci jawaban latihan 4

1. $\frac{16}{65}$
2. $\frac{56}{65}$
3. $-\frac{56}{65}$
4. $\frac{16}{65}$
5. $-\frac{33}{65}$
6. $\frac{63}{65}$
7. $\frac{63}{65}$
8. $2\sqrt{3} + 3$
9. $\frac{33}{65}$
10. $\frac{1}{2}(\sqrt{1 - q^2} - \sqrt{3}q)$

Kegiatan Pembelajaran 6:

Tes Formatif 2 (Rumus Jumlah dan Selisih Sudut pada Cosinus)

Tujuan kegiatan pembelajaran

Mengetahui penguasaan materi yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut pada cosinus.

Untuk mengetahui penguasaan Anda terhadap materi ini, ikuti petunjuk berikut.

1. Bukalah google formulir dengan link:
<https://forms.gle/7o9ReSZK6YUCWu4GA>
2. Bacalah petunjuknya dengan seksama

Kunci jawaban tes formatif 2

Kunci jawaban tes formatif 2 akan tampil setelah Anda memberikan jawaban pada setiap butir soal yang disajikan.

Umpan balik

Periksalah nilai tes formatif Anda. Tingkat penguasaan materi = nilai tes formatif.

Pengelompokan tingkat penguasaan materi:

93% - 100% : baik sekali

84% - 92% : baik

75% - 83% : cukup

< 75% : kurang

Apabila tingkat pemahaman Anda mencapai 75% atau lebih, Anda dapat melanjutkan dengan mempelajari materi pada kegiatan pembelajaran 7. Apabila tingkat pemahaman Anda masih di bawah 75%, maka Anda harus mengulangi kembali materi kegiatan pembelajaran 4 dan 5 (terutama bagian yang belum Anda kuasai).

Kegiatan Pembelajaran 7:

Rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Dua Sudut pada Tangen (Bagian 1)

Tujuan kegiatan pembelajaran

Melalui kegiatan pembelajaran 7, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut pada tangen serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada bagian ini Anda akan mempelajari rumus trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut pada tangen, yaitu $\tan(A + B)$ dan $\tan(A - B)$. Menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut pada sinus dan cosinus yang telah Anda pelajari sebelumnya, Anda akan dapat memperoleh rumus $\tan(A + B)$ dan $\tan(A - B)$. Perhatikan uraian berikut.

Anda pasti masih mengingat rumus $\sin(A + B)$ dan $\sin(A - B)$.

$$\begin{aligned} \tan(A + B) &= \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} \Rightarrow \text{karena } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \Leftrightarrow \tan(A + B) &= \frac{\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B} \times \frac{\frac{1}{\cos A \cdot \cos B}}{\frac{1}{\cos A \cdot \cos B}} \\ \Leftrightarrow \tan(A + B) &= \frac{\frac{\sin A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} + \frac{\cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}{\frac{\cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} - \frac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}} \\ \Leftrightarrow \tan(A + B) &= \frac{\frac{\sin A \cdot \cancel{\cos B}}{\cancel{\cos A} \cdot \cancel{\cos B}} + \frac{\cancel{\cos A} \cdot \sin B}{\cancel{\cos A} \cdot \cancel{\cos B}}}{\frac{\cancel{\cos A} \cdot \cancel{\cos B}}{\cancel{\cos A} \cdot \cancel{\cos B}} - \frac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}} \\ \Leftrightarrow \tan(A + B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - (\tan A \cdot \tan B)} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dapat Anda temukan rumus $\tan(A - B)$. Perhatikan langkah-langkah berikut.

$$\begin{aligned} \tan(A - B) &= \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} \Rightarrow \text{karena } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \Leftrightarrow \tan(A - B) &= \frac{\sin C \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B} \times \frac{\frac{1}{\cos A \cdot \cos B}}{\frac{1}{\cos A \cdot \cos B}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \tan(A - B) = \frac{\frac{\sin A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} - \frac{\cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}{\frac{\cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B} + \frac{\cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B}}$$

$$\Leftrightarrow \tan(A - B) = \frac{\frac{\sin A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} - \frac{\cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}{\frac{\sin A \cdot \cancel{\cos B}}{\cos A \cdot \cancel{\cos B}} + \frac{\cancel{\cos A} \cdot \sin B}{\cancel{\cos A} \cdot \cos B}}$$

$$\Leftrightarrow \tan(A - B) = \frac{\frac{\sin A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} - \frac{\cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}{\frac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B} + \frac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}$$

$$\Leftrightarrow \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + (\tan A \cdot \tan B)}$$

Kesimpulan:

Hubungan jumlah dan selisih sudut pada tangen dapat dirumuskan sebagai berikut.

Bertanda sama

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - (\tan A \cdot \tan B)}$$

Bertanda berlawanan

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + (\tan A \cdot \tan B)}$$

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai sudut tertentu (sudut yang merupakan penjumlahan atau pengurangan sudut istimewa) tanpa menggunakan kalkulator. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh 1:

Tentukan nilai $\tan 15^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \tan 15^\circ &= \tan(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{3} \\
 &= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \\
 &= \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} \\
 &= \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} \\
 &= 2 - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Contoh 2:

Tentukan hasil dari $\frac{\tan(a+b) - \tan b}{1 + \tan(a+b) \cdot \tan b}$.

Penyelesaian:

$$\frac{\tan(a+b) - \tan b}{1 + \tan(a+b) \cdot \tan b} = \tan((a + b) - b) = \tan a$$

Contoh 3:

Tentukan hasil dari $\tan(45^\circ + A)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \tan(45^\circ + A) &= \frac{\tan 45^\circ + \tan A}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan A} \\
 &= \frac{1 + \tan A}{1 - 1 \cdot \tan A} \\
 &= \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}
 \end{aligned}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 7. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 5

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan nilai dari:

1. $\tan(45^\circ + x)$
2. $\tan 75^\circ$
3. $\tan(-15^\circ)$
4. $\tan 105^\circ$
5. $\tan 195^\circ$
6. $\frac{\tan(a+b) - \tan(a-b)}{1 + \tan(a+b) \cdot \tan(a-b)}$
7. $\frac{\tan 125^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 125^\circ \cdot \tan 15^\circ}$

8. $\frac{\tan 250^\circ - \tan 70^\circ}{1 + \tan 250^\circ \cdot \tan 70^\circ}$
9. $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$
10. $\tan 75^\circ + \tan 15^\circ$

Kunci jawaban latihan 5

1. $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$
2. $2 + \sqrt{3}$
3. $-(2 - \sqrt{3})$
4. $-(2 + \sqrt{3})$
5. $2 - \sqrt{3}$
6. $\tan 2b$
7. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
8. 0
9. $\sqrt{3}$
10. 4

Kegiatan Pembelajaran 8:**Rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Dua Sudut pada Tangen (Bagian 2)****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Melalui kegiatan pembelajaran 8, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut pada tangen serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Kegiatan pembelajaran 8 ini masih membahas materi utama mengenai rumus jumlah dan selisih sudut pada tangen. Tentunya Anda masih ingat rumus berikut.

