



**SMA MUHAMMADIYAH 1
YOGYAKARTA**



MATEMATIKA **Kelas X**

Modul Pembelajaran SMA

Tim MGMP Matematika

MODUL

MATEMATIKA

PEMINATAN IPA

SEKOLAH MENENGAH ATAS
KELAS X SEMESTER I

Disusun Oleh :
M. Aziz Angga Pratama, M.Sc
Dewi Malihatuddarajah, M.Pd

MODUL MATEMATIKA PEMINATAN IPA

untuk Siswa SMA Kelas X
Semester I

SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta
2020

KATA PENGANTAR

Puji syukur penyusun panjatkan atas kehadiran Allah Subhanahu Wa Ta'ala karena limpahan nikmat dan rahmat-Nya penyusunan modul Matematika Peminatan untuk ananda kelas X SMA Program MIPA. Modul ini disusun berdasarkan Kurikulum 2013 yang lebih menempatkan siswa sebagai pusat kegiatan belajar (Student Center). Modul ini juga dilengkapi dengan latihan soal untuk menguji pemahaman siswa terkait dengan materi yang terdapat pada modul.

Kami menyadari masih banyak kekurangan dalam penyusunan modul ini. Oleh karena itu, kami sangat mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan dan kesempurnaan modul ini.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu proses penyelesaian modul ini. Semoga modul ini dapat bermanfaat bagi kita semua, khususnya para peserta didik.

Yogyakarta, Juni 2020

Penyusun,

Tim MGMP

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	1
KATA PENGANTAR	3
DAFTAR ISI	4
PENDAHULUAN	6
DESKRIPSI	6
PETUNJUK	6
BAB 1 EKSPONENSIAL	7
RENCANA BELAJAR SISWA	8
KEGIATAN BELAJAR 1 ..	9
KEGIATAN BELAJAR 2	11
KEGIATAN BELAJAR 3	13
KEGIATAN BELAJAR 4	16
KEGIATAN BELAJAR 5	19
KEGIATAN BELAJAR 6	24
KEGIATAN BELAJAR 7.....	27
KEGIATAN BELAJAR 8	30
EVALUASI	32
BAB 2 LOGARITMA	35
RENCANA BELAJAR SISWA	36
KEGIATAN BELAJAR 1	39
KEGIATAN BELAJAR 2	42
KEGIATAN BELAJAR 3	50

KEGIATAN BELAJAR 4	58
KEGIATAN BELAJAR 5	65
KEGIATAN BELAJAR 6	68
PENUTUP	71
DAFTAR PUSTAKA	72

PENDAHULUAN

A. DESKRIPSI

Perubahan global, perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi serta seni dan budaya, berpengaruh pada perkembangan dan perubahan kehidupan bermasyarakat, berbangsa dan bernegara di Indonesia. Hal tersebut menuntut perlunya perbaikan sistem pendidikan nasional termasuk penyempurnaan kurikulum. Kurikulum disusun dan dikembangkan dengan mengacu pada Standar Isi dan Standar Kompetensi Lulusan, dan dikembangkan oleh satuan pendidikan yang disebut KTSP. Komponen dari KTSP salah satunya adalah Rencana Pelaksanaan Pembelajaran yang memuat media pembelajaran.

Modul ini sebagai salah satu sumber/media pembelajaran mempunyai peranan yang penting dalam meningkatkan kualitas sumber daya manusia khususnya siswa SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta. Modul Matematika Peminatan IPA ini terdiri dari 2 Bab, yaitu Eksponensial dan Logaritma. Setiap bab ini dimulai dengan uraian materi, contoh soal, latihan soal, serta tes formatif untuk mengukur ketercapaian setiap kompetensi dasar.

B. PETUNJUK

Keberhasilan belajar tergantung dari kedisiplinan dan ketekunan dari kalian peserta didik dalam memahami dan mematuhi langkah-langkah belajar. Belajar dengan modul ini dilakukan secara mandiri atau kelompok, baik di sekolah maupun luar sekolah. Dalam modul ini semua materi dijelaskan secara rinci dan merupakan sumber belajar. Untuk memperoleh prestasi belajar secara maksimal, maka langkah-langkah yang perlu dilaksanakan dalam modul ini antara lain :

1. Sebelum belajar, berdo'alah terlebih dahulu, dan melafadzkan lafadz basmallah.
2. Bacalah dan pahami materi yang ada pada setiap kegiatan belajar. Bila ada materi yang belum jelas, dapat bertanya pada teman atau guru.
3. Berdiskusilah dengan teman untuk mengerjakan Latihan Soal terhadap materi yang dibahas dalam kegiatan belajar.
4. Kerjakan Tes Formatif terhadap materi yang dibahas dalam setiap kegiatan belajar.
5. Jika belum menguasai materi yang diharapkan, ulangi lagi kegiatan belajar pada materi tersebut atau bertanyalah kepada guru.
6. Kerjakanlah tes evaluasi untuk persiapan menghadapi PTS/PAS.

BAB I EKSPONENSIAL

RENCANA BELAJAR SISWA (KD DAN IPK)

Kompetensi Dasar (KD)	IPK
3.1. Mendeskripsikan dan menentukan penyelesaian fungsi eksponensial dan fungsi logaritma menggunakan masalah kontekstual, serta keberkaitannya	<p>3.1.1. Menjelaskan pengertian bilangan berpangkat bulat positif, bilangan berpangkat bulat negatif dan bilangan berpangkat nol;</p> <p>3.1.2. Mendeskripsikan berbagai sifat pangkat atau eksponen</p> <p>3.1.3. Mengubah bentuk pangkat pecahan ke bentuk akar, dan sebaliknya ;</p> <p>3.1.4. Menjelaskan pengertian bentuk akar kuadrat;</p> <p>3.1.5. Mendeskripsikan operasi pada akar dan merasionalkan pecahan bentuk akar ;</p> <p>3.1.6. Menyelesaikan persamaan eksponensial;</p> <p>3.1.7. Menyelesaikan pertidaksamaan eksponensial</p> <p>3.1.8. Menggambar dan menafsirkan grafik fungsi eksponensial sederhana dengan bilangan pokok $a > 1$ dan $0 < a < 1$;</p>
4.1. Menyajikan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi eksponensial dan fungsi logaritma.	<p>4.1.1. Menggunakan konsep eksponensial dalam menyelesaikan masalah nyata;</p> <p>4.1.2. Menyajikan grafik fungsi eksponensial dalam memecahkan masalah nyata;</p> <p>4.1.3. Menganalisis data sifat- sifat grafik fungsi eksponensial dari suatu permasalahan;</p> <p>4.1.4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi eksponensial;</p>

KEGIATAN BELAJAR 1

Tujuan Kegiatan Pembelajaran

Melalui kegiatan belajar pada modul ini, peserta didik dapat **berfikir kritis** dalam menentukan dan menganalisis pengertian eksponen, **kreatif** dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pengertian eksponen serta **memiliki sikap disiplin dan tanggung jawab**.

Materi

Eksponen lebih sering kita kenal dengan pangkat. Untuk dasar pengenalan pangkat, akan dibahas bilangan berpangkat bulat positif, bulat negative, dan nol.

Definisi 1. Pangkat bulat positif

Jika a bilangan real, dan n bilangan bulat positif maka a^n (dibaca : a pangkat n) ditentukan oleh :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}}$$

Dengan a disebut bilangan pokok dan n disebut pangkat.

Contoh 1.

- $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
- $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$
- $(2a)^3 = 2a \times 2a \times 2a = 8a^3$
- $(p + q)^3 = (p + q) \times (p + q) \times (p + q)$

Definisi 2. Pangkat bulat negative dan nol

Jika a bilangan real, $a \neq 0$, dan n bilangan bulat positif, maka :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ dan } a^0 = 1$$

Catatan :

Jika $a = 0$, maka pangkat 0 tidak mempunyai arti, karena 0^0 tak terdefinisi.

Contoh 2.

a. $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$

b. $(-3)^4 = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)} = \frac{1}{81}$

c. $(29)^0 = 1$

d. $(-34,89)^0 = 1$

e. $(2c)^{-5} = \frac{1}{(2c)^5} = \frac{1}{(2c) \times (2c) \times (2c) \times (2c) \times (2c)} = \frac{1}{32c^5}$

Selanjutnya, untuk lebih memahami materi tentang pengertian eksponen, silahkan kerjakan Tes Formatif berikut :

Tes Formatif

Petunjuk: *jawablah dengan jelas dan terstruktur.*

Uraikan bentuk eksponen berikut dan tentukan hasilnya :

i. 4^3

ii. $(-2)^4$

iii. $-(5)^3$

iv. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

v. $(2y)^6$

vi. $(65b)^0$

vii. $(5)^{-2}$

viii. $-(-6)^{-3}$

ix. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

x. $(-3p)^{-4}$

Latihan keterampilan

➤ Hitunglah nilai eksponen berikut :

i. $(-2)^{-4}$

ii. $(-2)^{-3}$

iii. $(-2)^{-2}$

iv. $(-2)^{-1}$

v. $(-2)^0$

vi. $(-2)^1$

vii. $(-2)^2$

viii. $(-2)^3$

ix. $(-2)^4$

x. $(-2)^5$

➤ Berdasar hasil hitungan di atas, kesimpulan apa yang bisa Ananda ambil?

KEGIATAN BELAJAR 2

Tujuan Kegiatan Pembelajaran

Melalui kegiatan belajar pada modul ini, peserta didik dapat **berfikir kritis** dalam menentukan dan menganalisis sifat-sifat eksponen, **kreatif** dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sifat-sifat eksponen serta **memiliki sikap disiplin dan tanggung jawab**.

Materi

Ananda, untuk materi Kegiatan Belajar 2 ini, kita akan mempelajari tentang sifat-sifat eksponen atau pangkat. Berikut sifat-sifatnya :

Sifat 1.

Untuk sembarang bilangan real a dan b serta sembarang bilangan bulat m dan n berlaku sifat-sifat berikut :

- i. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- ii. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, dengan $a \neq 0$.
- iii. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
- iv. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, dengan $b \neq 0$.
- v. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Berikut beberapa contoh tentang penggunaan sifat-sifat eksponen :

Contoh 1. Sederhanakan dan tuliskan jawabannya dalam bentuk pangkat positif

- i. $3^4 \cdot 3^2$
- ii. $4^2 \cdot 2^3$
- iii. $(a^3 \cdot b^{-2})^2$
- iv. $\left(\frac{x^5}{x^7}\right)$
- v. $\left(\frac{4}{y^3}\right)^{-2}$
- vi. $\left(\frac{2a^3b^{-4}}{5a^{-5}b^{-6}}\right)^{-2}$

Jawab.

i. $3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$

ii. $4^2 \cdot 2^3 = (2^2)^2 \cdot 2^3 = 2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$

iii. $(a^3 \cdot b^{-2})^2 = (a^3)^2 \cdot (b^{-2})^2 = (a^{3 \cdot 2}) \cdot (b^{-2 \cdot 2}) = a^6 \cdot b^{-4} = \frac{a^6}{b^4}$

iv. $\left(\frac{x^5}{x^7}\right) = x^{5-7} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

v. $\left(\frac{4}{y^3}\right)^{-2} = \left(\frac{4^{-2}}{(y^3)^{-2}}\right) = \frac{4^{-2}}{y^{-6}} = \frac{y^6}{4^2} = \frac{y^6}{16}$

vi. $\left(\frac{2a^3b^{-4}}{5a^5b^{-6}}\right)^{-2} = \left(\frac{2^{-2}(a^3)^{-2}(b^{-4})^{-2}}{5^{-2}(a^5)^{-2}(b^{-6})^{-2}}\right) = \left(\frac{2^{-2}a^{-6}b^8}{5^{-2}a^{-10}b^{12}}\right) = \left(\frac{5^2}{2^2}a^{-6-(-10)}b^{(8-12)}\right) = \left(\frac{25}{4}a^4b^{-4}\right) = \frac{25a^4}{4b^4}$

Tes formatif

Petunjuk : *Kerjakan dengan jelas dan terstruktur*

Sederhanakan dan tuliskan jawabannya dalam bentuk pangkat positif !

i. $\frac{5^6 \cdot 5^3}{5^4}$

ii. $\frac{3^2 \cdot 3^{-4}}{27}$

iii. $\left(\frac{4m}{n^{-3}}\right)^2$

iv. $\left(\frac{17x^3}{54y^2}\right)^0$

v. $\left(\frac{3x^{-2}y^4}{9x^3y^2}\right)^{-2}$

Latihan Ketrampilan 2 [Kemampuan Analisis]

Petunjuk : *Diskusikan dengan teman ananda dan kerjakan dengan jelas dan terstruktur.*

i. Tentukan bentuk sederhana dari :

$$\frac{1}{1 + a^{n-m}} + \frac{1}{1 + a^{m-n}}$$

ii. Persamaan medan magnet H ditunjukkan oleh formula :

$$H = \frac{Lr(r^2 - L^2)^{-2}}{(4m)^{-1}}$$

Sederhanakan bentuk di atas dalam bentuk pangkat bulat positif !