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 + (\tan A \cdot \tan B)}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + (\tan A \cdot \tan B)}$$

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai penjumlahan atau pengurangan dari dua sudut tertentu (tanpa Anda mengetahui besar sudut yang dijumlahkan atau dikurangkan). Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh 1:

Diketahui $\tan A = \frac{3}{5}$ dan $\cos B = \frac{12}{13}$ dengan A dan B adalah sudut lancip. Tentukan nilai dari $\tan(A - B)$.

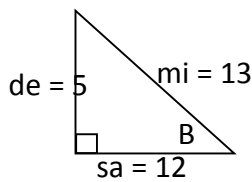
Penyelesaian:

Perhatikan jenis sudut A dan B.

B sudut lancip artinya sudut berada di kuadran I

$$\cos B = \frac{sa}{mi} = \frac{12}{13} \text{ (cos bernilai positif di kuadran I)}$$

Gunakan segitiga siku-siku untuk mendapatkan nilai $\tan B$.



$$\tan B = \frac{de}{sa} = \frac{5}{12} \text{ (tan bernilai positif di kuadran I)}$$

$$\text{Sehingga, } \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

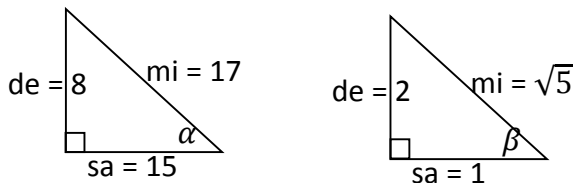
$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{3}{5} - \frac{5}{12}}{1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12}} \\ &= \frac{\frac{36 - 25}{60}}{1 + \frac{15}{60}} \\ &= \frac{\frac{36 - 25}{60}}{1 + \frac{15}{60}} \cdot \frac{60}{60} \\ &= \frac{36 - 25}{60 + 15} \\ &= \frac{11}{75} \end{aligned}$$

Contoh 2:

Diketahui $\sin \alpha = -\frac{8}{17}$ dan $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dengan α merupakan sudut tumpul dan β merupakan sudut lancip. Tentukan $\tan(\alpha + \beta)$ dan $\tan(\alpha - \beta)$.

Penyelesaian:

Gunakan segitiga siku-siku untuk mendapatkan nilai $\tan \alpha$ dan $\tan \beta$.



$$\tan \alpha = \frac{de}{sa} = -\frac{8}{15} \text{ (tan bernilai negatif di kuadran II)}$$

$$\tan \beta = \frac{de}{sa} = 2 \text{ (tan bernilai positif di kuadran I)}$$

Sehingga:

$$\triangleright \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-\frac{8}{15} - 2}{1 + \left(-\frac{8}{15} \cdot 2\right)} \times \frac{15}{15} \\ &= \frac{-8 - 30}{15 + (-16)} \\ &= \frac{-38}{-1} \\ &= 38 \end{aligned}$$

$$\triangleright \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-\frac{8}{15} + 2}{1 - \left(-\frac{8}{15} \cdot 2\right)} \times \frac{15}{15} \\ &= \frac{-8 + 30}{15 - (-16)} \\ &= \frac{22}{31} \end{aligned}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 8. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 6

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan penyelesaian dari masalah berikut.

Diketahui $\cos A = \frac{5}{13}$ dan $\sin B = \frac{4}{5}$. Jika sudut A dan B lancip, maka:

1. Tentukan nilai $\tan(A + B)$.
2. Tentukan nilai $\tan(A - B)$.

Diberikan nilai $\tan x = 3$ dan $\tan y = \frac{1}{2}$. Tentukan nilai:

3. Tentukan nilai $\tan(x + y)$.
4. Tentukan nilai $\tan(x - y)$.
5. Diketahui $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ dan $\tan \beta = \frac{1}{3}$. Tentukan nilai $\tan(\alpha + \beta)$ & $\tan(\beta - \alpha)$.
6. Diketahui $A + B + C = 180^\circ$, $\tan A = 2$, dan $\tan B = 3$. Tentukan nilai dari $\tan C$.
7. Jika $2x + y = \frac{1}{4}\pi$, maka tentukan nilai dari $\tan 2x$.
8. Diketahui $\tan x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Tentukan nilai dari $\tan(x - 30^\circ)$.
9. Tentukan nilai dari $(1 + \tan A)(1 + \tan B)$ jika $A + B = 45^\circ$.
10. Segitiga ABC siku-siku di C. Jika $\sin A = k$, maka tentukan nilai $\tan(A - B)$.

Kunci jawaban latihan 6

1. $-\frac{56}{33}$
2. $\frac{16}{63}$
3. -7
4. 1
5. $\tan(\alpha + \beta) = 1$
 $\tan(\beta - \alpha) = -\frac{1}{7}$
6. 1
7. $\frac{1 - \tan y}{1 + \tan y}$
8. $\frac{\sqrt{3}}{9}$
9. 2
10. $\frac{1}{2} \frac{(2k^2 - 1)\sqrt{1 - k^2}}{k(1 - k^2)}$

Kegiatan Pembelajaran 9:**Tes Formatif 3 (Rumus Jumlah dan Selisih Sudut pada Tangen)****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Mengetahui penguasaan materi yang berkaitan dengan rumus jumlah dan selisih sudut pada tangen.

Untuk mengetahui penguasaan Anda terhadap materi ini, ikuti petunjuk berikut.

1. Bukalah google formulir dengan link:
<https://forms.gle/iwcpRKp1rpdjmX6eA>
2. Bacalah petunjuknya dengan seksama

Kunci jawaban tes formatif 3

Kunci jawaban tes formatif 3 akan tampil setelah Anda memberikan jawaban pada setiap butir soal yang disajikan.

Umpan balik

Periksalah nilai tes formatif Anda. Tingkat penguasaan materi = nilai tes formatif.

Pengelompokan tingkat penguasaan materi:

93% - 100% : baik sekali

84% - 92% : baik

75% - 83% : cukup

< 75% : kurang

Apabila tingkat pemahaman Anda mencapai 75% atau lebih, Anda dapat melanjutkan dengan mempelajari materi pada kegiatan pembelajaran 10. Apabila tingkat pemahaman Anda masih di bawah 75%, maka Anda harus mengulangi kembali materi kegiatan pembelajaran 7 dan 8 (terutama bagian yang belum Anda kuasai).

Kegiatan Pembelajaran 10:**Rumus Trigonometri Sudut Rangkap (Bagian 1)****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Melalui kegiatan pembelajaran 10, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan rumus trigonometri sudut rangkap pada sinus serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada bagian ini Anda akan mempelajari rumus trigonometri untuk rumus trigonometri sudut rangkap, yaitu $\sin 2A$. Dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut yang telah Anda pelajari sebelumnya, Anda akan dapat memperoleh rumus $\sin 2A$. Perhatikan uraian berikut.

Anda pasti masih mengingat rumus $\sin(A + B)$, bahwa $\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$.

Apabila $B = A$, maka Anda dapatkan:

$$\Leftrightarrow \sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$$

$$\Leftrightarrow \sin(A + A) = \sin A \cdot \cos A + \cos A \cdot \sin A$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A = \sin A \cdot \cos A + \sin A \cdot \cos A$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A = 2 \cdot \sin A \cdot \cos A$$

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai sudut tertentu (sudut yang dua kalinya merupakan sudut istimewa) tanpa menggunakan kalkulator. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

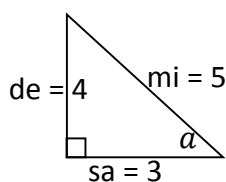
Contoh 1:

Diketahui $\tan a = -\frac{4}{3}$ dengan a di kuadran II. Tentukan nilai $\sin 2a$.

Penyelesaian:

Ingatlah bahwa $\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$.

Gunakan segitiga siku-siku untuk mendapatkan nilai $\sin a$ dan $\cos a$.



$$\sin a = \frac{de}{mi} = \frac{4}{5} \text{ (sin bernilai positif di kuadran II)}$$

$$\cos a = \frac{sa}{mi} = \frac{3}{5} \text{ (cos bernilai negatif di kuadran I)}$$

Sehingga:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \left(\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

Contoh 2:

Diketahui $\cos 2a = \frac{7}{25}$ dengan a di kuadran I. Tentukan nilai $\sin a$.

Penyelesaian:

$$\cos 2a = \frac{7}{25}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 a = \frac{7}{25}$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin^2 a = \frac{7}{25} - 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin^2 a = \frac{7}{25} - \frac{25}{25}$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin^2 a = -\frac{18}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 a = \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sin a = \pm \frac{3}{5}$$

Jadi, nilai $\sin a$ yang memenuhi adalah $\frac{3}{5}$ (diambil nilai positif karena a di kuadran I).

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 10. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 7

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Selesaikan permasalahan berikut.

1. Diketahui $\sin A = \frac{4}{5}$ dengan $0 < A < \frac{\pi}{2}$. Tentukan nilai $\sin 2A$.
2. Diberikan nilai $\tan x = -\frac{1}{3}$ dengan x adalah sudut tumpul. Tentukan nilai $\sin 2x$.
3. Jika $\sin x = p$ dan x sudut lancip, maka tentukan nilai $\sin 2x$.
4. Tentukan nilai dari $2 \sin(x - 60^\circ) \cos(x - 60^\circ)$.
5. Jika nilai dari $\cos \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, tentukan nilai dari $\sin a$.

Kunci jawaban latihan 7

1. $\frac{24}{25}$
2. $-\frac{3}{5}$
3. $2p\sqrt{1-p^2}$

4. $-\frac{1}{2}(\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x)$
5. $\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x^2}$

Kegiatan Pembelajaran 11:

Rumus Trigonometri Sudut Rangkap (Bagian 2)

Tujuan kegiatan pembelajaran

Melalui kegiatan pembelajaran 11, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan rumus trigonometri sudut rangkap pada cosinus serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada bagian ini Anda akan mempelajari rumus trigonometri untuk rumus trigonometri sudut rangkap, yaitu $\cos 2A$. Dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut yang telah Anda pelajari sebelumnya, Anda akan dapat memperoleh rumus $\cos 2A$. Perhatikan uraian berikut.

Anda pasti masih mengingat rumus $\cos(A + B)$, bahwa $\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$.

Apabila $B = A$, maka Anda dapatkan:

$$\begin{aligned}\cos(A + B) &= \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \\ \Leftrightarrow \cos(A + A) &= \cos A \cdot \cos A - \sin A \cdot \sin A \\ \Leftrightarrow \cos 2A &= \cos A \cdot \cos A - \sin A \cdot \sin A \\ \Leftrightarrow \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A\end{aligned}$$

Rumus $\cos 2A$ dapat juga dinyatakan dalam bentuk yang lain.

Ingatlah bahwa $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ (identitas trigonometri).

$$\begin{aligned}\text{Maka, } \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ \Leftrightarrow \cos 2A &= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A \\ \Leftrightarrow \cos 2A &= 1 - 2 \sin^2 A\end{aligned}$$

Jika Anda menggunakan identitas trigonometri yang lain, yaitu $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$, maka Anda peroleh:

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ \Leftrightarrow \cos 2A &= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) \\ \Leftrightarrow \cos 2A &= 2 \cos^2 A - 1\end{aligned}$$

Kesimpulan:

Rumus trigonometri sudut rangkap pada cosinus adalah sebagai berikut.

- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$
- $\cos 2A = 2 \cdot \cos^2 A - 1$
- $\cos 2A = 1 - 2 \cdot \sin^2 A$

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai sudut tertentu (sudut yang dua kalinya merupakan sudut istimewa) tanpa menggunakan kalkulator. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh 1:

Jika $\sin A = \frac{3}{5}$ dengan A adalah sudut lancip, tentukan nilai dari $\cos 2A$.