KEGIATAN BELAJAR 3

Tujuan Pembelajaran

Melalui kegiatan belajar pada modul ini, peserta didik dapat **berfikir kritis** dalam menentukan dan menganalisis pengertian dan sifat pangkat pecahan, **kreatif** dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pangkat pecahan serta **memiliki sikap disiplin dan tanggung jawab**.

Materi

Ananda, untuk mengawali materi pada Kegiatan Belajar 3, berikut diberikan definisi dari pangkat pecahan :

Definisi 1. Pangkat Pecahan

Jika nilai $\sqrt[n]{a}$ (dibaca : a akar pangkat n) ada sebagai bilangan real, dengan $a \geq 0$, maka :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Dengan m dan n bilangan bulat positif.

Catatan : Semua sifat-sifat bilangan berpangkat bulat dapat pula diterapkan pada bilangan berpangkat pecahan dengan syarat bilangan pokoknya lebih besar atau sama dengan 0.

Selanjutnya, berikut diberikan beberapa sifat akar :

Sifat 1. Sifat akar

- i. $\sqrt[n]{a^n} = a$ untuk $a \geq 0$
- ii. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ untuk $a, b \geq 0$
- iii. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- iv. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, untuk $b \neq 0$.

Untuk mempermudah pemahaman tentang pangkat pecahan, silahkan Ananda perhatikan beberapa contoh berikut :

Contoh 1

- i. $\sqrt[5]{4^3}$ dapat diubah menjadi $4^{\frac{3}{5}}$
- ii. $3^{\frac{2}{3}}$ dapat diubah menjadi $\sqrt[3]{3^2}$

Contoh 2. Hitunglah

i. $27^{\frac{2}{3}}$

ii. $\sqrt[4]{256}$

iii. $\sqrt{27^{\frac{2}{3}}}$

iv. $\left(\frac{243}{32}\right)^{-\frac{4}{5}}$

v. $\frac{x^{\frac{7}{5}}\sqrt{y^3}}{x^2\sqrt{y}}$

Jawab :

i. $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

ii. $\sqrt[4]{256} = (256)^{\frac{1}{4}} = (2^8)^{\frac{1}{4}} = 2^2 = 4$

iii. $\sqrt{27^{\frac{2}{3}}} = \left(27^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left((3^3)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 3^1 = 3$

iv. $\left(\frac{243}{32}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\frac{3^5}{2^5}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\frac{(3^5)^{-\frac{4}{5}}}{(2^5)^{-\frac{4}{5}}}\right) = \left(\frac{3^{-4}}{2^{-4}}\right) = \left(\frac{2^4}{3^4}\right) = \frac{16}{81}$

v. $\frac{x^{\frac{7}{5}}\sqrt{y^3}}{x^2\sqrt{y}} = \frac{x^{\frac{7}{5}}(y^3)^{\frac{1}{2}}}{x^2(y)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{7}{5}}y^{\frac{3}{2}}}{x^2y^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{7}{5}-2} \cdot y^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{5}} \cdot y^1 = x^{\frac{2}{5}} \cdot y = xy$

Tes Formatif

Petunjuk : *Kerjakan dengan jelas dan terstruktur !*

i. Tuliskan dalam bentuk pangkat atau sebaliknya !

• $5^{\frac{3}{7}}$

• $\sqrt[5]{8}$

• $31^{\frac{7}{9}}$

• $\sqrt{23^5}$

ii. Hitunglah !

• $125^{\frac{4}{3}}$

• $\sqrt{4^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{3}{4}}}$

• $\sqrt[5]{-32}$

iii. Sederhanakanlah !

- $\frac{\sqrt[3]{x^{12}}}{\sqrt{x^6}}$
- $\left(\frac{8x^2y^{-4}}{125x^{-1}y^2}\right)^{\frac{2}{3}}$

Latihan Keterampilan

Petunjuk : *Jawablah dengan benar, jelas dan terstruktur.*

- Volume bola dengan jari-jari r ditentukan oleh rumus :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Sedangkan, luas permukaan bola tersebut ditentukan oleh rumus :

$$L = 4\pi r^2$$

- Tunjukkan bahwa hubungan L dan V ditentukan oleh rumus :

$$L = \sqrt[3]{36\pi V^2}$$

KEGIATAN BELAJAR 4

Tujuan Pembelajaran

Melalui kegiatan belajar pada modul ini, peserta didik dapat **berfikir kritis** dalam menentukan dan menganalisis sifat dan operasi akar kuadrat, **kreatif** dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan akar kuadrat serta **memiliki sikap disiplin dan tanggung jawab**.

Materi

Ananda, dari materi Kegiatan Belajar 3, penulisan $a^{\frac{1}{2}}$ dapat diubah menjadi $\sqrt[2]{a}$ atau biasanya cukup ditulis \sqrt{a} , bentuk \sqrt{a} dinamakan dengan akar kuadrat suatu bilangan dengan $a \geq 0$.

➤ Nilai Akar Kuadrat

Jika $y^2 = x$, maka $\sqrt{x} = y$ dengan $y \geq 0$. Selanjutnya notasi \sqrt{x} dibaca "akar kuadrat dari x ".

Contoh 1.

- $\sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{225} = 15$

➤ Menyederhakan bentuk akar

Penyederhanaan bentuk akar dapat dilakukan dengan membuat bilangan yang di dalam tanda akar menjadi perkalian bilangan kuadrat.

Contoh 2.

- $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$.
- $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$
- $\sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$

➤ Operasi akar

Operasi penjumlahan dan pengurangan

$$p\sqrt{a} \pm q\sqrt{a} = (p \pm q)\sqrt{a}$$

Contoh 3.

- $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (2 + 4)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
- $\sqrt{32} - \sqrt{18} = \sqrt{16 \times 2} - \sqrt{9 \times 2} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (4 - 3)\sqrt{2} = 1\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Operasi Perkalian

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$
$$p\sqrt{a} \cdot q\sqrt{b} = p \cdot q\sqrt{a \cdot b}$$

Contoh 4.

$$- \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{9} = 3$$

Dari sini diperoleh jika $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

$$- \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$$

$$- 2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{3} = 2 \cdot 4\sqrt{5 \cdot 3} = 8\sqrt{15}$$

Operasi pembagian

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ untuk } b \neq 0$$
$$\frac{p\sqrt{a}}{q\sqrt{b}} = \frac{p}{q} \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ untuk } q, b \neq 0$$

Contoh 5.

$$- \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$$

$$- \frac{\sqrt{15 \times 6}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15 \times 6}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{15 \times 6}{5}} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

➤ Merasionalkan akar

Bentuk 1. $\frac{a}{\sqrt{b}}$, yaitu dengan mengalikan \sqrt{b} pada pembilang dan penyebut

Contoh 6.

$$- \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$- \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{5\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} \sqrt{2} = \frac{2}{5} \sqrt{2}$$

Bentuk 2. $\frac{c}{a \pm \sqrt{b}}$, yaitu dengan mengalikan bentuk *sekawan* pada pembilang dan penyebut. Jika $a + \sqrt{b}$

maka sekawannya adalah $a - \sqrt{b}$ atau sebaliknya. Ingat bahwa :

$$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$$

Contoh 7.

$$- \frac{3}{2 + \sqrt{3}} = \frac{3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{(2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})} = \frac{3(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{1} = 6 - 3\sqrt{3}$$

$$\frac{5}{\sqrt{6} - 2} = \frac{5}{\sqrt{6} - 2} \times \frac{(\sqrt{6} + 2)}{(\sqrt{6} + 2)} = \frac{5(\sqrt{6} + 2)}{(\sqrt{6} - 2)(\sqrt{6} + 2)} = \frac{5\sqrt{6} + 10}{6 - 4} = \frac{5\sqrt{6} + 10}{2}$$

Bentuk 3. $\frac{c}{\sqrt{a \pm \sqrt{b}}}$, yaitu dengan mengalikan bentuk *sekawan* pada pembilang dan penyebut. Jika $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ maka sekawan nya adalah $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ atau sebaliknya. Ingat bahwa :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

Contoh 8.

$$\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \times \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{3\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{2}$$

Tes Formatif

Petunjuk : *Kerjakan dengan jelas dan terstruktur*

i. Sederhanakanlah !

❖ $\sqrt{27} + 2\sqrt{8}$

❖ $\sqrt{125} - 3\sqrt{5} + \sqrt{80}$

❖ $2\sqrt{150} - 5\sqrt{54} - 7\sqrt{24}$

❖ $\sqrt{3} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2}$

❖ $\frac{\sqrt{32} \times \sqrt{3}}{\sqrt{12}}$

ii. Rasionalkanlah !

❖ $\frac{2}{\sqrt{5}}$

❖ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

❖ $\frac{2}{\sqrt{3}-2}$

❖ $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Latihan Keterampilan

❖ Dalam materi bentuk akar kuadrat, sering muncul rumus ini :

$$\sqrt{(a + b) \pm 2ab} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

dimana $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

❖ Dengan menggunakan rumus di atas, jika

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

dimana $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, maka tentukanlah nilai a dan b ?

KEGIATAN BELAJAR 5

Tujuan Pembelajaran

Melalui kegiatan belajar pada modul ini, peserta didik dapat **berfikir kritis** dalam menentukan dan menganalisis persamaan eksponen, **kreatif** dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pengertian eksponen serta **memiliki sikap disiplin dan tanggung jawab**.

Materi

Persamaan eksponen adalah persamaan dari bilangan eksponen dengan pangkat yang memuat sebuah fungsi, atau persamaan perpangkatan yang bilangan pangkatnya mengandung variable sebagai bilangan peubah.

Ananda, persamaan eksponen terdiri dari bermacam-macam bentuk dan penyelesaian. Berikut macam macam bentuk persamaan eksponen dan contoh soalnya

➤ **Bentuk 1.** $a^{f(x)} = a^p$, dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$

Solusi dari bentuk ini adalah $f(x) = p$.

Contoh 1.

- Tentukan solusi dari $2^{x+3} = 2^5$.

Jawab : Karena $2^{x+3} = 2^5$, maka

$$x + 3 = 5$$

$$x = 2$$

Jadi solusi dari $2^{x+3} = 2^5$ adalah $x = 2$.

- Tentukan solusi dari $3^{x^2-2x-1} = 9$.

Jawab : Karena $3^{x^2-2x-1} = 9$ bilangan pokok nya belum sama, maka disamakan dahulu, menjadi

$$3^{x^2-2x-1} = 3^2, \text{ sehingga diperoleh}$$

$$x^2 - 2x - 1 = 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x = 3 \text{ atau } x = -1$$

Jadi solusi dari $3^{x^2-2x-1} = 9$ adalah $x = 3$ atau $x = -1$.

➤ **Bentuk 2.** $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$

Solusi dari bentuk ini adalah $f(x) = g(x)$.

Contoh 2.

- Tentukan solusi dari $5^{2x-1} = 25^{2x+3}$.

Jawab : Karena $5^{2x-1} = 25^{2x+3}$ bilangan pokok belum sama, maka disamakan dahulu menjadi

$$5^{2x-1} = (5^2)^{2x+3} \text{ atau } 5^{2x-1} = 5^{4x+6}, \text{ sehingga diperoleh :}$$

$$2x - 1 = 4x + 6$$

$$2x - 4x = 6 + 1$$

$$-2x = 7$$

$$x = -\frac{7}{2}$$

Jadi, solusi dari $5^{2x-1} = 25^{2x+3}$ adalah $x = -\frac{7}{2}$.

➤ **Bentuk 3.** $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, dengan $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, dan $a \neq b$

Solusi dari bentuk ini adalah $f(x) = g(x)$.

Contoh 3.

- Tentukan solusi dari $4^{2x-5} = 3^{2x-5}$.

Jawab : Karena $4^{2x-5} = 3^{2x-5}$, maka diperoleh :

$$2x - 5 = 0$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Jadi, solusi dari $4^{2x-5} = 3^{2x-5}$ adalah $x = \frac{5}{2}$.

Selanjutnya, bentuk persamaan eksponen yang lebih mengarah ke kemampuan analisis Ananda.

➤ **Bentuk 4.** $(h(x))^{f(x)} = (h(x))^{g(x)}$

Solusi dari persamaan bentuk ini ada beberapa kemungkinan :

i. $f(x) = g(x)$

ii. $h(x) = 1$

iii. $h(x) = 0$, dengan $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

iv. $h(x) = -1$, dengan $f(x), g(x)$ sama sama genap atau sama sama ganjil.

Contoh 4.

Tentukan solusi dari $(x - 3)^{x^2-x-1} = (x - 3)^{x^2-3x-5}$.

Jawab.

Karena bentuk $(x - 3)^{x^2 - x - 1} = (x - 3)^{x^2 - 3x - 5}$, maka diperoleh :

i. $f(x) = g(x)$

$$x^2 - x - 1 = x^2 - 3x - 5$$

$$-x + 3x = -5 + 1$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

ii. $h(x) = 1$

$$x - 3 = 1$$

$$x = 4$$

iii. $h(x) = 0$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Cek :

$$f(x) \Rightarrow (3)^2 - (3) - 1 = 9 - 4 = 5 > 0 \text{ (Memenuhi)}$$

$$g(x) \Rightarrow (3)^2 - 3(3) - 5 = 9 - 9 - 5 = -5 < 0 \text{ (Tidak memenuhi)}$$

Artinya, $x = 3$ **bukan** solusi.

iv. $h(x) = -1$

$$x - 3 = -1$$

$$x = 2$$

Cek :

$$f(x) \Rightarrow (2)^2 - (2) - 1 = 4 - 2 - 1 = 1 \text{ (Ganjil)}$$

$$g(x) \Rightarrow (2)^2 - 3(2) - 5 = 4 - 6 - 5 = -7 \text{ (Ganjil)}$$

Karena keduanya sama sama ganjil, maka $x = 2$ merupakan solusi.