Penyelesaian:

$$\cos 2A = 1 - 2 \cdot \sin^2 A$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \frac{25 - 18}{25}$$

$$= \frac{7}{25}$$

Atau

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Gunakan segitiga siku-siku untuk mendapatkan nilai $\cos A$.

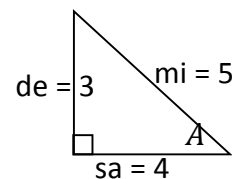
$$\cos \alpha = \frac{sa}{mi} = \frac{4}{5} \text{ (cos bernilai positif di kuadran I)}$$

Sehingga, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \frac{16-9}{25}$$

$$= \frac{7}{25}$$



Contoh 2:

Tentukan nilai dari $\cos^2 22,5^\circ - \sin^2 22,5^\circ$ tanpa menggunakan alat bantu hitung.

Penyelesaian:

Ingatlah bahwa $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } \cos^2 22,5^\circ - \sin^2 22,5^\circ &= \cos(2 \cdot 22,5^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 11. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 8

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini. Selesaikan permasalahan berikut.

1. Diketahui $\sin A = \frac{4}{5}$ dengan $0 < \pi < \frac{\pi}{2}$. Tentukan nilai $\cos 2A$.
2. Tentukan nilai dari $\cos^2 67,5^\circ - \sin^2 67,5^\circ$.
3. Tentukan nilai dari $(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)$.
4. Jika nilai dari $\tan A = p$ dan A di kuadran I, tentukan nilai dari $\cos 2A$.
5. Sederhanakan bentuk $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin^2 \alpha$.

Petunjuk: Gunakan relasi sudut pada kuadran I terlebih dahulu.

Kunci jawaban latihan 8

1. $-\frac{7}{25}$
2. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
3. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
4. $\frac{1-p^2}{p^2+1}$
5. $\cos 2\alpha$

Kegiatan Pembelajaran 12:

Rumus Trigonometri Sudut Rangkap (Bagian 3)

Tujuan kegiatan pembelajaran

Melalui kegiatan pembelajaran 12, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan rumus trigonometri sudut rangkap pada tangen serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada bagian ini Anda akan mempelajari rumus trigonometri untuk rumus trigonometri sudut rangkap, yaitu $\tan 2A$. Dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih dua sudut yang telah Anda pelajari sebelumnya, Anda akan dapat memperoleh rumus $\tan 2A$. Perhatikan uraian berikut.

Anda pasti masih mengingat rumus $\tan(A + B)$, bahwa $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 + (\tan A \cdot \tan B)}$

Apabila $B = A$, maka Anda dapatkan:

$$\begin{aligned} \tan(A + B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 + (\tan A \cdot \tan B)} \\ \Leftrightarrow \tan(A + A) &= \frac{\tan A + \tan A}{1 + (\tan A \cdot \tan A)} \\ \Leftrightarrow \tan 2A &= \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \end{aligned}$$

Atau rumus $\tan 2A$ dapat juga Anda peroleh dengan menggunakan rumus tangen,

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Apabila $x = 2A$, maka Anda dapatkan:

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \Leftrightarrow \tan 2A &= \frac{\sin 2A}{\cos 2A} \end{aligned}$$

Mengingat bahwa $\sin 2A = 2 \cdot \sin A \cdot \cos A$ dan $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$\begin{aligned} \tan 2A &= \frac{\sin 2A}{\cos 2A} \\ &= \frac{2 \cdot \sin A \cdot \cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A} \times \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 A}} \\ &= \frac{2 \cdot \sin A \cdot \cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 A}} \\ &= \frac{2 \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \cos^2 A}{\cos^2 A \cdot (\cos^2 A - \sin^2 A)} \\ &= \frac{2 \cdot \sin A \cdot \cos^3 A}{\cos^2 A \cdot (\cos^2 A - \sin^2 A)} \\ &= \frac{2 \cdot \sin A \cdot \cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A} \\ &= \frac{2 \cdot \tan A}{1 - \tan^2 A} \end{aligned}$$

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

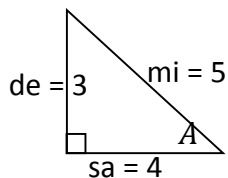
Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai sudut tertentu (sudut yang dua kalinya merupakan sudut istimewa) tanpa menggunakan kalkulator. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh 1:

Jika $\sin A = \frac{3}{5}$ dengan A adalah sudut lancip, tentukan nilai dari $\tan 2A$.

Penyelesaian:

Gunakan segitiga siku-siku untuk mendapatkan nilai $\tan A$.



$$\tan \alpha = \frac{de}{sa} = \frac{3}{4} \text{ (tan bernilai positif di kuadran I)}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \cdot \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$= \frac{2 \left(\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{6}{4}}{1 - \frac{9}{16}} \times \frac{16}{16}$$

$$= \frac{24}{16 - 9}$$

$$= \frac{24}{7}$$

Contoh 2:

Tentukan nilai dari $\frac{2 \tan 75^\circ}{1 - \tan^2 75^\circ}$ tanpa menggunakan alat bantu hitung.

Penyelesaian:

Ingatlah bahwa $\tan 2A = \frac{2 \cdot \tan A}{1 - \tan^2 A}$.

Sehingga $\frac{2 \tan 75^\circ}{1 - \tan^2 75^\circ} = \tan(2 \cdot 75^\circ)$

$$= \tan 150^\circ$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 12. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 9

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini. Selesaikan permasalahan berikut.

1. Misal $y = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$. Tentukan nilai y jika $x = 112,5^\circ$.
2. Tentukan nilai dari $\frac{4\tan 22,5^\circ}{1-\tan^2 22,5^\circ}$.
3. Jika diketahui $2 \tan \frac{1}{2}x = 1$ untuk x di kuadran I. Tentukan nilai dari $\tan x$.
4. Jika diketahui $2 \tan \frac{1}{2}x = 1$ untuk x di kuadran I. Tentukan nilai dari $\tan 2x$.
5. Jika $\sin p = \frac{2}{\sqrt{5}}$ dengan $0^\circ < p < 90^\circ$, maka tentukan nilai dari $\tan 2p$.

Kunci jawaban latihan 9

1. 1
2. 2
3. $\frac{4}{3}$
4. $-\frac{24}{7}$
5. $-\frac{4}{3}$

Kegiatan Pembelajaran 13:

Rumus Trigonometri Setengah Sudut

Tujuan kegiatan pembelajaran

Melalui kegiatan pembelajaran 13, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan rumus trigonometri setengah sudut serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada bagian ini Anda akan mempelajari rumus trigonometri untuk rumus trigonometri setengah sudut, yaitu $\sin \frac{1}{2}A$, $\cos \frac{1}{2}A$, dan $\tan \frac{1}{2}A$. Dengan menggunakan rumus sudut rangkap yang telah Anda pelajari sebelumnya, Anda akan dapat memperoleh rumus setengah sudut.

Rumus $\sin \frac{1}{2}A$ dapat Anda peroleh dari rumus $\cos 2A = 1 - 2 \cdot \sin^2 A$. Perhatikan uraian berikut.

$$\begin{aligned} \cos 2A &= 1 - 2 \cdot \sin^2 A \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \sin^2 A &= 1 - \cos 2A \\ \Leftrightarrow \sin^2 A &= \frac{1 - \cos 2A}{2} \\ \Leftrightarrow \sin A &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{2}} \end{aligned}$$

Persamaan di atas boleh juga ditulis $\sin \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$

Rumus $\cos \frac{1}{2}A$ dapat Anda peroleh dari rumus $\cos 2A = 2 \cdot \cos^2 A - 1$.

Perhatikan uraian berikut.

$$\begin{aligned} \cos 2A &= 2 \cdot \cos^2 A - 1 \\ \Leftrightarrow 1 + \cos 2A &= 2 \cdot \cos^2 A \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2A}{2} &= \cos^2 A \\ \Leftrightarrow \cos^2 A &= \frac{1 + \cos 2A}{2} \\ \Leftrightarrow \cos A &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2A}{2}} \end{aligned}$$

Persamaan di atas boleh juga ditulis $\cos \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$

Rumus $\tan \frac{1}{2}A$ dapat Anda peroleh dari rumus $\tan \frac{1}{2}A = \frac{\sin \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}A}$. Perhatikan uraian berikut.

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2}A &= \frac{\sin \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}A} \\ \Leftrightarrow \tan \frac{1}{2}A &= \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}} \\ \Leftrightarrow \tan \frac{1}{2}A &= \pm \sqrt{\frac{\frac{1 - \cos A}{2}}{\frac{1 + \cos A}{2}}} \times \frac{2}{2} \\ \Leftrightarrow \tan \frac{1}{2}A &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \end{aligned}$$

Kesimpulan:

Rumus trigonometri setengah sudut adalah sebagai berikut.

$$\triangleright \sin \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\triangleright \cos \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\triangleright \tan \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan nilai sudut tertentu (sudut yang dua kalinya merupakan sudut istimewa) tanpa menggunakan kalkulator. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh 1:

Tentukan nilai dari $\sin 22\frac{1}{2}^{\circ}$.

Penyelesaian:

Gunakan rumus: $\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

$\sin 22\frac{1}{2}^{\circ}$ tidak negatif, maka:

$$\begin{aligned}\sin 22\frac{1}{2}^{\circ} &= \sqrt{\frac{1-\cos\left(2 \cdot 22\frac{1}{2}^{\circ}\right)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1-\cos 45^{\circ}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Contoh 2:

Tentukan nilai dari $\cos 157,5^\circ$.

Penyelesaian:

Gunakan rumus: $\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

$\cos 157,5^\circ$ bernilai negatif, maka:

$$\begin{aligned}\cos 157,5^\circ &= -\sqrt{\frac{1+\cos(2 \cdot 157,5^\circ)}{2}} \\ &= -\sqrt{\frac{1+\cos 315^\circ}{2}} \\ &= -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{2}} \\ &= -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Contoh 3:

Diketahui $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ dengan α merupakan sudut lancip.

Tentukan:

- $\sin \frac{\alpha}{2}$
- $\tan \frac{\alpha}{2}$

Penyelesaian:

Diketahui α merupakan sudut lancip, artinya α terletak pada kuadran I. Maka, sin dan cos diambil nilai positif.

$$\begin{aligned}\text{a. } \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{10}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{b. } \tan \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{5}}{\frac{9}{5} \cdot \frac{5}{5}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 13. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 10

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.
Selesaikan permasalahan berikut.

1. Tentukan nilai dari:
 - a. $\sin 67,5^\circ$
 - b. $\cos 75^\circ$
 - c. $\tan 165^\circ$
 - d. $\tan 22,5^\circ$
2. Diketahui $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ dengan α sudut lancip. Tentukan nilai dari:
 - a. $\sin \frac{\alpha}{2}$
 - b. $\cos \frac{\alpha}{2}$
 - c. $\tan \frac{\alpha}{2}$
3. Diketahui $\cos 2\alpha = \frac{12}{13}$ dengan α sudut lancip. Tentukan nilai dari:
 - a. $\sin \alpha$
 - b. $\cos \alpha$
 - c. $\tan \alpha$
4. Tentukan nilai $\tan A$ jika nilai $\cos 2A = \frac{1}{3}$, untuk $\frac{\pi}{2} < A < \pi$.

Kunci jawaban latihan 10

1.
 - a. $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
 - b. $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
 - c. $-\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$
 - d. $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$
2.
 - a. $\frac{1}{10}\sqrt{10}$
 - b. $\frac{3}{10}\sqrt{10}$
 - c. $\frac{1}{3}$
3.
 - a. $\frac{1}{26}\sqrt{26}$
 - b. $\frac{5}{26}\sqrt{26}$
 - c. $\frac{1}{5}$
4. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Kegiatan Pembelajaran 14:**Tes Formatif 4 (Rumus Trigonometri Sudut Rangkap & Setengah Sudut)****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Mengetahui penguasaan materi yang berkaitan dengan rumus trigonometri sudut rangkap dan setengah sudut.

Untuk mengetahui penguasaan Anda terhadap materi ini, ikuti petunjuk berikut.

1. Bukalah google formulir dengan link:
<https://forms.gle/FDVRoq7awp6PnuGm8>
2. Bacalah petunjuknya dengan seksama

Kunci jawaban tes formatif 4

Kunci jawaban tes formatif 4 akan tampil setelah Anda memberikan jawaban pada setiap butir soal yang disajikan.

Umpan balik

Periksalah nilai tes formatif Anda. Tingkat penguasaan materi = nilai tes formatif.