Jadi, solusi dari $(x - 3)^{x^2 - x - 1} = (x - 3)^{x^2 - 3x - 5}$ adalah $x = -2$, $x = 2$ dan $x = 4$ atau biasanya di tulis himpunan penyelesaian $HP = \{-2, 2, 4\}$

➤ **Bentuk 5.** $(f(x))^{h(x)} = (g(x))^{h(x)}$

Solusi dari bentuk ini ada beberapa kemungkinan

i. $f(x) = g(x)$

$$h(x) = 0, \text{ dengan } f(x) \neq 0 \text{ dan } g(x) \neq 0$$

Contoh 5.

Tentukan himpunan penyelesaian dari $(x^2 - 1)^{x+2} = (x^2 - 2x + 7)^{x+2}$.

Jawab.

Karena bentuk $(x^2 - 1)^{x+2} = (x^2 - 2x + 7)^{x+2}$, diperoleh :

i. $f(x) = g(x)$

$$x^2 - 1 = x^2 - 2x + 7$$

$$2x = 7 + 1$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

ii. $h(x) = 0$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Cek

$$f(x) \Rightarrow (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ (Memenuhi)}$$

$$g(x) \Rightarrow (-2)^2 - 2(-2) + 7 = 4 + 4 + 7 = 15 \text{ (Memenuhi)}$$

Jadi $x = -2$ merupakan solusi.

Jadi $HP = \{-2, 4\}$.

Tes Formatif

Petunjuk : *Kerjakan dengan jelas dan terstruktur.*

Tentukan solusi dari persamaan eksponen berikut :

i. $3^{2x-6} = 1$

ii. $4^{x-2} = 8$

iii. $3^{x-\frac{1}{2}} = \sqrt{27}$

iv. $9^{3x-1} = \frac{1}{3}$

v. $\frac{4^{x+3}}{2^x} = \frac{1}{8}$

vi. $2^{x^2-2x} = 4^{x+6}$

vii. $5^{x^2-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{4x-4}$

viii. $2^{x+1} \cdot 4^x = 16$

ix. $5^{2x-8} = 4^{x-4}$

x. $7^{x^2-5x-6} = 5^{x^2-5x-6}$

Latihan Ketrampilan 2 (Kemampuan Analisis)

Petunjuk : *Kerjakan dengan jelas dan terstruktur.*

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan eksponen berikut :

i. $(2x + 5)^{x-1} = (2x + 5)^{2x+3}$

ii. $(x - 3)^{2x+1} = (3x - 4)^{2x+1}$

iii. $3^{2x} - 3^{x+1} - 54 = 0$

KEGIATAN BELAJAR 6

Tujuan Pembelajaran

Melalui kegiatan belajar pada modul ini, peserta didik dapat **berfikir kritis** dalam menentukan dan menganalisis pertidaksamaan eksponen, **kreatif** dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan eksponen serta **memiliki sikap disiplin dan tanggung jawab**.

Materi

Ananda, suatu pertidaksamaan pasti memuat tanda ketaksamaan yaitu, $>$, \geq , $<$, atau \leq . Sehingga, pertidaksamaan eksponen mempunyai bentuk :

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$$

Untuk menentukan solusi dari pertidaksamaan eksponen dibagi menjadi dua kasus, tergantung bilangan pokok (a) :

➤ Jika $a > 1$, maka solusinya :

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$$

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x)$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

Contoh 1.

- Tentukan solusi dari $2^{x+4} \geq 2^5$?

Jawab. Karena $a > 1$, maka :

$$\Rightarrow 2^{x+4} \geq 2^5$$

$$\Rightarrow x + 4 \geq 5$$

$$\Rightarrow x \geq 1$$

Jadi, solusi dari $2^{x+4} \geq 2^5$ adalah $x \geq 1$.

- Tentukan solusi dari $3^{x^2-2x} < 27$?

Jawab. Karena bilangan pokok belum sama, maka disamakan dahulu, menjadi : $3^{x^2-2x} < 3^3$. Karena $a > 1$, maka :

$$\Rightarrow 3^{x^2-2x} < 3^3$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x < 3$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) < 0$$

Mencari pembuat nol $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ dan $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Karena tanda $<$, maka solusinya adalah :

$$-1 < x < 3$$

Jadi, solusi dari $3^{x^2-2x} < 27$ adalah $-1 < x < 3$.

➤ Jika $0 < a < 1$, maka solusinya :

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$$

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$$

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x)$$

Contoh 2.

- Tentukan solusi dari $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{x+2}$

Jawab. Bilangan pokok belum sama, maka disamakan dulu, menjadi

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{x+2} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \geq \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^{x+2} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+4}$$

Karena $a < 1$, maka

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+4}$$

$$\Rightarrow x - 1 \leq 2x + 4$$

$$\Rightarrow x - 2x \leq 4 + 1$$

$$\Rightarrow -x \leq 5$$

$$\Rightarrow x \geq -5$$

Selanjutnya, untuk mengukur pemahaman Ananda, silahkan kerjakan Tes Formatif 6 berikut :

Tes Formatif

Petunjuk : *Kerjakan dengan jelas dan terstruktur.*

Tentukan solusi dari pertidaksamaan eksponen berikut :

i. $4^{x-2} \geq 32$

ii. $3^{x^2-12} < \frac{1}{27}$

iii. $\frac{9^{x-1}}{3^{x+3}} \leq 81$

iv. $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-5} \geq \frac{1}{4}$

v. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-x} < \left(\frac{1}{25}\right)^x$

Latihan Ketrampilan 6 (Kemampuan Analisis)

Petunjuk : *Diskusikan dengan teman dan kerjakan dengan jelas dan terstruktur.*

Tentukan solusi dari pertidaksamaan eksponen berikut :

$$4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 \geq 0.$$

KEGIATAN BELAJAR 7

Tujuan Pembelajaran

Melalui kegiatan belajar pada modul ini, peserta didik dapat **berfikir kritis** dalam menentukan dan menganalisis grafik fungsi eksponen, **kreatif** dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan grafik fungsi eksponen serta **memiliki sikap disiplin dan tanggung jawab**.

Materi

Ananda, fungsi eksponen berarti fungsi yang memuat bentuk eksponen. Berikut beberapa contoh fungsi eksponen :

Contoh 1.

$$f(x) = 2^x$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$$

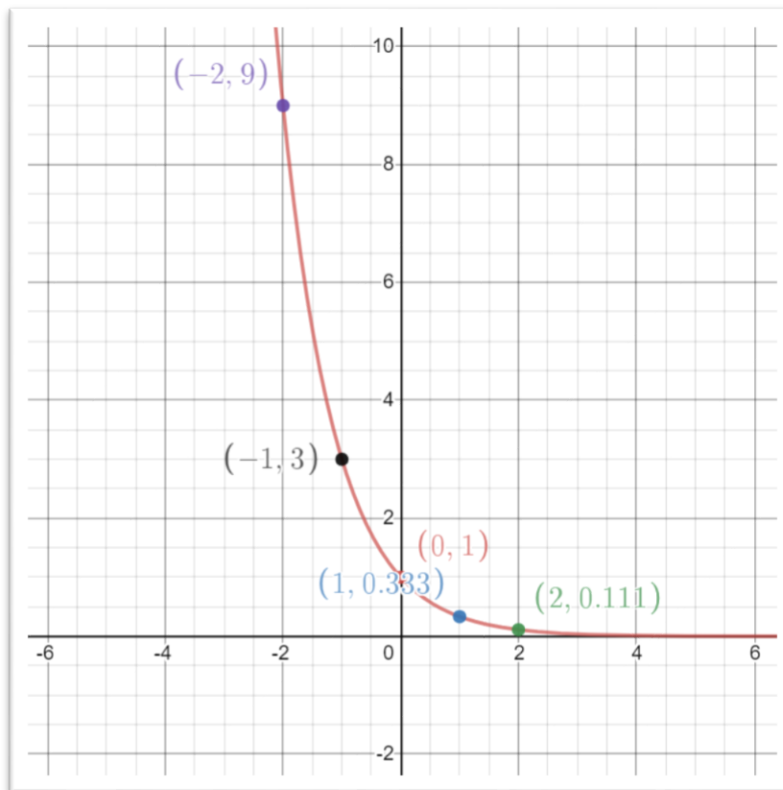
$$y = 2^x + 6$$

➤ Grafik fungsi eksponen.

Selanjutnya, Ananda akan mempelajari tentang cara menggambar dan menganalisa grafik fungsi eksponen. Untuk menggambar grafik fungsi eksponen diperlukan plot titik-titik. Sebagai contoh kita akan menggambar grafik $f(x) = 2^x$. Dibuat plot titik-titik dalam tabel berikut, dengan mendaftar x dari -3 sampai dengan 3

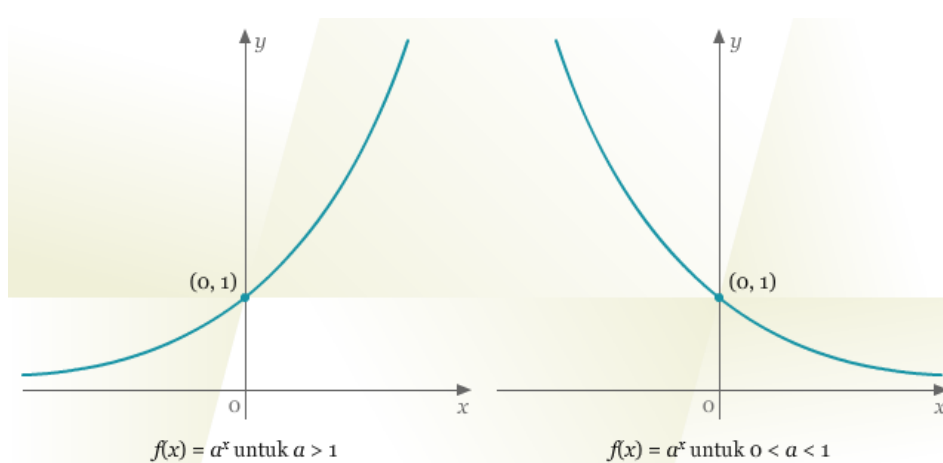
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$(x, f(x))$	$\left(-3, \frac{1}{8}\right)$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(3, 8)$

Dari plot titik-titik tersebut dapat diperoleh gambar :



$$\text{Grafik } g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Dari dua contoh grafik di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa bentuk grafik fungsi eksponen bergantung pada nilai bilangan pokok.



Jika bilangan pokoknya lebih dari 1 ($a > 1$) maka grafiknya akan naik (gambar kiri). Dan, jika bilangan pokoknya antara 0 dan 1 ($0 < a < 1$), maka grafiknya akan turun (gambar kanan).

Selanjutnya, untuk mengukur keterampilan Anda dalam menggambar grafik fungsi eksponen, silahkan kerjakan Latihan ketrampilan berikut :

Latihan Ketrampilan

Gambarlah grafik fungsi eksponen berikut :

- $f(x) = 3^{x-1}$
- $g(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

KEGIATAN BELAJAR 8

Tujuan Pembelajaran

Melalui kegiatan belajar pada modul ini, peserta didik dapat **berfikir kritis** dalam menentukan dan menganalisis aplikasi eksponen dalam masalah sehari-hari, **kreatif** dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan aplikasi eksponen serta **memiliki sikap disiplin dan tanggung jawab**.

Materi

Pada materi terakhir modul eksponensial ini, Ananda akan mempelajari tentang aplikasi dari eksponensial pada masalah kehidupan sehari-hari. Berikut beberapa contohnya.

Contoh 1.

Seseorang menabung uang sebesar 4 juta rupiah dengan bunga 5 % per tahun. Berapakah jumlah uangnya setelah 10 tahun?

Jawab.

Contoh 1 merupakan aplikasi eksponensial pada masalah bunga majemuk.

Jika seseorang menabung sebanyak N_0 dengan bunga $r\%$ pertahun, maka banyak tabungan tersebut setelah t tahun (N_t) dirumuskan dengan :

$$N_t = N_0(1 + r\%)^t$$

Selanjutnya dari Contoh 1, diketahui : $N_0 = 4000000$, $r\% = 5\% = 0,05$, dan $t = 10$ tahun, maka

$$\begin{aligned} N_t &= 4000000(1 + 0,05)^{10} \\ &= 4000000(1,05)^{10} \\ &= 4000000(1,628) \\ &= 6512000 \end{aligned}$$

Jadi, jumlah uang setelah 10 tahun adalah Rp 6.512.000,- .

Contoh 2.

Sebuah Amoeba berkembang biak dimana jumlahnya mengikuti fungsi $A_t = A_0 \cdot 2^t$, dimana A_0 adalah jumlah Amoeba mula-mula dan t (menit) adalah waktu yang dibutuhkan Amoeba untuk berkembang biak. Jika diketahui pada pukul 09.00 terdapat 100 Amoeba, maka :

- i. Tentukan banyak Amoeba pada pukul 09.10 ?
- ii. Pada pukul berapa banyak amoeba mencapai

Jawab.

- i. Diketahui, $A_0 = 100$ dan $t = 10$ menit (dari pukul 09.00 sd 09.10), maka :

$$A_{10} = 100(2)^{10} = 100(1024) = 102400$$

Jadi banyak Amoeba pada pukul 09.10 adalah 102.400 .

- ii. Diketahui $A_0 = 100$ dan $A_t = 12800$, maka

$$12800 = 100(2)^t$$

$$\frac{12800}{100} = 2^t$$

$$128 = 2^t$$

$$2^7 = 2^t$$

$$t = 7$$

Jadi, banyak Amoeba mencapai 12.800 pada pukul 09.07 .

Setelah memahami beberapa contoh diatas, silahkan Ananda mencoba Tes Formatif berikut.

Tes Formatif

Petunjuk : *Kerjakan dengan jelas dan terstruktur.*

- i. Zainal menabung di bank selama 18 bulan dengan bunga 6% pertahun. Berapa banyak tabungan Zainal jika ia mula-mula menabung sebanyak Rp 300.000,- ?

(Boleh menggunakan alat bantu kalkulator)

- ii. Pandemi covid-19 yang melanda dunia, pasien positif covid-19 mengalami kenaikan mengikuti fungsi $C_t = C_0(2)^{\frac{1}{2}t}$ dimana C_0 merupakan banyak pasien positif mula-mula, dan t (hari) waktu penularan. Jika suatu negara mula-mula ada sebanyak 5 pasien positif, maka :
 - a. Banyak pasien positif setelah hari ke-12 ?
 - b. Pada hari keberapa jumlah pasien positif mencapai 5.120 ?

EVALUASI

A. Evaluasi Keterampilan 1

Setelah menyelesaikan semua Kegiatan belajar pada modul ini, Ananda diminta untuk membuat rangkuman dengan bahasa Ananda sendiri, sehingga lebih memudahkan Ananda dalam mengingat materi yang telah dipelajari. Buatlah dengan semenarik dan sekreatif mungkin.

Evaluasi Pengetahuan 1

Petunjuk : Kerjakan dengan jelas dan terstruktur.

Materi : KB 1, KB 2, KB 3, dan KB 4

Soal

1. Hitunglah.

a. $(\sqrt{32})^{\frac{2}{5}}$

b. $\left(\frac{2^3 \cdot 16}{4^3}\right) - (-3)^3$

c. $\left(3 - 1\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^{-2}$

d. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{125}$

2. Sederhanakanlah.

a. $(5a^4b^{-5})(2a^{-3}b^7)$

b. $\left(\frac{3^{12+p} \cdot 9^{2p-7}}{3^{5p}}\right)$

c. $\sqrt[4]{a^2 \sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$

3. Rasionalkan bentuk akar pecahan berikut.

a. $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

b. $\frac{(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2})}$

c. $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}-2\sqrt{2})}$

===== SELAMAT MENGERJAKAN =====

B. Evaluasi Pengetahuan 2

Petunjuk : Kerjakan dengan jelas dan terstruktur.

Materi : KB 5, KB 6, dan KB 8

Soal

1. Tentukan solusi dari persamaan eksponen berikut :
 - a. $4^{3x-1} = \frac{1}{32}$
 - b. $\left(\frac{3^{x+1}}{9}\right)^{-2} = 27$
 - c. $2^{x^2-8x+9} = 4^{-x+2}$
 - d. $5^{x^2-7x+10} = 3^{x^2-7x+10}$
2. Tentukan solusi dari pertidaksamaan eksponen berikut :
 - a. $2^{x+3} \cdot 4^x \geq 128$
 - b. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}x+4} < \left(\frac{1}{27}\right)^{-x+1}$
 - c. $(4^{x^2-3x})^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{16}$
3. Kasus penyebaran virus Ebola yang melanda dunia, diperoleh pasien positif Ebola mengalami kenaikan mengikuti fungsi $E_t = E_0(2)^{\frac{2}{3}t}$ dimana E_0 merupakan banyak pasien positif mula-mula, dan t (bulan) waktu penularan. Jika suatu negara mula-mula ada sebanyak 10 pasien positif, maka :
 - a. Banyak pasien positif setelah satu tahun ?
 - b. Pada bulan keberapa jumlah pasien positif mencapai 10.240 ?

===== SELAMAT MENERJAKAN =====

C. Evaluasi Keterampilan 2

Petunjuk : *Kerjakan dengan jelas dan terstruktur.*

Materi : KB 2, KB 5, KB 6, dan KB 7

Soal

1. Sederhanakan bentuk pangkat berikut :

$$\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-1}b - ab^{-1}}$$

2. Tentukan solusi dari persamaan eksponen berikut :

a. $(x - 3)^{x^2 - 2x} = (x - 3)^{2x + 5}$

b. $(2x^2 - x - 1)^{2x - 1} = (x + 3)^{2x - 1}$

3. Tentukan solusi dari pertidaksamaan eksponen :

$$2 \cdot 3^{4x} - 20 \cdot 3^{2x} + 18 > 0$$

4. Gambarkan grafik fungsi eksponen $(x) = 3 \cdot (2)^{\frac{1}{2}x}$.

===== SELAMAT MENGERJAKAN =====

BAB II LOGARITMA

Kompetensi Dasar

- 3.1 Mendeskripsikan dan menentukan penyelesaian fungsi eksponensial dan fungsi logaritma menggunakan masalah kontekstual, serta keberkaitannya.
- 4.1 Menyajikan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi eksponensial dan fungsi logaritma.

Indikator Pencapaian

Indikator Pengetahuan

- 3.1.1 Mengamati sifat-sifat fungsi eksponensial
- 3.1.2 Mengamati grafik fungsi eksponensial
- 3.1.3 Mengamati beberapa jenis persamaan eksponensial
- 3.1.4 Mengkonstruksi rumus pertidaksamaan eksponensial
- 3.1.5 Mengamati penerapan fungsi eksponensial pada kehidupan sehari-hari
- 3.1.6 Mengamati sifat-sifat fungsi logaritma
- 3.1.7 Mengamati grafik fungsi logaritma
- 3.1.8 Mengamati beberapa jenis persamaan logaritma
- 3.1.9 Menengkonstriksi rumus pertidaksamaan logaritma
- 3.1.10 Mengamati penerapan fungsi logaritma pada kehidupan sehari-hari

Indikator Keterampilan

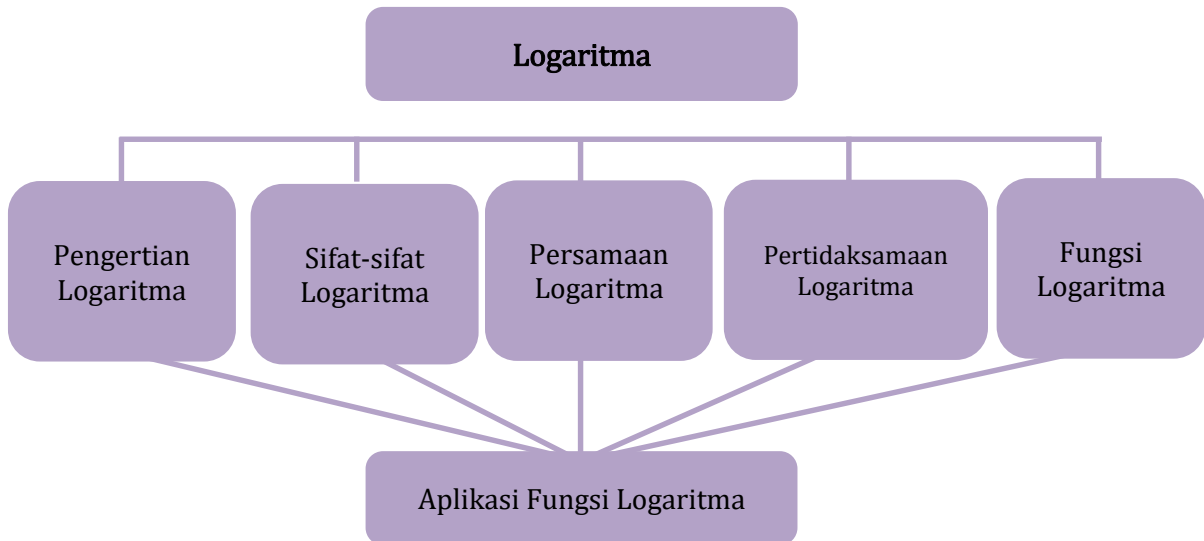
- 4.1.1 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sifat-sifat eksponensial
- 4.1.2 Menyajikan grafik fungsi eksponensial
- 4.1.3 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan eksponensial
- 4.1.4 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan eksponensial
- 4.1.5 Menyelesaikan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan fungsi eksponensial
- 4.1.6 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sifat-sifat fungsi logaritma
- 4.1.7 Menyajikan grafik fungsi logaritma
- 4.1.8 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan logaritma
- 4.1.9 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan logaritma
- 4.1.10 Menyelesaikan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan fungsi logaritma

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan siswa dapat:

1. Memahami definisi logaritma.
2. Menyajikan grafik fungsi logaritma.
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan logaritma.
4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan logaritma.
5. Mendeskripsikan dan menentukan penyelesaian fungsi logaritma menggunakan masalah kontekstual, serta keberkaitannya.

PETA KONSEP



**KEGIATAN
PEMBELAJARAN 1**

LOGARITMA

Pengertian Dasar Logaritma



Pada bab sebelumnya, kita telah membahas tentang fungsi eksponensial. Sekarang, kita akan mempelajari kebalikan (invers) dari fungsi eksponensial yang dikenal sebagai fungsi logaritma. Misalnya $2^3 = 8$ bentuk ini dapat dinyatakan dengan ${}^2\log 8 = 3$.

Dalam penulisan logaritma ${}^a\log b$, a disebut bilangan pokok logaritma. Perhatikan bahwa nilai a harus positif dan $a \neq 1$. Jika bilangan pokok bernilai 10, maka bilangan pokok 10 ini biasanya tidak ditulis. Misalnya ${}^{10}\log 100 = 2$ biasa ditulis dengan $\log 100 = 2$.



Perhatikan contoh 1 berikut.

Contoh 1:

- a. ${}^3\log 9 = 2$, karena $3^2 = 9$
- b. ${}^2\log 0,25 = -2$, karena $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0,25$
- c. $\log 1000 = 3$, karena $10^3 = 1000$
- d. $\log 0,01 = -2$, karena $10^{-2} = 0,01$



Ayo Berlatih 1

Nyatakan dalam bentuk logaritma.

- 1. $5^a = b$
- 2. $3^4 = 81$
- 3. $p = 2^q$



Perhatikan contoh 2 berikut.

Contoh 2: Menentukan nilai dari suatu bentuk logaritma

a. ${}^3\log 81$

Jawab: Karena $3^4 = 81$ maka ${}^3\log 81 = 4$

b. ${}^4\log 2$

Jawab: Karena $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$ maka ${}^4\log 2 = \frac{1}{2}$

c. ${}^9\log 3\sqrt{3}$

Jawab: Karena $9^{\frac{3}{4}} = 3\sqrt{3}$ maka ${}^9\log 3\sqrt{3} = \frac{3}{4}$

d. $\log 10000$

Jawab: Karena $10^4 = 10000$ maka $\log 10000 = 4$



Ayo Berlatih 2

Tentukan nilai bentuk logaritma berikut.

1. ${}^2\log 8 = \dots$

2. ${}^{25}\log 125 = \dots$

3. $\log 0,01 = \dots$

4. ${}^{0,1}\log 100 = \dots$

5. ${}^2\log 0,5 = \dots$

6. ${}^2\log \sqrt{64} = \dots$

7. ${}^{\frac{1}{2}}\log \frac{1}{16} = \dots$

TES FORMATIF

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. ${}^2\log a = b$, maka....

- a. $2^a = b$
- b. $a^b = 2$
- c. $b^2 = a$
- d. $a^2 = a$
- e. $2^b = a$

2. ${}^a\log 24 = 3$, maka....