Pengelompokan tingkat penguasaan materi:

93% - 100% : baik sekali

84% - 92% : baik

75% - 83% : cukup

< 75% : kurang

Apabila tingkat pemahaman Anda mencapai 75% atau lebih, Anda dapat melanjutkan dengan mempelajari materi pada kegiatan pembelajaran 15. Apabila tingkat pemahaman Anda masih di bawah 75%, maka Anda harus mengulangi kembali materi kegiatan pembelajaran 10, 11, 12, dan 13 (terutama bagian yang belum Anda kuasai).

Kegiatan Pembelajaran 15:**Rumus Perkalian Sinus dan Cosinus****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Melalui kegiatan pembelajaran 15, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan rumus perkalian sinus dan cosinus serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada bagian ini Anda akan mempelajari rumus trigonometri untuk rumus perkalian sinus dan cosinus. Dengan menggunakan rumus jumlah dan selisih sudut yang telah Anda pelajari sebelumnya, Anda akan dapat memperoleh rumus perkalian sinus dan cosinus.

Tentunya Anda masih ingat rumus penjumlahan dan selisih sudut pada sinus berikut.

$$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$$

Dengan menjumlahkan serta mengurangkan $\sin(A + B)$ dan $\sin(A - B)$, akan Anda peroleh rumus perkalian sinus dan cosinus. Perhatikan uraian berikut.

Pertama, Anda jumlahkan $\sin(A + B)$ dan $\sin(A - B)$. Maka Anda peroleh:

$$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cancel{\cos A \cdot \sin B}$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \cancel{\cos A \cdot \sin B} +$$

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \cdot \sin A \cdot \cos B$$

Kedua, Anda kurangkan $\sin(A + B)$ dan $\sin(A - B)$. Maka Anda peroleh:

$$\sin(A + B) = \cancel{\sin A \cdot \cos B} + \cos A \cdot \sin B$$

$$\sin(A - B) = \cancel{\sin A \cdot \cos B} - \cos A \cdot \sin B -$$

$$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cdot \cos A \cdot \sin B$$

Rumus perkalian sinus dan cosinus lainnya dapat Anda peroleh dari rumus penjumlahan dan selisih sudut pada cosinus. Tentunya Anda masih ingat rumus:

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

Dengan menjumlahkan serta mengurangkan $\cos(A + B)$ dan $\cos(A - B)$, akan Anda peroleh rumus perkalian sinus dan cosinus. Perhatikan uraian berikut.

Pertama, Anda jumlahkan $\cos(A + B)$ dan $\cos(A - B)$. Maka Anda peroleh:

$$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \cancel{\sin A \cdot \sin B}$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \cancel{\sin A \cdot \sin B} +$$

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cdot \cos A \cdot \cos B$$

Kedua, Anda kurangkan $\cos(A + B)$ dan $\cos(A - B)$. Maka Anda peroleh:

$$\cos(A + B) = \cancel{\cos A \cdot \cos B} - \sin A \cdot \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cancel{\cos A \cdot \cos B} + \sin A \cdot \sin B -$$

$$\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2 \cdot \sin A \cdot \sin B$$

Kesimpulan:

Rumus perkalian sinus dan cosinus adalah sebagai berikut.

- $2 \cdot \sin A \cdot \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$
- $2 \cdot \cos A \cdot \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$
- $2 \cdot \cos A \cdot \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$
- $-2 \cdot \sin A \cdot \sin B = \cos(A + B) - \cos(A - B)$

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan hasil perkalian sinus dan cosinus dengan sudut tertentu (sudut yang jumlah dan selisihnya merupakan sudut istimewa) tanpa menggunakan kalkulator. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh 1:

Hitunglah nilai dari $-2 \sin 37,5^\circ \sin 7,5^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} -2 \sin 37,5^\circ \sin 7,5^\circ &= \cos(37,5^\circ + 7,5^\circ) - \cos(37,5^\circ - 7,5^\circ) \\ &= \cos 45^\circ - \cos 30^\circ \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Contoh 2:

Hitunglah nilai dari $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ \cos 15^\circ &= \frac{1}{2}(\cos(75^\circ + 15^\circ) + \cos(75^\circ - 15^\circ)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos 90^\circ + \cos 60^\circ) \\ &= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Contoh 3:

Hitunglah nilai dari $-8 \sin 75^\circ \cos 15^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} -8 \sin 75^\circ \cos 15^\circ &= -4(2 \cdot \sin 75^\circ \cos 15^\circ) \\ &= -4(\sin(75^\circ + 15^\circ) + \sin(75^\circ - 15^\circ)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -4(\sin 90^\circ + \sin 60^\circ) \\ &= -4\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\ &= -4 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Contoh 4:

Hitunglah nilai dari $2 \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 2 \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ &= \cos 80^\circ (2 \cdot \cos 40^\circ \cos 20^\circ) \\ &= \cos 80^\circ (\cos(40^\circ + 20^\circ) + \cos(40^\circ - 20^\circ)) \\ &= \cos 80^\circ (\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) \\ &= \cos 80^\circ \left(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ\right) \\ &= \frac{1}{2} \cos 80^\circ + \cos 20^\circ \cos 80^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cos 80^\circ + \frac{1}{2} (\cos(20^\circ + 80^\circ) + \cos(20^\circ - 80^\circ)) \\ &= \frac{1}{2} \cos 80^\circ + \frac{1}{2} (\cos 100^\circ + \cos(-60^\circ)) \\ &= \frac{1}{2} \cos 80^\circ + \frac{1}{2} \left(\cos 100^\circ + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cos 80^\circ + \frac{1}{2} \cos 100^\circ + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\cos \frac{80^\circ + 100^\circ}{2} \cos \frac{80^\circ - 100^\circ}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} (\cos 90^\circ \cos(-10^\circ)) \\ &= \frac{1}{4} + 0 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 15. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 11

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Tentukan nilai dari:

1. $2 \sin 22,5^\circ \cos 22,5^\circ$
2. $-2 \sin 105^\circ \sin 75^\circ$

3. $2 \cos 15^\circ \cos 285^\circ$
4. $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$
5. $8 \cos 82\frac{1}{2}^\circ \sin 37\frac{1}{2}^\circ$
6. $2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
7. $\cos 67^\circ \sin 68^\circ + \cos 23^\circ \sin 22^\circ$
8. $2(\sin 50^\circ \cos 40^\circ + \cos 80^\circ \sin 70^\circ)$
9. $\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 70^\circ \sin 50^\circ$
10. $\cos 75^\circ \sin 15^\circ + \sin 75^\circ \cos 15^\circ$

Kunci jawaban latihan 11

1. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
2. $-\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{4}$
5. $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
6. $\cos 4x$
7. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
8. $\frac{3}{2}$
9. 0
10. 1

Kegiatan Pembelajaran 16:**Rumus Penjumlahan dan Pengurangan Sinus dan Cosinus****Tujuan kegiatan pembelajaran**

Melalui kegiatan pembelajaran 16, Anda diharapkan dapat menghayati, mengamalkan ajaran agama yang dianutnya dalam menjelaskan dan menentukan penyelesaian yang berkaitan dengan rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan cosinus serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan penggunaan rumus tersebut secara jujur, teliti, kreatif, dan bertanggungjawab.