- a. $a^{24} = 4$
- b. $24^3 = a$
- c. $3^a = 24$
- d. $24^a = 3$
- e. $a^3 = 24$

3. Misal $a^x = y$ dan ${}^a\log b = x$, maka....

- a. $x = y$
- b. $a = y$
- c. $b = y$
- d. $a = b$
- e. $a = x$

4. Jika ${}^2\log 8 = b$, maka ${}^b\log 9 = \dots$

- a. 2
- b. 1
- c. 0
- d. -1
- e. -2

5. Jika $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$, maka

- a. ${}^5\log \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3}$
- b. $\frac{1}{3}\log \sqrt[3]{5} = 5$
- c. ${}^5\log \frac{1}{3} = \sqrt[3]{5}$
- d. $\frac{1}{3}\log 5 = \sqrt[3]{5}$
- e. ${}^5\log 3 = \sqrt{5}$

6. ${}^{27}\log 3 = \dots$

- a. 3
- b. 2
- c. 1
- d. $\frac{1}{2}$
- e. $\frac{1}{3}$

7. ${}^6\log 6\sqrt{6} = \dots$

- a. 2
- b. 1,75
- c. 1,5
- d. 1,25
- e. 1,05

8. Nilai a dari ${}^a\log 32 = 5$ adalah

- a. 2
- b. 3
- c. 4
- d. 5
- e. 6

9. Supaya ${}^5\log a = 0,5$ maka $a = \dots$

- a. -1
- b. 1
- c. 5^{-1}
- d. $\sqrt{5}$
- e. -5

10. Jika ${}^x\log 0,1 = -\frac{1}{3}$ maka $x = \dots$

- a. -10
- b. $\frac{1}{1000}$
- c. 10
- d. 100
- e. 1000

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

SIFAT-SIFAT LOGARITMA

Mari kita pelajari terlebih dahulu sifat-sifat logaritma sebagai dasar dalam menjawab atau menyelesaikan persamaan logaritma.



A. Logaritma dari perkalian

$${}^a \log bc = {}^a \log b + {}^a \log c \text{ dengan } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$$

$${}^a \log b \cdot {}^b \log c = {}^a \log c \text{ dengan } a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0$$



Perhatikan contoh 3 berikut.

a. Jika $\log 2 = 0,301$ dan $\log 3 = 0,4771$, maka:

$$\begin{aligned} \text{i. } \log 6 &= \log(2 \cdot 3) \\ &= \log 2 + \log 3 \\ &= 0,3010 + 0,4771 \\ &= 0,7781 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \log 12 &= \log(2 \cdot 2 \cdot 3) \\ &= \log 2 + \log 2 + \log 3 \\ &= 0,3010 + 0,3010 + 0,4771 \\ &= 1,0791 \end{aligned}$$

b. ${}^2 \log 5 \cdot {}^5 \log 16 = {}^2 \log 16 = 4$

c. $\log 20 + \log 5 = \log(20 \cdot 5)$
 $= \log 100$
 $= 2$

d. ${}^{15} \log 5\sqrt{5} + {}^{15} \log \sqrt{3} + {}^{15} \log 45 = {}^{15} \log(5\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot 45)$
 $= {}^{15} \log 225\sqrt{5}$
 $= {}^{15} \log 15^{2\frac{1}{2}}$
 $= 2\frac{1}{2}$



Ayo Berlatih 3

Sederhanakanlah bentuk logaritma berikut.

- ${}^2\log 24 + {}^2\log 6 + {}^2\log \frac{1}{9} = \dots$
- ${}^3\log 36 + {}^3\log 6 + {}^3\log \frac{1}{8} = \dots$
- ${}^3\log \frac{1}{4} \cdot {}^2\log \frac{1}{27} = \dots$
- ${}^6\log 4\sqrt{2} + {}^6\log \sqrt{3} + {}^6\log 54 = \dots$
- Jika ${}^2\log 5 = a$ dan ${}^2\log 7 = b$ maka ${}^2\log 35 = \dots$
- Jika $\log 2 = p$, dan $\log 3 = q$, maka $\log 600 = \dots$

B. Logaritma dari pembagian

$${}^a\log \frac{b}{c} = {}^a\log b - {}^a\log c \text{ dengan } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$$

$${}^a\log \frac{b}{c} = -{}^a\log \frac{c}{b} \text{ dengan } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$$



Perhatikan contoh 4 berikut.

- $\log 20 - \log 2 = \log \frac{20}{2}$
 $= \log 10$
 $= 1$
- ${}^2\log 24 - {}^2\log 12 = {}^2\log \frac{24}{12}$
 $= {}^2\log 2$
 $= 1$
- Jika $\log 2 = 0,3010$ dan $\log 3 = 0,4771$ maka:
 - $\log 1,5 = \log \frac{3}{2}$
 $= \log 3 - \log 2$
 $= 0,4771 - 0,3010$
 $= 0,1761$

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } \log \frac{2}{3} &= \log 2 - \log 3 \\
 &= \log 2 - \log 3 \\
 &= 0,3010 - 0,4771 \\
 &= -0,1761
 \end{aligned}$$



Ayo Berlatih 4

Sederhanakanlah bentuk logaritma berikut.

1. ${}^3\log 108 - {}^3\log 4 = \dots$
2. ${}^2\log 36 - {}^2\log 72 = \dots$
3. ${}^5\log 75 - {}^5\log 24 + {}^5\log 8 = \dots$
4. Jika $\log 2 = x$ maka $\log 5 = \dots$

C. Logaritma dari perpangkatan

$${}^a\log b^n = n \cdot {}^a\log b \text{ dengan } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$$

$${}^a\log b^n = \frac{n}{m} \cdot {}^a\log b \text{ dengan } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, m > 0, m \neq 1$$



Perhatikan contoh 5 berikut.

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \frac{1}{2}\log 25 - \frac{1}{3}\log 64 + \frac{1}{4}\log 81 + \log \frac{8}{3} &= \log 25^{\frac{1}{2}} - \log 64^{\frac{1}{3}} + \log 81^{\frac{1}{4}} + \log \frac{8}{3} \\
 &= \log \frac{5 \cdot 3 \cdot 8}{4} \\
 &= \log 10 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

b. Jika $\log 2 = 0,3010$ dan $\log 3 = 0,4771$ maka:

$$\begin{aligned}
 \text{i. } \log 16 &= \log 2^4 \\
 &= 4\log 2 \\
 &= 4 \cdot 0,3010 \\
 &= 1,2040
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } \log 48 &= \log(2^4 \cdot 3) \\
 &= \log 2^4 + \log 3 \\
 &= 4 \log 2 + \log 3 \\
 &= 4 \cdot 0,3010 + 0,4771 \\
 &= 1,2040 + 0,4771 \\
 &= 1,6811
 \end{aligned}$$



Ayo Berlatih 5

Sederhanakanlah bentuk logaritma berikut.

1. $\frac{1}{3} {}^4 \log 125 = \dots$
2. $2 \log 0,5 - \log 225 + 2 \log 0,3 + 6 = \dots$
3. Jika ${}^2 \log 5 = p$, maka ${}^2 \log 100 = \dots$

D. Mengubah Basis Logaritma

$${}^a \log b = \frac{{}^m \log b}{{}^m \log a} \text{ dengan } m > 0, m \neq 1, a > 0, b > 0$$



Perhatikan contoh 6 berikut.

$$\begin{aligned}
 \text{a. } {}^2 \log 3 &= \frac{\log 3}{\log 2} \\
 &= \frac{\log 3}{\log 2} \\
 &= \frac{0,4771}{0,3010} \\
 &= 1,5850
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \log 25 - \frac{1}{{}^{20} \log 10} + \frac{1}{{}^8 \log 10} &= \log 25 - {}^{10} \log 20 + {}^{10} \log 8 \\
 &= \log \frac{25 \cdot 8}{20} \\
 &= \log 10 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

- c. Nyatakan ${}^6\log 15$ dalam m dan n , apabila ${}^2\log 3 = m$ dan ${}^3\log 5 = n$.

Pembahasan:

$${}^2\log 3 = m \Rightarrow \frac{\log 3}{\log 2} = m \Rightarrow \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{1}{m} \Rightarrow {}^3\log 2 = \frac{1}{m}$$

$$\begin{aligned} {}^6\log 15 &= \frac{{}^3\log 15}{{}^3\log 6} \\ &= \frac{{}^3\log 3 \cdot 5}{{}^3\log 3 \cdot 2} \\ &= \frac{{}^3\log 3 + {}^3\log 5}{{}^3\log 3 + {}^3\log 2} \\ &= \frac{1 + n}{1 + \frac{1}{m}} \\ &= \frac{m(1 + n)}{m + 1} \end{aligned}$$



Ayo Berlatih 6

Kerjakan dengan benar soal berikut.

1. Jika $\log 5 = a$ dan $\log 3 = b$ maka ${}^5\log 3 = \dots$
2. $\frac{1}{{}^3\log 2} + \frac{1}{{}^5\log 2} = \dots$
3. Jika ${}^5\log 3 = p$ dan ${}^2\log 5 = q$ maka ${}^{15}\log 20 = \dots$

E. Perpangkatan dengan Logaritma

$$a^{a \log b} = b \text{ dengan } a > 0, a \neq 1, b > 0$$



Perhatikan contoh 7 berikut.

Tentukanlah nilai dari:

- a. $2^{2 \log 3}$
- b. $8^{2 \log 5}$

Pembahasan:

a. $2^{2\log 3} = 3$

b. $8^{2\log 5} = (2)^{3 \cdot 2\log 5}$
 $= 2^{2\log 5^3}$
 $= 5^3$
 $= 125$



Ayo Berlatih 7

Tentukanlah nilai dari:

1. $3^{3\log 2} = \dots$

2. $9^{3\log 2} = \dots$

3. $2^{4\log 9} = \dots$

TES FORMATIF

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. Nilai dari ${}^2\log 16 + {}^2\log \frac{1}{8} + {}^2\log 32$ adalah
 - a. 6
 - b. 5
 - c. 4
 - d. 3
 - e. 2
2. Nilai dari ${}^3\log \frac{1}{27} + {}^3\log 9 + {}^3\log \frac{1}{3}$ adalah
 - a. -5
 - b. -4
 - c. -3
 - d. -2
 - e. -1
3. Jika $\log 3 = 0,4771$ dan $\log 7 = 0,8451$; nilai dari $\log 21$ adalah
 - a. 0,368
 - b. 0,4032
 - c. 1,3222
 - d. 1,3322
 - e. 1,7993
4. Nilai dari ${}^a\log \frac{1}{b} \cdot {}^b\log \frac{1}{c^2} \cdot {}^c\log \frac{1}{a^3}$ adalah
 - a. -6
 - b. -3
 - c. -2
 - d. 3
 - e. 6
5. Nilai dari $\frac{1}{2}\log \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3}\log \frac{1}{4}$ adalah
 - a. 8
 - b. 6
 - c. 4
 - d. 3
 - e. 2
6. Nilai dari ${}^4\log 36 - {}^4\log 9 = \dots$
 - a. 5
 - b. 4
 - c. 3
 - d. 2
 - e. 1
7. Nilai dari ${}^3\log \frac{1}{3} - {}^3\log \frac{1}{9} = \dots$
 - a. -2
 - b. -1
 - c. 1
 - d. 2
 - e. 3
8. Nilai dari ${}^3\log 6 + {}^3\log 9 - {}^3\log 2$ adalah
 - a. 6
 - b. 5
 - c. 4
 - d. 3
 - e. 2
9. Nilai dari $2 \cdot {}^3\log 4 - \frac{1}{2} \cdot {}^3\log 25 + {}^3\log \frac{10}{32}$ adalah
 - a. 0
 - b. $\frac{1}{3}$
 - c. 1
 - d. 3
 - e. 9
10. Nilai dari $\frac{1}{3}\log 8 + \log 9 - \frac{1}{3}\log 27$ adalah
 - a. 8
 - b. 6
 - c. 5
 - d. 2
 - e. 1

11. Jika ${}^3\log 5 = a$, hasil dari ${}^9\log 625$ adalah

- a. a
- b. $2a$
- c. $4a$
- d. $5a$
- e. $8a$

12. Jika ${}^3\log 2 = b$, hasil dari ${}^{\frac{1}{3}}\log \sqrt{2}$ adalah

- a. $-2b$
- b. $-b$
- c. $-\frac{1}{2}b$
- d. $\frac{1}{2}b$
- e. $2b$

13. Jika $\log 2 = p$ dan $\log 3 = q$, hasil dari $\frac{{}^3\log 2}{{}^2\log 3}$ adalah

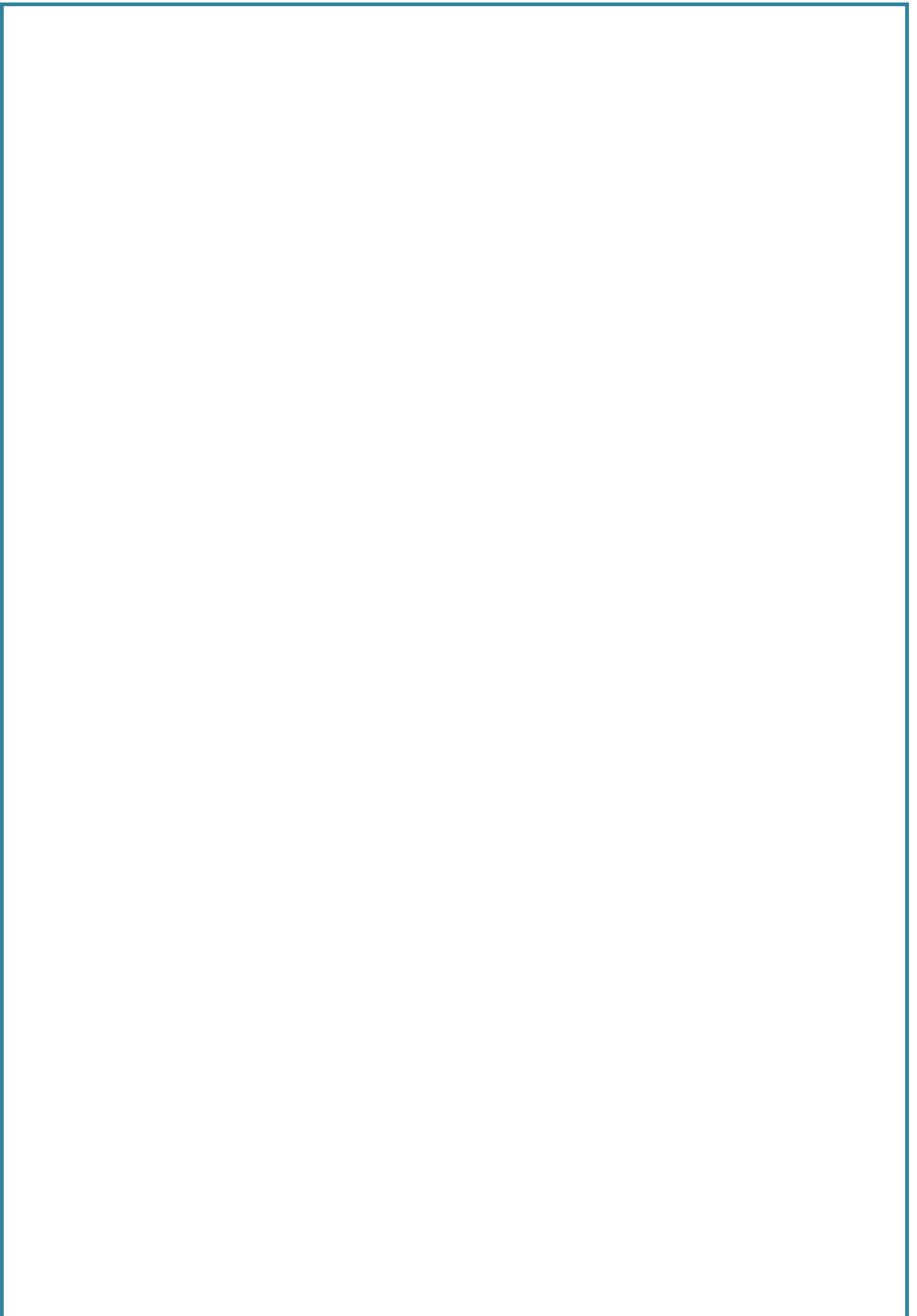
- a. 1
- b. $\frac{p}{q}$
- c. $\frac{q}{p}$
- d. $\frac{p^2}{q^2}$
- e. $\frac{q^2}{p^2}$

14. Jika ${}^5\log 2 = p$, hasil dari ${}^{\sqrt{5}}\log 0,125$ adalah

- a. $-\frac{1}{6}p$
- b. $-\frac{2}{3}p$
- c. $-\frac{3}{2}p$
- d. $-\frac{5}{2}p$
- e. -6

15. Nilai dari $25^{5\log 7} \cdot 2^{8\log 27} \cdot (\sqrt{5})^{5\log 100}$ adalah

- a. 1470
- b. 1430
- c. 1270
- d. 1230
- e. 1070



**KEGIATAN
PEMBELAJARAN 3**

PERSAMAAN LOGARITMA

Persamaan logaritma adalah persamaan yang peubahnya terdapat tanda logaritma. Penyelesaian persamaan logaritma dapat ditentukan dengan menerapkan sifat-sifat yang berlaku dalam logaritma. Persamaan logaritma dapat dikelompokkan ke dalam beberapa bentuk, diantaranya sebagai berikut.

A. Persamaan logaritma berbentuk ${}^a\log f(x) = b$

$${}^a\log f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b \text{ dengan } a > 0, a \neq 1, f(x) > 0$$



Perhatikan contoh 8 berikut.

Tentukan penyelesaian persamaan logaritma berikut.

- ${}^3\log(2x-1) = 2$
- ${}^x\log(3x+10) = 2$
- ${}^2\log(2x-3) - {}^4\log\left(x - \frac{3}{4}\right) = 1$

Pembahasan:

a. ${}^3\log(2x-1) = 2$
 $2x-1 = 3^2$
 $2x-1 = 9$
 $2x = 10$
 $x = 5$

b. ${}^x\log(3x+10) = 2$
 $3x+10 = x^2$
 $x^2 - 3x - 10 = 0$
 $(x-5)(x+2) = 0$
 $x_1 = 5$ dan $x_2 = -2$

Nilai $x = -2$ tidak berlaku sebab bilangan pokok harus lebih dari nol ($a > 0$). Jadi penyelesaiannya adalah $x = 5$.

$$c. \quad {}^2\log(2x-3) - {}^4\log\left(x - \frac{3}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow {}^2\log(2x-3) - {}^2\log\left(x - \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow {}^2\log(2x-3) - {}^2\log\sqrt{x - \frac{3}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow {}^2\log\left(\frac{2x-3}{\sqrt{x - \frac{3}{2}}}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{x - \frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow 2x-3 = 2\sqrt{x - \frac{3}{2}} \quad (\text{lalu kita kuadratkan ya})$$

$$\Rightarrow (2x-3)^2 = \left(2\sqrt{x - \frac{3}{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 4x - 6$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 16x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-5)(2x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{5}{2} \text{ dan } x_2 = \frac{3}{2}$$

Nilai $x = \frac{3}{2}$ tidak memenuhi, sebab untuk $x = \frac{3}{2}$ mengakibatkan nilai $f(x) = 0$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = 2x - 3 & f(x) = x - \frac{3}{4} \\ = 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 & \text{dan} \quad = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \\ = 0 & = 0 \end{array}$$

Jadi penyelesaiannya adalah $x = \frac{5}{2}$.



Ayo Berlatih 8

Tentukan penyelesaian dari bentuk persamaan berikut.

1. ${}^2\log(3x+1) = 4$
2. $\log(4x-6) = 2$
3. ${}^x\log(5x+14) = 2$

B. Persamaan logaritma berbentuk ${}^a\log f(x) = {}^a\log p$

$${}^a\log f(x) = {}^a\log p \Leftrightarrow f(x) = p \text{ dengan } a > 0, a \neq 1, p > 0, f(x) > 0$$



Perhatikan contoh 9 berikut.

Tentukan penyelesaian persamaan logaritma berikut.

- a. ${}^3\log(x^2 - 4x) = {}^3\log 12$
- b. ${}^x\log(x^2 - 4x) = {}^x\log 12$
- c. $\log(x^2 - 1) = 2\log 3 + 3\log 4 - \log 72$

Pembahasan:

a. ${}^3\log(x^2 - 4x) = {}^3\log 12$

$$x^2 - 4x = 12$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x - 6)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 6 \text{ dan } x_2 = -2$$

b. ${}^x\log(x^2 - 4x) = {}^x\log 12$

$$x^2 - 4x = 12$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x - 6)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 6 \text{ dan } x_2 = -2$$

Karena x merupakan bilangan pokok, maka harus dipenuhi $x > 0$.

Dengan demikian penyelesaiannya adalah $x = 6$.

$$c. \log(x^2 - 1) = 2\log 3 + 3\log 4 - \log 72$$

$$\log(x^2 - 1) = \log 3^2 + \log 4^3 - \log 72$$

$$\log(x^2 - 1) = \log\left(\frac{3^2 \cdot 4^3}{72}\right)$$

$$\log(x^2 - 1) = \log 8$$

$$x^2 - 1 = 8$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Dengan demikian, penyelesaiannya adalah $x = 3$ dan $x = -3$. Karena untuk x bernilai negatif ketika disubstitusikan pada $f(x)$ yaitu $(x^2 - 1)$, nilai $f(x)$ tetap bernilai positif sesuai syarat yang berlaku yaitu $f(x) > 0$.



Ayo Berlatih 9

Tentukan penyelesaian dari persamaan logaritma berikut.

1. ${}^2\log(x+1) = {}^2\log 5$
2. ${}^3\log(x^2 + 1) = {}^2\log 5$
3. ${}^x\log(x^2 + x + 1) = {}^x\log 13$

C. Persamaan logaritma berbentuk ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$

$${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ dengan } a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0$$



Perhatikan contoh 10 berikut.

Tentukan penyelesaian dari persamaan logaritma berikut.

- a. ${}^2\log(2x-1) = {}^2\log(x+3)$
- b. ${}^3\log(x+1) = {}^3\log 15 - {}^3\log(x-1)$
- c. $\log(x^2 - 1) - \log(x-1) = 1 + \log(x-8)$

Pembahasan:

$$a. \quad {}^2\log(2x-1) = {}^2\log(x+3)$$

$$(2x-1) = x+3$$

$$x = 4$$

Untuk $x = 4$, maka $2x-1 = 2 \cdot 4 - 1 > 0$ dan $x+3 = 4+3 > 0$.

Jadi $x = 4$ merupakan penyelesaian.

$$b. \quad {}^3\log(x+1) = {}^3\log 15 - {}^3\log(x-1)$$

$$\Rightarrow {}^3\log(x+1) = {}^3\log\left(\frac{15}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow (x+1) = \frac{15}{x-1}$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-1) = 15$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 15$$

$$\Rightarrow x^2 = 16$$

$$\Rightarrow x_1 = -4 \text{ dan } x_2 = 4$$

Untuk $x = -4$, maka $x+1 = -4+1 = -3 < 0$, berarti $x = -4$ bukan penyelesaian.

Untuk $x = 4$, maka $x+1 = 4+1 = 5 > 0$ dan $x-1 = 4-1 = 3 > 0$, berarti $x = 4$ merupakan penyelesaian.

Jadi penyelesaiannya adalah $x = 4$.

$$c. \quad \log(x^2 - 1) - \log(x-1) = 1 + \log(x-8)$$

$$\Rightarrow \log(x^2 - 1) - \log(x-1) = \log 10 + \log(x-8)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 1}{x-1}\right) = \log 10(x-8)$$

$$\Rightarrow \log\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \log(10x - 80)$$

$$\Rightarrow \log(x+1) = \log(10x - 80)$$

$$\Rightarrow x+1 = 10x - 80$$

$$\Rightarrow 9x = 81$$

$$\Rightarrow x = 9$$

Untuk $x = 9$, maka semua nilai $f(x)$ dan $g(x)$ bernilai positif. Ini berarti $x = 9$ merupakan penyelesaian.



Ayo Berlatih 10

Tentukan penyelesaian dari bentuk persamaan logaritma berikut.

1. $\log(2x+1) = \log(x+9)$
2. $\log(x^2 + 2x) = \log(3x + 20)$
3. ${}^5\log(x-1) = 1 - {}^5\log(x+3)$

D. Persamaan logaritma berbentuk $A({}^a \log f(x))^2 + B({}^a \log f(x)) + C = 0$

Dalam menyelesaikan permasalahan logaritma $A({}^a \log f(x))^2 + B({}^a \log f(x)) + C = 0$, dengan $a > 0, a \neq 0$, dan $f(x) > 0$, serta $A, B, C \in R$, dapat dilakukan pemisalan $u = {}^a \log f(x)$, sehingga persamaan berubah menjadi persamaan kuadrat dengan variabel u , yaitu:

$$Au^2 + Bu + C = 0$$

Penyelesaian persamaan di atas dapat dikerjakan dengan faktorisasi maupun melengkapkan kuadrat sempurna.



Perhatikan contoh 11 berikut.

Tentukanlah penyelesaian persamaan logaritma berikut.

a. ${}^3 \log^2 x - {}^3 \log x^2 - 3 = 0$

b. $(2 \log x - 1) \frac{1}{{}^x \log 10} = 1$

c. ${}^4 \log(x+1) = 3 \cdot {}^{x+1} \log 4 + 2$

Pembahasan:

a. ${}^3 \log^2 x - {}^3 \log x^2 - 3 = 0$

Misalkan $u = {}^3 \log x$, diperoleh:

$$u^2 - 2u - 3 = 0$$

$$(u - 3)(u + 1) = 0$$

$$u = 3 \text{ atau } u = -1$$

$$\text{Untuk } u = 3 \Rightarrow {}^3 \log x = 3 \Rightarrow x = 3^3 = 27$$

$$\text{Untuk } u = -1 \Rightarrow {}^3 \log x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Jadi nilai-nilai x yang memenuhi adalah $\frac{1}{3}$ dan 27.

b. $(2 \log x - 1) \frac{1}{{}^x \log 10} = 1$

Misalkan $u = \log x$, diperoleh:

$$(2u - 1)u = 1$$

$$2u^2 - u - 1 = 0$$

$$(2u + 1)(u - 1) = 0$$

$$u = -\frac{1}{2} \text{ atau } u = 1$$

$$\text{Untuk } u = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Untuk } u = 1 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$$

Jadi nilai-nilai x yang memenuhi adalah $\frac{1}{\sqrt{10}}$ dan 10 .

c. ${}^4\log(x+1) = 3 \cdot {}^{x+1}\log 4 + 2$

Misalkan $u = {}^4\log(x+1)$, diperoleh:

$$u = 3 \cdot \frac{1}{u} + 2$$

$$u^2 = 3 + 3u$$

$$u^2 - 3u - 3 = 0$$

$$(u+1)(u-3) = 0$$

$$u = -1 \text{ atau } u = 3$$

$$\text{Untuk } u = -1 \Rightarrow {}^4\log(x+1) = -1 \Rightarrow x+1 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Untuk } u = 3 \Rightarrow {}^4\log(x+1) = 3 \Rightarrow x+1 = 64 \Rightarrow x = 63$$

Jadi nilai-nilai x yang memenuhi adalah $-\frac{3}{4}$ dan 63 .