Uraian materi

Sebelum mempelajari uraian materi berikut, berdo'alah terlebih dahulu. Semoga Anda dimudahkan dalam memahami materi ini. Aamiin.

Pada bagian ini Anda akan mempelajari rumus trigonometri untuk penjumlahan dan pengurangan sinus dan cosinus. Dengan menggunakan rumus perkalian sinus dan cosinus yang telah Anda pelajari sebelumnya, Anda akan dapat memperoleh rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan cosinus.

Tentunya Anda masih ingat rumus perkalian sinus dan cosinus berikut.

- $2 \cdot \sin A \cdot \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$
- $2 \cdot \cos A \cdot \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$
- $2 \cdot \cos A \cdot \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$
- $-2 \cdot \sin A \cdot \sin B = \cos(A + B) - \cos(A - B)$

Dari rumus di atas, dapat Anda kembangkan menjadi rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan cosinus. Perhatikan uraian berikut.

Anda misalkan $A + B = x$ dan $A - B = y$. Selanjutnya, Anda tentukan nilai $x + y$ dan $x - y$

$x + y$ senilai dengan:

$$A + B = x$$

$$A - B = y \pm$$

$$2A = x + y$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{2}(x + y)$$

dan

$x - y$ senilai dengan:

$$A + B = x$$

$$A - B = y -$$

$$2B = x - y$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{1}{2}(x - y)$$

Maka dapat dengan mudah Anda peroleh rumus berikut.

- $2 \cdot \sin A \cdot \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$
- $\Leftrightarrow 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x - y)\right) = \sin x + \sin y$

Atau boleh juga ditulis $\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x - y)\right)$

Dengan langkah yang sama, rumus penjumlahan dan pengurangan lainnya dapat Anda dapatkan.

- $2 \cdot \cos A \cdot \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$
- $\Leftrightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - y)\right) = \sin x - \sin y$

Atau boleh juga ditulis $\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - y)\right)$

- $2 \cdot \cos A \cdot \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$
- $\Leftrightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x - y)\right) = \cos x + \cos y$

Atau boleh juga ditulis $\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x - y)\right)$

$$\begin{aligned} &\triangleright -2 \cdot \sin A \cdot \sin B = \cos(A + B) + \cos(A - B) \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - y)\right) = \cos x + \cos y \end{aligned}$$

Atau boleh juga ditulis $\cos x + \cos y = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x - y)\right)$

Kesimpulan:

Rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan cosinus sebagai berikut.

- $\triangleright \sin A + \sin B = 2 \cdot \sin\frac{1}{2}(A + B) \cdot \cos\frac{1}{2}(A - B)$
- $\triangleright \sin A - \sin B = 2 \cdot \cos\frac{1}{2}(A + B) \cdot \sin\frac{1}{2}(A - B)$
- $\triangleright \cos A + \cos B = 2 \cdot \cos\frac{1}{2}(A + B) \cdot \cos\frac{1}{2}(A - B)$
- $\triangleright \cos A - \cos B = -2 \cdot \sin\frac{1}{2}(A + B) \cdot \sin\frac{1}{2}(A - B)$

Pembahasan lebih mendalam mengenai penggunaan rumus di atas akan diuraikan pada contoh soal di bawah ini.

Contoh soal & pembahasan

Rumus di atas Anda perlukan untuk menentukan hasil penjumlahan dan pengurangan sinus dan cosinus dengan sudut tertentu (sudut yang setengah jumlah atau selisihnya merupakan sudut istimewa) tanpa menggunakan kalkulator. Agar lebih memahami materi ini, perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh 1:

Nyatakan bentuk berikut dalam bentuk perkalian.

- a. $\sin 6x + \sin 2x$
- b. $\cos 4x - \cos 2x$

Penyelesaian:

- a. $\sin 6x + \sin 2x = 2 \sin 4x \cos 2x$
- b. $\cos 4x - \cos 2x = -2 \sin 3x \sin x$

Contoh 2:

Hitunglah nilai dari $\cos 195^\circ + \cos 105^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \cos 195^\circ + \cos 105^\circ &= 2 \cdot \cos\frac{1}{2}(195^\circ + 105^\circ) \cdot \cos\frac{1}{2}(195^\circ - 105^\circ) \\ &= 2 \cdot \cos\frac{1}{2}(300^\circ) \cdot \cos\frac{1}{2}(90^\circ) \\ &= 2 \cdot \cos 150^\circ \cdot \cos 45^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left(-\frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{6} \end{aligned}$$

Contoh 3:

Hitunglah nilai dari $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \sin 105^\circ - \sin 15^\circ &= 2 \cdot \cos \frac{1}{2} (105^\circ + 15^\circ) \cdot \sin \frac{1}{2} (105^\circ - 15^\circ) \\ &= 2 \cdot \cos \frac{1}{2} (120^\circ) \cdot \sin \frac{1}{2} (90^\circ) \\ &= 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Contoh 4:

Sederhanakan bentuk $\frac{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} &\frac{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}{\cos x - \cos 2x + \cos 3x} \\ &= \frac{\sin x + \sin 3x - \sin 2x}{\cos x + \cos 3x - \cos 2x} \\ &= \frac{2 \sin 2x \cos(-x) - \sin 2x}{2 \cos 2x \cos(-x) - \cos 2x} \\ &= \frac{\sin 2x (\cos(-x) - 1)}{\cos 2x (\cos(-x) - 1)} \\ &= \tan 2x \end{aligned}$$

Demikian uraian materi pada kegiatan pembelajaran 16. Akhiri belajar Anda dengan berdo'a, semoga ilmu Anda bermanfaat & barokah. Aamiin.