Ayo Berlatih 11

Tentukanlah penyelesaian dari persamaan logaritma berikut.

1. $\log^2 x - 4\log x + 3 = 0$
2. ${}^2\log x \{ {}^2\log x - 3 \} = {}^2\log 16$
3. ${}^2\log(x+1) + \frac{6}{{}^2\log(x+1)} = {}^2\log 32$

TES FORMATIF

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. Nilai yang memenuhi persamaan ${}^3\log(x+10) = 3$ adalah
 - a. 37
 - b. 30
 - c. 27
 - d. 17
 - e. -7
2. Nilai yang memenuhi persamaan ${}^x\log(2x+8) = 2$ adalah
 - a. $\{2,4\}$
 - b. $\{-2,4\}$
 - c. $\{-4,2\}$
 - d. $\{4\}$
 - e. $\{2\}$
3. Nilai yang memenuhi persamaan ${}^2\log(x+1) = {}^2\log 16$ adalah ...
 - a. 13
 - b. 14
 - c. 15
 - d. 16
 - e. 17
4. Nilai yang memenuhi persamaan ${}^2\log x + {}^2\log(x+1) = {}^2\log 12$ adalah
 - a. $\{4\}$
 - b. $\{3\}$
 - c. $\{4,3\}$
 - d. $\{-3\}$
 - e. $\{-4\}$
5. Nilai yang memenuhi persamaan $\log(2x-5) = \log(x+3)$ adalah
 - a. 5
 - b. 6
 - c. 7
 - d. 8
 - e. 9
6. Nilai yang memenuhi persamaan ${}^3\log(x^2-1) = {}^3\log(5x+5)$ adalah
 - a. $\{1,4\}$
 - b. $\{4,1\}$
 - c. $\{3\}$
 - d. $\{2\}$
 - e. $\{0\}$
7. Nilai yang memenuhi persamaan ${}^3\log(2x-1) - {}^3\log(x-3) = {}^3\log 7$ adalah
 - a. 2
 - b. 3
 - c. 4
 - d. 6
 - e. 8
8. Nilai yang memenuhi persamaan ${}^5\log^2 x - {}^5\log x^6 + 5 = 0$ adalah
 - a. $\{5,25\}$
 - b. $\{5,30\}$
 - c. $\{25,5\}$
 - d. $\{30,5\}$
 - e. $\{30,25\}$

**KEGIATAN
PEMBELAJARAN 4**

PERTIDAKSAMAAN LOGARITMA

Pertidaksamaan logaritma merupakan bentuk lain dari logaritma, tetapi pada pertidaksamaan logaritma mempunyai tanda penghubung berupa tanda ketidaksamaan, yang meliputi tanda $<$, $>$, \leq , atau \geq .

Sifat-sifat Pertidaksamaan Logaritma:

- a. Untuk $a > 1$
 - Jika ${}^a\log f(x) > {}^a\log g(x)$ maka $f(x) > g(x)$
 - Jika ${}^a\log f(x) < {}^a\log g(x)$ maka $f(x) < g(x)$
- b. Untuk $0 < a < 1$
 - Jika ${}^a\log f(x) > {}^a\log g(x)$ maka $f(x) < g(x)$
 - Jika ${}^a\log f(x) < {}^a\log g(x)$ maka $f(x) > g(x)$



Perhatikan contoh 12 berikut.

Tentukanlah penyelesaian pertidaksamaan logaritma berikut.

- a. ${}^2\log(2x+1) < {}^2\log 3$
- b. $\frac{1}{2}\log(x^2+2x) < -3$
- c. ${}^2\log(x^2+3x) > {}^2\log(x+15)$
- d. $\frac{1}{2}\log(x^2-2x) > \frac{1}{2}\log(x+10)$

Pembahasan:

a. ${}^2\log(2x+1) < {}^2\log 3$

Syarat numerus logaritma:

$$2x+1 > 0$$

$$2x > -1$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

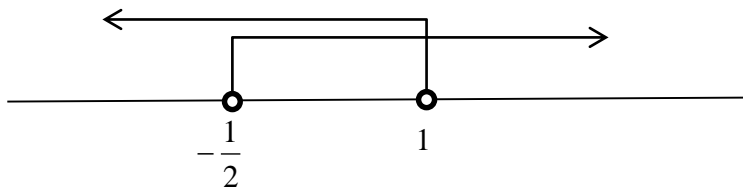
Syarat pertidaksamaan:

$$2x+1 < 3$$

$$2x < 2$$

$$x < 1$$

Penyelesaiannya adalah irisan dari $x > -\frac{1}{2}$ dan $x < 1$.



Jadi nilai x yang memenuhi adalah $-\frac{1}{2} < x < 1$.

b. $\frac{1}{2} \log(x^2 + 2x) < -3$

Syarat numerus logaritma:

$$x^2 + 2x > 0$$

$$x(x+2) > 0$$

$$x < -2 \text{ atau } x > 0$$

Syarat pertidaksamaan:

$$x^2 + 2x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

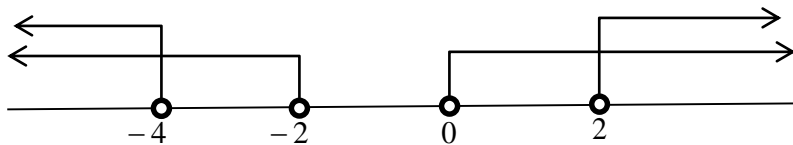
$$x^2 + 2x > 8$$

$$x^2 + 2x - 8 > 0$$

$$(x+4)(x-2) > 0$$

$$x < -4 \text{ atau } x > 2$$

Penyelesaiannya adalah irisan dari $(x < -2 \text{ atau } x > 0)$ dan $(x < -4 \text{ atau } x > 2)$.



Jadi nilai x yang memenuhi adalah $x < -4 \text{ atau } x > 2$.

c. ${}^2 \log(x^2 + 3x) > {}^2 \log(x+15)$

Syarat numerus logaritma:

i. $x^2 + 3x > 0$

$$x(x+3) > 0$$

$$x < -3 \text{ atau } x > 0$$

ii. $x+15 > 0$

$$x > -15$$

Syarat pertidaksamaan:

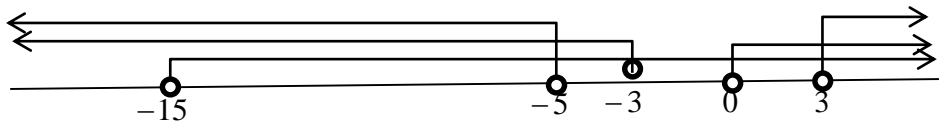
$$x^2 + 3x > x + 15$$

$$x^2 + 2x - 15 > 0$$

$$(x + 5)(x - 3) > 0$$

$$x < -5 \text{ atau } x > 3$$

Penyelesaiannya adalah irisan dari $(x < -3 \text{ atau } x > 0)$ dan $(x > -15)$ dengan $(x < -5 \text{ atau } x > 3)$



Jadi nilai x yang memenuhi yaitu $-15 < x < -5$ atau $x > 3$.

d. $\frac{1}{2} \log(x^2 - 2x) > \frac{1}{2} \log(x + 10)$

Syarat numerus logaritma:

i. $x^2 - 2x > 0$

$$x(x - 2) > 0$$

$$x < 0 \text{ atau } x > 2$$

ii. $x + 10 > 0$

$$x > -10$$

Syarat pertidaksamaan:

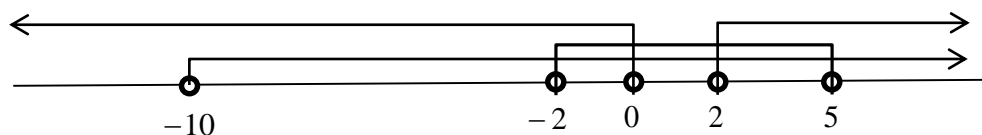
$$x^2 - 2x < x + 10$$

$$x^2 - 3x - 10 < 0$$

$$(x + 2)(x - 5) < 0$$

$$-2 < x < 5$$

Jadi penyelesaiannya adalah irisan dari $(x < 0 \text{ atau } x > 2)$ dan $(x > -10)$ dengan $(-2 < x < 5)$.



Jadi nilai x yang memenuhi adalah $-2 < x < 10$ atau $2 < x < 5$.



Ayo Berlatih 12

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan berikut.

1. ${}^2\log(2x + 4) < 3$

2. $\frac{1}{3}\log(2x + 5) < -2$

3. $\log(x^2 + 4x + 4) \leq \log(5x + 10)$

Dalam penentuan penyelesaian pertidaksamaan logaritma, adakalanya diperlukan permisalan $u = {}^a \log x$. Dengan permisalan tersebut dapat diperoleh pertidaksamaan yang lebih sederhana dan lebih mudah dalam menentukan penyelesaiannya.



Perhatikan contoh 13 berikut.

Tentukanlah penyelesaian pertidaksamaan berikut.

- a. $\log^2 x - 3\log x + 2$
- b. $(2\log x - 1) \frac{1}{{}^x \log 10} > 1$
- c. $1 - \frac{1}{{}^2 \log x} + \frac{3}{2 \cdot {}^2 \log x - 1} > 0$

Pembahasan:

a. $\log^2 x - 3\log x + 2$

Misal $u = \log x$, diperoleh:

$$u^2 - 3u + 2 < 0$$

$$(u - 1)(u - 2) < 0$$

$$1 < u < 2$$

Untuk $u = 1 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$

Untuk $u = 2 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$

Jadi nilai x yang memenuhi yaitu $10 < x < 100$.

b. $(2\log x - 1) \frac{1}{{}^x \log 10} > 1$

Syarat numerus logaritma:

x merupakan bilangan pokok logaritmanya, maka $x > 0$ dan $x \neq 1$.

Syarat pertidaksamaan:

$$u = \log x,$$

Misal $u = \log x$, diperoleh:

$$2u^2 - u - 1 > 0$$

$$(2u + 1)(u - 1) > 0$$

$$u < -\frac{1}{2} \text{ atau } u > 1$$

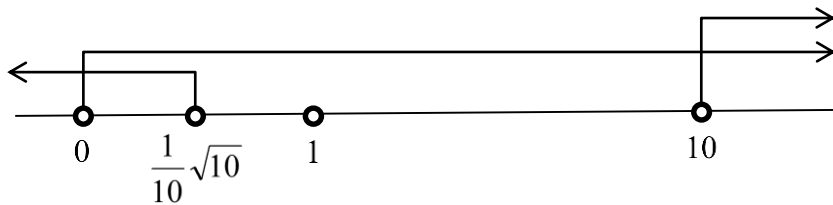
$$\Rightarrow u < -\frac{1}{2} \Rightarrow \log x < -\frac{1}{2} \Rightarrow x < 10^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x < \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow u < 1 \Rightarrow \log x > 1 \Rightarrow x > 10^1 \Rightarrow x > 10$$

$$x < \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ atau } x > 10$$

Penyelesaiannya adalah irisan dari:

$$x > 0 \text{ dan } x \neq 1 \text{ dengan } x < \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ atau } x > 10$$



$$\text{yaitu : } 0 < x < \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ atau } x > 10$$

c. $1 - \frac{1}{{}^2\log x} + \frac{3}{2 \cdot {}^2\log x - 1} > 0$

Syarat numerus logaritma $x > 0$.

Syarat pertidaksamaan:

Misal $u = {}^2\log x$, diperoleh:

$$1 - \frac{1}{u} + \frac{3}{2u - 1} > 0$$

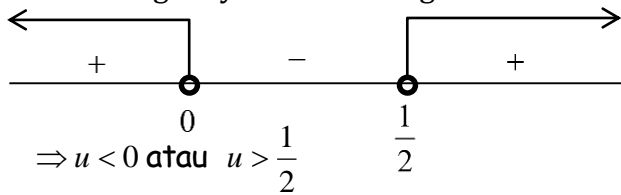
Dengan menyamakan penyebut diperoleh:

$$\frac{u(2u - 1) - (2u - 1) + 3u}{u(2u - 1)} > 0$$

$$\frac{2u^2 - u - 2u + 1 + 3u}{u(2u - 1)} > 0$$

$$\frac{2u^2 + 1}{u(2u - 1)} > 0$$

Garis bilangannya adalah sebagai berikut.



$$\Rightarrow u < 0 \text{ atau } u > \frac{1}{2}$$

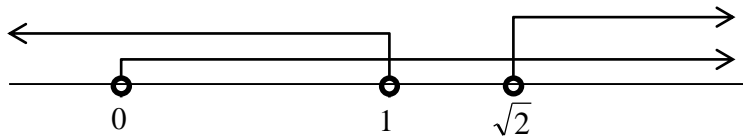
$$\text{Untuk } u < 0 \Rightarrow {}^2 \log x < 0 \Rightarrow x < 2^0 \Rightarrow x < 1$$

$$\text{Untuk } u > \frac{1}{2} \Rightarrow {}^2 \log x > \frac{1}{2} \Rightarrow x > 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x > \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x < 1 \text{ atau } x > \sqrt{2}$$

Penyelesaiannya adalah irisan dari:

$$(x > 0) \text{ dengan } (x < 1 \text{ atau } x > \sqrt{2})$$



$$\text{yaitu: } 0 < x < 1 \text{ atau } x > \sqrt{2}$$



Ayo Berlatih 13

Tentukanlah penyelesaian pertidaksamaan berikut.

1. $({}^2 \log x)^2 - 5 \cdot {}^2 \log x + 6 < 0$
2. ${}^4 \log^2 x - 2 \cdot {}^4 \log \sqrt{x} > {}^4 \log^4 \sqrt{64}$

TES FORMATIF

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang benar.

1. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\log(3x+1) > 2$ adalah
 - a. $x < 2$
 - b. $x < -2$
 - c. $0 < x < 2$
 - d. $-2 < x < 2$
 - e. $-2 < x < 0$
2. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\log(x+5) < \log(2x-7)$ adalah
 - a. $x > 12$
 - b. $3,5 < x < 12$
 - c. $-5 < x < 12$
 - d. $x > -5$
 - e. $-5 < x < 3,5$
3. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan ${}^9\log(x^2 - 2x) < \frac{1}{2}$ adalah
 - a. $-1 < x < 1$ atau $x > 3$
 - b. $-1 < x < 0$ atau $2 < x < 3$
 - c. $0 < x < 3$
 - d. $-1 < x < 1$ atau $2 < x < 3$
 - e. $-1 < x < 3$
4. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{1}{2}\log\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) > 1$ adalah
 - a. $-\frac{1}{2} < x < 0$ atau $x > 1$
 - b. $-\frac{1}{2} < x < 0$ atau $x < 2$
 - c. $0 < x < 1$
 - d. $-\frac{1}{2} < x < 0$ atau $\frac{1}{2} < x < 1$
 - e. $-\frac{1}{2} < x < 1$
5. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan ${}^2\log(x^2 - x - 12) < {}^2\log(2x + 16)$ adalah
 - a. $-4 < x < -3$ atau $4 < x < 7$
 - b. $-8 < x < -4$ atau $x > 7$
 - c. $-4 < x < 7$
 - d. $-3 < x < 4$ atau $7 < x < 8$
 - e. $-8 < x < 7$
6. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{1}{2}\log(x^2 - 4x - 12) < \frac{1}{2}\log(2x + 4)$ adalah
 - a. $-6 < x < -2$ atau $x > 8$
 - b. $-2 < x < 6$ atau $x > 8$
 - c. $6 < x < 8$
 - d. $x > 8$
 - e. $x > 6$
7. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\log(x-3) + \log(x+8) < \log(2x+4)$ adalah
 - a. $-8 < x < -2$ atau $x > 7$
 - b. $-2 < x < 3$ atau $x > 4$
 - c. $3 < x < 7$
 - d. $3 < x < 4$
 - e. $x > 4$
8. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan ${}^2\log^2 x^2 - {}^2\log x^2 - 3 < 0$ adalah
 - a. $-1 < x < 3$
 - b. $\frac{1}{2} < x < 8$
 - c. $x < \frac{1}{2}$ atau $x > 8$
 - d. $x < -1$ atau $x > 3$
 - e. $x > 3$

**KEGIATAN
PEMBELAJARAN 5**

GRAFIK FUNGSI LOGARITMA

Grafik fungsi $y = {}^a \log x$ merupakan invers dari fungsi $y = a^x$. Untuk melukis grafik $y = {}^a \log x$, kurva $y = a^x$ dicerminkan terhadap garis $y = x$.



Perhatikan contoh berikut.

- Gambarkan grafik fungsi $f(x) = {}^2 \log x$ dan $g(x) = 2^x$

Pembahasan:

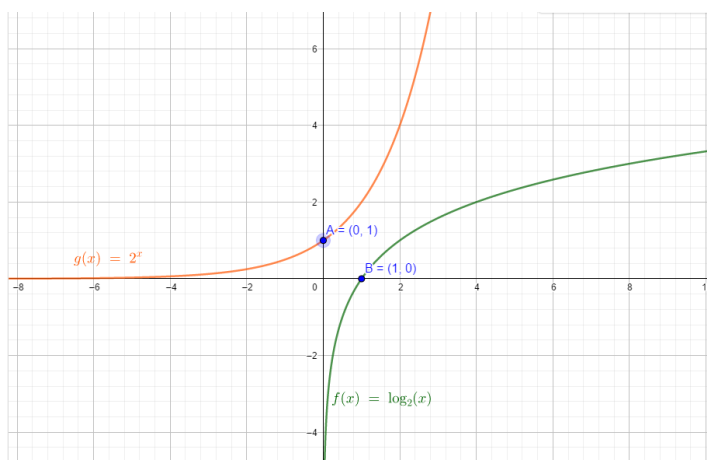
$$f(x) = {}^2 \log x$$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

$$g(x) = 2^x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Berdasarkan tabel tersebut, maka diperoleh grafik sebagai berikut.



Gambar 5.1 Grafik Fungsi $f(x) = {}^2 \log x$ dan $g(x) = 2^x$

2. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{2} \log x$ dan $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Pembahasan:

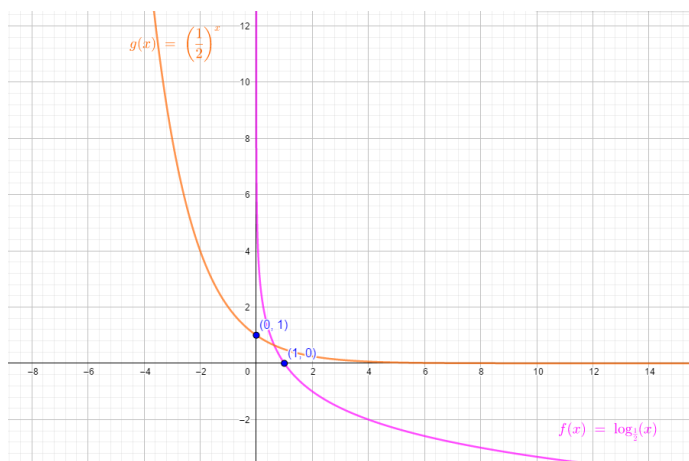
$$f(x) = \frac{1}{2} \log x$$

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Berdasarkan tabel tersebut, maka diperoleh grafik sebagai berikut.



Gambar 5.2 Grafik Fungsi $f(x) = \frac{1}{2} \log x$ dan $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Dengan memperhatikan kedua grafik di atas, maka:

1. Grafik $f(x) = {}^a \log x$ untuk $a > 1$ (Gambar 5.1) dan $0 < a < 1$ (Gambar 5.2) melalui titik $(1, 0)$, karena nilai dari $\log 1$ untuk semua bilangan pokok adalah 0.
2. Grafik $f(x) = {}^a \log x$ hanya terdapat di sebelah kanan sumbu Y , karena tidak ada nilai y untuk x yang negatif atau nol.
3. Grafik $f(x) = {}^a \log x$ dapat diperoleh dengan mencerminkan grafik $g(x) = a^x$ simetris terhadap garis $y = x$.

Jadi, dapat kita simpulkan bahwa grafik $f(x) = {}^a \log x$ dan grafik $g(x) = a^x$ simetris terhadap garis $y = x$.



Ayo Berlatih 14

Gambarkan grafik dari fungsi berikut.

1. $y = {}^3 \log x$ dan $y = 3^x$

2. $y = {}^{\frac{1}{3}} \log x$ dan $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

3. $y = {}^2 \log(x+1)$

**KEGIATAN
PEMBELAJARAN 6**

APLIKASI FUNGSI LOGARITMA

Banyak hal yang berperilaku sebagai fungsi logaritma. Berikut akan diberikan beberapa contoh yang berkaitan dengan hal-hal tersebut.

A. Bunga Majemuk

Jika modal M disimpan di bank dengan bunga majemuk b pertahun, maka besarnya simpanan tersebut setelah n tahun dapat dirumuskan dengan:

$$M_n = M(1+b)^n$$



Perhatikan contoh berikut.

Soal:

Misal modal dasar sebesar Rp 500.000,00 disimpan di suatu bank dengan bunga majemuk 10% pertahun, setelah berapa tahun modal tersebut menjadi Rp 950.000,00.

Pembahasan:

$$M_n = M(1+b)^n$$

$$950.000 = 500.000(1+10\%)^n$$

$$950.000 = 500.000(1+0,1)^n$$

$$\log 1,9 = n \log 1,1$$

$$n = \frac{\log 1,9}{\log 1,1}$$

$$= 6,734$$

Ini berarti setelah 7 tahun modal tersebut dapat menjadi Rp 950.000,00.



Ayo Berlatih 14

Seorang penabung menyimpan uangnya di satu bank sebesar Rp 1.000.000,00 dengan bunga majemuk 12% pertahun. Setelah berapa tahun jumlah uang tersebut menjadi dua kali lipat?

B. Menghitung nilai pH senyawa kimia

Penggunaan logaritma sering ditemui penggunaannya di bidang kimia dan sains, misalnya untuk menghitung pH senyawa kimia. Para saintis mendefinisikan potensial hidrogen sebagai berikut.

$$pH = -\log[H^+]$$

Dengan $[H^+]$ adalah konsentrasi dari ion hidrogen dalam nol per liter suatu larutan. Nilai pH merupakan sifat keasaman atau sifat basa suatu senyawa. Nilai pH air sama dengan 7. Secara umum senyawa basa mempunyai pH lebih dari 7 dan senyawa asam mempunyai pH kurang dari 7.



Perhatikan contoh berikut.

Soal:

Hitunglah pH dari jus jeruk jika diketahui konsentrasi ion hidrogennya sebesar $6,32 \times 10^{-4}$ (sampai ketelitian satu tempat desimal).

Pembahasan:

$$\begin{aligned} pH &= -\log[H^+] \\ &= -\log(6,32 \times 10^{-4}) \\ &= -(\log 6,32 + \log 10^{-4}) \\ &= -\log 6,32 + 4 \\ &= -0,8007 + 4 \\ &= 3,1993 \\ &\approx pH = 3,2 \end{aligned}$$

Petunjuk:

Ketika akan mencari nilai dari suatu log menggunakan kalkulator, ketik dahulu berapa nilai yang akan dicari, baru pencet tombol log.



Ayo Berlatih 14

Konsentrasi ion hidrogen $[H^+]$ dari sebuah larutan adalah $6,4 \times 10^{-7}$. Tentukan pH larutan tersebut.

UMPAN BALIK

Selamat, kamu telah selesai mempelajari Modul Pembelajaran ini. Sebagai refleksi bagi kamu dalam mempelajari modul ini, kamu dapat melakukan penilaian diri dengan beberapa pertanyaan, seperti:

1. Apa yang sudah saya pelajari?
2. Apa Materi yang belum saya pahami di dalam modul ini?
3. Apakah semua materi sudah saya pahami dengan baik?
4. Kesulitan terbesar apa yang saya alami untuk memahami materi?
5. Apakah semua aktivitas di dalam modul ini sudah saya lakukan?
6. Apakah semua aktivitas di dalam modul ini dapat saya selesaikan?
7. Apakah manfaat pengetahuan dan keterampilan yang sudah saya dapatkan dari modul ini?

Bertanyalah pada guru atau temanmu jika masih merasa kesulitan dalam mempelajari eksponensial dan logaritma.

PENUTUP

Melalui pembelajaran berbasis modul, diharapkan dapat membantu Ananda sehingga dapat belajar secara mandiri, mengukur kemampuan diri sendiri, dan menilai dirinya sendiri. Tidak terkecuali dalam memahami konsep eksponensial dan logaritma baik pengertian, sifat dan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari. Semoga modul ini dapat digunakan sebagai referensi tambahan dalam proses pembelajaran baik disekolah maupun dirumah. Semoga modul ini bermanfaat bagi Ananda khususnya yang bersekolah di SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta.

Tak lupa dalam kesempatan ini, penulis mohon maaf jika ada salah dalam penulisan, serta mohon kritik dan saran yang membangun demi sempurnanya penyusunan modul ini di masa yang akan datang. Sekali lagi, semoga modul ini memberikan manfaat bagi Ananda dan pembaca budiman lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- B.K. Noormandiri. (2016). Matematika Jilid 1 untuk SMA/MA Kelas X Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Budhi, W. S., & Widodo, U. (2017). ESPS Matematika untuk SMA/MA Kelas X Kelompok Peminatan dan Ilmu-Ilmu Alam. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Simangunsong, W., & Poyk, F. M. (2016). PKS Matematika Peminatan Kelas X SMA dan MA Kurikulum 2013 Edisi Revisi. Jakarta: Penerbit Gematama.
- Sukino. (2016). Matematika Jilid 1 untuk SMA/MA Kelas X Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Zaelani, A., Cunayah, C., & Irawan, E.I. (2006). 1700 bank soal pematapan matematika untuk SMA/MA. Bandung: Penerbit Yrama Widya.