Latihan 12

Ujilah pemahaman Anda dengan mengerjakan soal-soal di bawah ini.

Nyatakan bentuk berikut dalam bentuk perkalian.

1. $\cos 2x + \cos 6x$
2. $\sin 4x - \sin 2x$

Tentukan hasil dari:

3. $\cos 105^\circ - \cos 15^\circ$
4. $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$
5. $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$
6. $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$
7. $\sin \alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) + \sin(\alpha + 240^\circ)$
8. $-\cos(\alpha + 120^\circ) - \cos \alpha - \cos(\alpha + 240^\circ)$
9. $\frac{\sin 285^\circ - \sin 195^\circ}{\cos 375^\circ + \cos 285^\circ}$
10. $\frac{\sin 5a - \sin 3a}{\cos a + \cos a}$

Kunci jawaban latihan 12

1. $2\cos 4x \cos 2x$
2. $2\cos 3x \sin x$
3. $-\frac{1}{2}\sqrt{6}$
4. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$
5. 0
6. 0
7. 0
8. 0
9. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
10. $\cos 4a \tan a$

Kegiatan Pembelajaran 17:

Tes Formatif 5 (Rumus Trigonometri Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian Sinus & Cosinus)

Tujuan kegiatan pembelajaran

Mengetahui penguasaan materi yang berkaitan dengan penjumlahan, pengurangan, dan perkalian sinus & cosinus rumus trigonometri.

Untuk mengetahui penguasaan Anda terhadap materi ini, ikuti petunjuk berikut.

1. Bukalah google formulir dengan link:
<https://forms.gle/xttWK8CGTKcFwiva8>
2. Bacalah petunjuknya dengan seksama

Kunci jawaban tes formatif 5

Kunci jawaban tes formatif 5 akan tampil setelah Anda memberikan jawaban pada setiap butir soal yang disajikan.

Umpan balik

Periksalah nilai tes formatif Anda. Tingkat penguasaan materi = nilai tes formatif.

Pengelompokan tingkat penguasaan materi:

93% - 100% : baik sekali

84% - 92% : baik

75% - 83% : cukup

< 75% : kurang

Apabila tingkat pemahaman Anda mencapai 75% atau lebih, Anda sudah menguasai materi ini. Apabila tingkat pemahaman Anda masih di bawah 75%, maka Anda harus mengulangi kembali materi kegiatan pembelajaran 15 dan 16 (terutama bagian yang belum Anda kuasai).

C. EVALUASI**1. Penilaian Kognitif**

Untuk mengetahui penguasaan Anda terhadap materi ini, ikuti petunjuk berikut.

1. Bukalah google formulir dengan link:
<https://forms.gle/9uCbuvLjySovnLHb8>
2. Bacalah petunjuknya dengan seksama

Kunci Jawaban

Kunci jawaban evaluasi akan tampil setelah Anda memberikan jawaban pada setiap butir soal yang disajikan.

2. Penilaian Keterampilan

Selesaikan tugas portofolio berikut.

1. Tugas ini bersifat wajib & individu.
2. Buatlah *main mapping* dari seluruh materi yang telah Anda pelajari pada bab ini.
3. Kerjakan pada selembar kertas marmer putih.
4. Sajikan hasil kerja Anda dalam karya yang indah dan rapi.
5. Unggah hasil kerja anda pada link:
<https://forms.gle/BFnwQhiquEb1MdZE9>



3. Penilaian Sikap

Nilai sikap Anda ditentukan dari tanggung jawab dan kedisiplinan Anda dalam melakukan belajar mandiri & ketertiban dalam mengumpulkan tugas.



PENUTUP

Melalui pembelajaran berbasis modul, modul ini diharapkan dapat membantu peserta didik untuk mampu belajar secara mandiri, mengukur kemampuan diri sendiri, dan menilai dirinya sendiri. Tidak terkecuali dalam memahami konsep dasar materi terkait dan implementasinya. Dalam arti lain, adanya sikap kejujuran, tanggung jawab, disiplin, dan rasa ingin tahu sangat penting dalam proses belajar secara mandiri. Semoga modul ini dapat digunakan sebagai referensi dalam proses pembelajaran pada kegiatan pembelajaran, terutama dalam masa pandemi COVID-19. Peserta didik dapat mendalami materi dalam modul ini melalui berbagai sumber, baik buku pelajaran maupun internet.

Semoga modul ini bermanfaat bagi peserta didik khususnya peserta didik Kelas XI MIPA dalam mempelajari “Modul Pembelajaran Matematika Peminatan Kelas XI Semester I”. Tidak lupa pula dalam kesempatan ini, penulis memohon saran dan kritik yang membangun, demi sempurnanya penyusunan modul ini di masa yang akan datang. Semoga modul ini memberikan manfaat bagi peserta didik dan pembaca budiman lainnya. Aamiin.

DAFTAR PUSTAKA

- Priyatno, S., Ikhwan, M., & Sukismo. 2018. *X-Press UN 2018 untuk SMA/MA Matematika Program IPA*. Jakarta: Erlangga
- Sembiring, S., Zulkifli, M., Marsito, & Rusdi, I. 2016. *Matematika untuk siswa SMA/MA Kelas XI Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam*. Bandung: Srikandi Empat
- Setya, W., & Widodo, U. 2019. *Erlangga Straight Point Series (ESPS) Matematika untuk SMA/ MA Kelas XI Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam*. Jakarta: Erlangga
- Simangunsong, W. 2016. *PKS Matematika Peminatan Kelas XI SMA/ MA + Bank Soal*. Jakarta: Gematama
- Suparmin, & Nuraini, S. 2016. *Buku Siswa Matematika untuk SMA/ MA XI Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam*. Surakarta: Mediatama
- Sutrisna, & Waluyo, S. *Konsep dan Penerapan Matematika SMA/ MA Kelas XI Kelompok Peminatan MIPA*. Jakarta: Bailmu
- Suyanto. 2012. *Modul Trigonometri*. Tidak diterbitkan
- Waluyo, S., Sunardi, Sutrisno, & Subagya, S. 2008. *Matematika 2 SMA/ MA Program Ilmu Pengetahuan Alam*. Jakarta: Bumi Aksara
- Yuana, R., A., & Indriyastuti. 2020. *Perspektif Matematika untuk kelas XI SMA dan MA Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu Alam*. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri