SMA MUHAMMADIYAH 1 YOGYAKARTA
Sekolah Kader Muhammadiyah dan Pemimpin Bangsa

Modul Pembelajaran MATEMATIKA Peminatan

Untuk Kalangan Sendiri

KELAS XII

Semester 1

Disusun oleh :
Ratna Juwita, M.Pd.

KATA PENGANTAR KEPALA SEKOLAH
SMA MUHAMMADIYAH 1 YOGYAKARTA

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, Puji syukur kita panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan berbagai nikmat karunia kepada kita semua, sholawat dan salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW, keluarga, sahabat dan para pengikutnya sampai akhir zaman.

Berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Nomor 22 Tahun 2016 tentang Standar Proses Pendidikan Dasar dan Menengah disebutkan guru dalam menyusun perencanaan pembelajaran meliputi penyusunan rencana pelaksanaan pembelajaran dan penyiapan media dan sumber belajar, perangkat penilaian pembelajaran, dan skenario pembelajaran.

Salah satu bentuk sumber belajar dan bahan ajar adalah buku, modul, ensiklopedia, dan bentuk cetakan lainnya. Modul sebagai salah satu bahan ajar berbentuk cetak maupun *softfile* sangat baik digunakan dalam pembelajaran terutama saat pembelajaran *onlline*. Sehubungan dengan hal tersebut, maka penyusunan modul yang dilakukan oleh guru SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta bertujuan agar peserta didik dapat belajar secara mandiri. Dengan pembelajaran *online* karena kondisi pandemi covid 19 ini, keberadaan modul diharapkan dapat membantu siswa belajar.

Modul yang disusun berdasarkan Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta pada kondisi khusus (darurat pandemi covid 19). Selain membantu peserta didik dapat belajar secara mandiri dan disusun memuat materi pembelajaran yang jelas dan terperinci, peserta didik juga dapat melakukan evaluasi pembelajaran sehingga dapat mengetahui sejauh mana kemampuan penguasaan materi dari pembelajaran yang sudah mereka lakukan sendiri serta dapat digunakan sebagai salah satu rujukan atau referensi untuk materi pelajaran tertentu dan yang berkaitan.

Kepada Bapak/Ibu guru SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta yang sudah menyelesaikan penyusunan modul ini kami ucapkan selamat dan terimakasih, semoga modul ini dapat digunakan oleh peserta didik sebagai sumber belajar dan bahan ajar sehingga peserta didik SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta dapat belajar secara mandiri untuk mengembangkan potensi akademiknya. Semoga Allah SWT meridhloi kita semua. Aamiin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Kepala Sekolah,

PIMPINAN DAERAH MUHAMMADIYAH KOTA YOGYAKARTA
SEKOLAH MENENGAH ATAS
SMA MUHAMMADIYAH
TERAKREDITASI A
KOTA YOGYAKARTA
MAJELIS PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH

Drs. H. Herynugroho, M.Pd.
NIP 1965[illegible] 199003 1 005

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warrahmatullahi wabarrakatuh

Puji syukur penulis haturkan kehadirat Allah SWT yang telah memperkenankan untuk menyelesaikan modul ini. Tak lupa shalawat serta salam semoga tetap tercurah pada junjungan kita nabi Muhammad SAW, keluarganya, sahabatnya dan insya Allah kita semua sebagai umatnya sampai akhir zaman. Aamiin.

Modul ini disusun, sebagai bahan pembelajaran mandiri bagi peserta didik kelas XII program MIPA untuk menambah pengetahuan tentang materi mamematika wajib di kelas XII.

Pembahasan tentang materi matematika peminatan disajikan dengan rinci. Modul ini memaparkan materi, contoh soal, latihan untuk mengukur capaian setiap kegiatan pembelajaran, serta evaluasi untuk mengukur capaian setiap kompetensi dasarnya.

Demikianlan, mudah-mudahan modul ini dapat bermanfaat bagi peserta didik maupun guru dalam menstransfer ilmu. Penulis mengucapkan terima kasih kepada SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta yang telas memfasilitasi dalam menyusun modul ini.

Wassalamu'alaikum warrahmatullahi wabarrakatuh

Yogyakarta,   Juni 2021
Penulis,

Ratna Juwita, M.Pd.

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN

Perubahan zaman serba digital, apalagi pandemi covid-19 yang memberi imbas terutama didunia pendidikan yang tatap muka harus disulap online. Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang melejit serta seni dan budaya, berpengaruh pada perkembangan dan perubahan kehidupan bermasyarakat, berbangsa, dan bernegara di Indonesia. Hal tersebut menuntut perlunya perbaikan sistem pendidikan nasional termasuk penyempurnaan kurikulum.

Kurikulum merupakan seperangkat rencana dan pengaturan mengenai tujuan, isi, dan bahan pelajaran serta cara yang digunakan sebagai pedoman penyelenggaraan kegiatan pembelajaran untuk mencapai tujuan pendidikan tertentu. Oleh karena itu, kurikulum disusun dan dikembangkan oleh satuan pendidikan dengan mengacu pada Standar Isi (SI) dan Standar Kompetensi Lulusan (SKL). Kurikulum yang dikembangkan oleh satuan pendidikan disebut dengan Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP). Komponen dari KTSP antara lain adalah Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP), modul, Lembar Kerja Peserta Didik (LKPD). Komponen tersebut harus dibuat oleh guru sebagai penunjang aktivitas pembelajaran.

Modul ini sebagai salah satu sumber/media pembelajaran mempunyai peranan yang penting dalam meningkatkan sumber daya manusia khususnya siswa SMA Muhammadiyah 1 Yogyakarta. Modul Matematika Peminatan kelas XII di semester 1 terdiri dari 4 bab, yaitu:

- Bab I Limit Fungsi Trigonometri
- Bab II Limit Fungsi di Titik Tak Berhingga
- Bab III Turunan Fungsi Trigonometri
- bab IV Aplikasi Turunan

Setiap bab ini dimulai dari uraian materi yang diselingi dengan motivasi, contoh-contoh soal, Latihan soal, serta diakhir ada evaluasi kompetensi untuk mengukur ketercapaian setiap kompetensi dasar atau setiap modulnya.

BAB 1

LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

1. KEGIATAN BELAJAR 1.1

KD DAN IPK

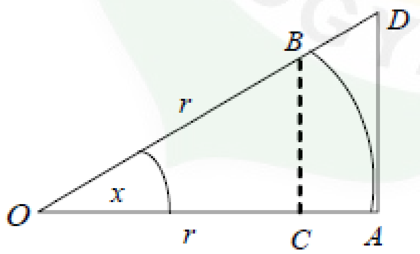
Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.1	Menjelaskan dan menentukan limit fungsi trigonometri.	3.1.1	Memahami definisi limit fungsi trigonometri
		3.1.2	Menemukan konsep limit fungsi trigonometri
4.1	Menyelesaikan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri.	4.1.1	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari

Tabel 1. KD dan IPK Limit Fungsi Trigonometri

A. PENGERTIAN LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

Limit fungsi trigonometri merupakan nilai paling dekat suatu sudut yang ada pada fungsi trigonometri. Cara menghitung limit fungsi trigonometri bisa langsung disubtitusikan. Hal ini seperti halnya limit fungsi aljabar. Hanya saja, ada fungsi trigonometri yang harus diubah terlebih dahulu ke identitas trigonometri (limit tak tentu). Limit tak tentu itu sendiri adalah limit yang jika kita langsung gantikan nilainya, maka menjadi 0. Untuk limit tak tentu ini, kita sebenarnya tak harus menggunakan identitas namun menggunakan teorema limit trigonometri. Selain itu, bisa juga dengan menggunakan identitas dan teorema. Maka dari itu, jika suatu fungsi limit trigonometri digantikan nilai yang mendekatinya menghasilkan, maka kita harus memecahkannya dengan cara yang lainnya seperti mengubah bentuk trigonometri lainnya yang senilai.

B. Menentukan Nilai Lmit Fungsi Trigonometri



Perhatikan gambar di samping. Dari gambar di samping diketahui panjang jari-jari lingkaran = *r*, besar sudut *AOB* adalah *x* radian, *BC* dan *AD* tegak lurus *OA* untuk $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Gamb. 1 Nilai Suatu Limit Fungsi Trigonometri

$$\frac{BC}{OB} = sinx \rightarrow BC = OB \sin x$$
$$BC = r \sin x$$

$$\frac{AD}{OA} = tanx \rightarrow AD = OA \tan x$$
$$AD = r \tan x$$

L ΔABC < L juring OAB < L OAD

$\frac{1}{2}$ OC BC < $\frac{1}{2}\ x\ r^2$ < $\frac{1}{2}$ OA AD

$\frac{1}{2}$ OC $r \sin x$ < $\frac{1}{2}\ x\ r^2$ < $\frac{1}{2}$ OA $r \tan x$

$: \frac{1}{2} r^2$

$$\frac{\frac{1}{2}\ \mathrm{OC}\ r \sin x}{\frac{1}{2}\ r^2} < \frac{\frac{1}{2}\ x\ r^2}{\frac{1}{2}\ r^2} < \frac{\frac{1}{2}\ \mathrm{OA}\ r \tan x}{\frac{1}{2}\ r^2}$$

$$\frac{\mathrm{OC} \sin x}{r} < x < \frac{\mathrm{OA} \tan x}{r}$$

$$\cos x \sin x < x < \frac{\mathrm{r}\ \tan x}{r}$$

$\cos x \sin x < x < \tan x \qquad : \sin x$

$$\cos x < \frac{\mathrm{x}}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

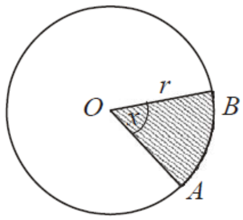
$$\lim_{x \to 0} \cos x < \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\sin x} < \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos 0 < \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\sin x} < \frac{1}{\cos 0}$$

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\sin x} < 1$$

Maka $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\sin x} = 1$ atau $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Ingat!!



Luas juring $= \frac{x}{2\pi} \pi r^2$

$= \frac{1}{2}\ x\ r^2$

Dari Persamaan :

$\cos x \sin x < x < \tan x \qquad : \tan x$

$$cos^2 x < \frac{\mathrm{x}}{\tan x} < 1$$

$$\lim_{x \to 0} cos^2 x < \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\tan x} < 1$$

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\tan x} < 1$$

Maka $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\tan x} = 1$ atau $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Dengan cara yang sama didapat rumus:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\sin x} = 1 \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{ax}}{\sin ax} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{x}}{\tan x} = 1 \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{ax}}{\tan\ ax} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

Untuk lebih memahami tentang limit fungsi trigonometri, perhatikan contoh berikut.

Contoh Soal 1.1.1

Carilah nilai limit berikut $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} \times \frac{2x}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{3x} \\
&= 1 \times \frac{2}{3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Contoh Soal 1.1.2

Carilah nilai limit berikut $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x}{3\sin 3x}$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{5x}{3\sin 3x} &= \lim_{x\to 0} \frac{5x}{3\sin 3x} \times \frac{3x}{3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x}{3\sin 3x} \times \frac{5x}{3x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\, \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{5x}{3x} \\
&= \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{5}{3} \\
&= \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

Contoh Soal 1.1.3

Carilah nilai limit berikut $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\tan 4x}$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\tan 4x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\tan 4x} \times \frac{4x}{4x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4x}{\tan 4x} \times \frac{2x}{4x} \\
&= 1 \times \frac{2}{4} \\
&= \frac{2}{4} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Contoh Soal 1.1.4

Carilah nilai limit berikut $\lim_{x\to 0}\frac{3\tan 4x}{\sin 6x}$.

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\tan 4x}{\sin 6x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\tan 4x}{\sin 6x} \times \frac{4x}{4x} \times \frac{6x}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\tan 4x}{4x} \times \frac{6x}{\sin 6x} \times \frac{4x}{6x}$$

$$= 3 \times 1 \times 1 \times \frac{4}{6}$$

$$= 2$$

Contoh Soal 1.1.5

Carilah nilai limit berikut $\lim_{x\to 0} 2x\cot x$.

Penyelesaian

$$\operatorname{Lim}_{x\to 0} 2x\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2 \times \frac{x}{\tan x}$$

$$= 2 \times 1$$

$$= 2$$

Ingat!!

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

C. LATIHAN 1.1

Carilah nilai limit berikut.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{7x}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{6x}{4\sin 5x}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 4x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{9x}{\tan 4x}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 6x}{3x}$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 5x}{3\sin 2x}$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{\tan 4x}$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 8x}{4\sin 4x}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{3\tan 2x}{2\tan 3x}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{2x\tan x}{\sin 2x\tan 3x}$

D. TES FORMATIF PENGETAHUAN DAN KETERAMPILAN 1.1

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{6x}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{2}$
   B. 2
   C. $\sin \frac{1}{2} x$
   D. $\sin 2x$
   E. $\frac{1}{2} \sin x$

2. Hasil dari $\lim_{x \to 0} 2 \frac{\sin x}{8x}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{2}$
   B. $\frac{1}{4}$
   C. $\frac{1}{8}$
   D. $\sin 4x$
   E. $\frac{1}{4} \sin x$

3. Hasil dari $3 \lim_{x \to 0} \frac{6x}{\sin x}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{2}$
   B. 2
   C. 18
   D. $\sin 18x$
   E. $\sin 6x$

4. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{4 \tan 3x}{2x}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{2}$
   B. $\frac{3}{2}$
   C. 4
   D. 6
   E. 12

5. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\tan 9x}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{3}$
   B. 3
   C. $\tan \frac{1}{3} x$
   D. $\tan 3x$
   E. $\frac{1}{3} \tan x$

6. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin 3x}{\tan^2 x}$ adalah . . . .
   A. 1
   B. 3
   C. 6
   D. 9
   E. 12

7. Hasil dari $\lim_{x \to \pi} \sin \frac{x}{2}$ adalah . . . .
   A. $-\frac{1}{2}$
   B. 0
   C. $\frac{1}{2}$
   D. 1
   E. ∞

8. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\tan 5x}$ adalah . . . .
   A. 0
   B. $\frac{1}{5}$
   C. $\frac{2}{5}$
   D. 1
   E. ∞

9. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 x}{\tan x}$ adalah . . . .

A. -2

B. 0

C. 1

D. 2

E. ∞

10. Hasil $\lim_{x \to 0} \frac{(x-2)\ \cos x}{\sin\ (x-2)}$ adalah . . . .

A. $(x-2)$

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

E. 2

KEGIATAN BELAJAR 1.2

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.1	Menjelaskan dan menentukan limit fungsi trigonometri.	3.1.3	Menetukan penyelesaian dari limit fungsi trigonometri di satu titik
4.1	Menyelesaikan masalah berkaitan dengan limit fungsi trigonometri.	4.1.1	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari

Tabel 2. KD dan IPK Limit Fungsi Trigonometri Menggunakan Rumus Trigonometri

A. LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI DENGAN RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI

Dalam mengerjakan soal limit fungsi trigonometri yang kompleks kita perlu mengubah fungsi trigonometri ke bentuk yang lain. Rumus-rumus trigonometri telah kalian pelajari ketika duduk di kelas XI, berikut adalah rumus-rumus trigonometri.

Rumus Jumlah dan Kurang Dua Sudut :

1. $\sin(a+b) = \sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b$
2. $\sin(a-b) = \sin a\ \cos b - \cos a\ \sin b$
3. $\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b$
4. $\cos(a-b) = \cos a\ \cos b + \sin a\ \sin b$
5. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\ \tan b}$
6. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\ \tan b}$

Rumus Jumlah dan Kurang :

1. $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
2. $\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
3. $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
4. $\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
5. $\tan a + \tan b = \frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$
6. $\tan a - \tan b = \frac{2\sin(a-b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$

Rumus Perkalian :

1. $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\}$
2. $\cos a \sin b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) - \sin(a-b)\}$
3. $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\}$
4. $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\}$

Rumus Sudut Rangkap :

1. $\sin 2a = 2\sin a \cos a$
2. $\cos 2a = cos^2 a - sin^2 a$
   $= 2\,cos^2 a - 1$
   $= 1 - 2\,sin^2 a$
3. $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - tan^2 a}$

Rumus Setegah Sudut :

1. $\sin\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$
2. $\cos\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$
3. $\tan\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$

Contoh Soal 1.2.1

Nilai dari $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ adalah....

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 2\times 1\times 1$$

$$= 2$$

Ingat!!

$$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$$

Contoh Soal 1.2.2

Nilai dari $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{x-\frac{\pi}{4}}$ adalah....

Penyelesaian

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{x-\frac{\pi}{4}} =$$

Misal $y = x - \frac{\pi}{4}$

$$x = y + \frac{\pi}{4}$$

Untuk $x \to \frac{\pi}{4}$, maka $y = 0$

Ingat!!

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos 2(y+\frac{\pi}{4})}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\cos(2y+\frac{\pi}{2})}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\cos 2y\times\cos\frac{\pi}{2} - \sin 2y\times\sin\frac{\pi}{2}}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\cos 2y\times 0 - \sin 2y\times 1}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{0-\sin 2y}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{-\sin 2y}{y}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{y \to 0} \frac{-\sin 2y}{y} \times \frac{2y}{2y} \\
&= \lim_{y \to 0} \frac{-\sin 2y}{2y} \times \frac{2y}{y} \\
&= -1 \times 2 \\
&= -2
\end{aligned}
$$

Contoh Soal 1.2.3

Nilai dari $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ adalah....

Penyelesaian

Ingat!!

$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B)$

$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cdot \sin \frac{1}{2}(A-B)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos \frac{1}{2}\{(x+h)+x\} \sin \frac{1}{2}\{(x+h)-x\}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right) \ \sin \frac{1}{2}h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right) \ \sin \frac{1}{2}h}{2 \times \frac{1}{2}h} \\
&= \lim_{h \to 0} \cos\left(x+\frac{1}{2}h\right) \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \\
&= \cos\left(x+\frac{1}{2} \times 0\right) \times 1 \\
&= \cos x \times 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

B. LATIHAN 1.2

Carilah nilai limit berikut.

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{\cos x}$
2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$
3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2-2\cos 2x}{sin^2 x}$
4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 3x \ \ \sin x}{x^2}$
5) $lim_{x \to 0} \frac{tan^2 3x}{1-cos2x}$

C. TES FORMATIF PENGETAHUAN DAN KETERAMPILAN 1.2

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Hasil dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin^2 x}{1-cosx}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{4}$
   B. $\frac{1}{2}$
   C. 0
   D. 2
   E. 4

2. Hasil $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2+\sin 2x}{1+sinx \ \cos x}$ adalah . . . .
   A. -4
   B. -2
   C. 1
   D. 2
   E. 4

3. Hasil dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{4x^2}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{2}$
   B. 1
   C. 2
   D. 4
   E. 8

4. Hasil dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x^2 \cot \frac{1}{2}x}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{4}$
   B. $\frac{1}{2}$
   C. 1
   D. 2
   E. 4

5. Hasil dari $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 6x}{x \ tan\ 2x}$ adalah . . . .
   A. -9
   B. -3
   C. 1
   D. 3
   E. 9

6. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{tan\ 7x}$ adalah . . . .

A. $-\frac{3}{7}\sqrt{3}$

B. $-\frac{2}{7}\sqrt{3}$

C. $-\frac{1}{7}\sqrt{3}$

D. $\frac{1}{7}$

E. $\frac{2}{7}$

7. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{4-4cos^2x}{x\ sin2x}$ adalah . . . .

A. -4

B. -2

C. -1

D. 0

E. 2

8. Hasil dari $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$ adalah .. . .

A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

B. $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$

C. 0

D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

E. $\sqrt{2}$

9. Nilai limit fungsi $\lim_{x \to 0} \frac{x \tan x}{2cos^2x-2}$ adalah . . . .

A. $-\frac{1}{4}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 0

D. $\frac{1}{2}$

E. 1

10. Hasil dari $\lim_{x \to 1} \frac{sin^2(x-1)-(1-\cos(6x-6))}{(x-1)\ tan\ (5x-5)}$ adalah . . . .

A. $-\frac{17}{5}$

B. $\frac{18}{5}$

C. $\frac{19}{5}$

D. $\frac{21}{5}$

E. $\frac{23}{5}$

UJI KOMPETENSI BAB 1

A. **Pilihlah satu jawaban yang benar**

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin\frac{3x}{2} = ...$

A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

E. $\sqrt{2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x}{5x} = ...$

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $-\frac{2}{5}$

E. $-\frac{1}{5}$

3. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\tan(x-2)}{(x^2-4)} = ...$

A. 2

B. 1

C. 0

D. $\frac{1}{2}$

E. $\frac{1}{4}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = ...$

A. $-\frac{1}{4}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

E. 2

5. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{(4x-10)\sin(x-5)}{x^2-25} = ...$

A. -3

B. -1

C. 1

D. 2

E. 4

6. Nilai $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = ...$

A. 0

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

E. ∞

7. Nilai $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^2-1)\sin 6x}{2x+3x^2+x^3} = ...$

A. 5

B. 3

C. 2

D. -2

E. -3

8. Nilai $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x+\sin x}{x\cos x} = ...$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

9. Nilai $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin 2x}{1-\cos x} = ...$

A. -4

B. -2

C. 0

D. 2

E. 4

10. Nilai $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{(x - \frac{\pi}{4}) \cos x} = ...$

A. -2
B. -1
C. 0
D. 1
E. 2

B. Kerkajakan soal-soal berikut dengan teliti!

1. Nilai dari $\lim_{x \to 0} \frac{3 \sin x}{2x} = ...$
2. Nilai dari $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{\sin(4x - 2)}$ adalah....
3. Hasil dari $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 12x + 18}{1 - \cos^2(x - 3)}$ adalah....
4. Nilai dari $\lim_{x \to 1} \frac{1 - \cos(6x - 6)}{(x^2 + x - 2) \tan(4x^2 - 4)}$ adalah....
5. Hasil dari $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 4x}{2x^2 (x - 3) \cos 2x}$ adalah....

BAB 2

LIMIT FUNGSI TAK BERHINGGA

KEGIATAN BELAJAR 2.1

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.2	Menjelaskan dan menentukan limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.	3.2.1	Memahami limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.
		3.2.2	Menemukan konsep limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.
		3.2.3	Menetukan penyelesaian dari suatu limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri bentuk pecahan.
4.2	Menyelesaikan masalah berkaitan dengan eksistensi limit diketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.	4.2.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 3. KD dan IPK Limit Fungsi Tak Berhingga Bentuk Pecahan

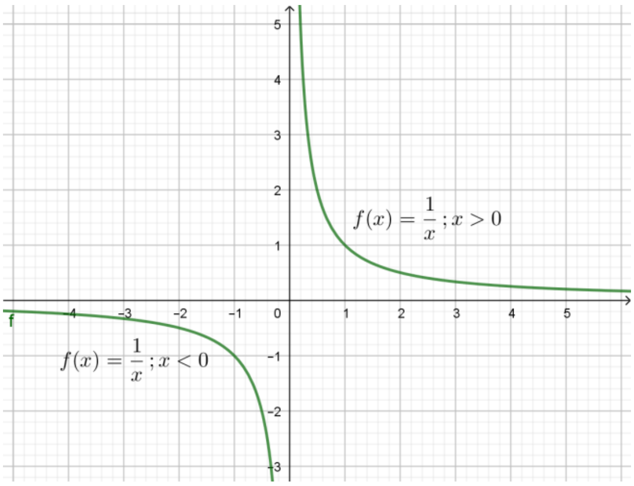
A. MEMAHAMI LIMIT FUNGSI DI TITIK TAK BERHINGGA

Perhatikan bilangan-bilangan berikut.

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1.000}$	...	$\frac{1}{100.000}$	$\frac{1}{1.000.000}$	...
0,1	0,01	0,001	...	0,00001	0,000001	0,00 ... 1

Tabel 4. Bilangan-Bilangan Mendekati 0

Tampak bahwa semakin besar pembaginya, nilai $\frac{1}{x}$ menjadi semakin kecil mendekati 0. Hal ini dapat ditulis untuk $x \to \infty$, nilai $\frac{1}{x} \to 0$. Perhatikan gambar 1 dibawah. Kita dapat melihat bahwa semakin besar nilai x, grafik semakin mendekati sumbu X, yang berarti $\frac{1}{x}$ semakin mendekati 0. Dengan demikian dikatakan $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$



Gamb. 2 Limit Fungsi Tak Berhingga

B. MENENTUKAN LIMIT TAK BERHINGGA DALAM BENTUK PECAHAN

Bentuk limit apabila dikerjakan dengan substitusi yaitu nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ diperoleh $\frac{\infty}{\infty}$. Seperti halnya $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$. Limit fungsi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $f(x)$ dan $g(x)$ fungsi pangkat dikerjakan berdasarkan $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$. Misalkan pangkat tertinggi dari variabel fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ adalah m maka variabel pangkat tertinggi adalah x^m . Nilai limitnya dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{\frac{1}{x^m}}{\frac{1}{x^m}}$$

Contoh Soal 2.1.1

Carilah nilai limit dari $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+6x+3}{4x^2-5x-7}$

Penyelesaian

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} - \frac{7}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}}{4 - \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}}$$

$$= \frac{2 + \frac{6}{\infty} + \frac{3}{\infty^2}}{4 - \frac{5}{\infty} - \frac{7}{\infty^2}}$$

$$= \frac{2+0+0}{4-0-0}$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Contoh Soal 2.1.2

Carilah nilai limit dari $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^3 - x^2}{5x^2 + 6}$

Penyelesaian

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 - x^2}{5x^2 + 6} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3}}{\frac{5x^2}{x^3} + \frac{6}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{\frac{5}{x} + \frac{6}{x^3}} = \frac{4 - \frac{1}{\infty}}{\frac{5}{\infty} + \frac{6}{\infty^3}} = \frac{4-0}{0+0} = \frac{4}{0} = \infty$$ (tidak ada limitnya)

Contoh Soal 2.1.3

Carilah nilai limit dari $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10x^2 + 4x - 5}{5x^4 - 5}$

Penyelesaian

$$\lim_{x \to \infty} \frac{10x^2 + 4x - 5}{5x^4 - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{10x^2}{x^4} + \frac{4x}{x^4} - \frac{5}{x^4}}{\frac{5x^4}{x^4} - \frac{5}{x^4}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{10}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x^4}}{5 - \frac{5}{x^4}}$$

$$= \frac{\frac{10}{\infty^2} + \frac{4}{\infty^3} - \frac{5}{\infty^4}}{5 - \frac{5}{\infty^4}}$$

$$= \frac{0+0-0}{5-0}$$

$$= \frac{0}{5}$$

$$= 0$$

C. LATIHAN 2.1

Carilah nilai limit berikut.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 4x + 7}{4x^2 - 5} = ...$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^5 + 6x - 7}{10x^2 + 3} = ...$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2 + x - 5}{6x^3 + 4x - 1} = ...$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 4x^2 - 5x + 7}{x^3 - 8x^2 - 6x + 1} = ...$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x - 5}{x^3 + 4x + 3} = ...$

D. TES FORMATIF PENGETAHUAN DAN KETERAMPILAN 2.1

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Hasil $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 + 5x - 3}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{3}$
   B. $\frac{2}{3}$
   C. 1
   D. 2
   E. 3

2. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 4x^2 - 5x + 7}{x^3 - 8x^2 - 6x + 1} = ...$
   A. -4
   B. -2
   C. 1
   D. 2
   E. 4

3. Hasil dari $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 5x + 4}{2x^3 - 3x^2 - 4x + 2} = ...$
   A. $-\frac{1}{2}$
   B. 0
   C. 1
   D. 2
   E. 3

4. Hasil dari
   $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x + 4}{3x^2 - 4x + 2} - \frac{3}{x + 1}\right) = ...$
   A. 0
   B. $\frac{1}{2}$
   C. 1
   D. 2
   E. 4

5. Hasil $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3}(\frac{27x^2+4}{x^2-x+2})$ adalah . . . .

A. -9

B. -3

C. 1

D. 3

E. 9

6. Hasil dari $\frac{2}{5}\lim_{x\to\infty} \frac{15x^2+1}{x^2-x+2}$ adalah . . .

A. 2

B. 5

C. 6

D. 8

E. 10

7. Hasil $\lim_{x\to\infty}(\frac{2x^2+1}{x^2-4x+2}-\frac{3x-1}{x+1})=....$

A. -4

B. -2

C. -1

D. 0

E. 2

8. Hasil dari $\lim_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+1}\times\frac{3x-1}{2x+1})=....$

A. $-\frac{3}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 0

D. $\frac{1}{2}$

E. $\frac{3}{2}$

9. Nilai limit fungsi

$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-9}{x^2-2x+3}-2x)=....$

A. $-\infty$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 0

D. $\frac{1}{2}$

E. 1

10. Hasil dari $\lim_{x\to\infty}(x-\frac{x^3-x-6}{x^2-2x+3})=....$

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

E. 2

KEGIATAN BELAJAR 2.2

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.2	Menjelaskan dan menentukan limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.	3.2.5	Menetukan penyelesaian dari suatu limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri bentuk akar.
4.2	Menyelesaikan masalah berkaitan dengan eksistensi limit diketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.	4.2.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit di ketakhinggaan fungsi aljabar dan fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 5. KD dan IPK Limit Fungsi Tak Berhingga Bentuk Akar

A. MENENTUKAN LIMIT TAK BERHINGGA DALAM BENTUK AKAR

Nilai dari bentuk limit $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2+px+q}$ diperoleh dengan perhitungan menggunakan perkalian sekawan.

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2+px+q}\right)\times\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2+px+q}}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2+px+q}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(ax^2+bx+c\right)-\left(ax^2+px+q\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2+px+q}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-p)x-(c-q)}{x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}}\right)}$$

Selanjutnya kita bagi pembilang dan penyebut dengan variabel pangkat tertinggi adalah x^m, disini berarti x^1 atau x.

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{(b-p)x}{x}\right)-\frac{(c-q)}{x}}{\frac{x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}}\right)}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-p)-\frac{(c-q)}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-p)-\frac{(c-q)}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}}}$$

$$= \frac{(b-p) - \frac{(c-q)}{\infty}}{\sqrt{a + \frac{b}{\infty} + \frac{c}{\infty^2}} + \sqrt{a + \frac{p}{\infty} + \frac{q}{\infty^2}}}$$

$$= \frac{(b-p) - 0}{\sqrt{a+0+0} + \sqrt{a+0+0}}$$

$$= \frac{b-p}{2\sqrt{a}}$$

Dari uraian diatas dapat kita simpulkan bahwa:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax^2+px+q} = \frac{b-p}{2\sqrt{a}}}$$

,berlaku apabila koefisien x^2 pada kedua tanda akar sama.

Contoh Soal 2.2.1

Carilah nilai limit dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{x^2-5x+2}$

Penyelesaian

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{x^2-5x+2} = \frac{-4-(-5)}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Contoh Soal 2.2.2

Carilah nilai limit dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-4x+1} - (2x+3)$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-4x+1} - (2x+3) &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-4x+1} - \sqrt{(2x+3)^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-4x+1} - \sqrt{4x^2+12x+9} \\
&= \frac{-4-12}{2\sqrt{4}} \\
&= \frac{-16}{4} \\
&= -4
\end{aligned}$$

Contoh Soal 2.2.3

Carilah nilai limit dari $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+7x+5}-\sqrt{4x^2-12x+9}$.

Penyelesaian

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+7x+5}-\sqrt{4x^2-12x+9}$$

$$=\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+7x+5}-\sqrt{4x^2-12x+9}.\frac{\sqrt{2x^2+7x+5}+\sqrt{4x^2-12x+9}}{\sqrt{2x^2+7x+5}+\sqrt{4x^2-12x+9}}$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2+7x+5)-(4x^2-12x+9)}{\sqrt{2x^2+7x+5}+\sqrt{4x^2-12x+9}}$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+7x+5-4x^2+12x-9}{\sqrt{2x^2+7x+5}+\sqrt{4x^2-12x+9}}$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2+19x-4}{\sqrt{2x^2+7x+5}+\sqrt{4x^2-12x+9}}$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2x^2}{x^2}+\frac{19x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{2x^2}{x^4}+\frac{7x}{x^4}+\frac{5}{x^4}}+\sqrt{\frac{4x^2}{x^4}-\frac{12x}{x^4}+\frac{9}{x^4}}}$$

(bagi dengan variabel pangkat tertinggi)

Jika variabel pangkat tertinggi x^2 maka masuk di dalam akar menjadi x^4

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{-2+\frac{19}{x}-\frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}+\frac{5}{x^4}}+\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{12}{x^3}+\frac{9}{x^4}}}$$

$$=\frac{-2+\frac{19}{\infty}-\frac{4}{\infty^2}}{\sqrt{\frac{2}{\infty^2}+\frac{7}{\infty^3}+\frac{5}{\infty^4}}+\sqrt{\frac{4}{\infty^2}-\frac{12}{\infty^3}+\frac{9}{\infty^4}}}$$

$$=\frac{-2+0-0}{\sqrt{0+0+0}+\sqrt{0-0+0}}$$

$$=\frac{-2}{0}$$

$$=-\infty$$

B. LATIHAN 2.2

Carilah nilai limit berikut.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+6x+3}-\sqrt{4x^2-2x+1} = ...$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-9}-\sqrt{x^2-2x+3} = ...$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-5x+2}-(2x-1) = ...$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-9x+10}-x+4 = ...$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} x+4-\sqrt{x^2-4x+8} = ...$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} (3x+2)-\sqrt{9x^2-x+8} = ...$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-4x-5}-x-2 = ...$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} (3x+1)-\sqrt{9x^2-6x+3} = ...$

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{4x^2-2x+1} = ...$

10) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+6x+3}-(x-1) = ...$

A. TES FORMATIF PENGETAHUAN DAN KETERAMPILAN 2.2

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Nilai dari

   $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{4x^2+6x+3}$

   adalah....

   A. -3
   B. -2
   C. -1
   D. 2
   E. 3

2. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-3x+4}-x+2 = ...$

   A. $-\frac{7}{2}$
   B. $-\frac{3}{2}$
   C. $-\frac{1}{2}$
   D. $\frac{1}{2}$
   E. $\frac{7}{2}$

3. Hasil dari

   $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{5-4x+3x^2}-\sqrt{4-3x+3x^2} = ...$

   A. $-\frac{1}{6}\sqrt{3}$
   B. $-\sqrt{3}$
   C. 1
   D. $\frac{1}{6}\sqrt{3}$
   E. $\sqrt{3}$

4. Hasil dari

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2x+9}-\sqrt{x^2-1}=....$$

A. -3

B. -2

C. -1

D. 0

E. 2

5. Hasil dari

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-x+2}-(2x+2)=....$$

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

E. 4

6. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-x+6}-x+4=....$

A. -4

B. $-\frac{7}{2}$

C. -1

D. $\frac{7}{2}$

E. 4

7. Hasil dari

$$\lim_{x\to\infty} (4x+1)-\sqrt{16x^2-6x+25}=....$$

A. -2

B. $-\frac{7}{8}$

C. $\frac{7}{8}$

D. $\frac{9}{8}$

E. $\frac{13}{8}$

8. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2}=....$

A. -4

B. -2

C. -1

D. 0

E. 2

9. Hasil dari

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-x+12}-\sqrt{x^2+6x})=....$$

A. $-\frac{7}{2}$

B. -2

C. 1

D. 2

E. $\frac{7}{2}$

10. Nilai limit fungsi

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{4x^2+x+3}$$

A. $-\infty$

B. 1

C. 2

D. 4

E. ∞

EVALUASI BAB II

A. Pilihlah satu jawaban yang benar

1. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - x + 2}{3x^2 + 5x - 1}$ adalah . . . .
   A. $\frac{1}{3}$
   B. $\frac{4}{3}$
   C. 1
   D. 2
   E. 3

2. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 5x + 4}{x^3 - 3x^2 - 4x + 2} = ...$
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 4
   E. 8

3. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} (\frac{2x+4}{4x+2} - \frac{3}{x+1}) = ...$
   A. $\frac{1}{4}$
   B. $\frac{1}{2}$
   C. 1
   D. 2
   E. 4

4. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} (\frac{x^2 - 1}{x^2 - x + 2} - \frac{3x-1}{x+1}) = ...$
   A. -4
   B. -2
   C. -1
   D. 0
   E. 2

5. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} (\frac{x-1}{3x+1} \times \frac{x-1}{2x+1}) = ...$
   A. $-\frac{5}{6}$
   B. $-\frac{1}{6}$
   C. 0
   D. $\frac{1}{6}$
   E. $\frac{5}{6}$

6. Nilai dari
   $\lim_{x\to\infty} \sqrt{9x^2 - 6x + 8} - \sqrt{9x^2 + 6x + 3}$
   adalah....
   A. -3
   B. -2
   C. -1
   D. 2
   E. 3

7. Nilai dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 4} - x + 5 = ...$
   A. $-\frac{7}{2}$
   B. $-\frac{3}{2}$
   C. $-\frac{1}{2}$
   D. $\frac{1}{2}$
   E. $\frac{7}{2}$

8. Hasil dari

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{5-4x+x^2} - \sqrt{4-3x+x^2} = ...$$

A. -4
B. -2
C. 0
D. 2
E. 4

9. Hasil dari

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-x+2} - (2x+3) = ...$$

A. $-\frac{13}{4}$
B. $-\frac{1}{4}$
C. 1
D. $\frac{1}{4}$
E. $\frac{13}{4}$

10. Hasil dari

$$\lim_{x\to\infty} (4x+5) - \sqrt{16x^2-2x+8} = ...$$

A. -3
B. $-\frac{7}{4}$
C. 0
D. $\frac{7}{4}$
E. $\frac{21}{4}$

B. Kerkajakan soal-soal berikut dengan teliti!

1. Nilai dari $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+4}{x^3-x^2+2x+1} = ...$
2. Nilai dari $\lim_{x\to\infty} (\frac{x^2+1}{2x^2-x+2} - \frac{3x-1}{4x+1}) = ...$
3. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-x+8} - \sqrt{4x^2+6x+3}$ adalah....
4. Nilai dari $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2x+8} - x + 6$ adalah....
5. Hasil dari $\lim_{x\to\infty} (3x-4) - \sqrt{9x^2+2x+6}$ adalah....

BAB 3

TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

KEGIATAN BELAJAR 3.1

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.3	Menggunakan prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana.	3.3.1	Memahami prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana.
		3.3.2	Menetukan penyelesaian dari suatu prinsip turunan ke fungsi sederhana.
4.3	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri.	4.3.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 6. KD dan IPK Turunan Fungsi

A. MEMAHAMI TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Seperti halnya turunan fungsi aljabar, turunan fungsi trigonometri diperoleh dengan mencari limit $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, untuk $f(x)$ merupakan fungsi trigonometri. Dua buah fungsi yang dijadikan acuan untuk menentukan turunan fungsi trigonometri adalah fungsi sinus dan fungsi kosinus. Sebelum kita masuk pembahasan turunan fungsi trigonometri akan lebih baiknya kita mempelajari sifat-sifat turunan fungsi.

B. SIFAT-SIFAT TURUNAN SUATU FUNGSI

Sifat-sifat turunan fungsi aljabar berlaku juga pada fungsi trigonometri. Misalkan n bilangan rasional, c konstanta, $u(x)$ dan $v(x)$ fungsi-fungsi diferensiabel dengan turunannya masing-masing $u'(x)$ dan $v'(x)$. Jika $f'(x)$ turunannya dari $f(x)$, berlaku sifat-sifat sebagai berikut.

a. Turunan dari $f(x)=c$, adalah $f'(x)=0$

b. Turunan dari $f(x)=c\;u(x)$, adalah $f'(x)=c\,u'(x)$

c. Turunan dari $f(x)=u(x)\pm v(x)$, adalah $f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$

d. Turunan dari $f(x)=u(x)\times v(x)$, adalah $f'(x)=u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)$

e. Turunan dari $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}; v(x)\neq 0$, adalah $f'(x)=\dfrac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{\{v(x)\}^2}$

f. Turunan dari $f(x)=\{u(x)\}^n$ adalah $f'(x)=n\{u(x)\}^{n-1}\times u'(x)$

Contoh Soal 3.1.1

Tentukan turunan pertama dari $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 5$.

Penyelesaian

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 5$$
$$f'(x) = 2 \times 3x^{3-1} - 4 \times 2x^{2-1} + 6 \times 1x^{1-1} - 0$$
$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 6$$

Contoh Soal 3.1.2

Tentukan turunan pertama dari $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{3x-7}; (3x-7) \neq 0$.

Penyelesaian

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{3x-7}$$

Misalkan $u(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$, maka $u'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$v(x) = 3x - 7$, maka $v'(x) = 3$

Dengan menggunakan aplikasi rumus $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}; v(x) \neq 0$ maka

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{\{v(x)\}^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} \times (3x-7) - 3 \times 2\sqrt{x}}{(3x-7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{3x-7}{\sqrt{x}} - 6\sqrt{x}}{9x^2 - 42x + 49}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{3x-7-6x}{\sqrt{x}}}{9x^2 - 42x + 49}$$ kemudian kita dapat menyederhanakan bentuknya

$$f'(x) = \frac{3x-7-6x}{\sqrt{x}\left(9x^2 - 42x + 49\right)}$$

$$f'(x) = \frac{-3x-7}{9x^2\sqrt{x} - 42x\sqrt{x} + 49\sqrt{x}}$$

C. LATIHAN 3.1

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut.

1) $f(x) = 6x^3 - x^2 - 2x - 1$
2) $f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$
3) $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$
4) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{3x}{\sqrt{x}}$
5) $f(x) = (2x^2 - 2x) - (3x + 4)$
6) $f(x) = (2x - 1)(3x + 2)$
7) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)(x + 4)$
8) $f(x) = \frac{x+2}{6x-1}; (6x-1) \neq 0$
9) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3}; x \neq 3$
10) $f(x) = (3x^2 - 2x)^5$

D. TES FORMATIF PENGETAHUAN DAN KETERAMPILAN 3.1

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Turunan dari $f(x) = 3x^2$ adalah . . . .
   A. $3x$
   B. $6x$
   C. x^2
   D. $3x^2$
   E. $6x^2$

2. Nilai turunan pertama dari: $f(x) = 2x^3 + 12x^2 - 8x + 4$ adalah …
   A. -56
   B. -32
   C. -12
   D. 24
   E. 46

3. Jika $g(x) = 6x^3 + 4x - 1$, maka $g'(x) = ...$
   A. $6x^2 + 4$
   B. $18x^2 + 4$
   C. $6x^2 + 4x$
   D. $18x^2 + 4x$
   E. $18x^2 + 4x - 1$

4. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{1}{3x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x}$, maka $f'(1) = ...$
   A. -15
   B. -13
   C. -12
   D. -10
   E. -8

5. Diketahui $f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ maka $f'(x) = ...$

   A. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$
   B. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + 1$
   C. $\frac{1}{\sqrt{x}} + 1$
   D. $\frac{1}{x} + 1$
   E. $1 - \frac{1}{x^2}$

6. Turunan pertama dari $f(x) = (x^2 - 3)(4x + 1)$ adalah …

   A. $4x^2 + 2x - 6$
   B. $12x^2 + 2x - 12$
   C. $12x^2 + x - 6$
   D. $6x^2 + x - 6$
   E. $4x^2 + x - 6$

7. Jika $f(x) = (2x - 4)^5$, maka $f'(0) = ...$

   A. 1240
   B. 1280
   C. 2560
   D. 2860
   E. 3260

8. Jika $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 1}$, maka $f'(x) = ...$

   A. $\frac{1}{x+1}$
   B. $-\frac{1}{x+1}$
   C. $-\frac{1}{(x+1)^2}$
   D. $\frac{1}{(x+1)^2}$
   E. $\frac{5}{(x+1)^2}$

9. Suatu benda bergerak sepanjang lintasan s meter dalam waktu t detik ditentukan oleh rumus : $S = 30t + 15t^2 - t^3$. Kecepatan benda tersebut saat percepatannya nol adalah ... m/det.

   A. 550
   B. 275
   C. 225
   D. 105
   E. 85

10. Suatu proyek pembangunan gedung dapat diselesaikan dalam x hari dengan biaya proyek per hari $(3x - 900 + \frac{120}{x})$ ratus ribu rupiah. Agar biaya proyek minimum, maka proyek tersebut harus diselesaikan dalam waktu …hari.

   A. 60
   B. 90
   C. 120
   D. 150
   E. 180

KEGIATAN BELAJAR 3.2

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.3	Menggunakan prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana.	3.3.3	Menetukan penyelesaian dari suatu prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana.
4.3	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri.	4.3.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 7. KD dan IPK Turunan Fungsi Trigonometri Sederhana

A. TURUNAN FUNGSI SINUS

Seperti halnya turunan fungsi aljabar, turunan fungsi trigonometri dapat diperoleh dengan memiisalkan diketahui $f(x) = \sin x.$ Dengan menggunakan limit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, diperoleh:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

Ingat:

Sin A – Sin B = 2 Cos $\frac{(A+B)}{2}$ Sin $\frac{(A-B)}{2}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(x+h+x)\times \sin\frac{1}{2}(x+h-x)}{h}$$

$$f'(x) = 2\lim_{h\to 0} \cos\frac{1}{2}(2x+h)\times \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$f'(x) = 2\lim_{h\to 0} \cos\frac{1}{2}(2x+h)\times \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\times\frac{\frac{1}{2}}{1}$$

$$f'(x) = 2\lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{1}{2}h)\times\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 2\cos(x+\frac{1}{2}(0))\times\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 2\cos x\times\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \cos x$$

Jika $f(x) = \sin x,$ maka $f'(x) = \cos x$

B. TURUNAN FUNGSI KOSINUS

Dengan cara serupa misalkan diketahui $f(x) = \cos x$. Dengan menggunakan limit $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, diperoleh:

> Ingat:
>
> Cos A – Cos B = – 2 Sin $\frac{(A+B)}{2}$ Sin $\frac{(A-B)}{2}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin \frac{1}{2}(x+h+x) \times \sin \frac{1}{2}(x+h-x)}{h}$$

$$f'(x) = -2 \lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{2}(2x+h) \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{h}$$

$$f'(x) = -2 \lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{2}(2x+h) \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \times \frac{\frac{1}{2}}{1}$$

$$f'(x) = -2 \lim_{h \to 0} \sin(x + \frac{1}{2}h) \times \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -2 \sin(x + \frac{1}{2}(0)) \times \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -2 \sin x \times \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\sin x$$

> Jika $f(x) = \cos x$, maka $f'(x) = -\sin x$

Dengan langkah yang sama dapat kita peroleh:

> a. Jika $f(x) = a \sin x$, maka $f'(x) = a \cos x$
>
> b. Jika $f(x) = a \cos x$, maka $f'(x) = -a \sin x$
>
> c. Jika $f(x) = \tan x$, maka $f'(x) = \sec^2 x$
>
> d. Jika $f(x) = \csc x$, maka $f'(x) = -\csc x \cot x$
>
> e. Jika $f(x) = \sec x$, maka $f'(x) = \sec x \tan x$
>
> f. Jika $f(x) = \cot x$, maka $f'(x) = \csc^2 x$

Contoh Soal 3.2.1

Turunan pertama dari $f(x) = 2\sin x$.

Penyelesaian

$f(x) = 2\sin x$

$f'(x) = 2\cos x$

Contoh Soal 3.2.2

Turunan pertama dari $f(x) = 3\csc x$.

Penyelesaian

$f(x) = 3\csc x$

$f'(x) = -3\csc x \cot x$

Contoh Soal 3.2.3

Turunan pertama dari $f(x) = 2x\ \cos x$.

Penyelesaian

$f(x) = 2x\ \cos x$

Misalkan $u(x) = 2x,$ maka $u'(x) = 2$

$v(x) = \cos x,$ maka $v'(x) = -\sin x$

Dengan menggunakan sifat-sifat turunan fungsi bentuk $u'(x)$

, maka turunan dari $f(x)$:

$u(x) \times v(x)$

$f'(x) = 2 \times \cos x + (-\sin x) \times 2x$

$f'(x) = 2\cos x - 2x\sin x$

C. LATIHAN 3.2

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut.

1) $f(x) = 3\cos x$
2) $f(x) = 4\tan x$
3) $f(x) = 2\sec x$
4) $f(x) = \sin x + \cos x$
5) $f(x) = 4\sin x - \cot x$
6) $f(x) = \sin x \times \sec x$
7) $f(x) = (\sin x - 1)(\cos x + 1)$
8) $f(x) = 4x^2 \sin x$
9) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x+2}; x \neq -2$
10) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cot x}; \cot x \neq 0$

D. TES FORMATIF PENGETAHUAN DAN KETERAMPILAN 3.2

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Turunan fungsi f(x) = 4 sin x adalah ….

   A. 4 cos x
   B. – 4 cos x
   C. cos x
   D. – cos x
   E. 4 + cos x

2. Turunan pertama dari f(x) = 3 sin x – x adalah....

   A. f'(x) = – 3 cos x – 1
   B. f'(x) = – 3 cos x + 1
   C. f'(x) = 3 cos x – 1
   D. f'(x) = 3 cos x – $\frac{1}{2}\ x^2$
   E. f'(x) = 3 cos x

3. Turunan pertama dari f(x) = 3 + 2sin x – 7 cos x adalah....

   A. f'(x) = 2 cos x + 7 sin x
   B. f'(x) = 2 cos x – 7 sin x
   C. f'(x) = 7 cos x + 2 sin x
   D. f'(x) = 7 cos x – 2 sin x
   E. f'(x) = 2 sin x – 7 cos x

4. Turunan pertama dari g(x) = $2x^4 + 3\cos x + \sin a$, adalah g'(x), untuk $a =$ konstanta, maka g'(x) sama dengan ….

   A. $\frac{dg(x)}{dx} = 8x^3 - 3\ sinx + a\ \cos a$
   B. $\frac{dg(x)}{dx} = 8x^3 - 3\ sinx$
   C. $\frac{dg(x)}{dx} = 8x^3 - 3\ sinx + \ \cos a$
   D. $\frac{dg(x)}{dx} = 8x^3 + 3\ sinx$
   E. $\frac{dg(x)}{dx} = 8x^3 + 3\ sinx + a\ \cos a$

5. Diketahui $f(x) = 3\ \sin\ x\ +\ 2\ \cos\ x$, maka $f'(0) = ...$

   A. 1
   B. 3
   C. 4
   D. 5
   E. 6

6. Turunan pertama dari y = $3\tan x - \cos x$ adalah y' =....

   A. 3 sec x + sin x
   B. $-3\ sec^2 x + \sin x$
   C. $-3\ sec^2 x - \sin x$
   D. $3\ sec^2 x - \sin x$
   E. $3\ sec^2 x + \sin x$

7. Turunan pertama dari h(x)= 2 cosec x, maka h'$(\frac{\pi}{3})$ adalah ….

   A. $-\frac{4}{3}$
   B. $-\frac{1}{3}$
   C. 0
   D. 1
   E. $\frac{2}{3}$

8. Jika $k(x) = 4sec\ x$, maka k'$(\frac{\pi}{3})$ adalah ….

A. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{3}$

D. $8\sqrt{3}$

E. $16\sqrt{3}$

9. Jika $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$, nilai f' ($\pi$) = ….

A. -2

B. -1

C. 0

D. $\frac{1}{4}$

E. $\frac{1}{3}$

10. Turunan pertama $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$, untuk $x = \frac{\pi}{4}$, adalah ….

A. $2 - \sqrt{2}$

B. $2 + \sqrt{2}$

C. $2 - 2\sqrt{2}$

D. $-2 + \sqrt{2}$

E. $-2 - \sqrt{2}$

KEGIATAN BELAJAR 3.3

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.3	Menggunakan prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana.	3.3.4	Menetukan penyelesaian dari suatu prinsip turunan ke fungsi Trigonometri menggunakan substitusi.
4.3	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri.	4.3.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 8. KD dan IPK Turunan Trigonometri Menggunakan Substitusi

A. TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI BENTUK $f(u)$, DENGAN u SUATU FUNGSI

Kalian tentunya sudah memahami turunan fungsi trigonometri dasar, seperti $y = \sin x$, $y = \cos x$, dan $y = \tan x$. Tidak jarang fungsi trigonometri berbentuk berikut. $y = \sin 2x$, $y = \cos\left(3 - 2x^2\right)$, atau $y = \cos\left(x^2 - 2x\right)$. Untuk menentukan turunan fungsi trigonometri dengan bentuk tersebut dapat diselesaikan dengan dalil rantai yang sudah kalian pelajari sebelumnya pada turunan fungsi aljabar. Sebagai contoh, fungsi $y = \cos\left(x^2 - 2x\right)$ dapat ditulis sebagai $y = \cos u$, dengan $u = x^2 - 2x$.

Dengan menggunakan dalil rantai, kita dapat menentukan turunannya, sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Dengan $y = \cos\left(x^2 - 2x\right)$, kita misalkan $u = x^2 - 2x$.

Untuk $y = \cos u$, maka $\frac{dy}{du} = -\sin u$

Untuk $u = x^2 - 2x$, maka $\frac{du}{dx} = 2x - 2$

Dengan demikian, turunan dari fungsi $y = \cos\left(x^2 - 2x\right)$ adalah:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= -\sin u \times (2x - 2) \\ &= -(2x - 2)\sin u \\ &= (2 - 2x)\sin(x^2 - 2x) \end{aligned}$$ (substitusikan/ganti variabel u dengan semula)

Dengan menggunakan cara yang sama kita dapat menentukan turunan fungsi trigonometri bentuk lainnya, sebagai berikut:

a. Turunan dari $y = \sin g(u)$ adalah $y' = g'(u) \times \cos g(u)$

b. Turunan dari $y = \cos g(u)$ adalah $y' = -g'(u) \times \sin g(u)$

c. Turunan dari $y = \tan g(u)$ adalah $y' = g'(u) \times \sec^2 g(u)$

d. Turunan dari $y = \sec g(u)$ adalah $y' = g'(u) \times \sec g(u) \times \tan g(u)$

e. Turunan dari $y = \csc g(u)$ adalah $y' = -g'(u) \times \csc g(u) \times \cot g(u)$

f. Turunan dari $y = \cot g(u)$ adalah $y' = -g'(u) \times \csc^2 g(u)$

B. LATIHAN 3.3

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut.

1) $f(x) = 3\cos x \;\; f(x) = \cos 3x$
2) $f(x) = 2\tan(x-1)$
3) $f(x) = 2\csc(3x+4)$
4) $f(x) = \sin x^2 + \cos 2x$
5) $f(x) = \sin(x^2 - 1) - 3\tan 2x$
6) $f(x) = \cos 2x \times + \sec 2x$
7) $f(x) = (\sin x^3 - 1)(2\cos x + 1)$
8) $f(x) = (x^2 - 2x + 1)\sin 2x$
9) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\cos 2x}; \cos 2x \neq 0$
10) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cot 2x}; \cot 2x \neq 0$

C. TES FORMATIF PENGETAHUAN DAN KETERAMPILAN 3.3

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Diketahui $f(x) = x^2 \sin 3x$, maka $\dfrac{df(x)}{dx} = \ldots.$

   A. $2x\sin x + 3x^2 \cos x$
   B. $2x\sin 3x + 2x^2 \cos x$
   C. $2x\sin 3x + 3x^2 \cos 3x$
   D. $3x\cos 3x + 2x^2 \sin x$
   E. $2x^2 \cos x + 3x\sin 3x$

2. Turunan pertama y = 2x cos 4x adalah ….

   A. 2 sin 4x + 4x cos 4x
   B. 2 sin 4x + 8x cos 4x
   C. 2x sin 4x + 8x cos 4x
   D. 2 cos 4x
   E. 2 cos 4x – 8x sin 4x

3. Diketahui f(x) = sin 3x – 3 cos x. Jika f ‘ turunan pertama f, nilai f‘($\frac{\pi}{2}$) adalah ….
   A. 9
   B. 3
   C. 1
   D. – 1
   E. – 3

4. Nilai turunan pertama fungsi f(x) = sin 2x – cos 2x untuk nilai x = $\frac{1}{4}\pi$ adalah ….
   A. 0
   B. 2
   C. 1
   D. – 1
   E. – 2

5. Jika f(x) = sec 2x, nilai f'(x) = ….
   A. 2 sec 2x
   B. – 2 sec 2x
   C. 2 sec 2x tan 2x
   D. – 2 sec 2x tan 2x
   E. sec 2x tan 2x

6. Diketahui $f(x) = \sin(\pi - 2x) - \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. Hasil dari $f'(x) = \cdots$
   B. $2\cos 2x - 3\sin 3x$
   C. $2\cos 2x + 3\cos 3x$
   D. $3\cos 3x - 2\cos 2x$
   E. $2\sin 2x - 3\sin 3x$
   F. $2\sin 2x - 3\cos 3x$

7. Jika $y = \sin 3x - \cos 3x$, maka $\frac{dy}{dx}$, dengan x = 45^0 adalah....
   A. -2
   B. -1
   C. 0
   D. 2
   E. 4

8. Turunan dari fungsi f yang rumusnya $f(x) = x^2 \cos 2x$ adalah $f'(x) = \cdots$
   A. $2x\cos 2x + 2x^2 \sin 2x$
   B. $-2x^2 \sin 2x + 2x^2 \cos 2x$
   C. $x^2 \sin 2x + 2x\cos 2x$
   D. $x^2 \cos 2x + x^2 \sin 2x$
   E. $2x\cos 2x - 2x^2 \sin 2x$

9. Jika $f(x) = \tan 2x$ memenuhi f'(0)=b dan f' ($\frac{\pi}{2a}$) $= -1$, maka a + b = ...
   A. -1
   B. 0
   C. 1
   D. 2
   E. 3

10. Turunan pertama dari $y = \cot(2\alpha - 3)$ adalah y' = ...
   A. $-2\sin^2(2\alpha - 3)$
   B. $\cos^2(2\alpha - 3)$
   C. $-2\operatorname{cosec}^2(2\alpha - 3)$
   D. $2\sec^2(2\alpha - 3)$
   E. $3\sec^2(2\alpha - 3)$

KEGIATAN BELAJAR 3.4

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.3	Menggunakan prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana.	3.3.5	Menetukan penyelesaian dari suatu prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana dengan aturan rantai.
4.3	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri.	4.3.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan prinsip turunan ke fungsi Trigonometri sederhana sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 9. KD dan IPK Turunan Trigonometri Menggunakan Aturan rantai

A. Menentukan Turunan Fungsi Trigonometri dengan Aturan Rantai

Tentunya kalian pernah menemui suatu fungsi trigonometri dalam bentuk berikut. $y = \sin^2 x$, $y = \sin^5 2x$, atau $y = 3\cos^4(x^2 - x)$. Apakah kalian akan menguraikannya terlebih dahulu, kemudian menurunkannya? Persoalan seperti itu akan lebih mudah jika dikerjakan dengan menggunakan aturan rantai. Prinsip menentukan turunan dengan menggunakan aturan rantai adalah mengubah fungsi yang akan diturunkan kedalam fungsi bentuk dasar, $x^n, \sin x, \cos x, \sin^n u, \cos^n u$, dan lain-lain. Selanjutnya, fungsi-fungsi dasar itu diturunkan seperti halnya aturan yang telah dijelaskan sebelumnya.

Sebagai contoh kita mencoba mencari turunan pertama dari $y = \sin^5 2x$, fungsi tersebut dapat kita tulis dalam bentuk fungsi trigonometri dasar yaitu kita misalkan $2x$ adalah u. Dengan menggunakan dalil rantai, kita dapat menentukan turunannya, sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Dengan $y = \sin^5 2x$, , kita misalkan $u = 2x$

Untuk $y = \sin^5 u$, maka $\frac{dy}{du} = 5\sin^4 u \times \cos u$

Untuk $u = 2x$, maka $\frac{du}{dx} = 2$

Dengan demikian, turunan dari fungsi $y = \sin^5 2x$, adalah:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\
&= 5\sin^4 u \times \cos u \times 2 \\
&= 10\sin^4 u \times \cos u \\
&= 10\sin^4 2x \cos 2x \quad \text{(substitusikan/ganti variabel } u \text{ dengan semula)}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan cara yang sama kita dapat menentukan turunan fungsi trigonometri berpangkat bentuk lainnya, sebagai berikut:

a. Turunan dari $y = \sin^n g(u)$ adalah $y' = n \times \sin^{n-1} g(u) \times \cos g(u) \times g'(u)$

b. Turunan dari $y = \cos^n g(u)$ adalah $y' = n \times \cos^{n-1} g(u) \times (-\sin g(u)) \times g'(u)$

Contoh Soal 3.4.1

Tentukan turunan pertama dari $y = \cos^4(3x+2)$

Penyelesaian

$$y = \cos^4(3x+2)$$
$$y' = 4 \times \cos^{4-1}(3x+2) \times (-\sin(3x+2)) \times 3$$
$$y' = 12\cos^3(3x+2)(-\sin(3x+2))$$
$$y' = -12\cos^3(3x+2)\sin(3x+2)$$

Terkadang jawaban itu tidak tersedia pada jawaban di pilihan ganda, kita dapat mengubah ke dalam bentuk lain, seperti berikut.

$$y' = -12\cos^3(3x+2)\sin(3x+2)$$
$$y' = -6 \times 2\cos^2(3x+2)\cos(3x+2)\sin(3x+2)$$
$$y' = -6\cos^2(3x+2) \times 2\sin(3x+2)\cos(3x+2)$$
$$y' = -6\cos^2(3x+2)\sin 2(3x+2)$$
$$y' = -6\cos^2(3x+2)\sin(6x+4)$$

Ingat:

Sin 2a = 2 sin a cos

B. LATIHAN 3.4

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut.

1) $f(x) = \cos^2 x$
2) $f(x) = \sin^2 2x$
3) $f(x) = \cos^3(x+2)$
4) $f(x) = \sin^2(x^2-1) + \cos 2x$
5) $f(x) = 2x\cos^2(4x+1)$
6) $f(x) = (3x-2)\sin^2 x$
7) $f(x) = (\sin^2 x - 1)(\cos^2 x + 1)$
8) $f(x) = \sin 2x(\sin^2 x + 1)$
9) $f(x) = \dfrac{2x}{\cos^2 2x}; \cos^2 2x \neq 0$
10) $f(x) = \dfrac{\sin^2 2x}{\cos 2x}; \cos 2x \neq 0$

C. TES FORMATIF PENGETAHUAN DAN KETERAMPILAN 3.4

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Turunan fungsi f(x) = $\cos^3 x$ adalah ….
   A. $f'(x) = -3\cos^2 x \sin x$
   B. $f'(x) = 3\cos^2 x \sin x$
   C. $f'(x) = -3\sin^2 x \cos x$
   D. $f'(x) = -3\sin^2 x \cos^2 x$
   E. $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$

2. Turunan pertama f(x) = $\sin^3 (3 - 2x)$ adalah ….
   A. $f'(x) = 6\sin^2 (3 - 2x) \cos (3 - 2x)$
   B. $f'(x) = 3\sin^2 (3 - 2x) \cos (3 - 2x)$
   C. $f'(x) = 3\sin^2 (3 - 2x)$
   D. $f'(x) = -3\sin^2 (3 - 2x) \cos (3 - 2x)$
   E. $f'(x) = -6\sin^2 (3 - 2x) \cos (3 - 2x)$

3. Jika $f(x) = \sin^2(x - \frac{\pi}{3})$, nilai f' $(\frac{1}{2}\pi)$ adalah ….
   A. 0
   B. $\frac{1}{2}$
   C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   E. 1

4. Jika f(x) = $\cos^2 4x$, nilai f'$(\frac{1}{4}\pi)$ = ….
   A. 1
   B. $\frac{1}{2}$
   C. 0
   D. $-\frac{1}{2}$
   E. – 1

5. Diketahui $f(x) = \cos^2(2x + 6)$, maka $f'(x) = ...$
   A. $-2\ \sin(2x+6)\ \cos(2x+6)$
   B. $4\ \sin(2x+6)\ \cos(2x+6)$
   C. $-2\sin(2x+6)$
   D. $-2\cos(4x+12)$
   E. $-2\sin(4x+12)$

6. Turunan pertama dari $g(x) = \cos^3\ 2a$, adalah g'(30^0) = ...
   A. $-\frac{5}{4}\sqrt{3}$
   B. $-\frac{3}{4}\sqrt{3}$
   C. 0
   D. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$
   E. $\frac{5}{4}\sqrt{3}$

7. Turunan pertama fungsi f(x) = $2\cos^3 (1 - 2x)$ adalah f'(x) =….
   A. $-6\cos^2 (1 - 2x)$
   B. $6\cos^2 (1 - 2x)$
   C. $-12\cos^2 (1 - 2x)$
   D. $-6\sin (2 - 4x)\ \cos (1 - 2x)$
   E. $6\sin (2 - 4x)\ \cos (1 - 2x)$

8. Jika h(x) = $\cot^3 5x$ (cotan³ 5x), maka h'(x) =….
   A. – 15 tan² 5x   sec² 5x
   B. – 15 tan² 5x   cosec² 5x
   C. – 15 cotan² 5x   cosec² 5x
   D. – 15 cotan² 5x   cosec 5x
   E. – 15 cotan 5x   sec² 5x

9. Turunan pertama dari $f(x) = \cos^3(3x^2 - 1)$ adalah f '(x) = ...
A. $-9\cos^2(3x^2-1)\sin(3x^2-1)$
B. $-9x\cos(3x^2-1)\sin(3x^2-1)$
C. $-9x\cos(3x^2-1)\sin(6x^2-2)$
D. $-9x\cos^2(3x^2-1)\cos(3x^2-1)$
E. $-9x\cos^2(6x^2-2)\sin(6x^2-2)$

10. Turunan pertama dari $f(x) = \tan^2(a+3) + \sec^2(a+3)$ adalah f '(a) = ...
A. $4\,[\tan^2(a+3) + \tan(a+3)]$
B. $4\,[\tan^3(a+3) + \tan(a+3)]$
C. $4\,[\tan^3(a+3) + \tan^2(a+3)]$
D. $4\tan^2(a+3) + \sec(a+3)$
E. $4\tan(a+3) + \sec^2(a+3)$

UJI KOMPETENSI BAB III

A. Pilihlah satu jawaban yang benar

1. Turunan pertama dari $y = 2\cos^2 3x$ adalah . . . .
A. $2\sin 6x$
B. $4\cos 3x$
C. $-12\sin 6x$
D. $12\cos 3x$
E. $-12\sin 3x\cos 3x$

2. Turunan pertama dari $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x}$ adalah . . . .
A. $-\dfrac{1}{\cos 2x - 1}$
B. $\dfrac{1}{\sin 2x - 1}$
C. $-\dfrac{1}{\cos 2x + 1}$
D. $\dfrac{\cos x}{\cos x + \sin x}$
E. $\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$

3. Turunan pertama dari $y = \sin 3x \tan 4x$ adalah . . . .
A. $\cos 3x \sec 4x + 3\sin 3x \sec^2 4x$
B. $\cos 3x \tan^2 4x + 4\cos 3x \sec^2 4x$
C. $3\cos 3x \tan 4x + 4\sin 3x \sec^2 4x$
D. $3\cos 3x \tan 4x + 4\sin 3x \sec x$
E. $4\cos 3x \tan 4x + 3\sin 3x \sec^2 4x$

4. Turunan pertama dari $y = \cos(2x^3 - x^2)$ adalah . . . .
A. $(2x - 6x^2)\cos(6x^2 - 2x)$
B. $\sin(6x^2 - 2x)$
C. $-\sin(2x^3 - x^2)$
D. $-\sin(2x^3 - x^2)\cos(6x^2 - 2x)$
E. $(2x - 6x^2)\sin(6x^2 - 2x)$

5. Turunan pertama dari $y = \cos^3 5x$ adalah . . . .
A. $5x\cos^3 5x$
B. $-5x\cos^3 5x$
C. $-15\cos^2 5x\sin 5x$
D. $15x\cos^2 5x\sin 5x$
E. $3x\cos^2 5x$

6. Turunan pertama dari $y = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$ adalah . . . .
   A. $\tan 2x$
   B. $\sin^2 x$
   C. $\csc^2 x$
   D. $\cos^2 x$
   E. $\sec^2 x$

7. Turunan pertama dari $y = \sin^2(2x^3 - 1)$ adalah . . . .
   A. $2\sin(2x^3 - 1)$
   B. $\sin(4x^3 - 2)$
   C. $6x^3 \sin(2x^3 - 1)$
   D. $\cos^2(2x^3 - 1)$
   E. $12x^2 \sin(2x^3 - 1)\cos(2x^3 - 1)$

8. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = \cos^5(\pi - 2x)$ adalah . . . .(UN SMA 2016)
   A. $f'(x) = 5\cos^3(\pi - 2x)\sin(2\pi - 4x)$
   B. $f'(x) = 5\cos^3(\pi - 2x)\sin(\pi - 2x)$
   C. $f'(x) = 5\cos^3(\pi - 2x)\cos(2\pi - 4x)$
   D. $f'(x) = -5\cos^3(\pi - 2x)\sin(2\pi - 4x)$
   E. $f'(x) = -5\cos^3(\pi - 2x)\sin(\pi - 2x)$

9. Turunan pertama $y = (3x^2 - 1)\sin(2x + 1)$ adalah . . . .
   A. $2\sin(2x^3 - 1)$
   B. $\sin(4x^3 - 2)$
   C. $-6x\sin(2x+1) + (6x^2 - 2)\cos(2x+1)$
   D. $6x\sin(2x+1) + (6x^2 - 2)\cos(2x+1)$
   E. $6x\sin(2x+1) - (6x^2 - 2)\cos(2x+1)$

10. Turunan pertama dari $y = \dfrac{(x^2 - 1)\sin x}{\cos 2x}$, untuk x = 0 adalah . . . .
   A. -1
   B. $-\dfrac{1}{4}$
   C. 0
   D. $\dfrac{1}{4}$
   E. 1

B. Kerkajakan soal-soal berikut dengan teliti!

1. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = \cos(2x - 3)$ adalah....
2. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = (x-1)^3 \cos 4x$ adalah....
3. Jika $f'(x)$ adalah turunan pertama dari $f(x) = \sin^2(x-2)$ maka nilai dari $f'(2)$ adalah....
4. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2 \cos 2x}{\sin 2x}$ adalah....
5. Jika $f'(x)$ adalah turunan pertama dari $f(x) = \tan(2x - 1)$ maka nilai dari $f'(x+3)$ adalah....

BAB 4

APLIKASI TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

KEGIATAN BELAJAR 4.1

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.4	Menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	3.4.1	Memahami keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi trigonometri.
4.4	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	4.4.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 10. KD dan IPK Turunan Kedua Fungsi Trigonometri

A. TURUNAN KEDUA FUNGSI TRIGONOMETRI

Kita telah mempelajari tentang turunan pertama suatu fungsi $f(x)$. Kali ini kita membahas turunan kedua suatu fungsi. Langkah yang akan kita lakukan adalah mencari turunan pertama dari suatu fungsi tersebut yaitu $f'(x)$, kemudian hasil dari $f'(x)$ kita turunkan lagi mendapatkan turunan kedua yaitu $f''(x)$.

Contoh Soal 4.1.1

Tentukan turunan kedua dari $f(x) = \sin 2x$.

Penyelesaian

$f(x) = \sin 2x$

$f'(x) = \cos 2x \times 2$

$f'(x) = 2\cos 2x$

$f''(x) = 2(-\sin 2x) \times 2$

$f''(x) = -4\sin 2x$

B. LATIHAN 4.1

1) Diketahui suatu fungsi $f(x) = 3\cos x$, turunan kedua dari $f(x)$ adalah....
2) Diketahui suatu fungsi $f(x) = 4\tan x$, $f''(x) = ...$
3) Turunan kedua dari fungsi $f(x) = 2\sec x$ adalah....
4) Diketahui suatu fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$, nilai dari $f''(\pi) = ...$
5) Diketahui suatu fungsi $f(x) = 4x^2 \sin x$, turunan kedua dari $f(x)$ adalah....
6) Turunan kedua dari fungsi $f(x) = (\sin x - 1)(\cos x + 1)$ adalah....
7) Diketahui suatu fungsi $f(x) = \dfrac{\sin x}{x+2}; x \neq -2$, $f''(x) = ...$
8) Diketahui suatu fungsi $f(x) = 4\sin x - \cot x$, $f''(\dfrac{\pi}{2}) = ...$
9) Diketahui suatu fungsi $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cot x}; \cot x \neq 0$, $f''(x) = ...$
10) Diketahui suatu fungsi $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x}; \cot x \neq 0$, $f''(x) = ...$

C. TES FORMATIF PENGETAHUAN DAN KETERAMPILAN 4.1

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Turunan kedua fungsi f(x) = 4 sin x adalah ….
   A. 4 cos x
   B. – 4 sin x
   C. cos x
   D. – cos x
   E. 4 + cos x

2. Jika f(x) = sec 2x, nilai f ”(0) = ….
   A. – 4
   B. – 2
   C. 0
   D. 1
   E. 2

3. Diketahui f(x) = sin 3x – 3 cos x. Jika f ” turunan kedua f, nilai f ”($\frac{\pi}{2}$) adalah ….
   A. 9
   B. 3
   C. 1
   D. – 1
   E. – 3

4. Nilai turunan kedua fungsi f(x) = sin 2x – cos 2x untuk nilai x = $\frac{1}{4}\pi$ adalah ….
   A. – 16
   B. – 4
   C. – 2
   D. 0
   E. 1

5. Diketahui fungsi f dinyatakan oleh f(x) = 3 sin x. Jika f" turunan kedua f, hasil f"(x) adalah ….

A. -3 sin x
B. -3 cos x
C. -3 sin x cos x
D. 3 sin x
E. 3 cos x

6. Fungsi f dinyatakan oleh f(x) = cos (4x-1). Jika f" turunan kedua f, hasil f"(x) adalah ….

A. -16 sin $(4x-1)$
B. -16 cos $(4x-1)$
C. 16 cos $(4x-1)$
D. 4 cos $(4x-1)$
E. 4 sin $(4x-1)$

7. Diketahui fungsi f dinyatakan oleh f(x) = tan x. Jika f" turunan kedua f, nilai f"($\frac{1}{4}\pi$) adalah ….

A. 4
B. 2
C. 0
D. – 2
E. – 4

8. Fungsi f dinyatakan oleh f(x) = sin 2x. Jika f" turunan kedua f, nilai f"(x) adalah ….

A. 4 sin 2x
B. 2 sin 2x
C. 2 cos 2x
D. – 2 sin 2x
E. – 4 sin 2x

9. Diketahui $f(x) = 2\cos 2x$,nilai $f''(0) = ...$

A. – 8
B. – 2
C. 0
D. 2
E. 4

10. Jika $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$, maka turunan kedua dari $f(x)$ untuk $x = 0$ adalah....

A. -16
B. -4
C. -2
D. 2
E. 4

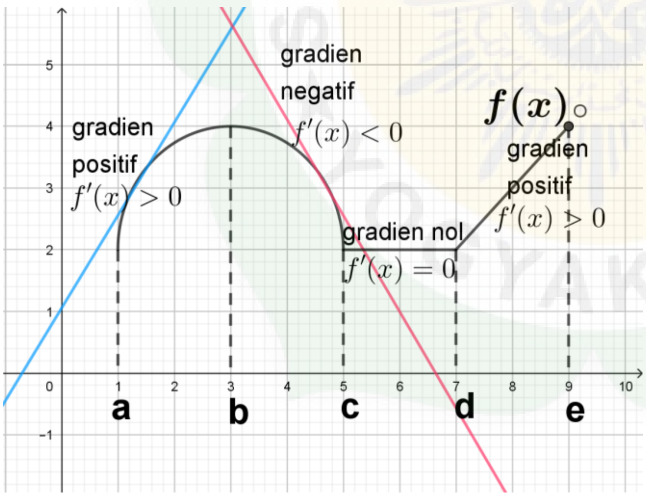
KEGIATAN BELAJAR 4.2

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.4	Menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	3.4.2	Menemukan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.
4.4	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	4.4.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 11. KD dan IPK Stasioner Pada Turunan Fungsi Trigonometri

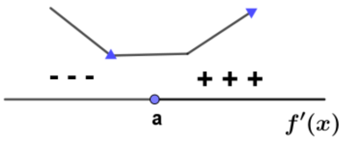
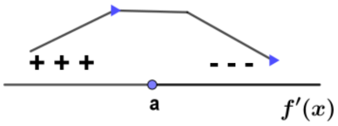
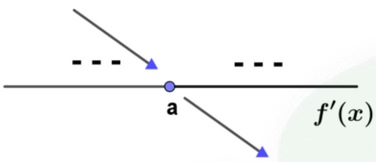
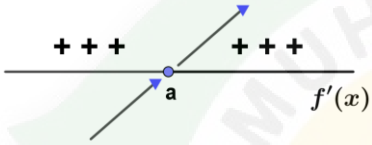
A. NILAI STASIONER DAN JENISNYA



Gamb. 3. Stasioner

Jika suatu nilai x mengakibatkan $f'(x)=0$, maka $f(x)$ fungsi yang tidak naik atau tidak turun pada titik tersebut. Hal ini dikarenakan gradien garis singgung pada titik-titik tersebut adalah nol. Titik dimana terjadi perubahan arah grafik dari turun menjadi naik atau sebaliknya ini dinamakan titik stasioner. Pada titik stasioner ini $f'(x)=0$. Sedangkan nilai dari $f(b)$ dimana b adalah titik stasionernya dinamakan **nilai stasioner**.

Suatu fungsi $f(x)$ tidak naik atau tidak turun pada suatu titik dikarenakan gradien garis singgung pada titik-titik tersebut adalah nol. Perubahan arah grafik ini terjadi pada titik $x=b$. Titik dimana terjadi perubahan arah grafik dari turun menjadi naik atau sebaliknya ini dinamakan titik stasioner. Pada titik stasioner ini $f'(x)=0$. Sedangkan nilai dari $f(b)$ dimana b adalah titik stasionernya dinamakan nilai stasioner. Kalian telah mengetahui titik dan nilai stasioner suatu fungsi. Terdapat 3 jenis nilai stasioner suatu fungsi, yaitu titik balik maksimum, titik balik minimum, dan titik belok.

a.	 Gambar 4. Titik Balik Minimum	Misalkan $x = a$ adalah stasioner. Apabila nilai x kurang dari a $(x < a)$ menyebabkan $f(x)$ turun dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x > a$ menyebabkan $f(x)$ naik, maka $(a, f(a))$ adalah **titik balik minimum**.
b.	 Gambar 5. Titik Balik Maksimum	Misalkan $x = a$ adalah stasioner. Apabila nilai x kurang dari a $(x < a)$ menyebabkan $f(x)$ naik dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x > a$ menyebabkan $f(x)$ turun, maka $(a, f(a))$ adalah **titik balik maksimum**.
c.	 Gambar 6. Titik Belok	Misalkan $x = a$ adalah stasioner. Apabila nilai x kurang dari a $(x < a)$ menyebabkan $f(x)$ turun dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x > a$ menyebabkan $f(x)$ juga turun, maka $(a, f(a))$ adalah **titik belok**.
d.	 Gambar 7. Titik Belok	Misalkan $x = a$ adalah stasioner. Apabila nilai x kurang dari a $(x < a)$ menyebabkan $f(x)$ naik dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x > a$ menyebabkan $f(x)$ juga naik, maka $(a, f(a))$ juga **titik belok**.

Contoh Soal 4.2.2

Tentukan nilai-nilai stasioner fungsi $f(x) = \sin x$ dan jenisnya.

Penyelesaian

stasioner $\rightarrow f'(x) = 0$

$\cos x = 0$

Maka $x = 90°$ dan $x = 270°$

Untuk $x = 90°$ maka $f(90°) = \sin 90° = 1$

Untuk $x = 270°$ maka $f(270°) = \sin 270° = -1$

Nilai $f(90°) > f(270°)$, maka nilai $f(90°)$ merupakan nilai maksimum dan koordinat $(90°, f(90°))$ merupakan titik balik maksimum, nilai $f(270°)$ merupakan nilai minimum dan koordinat $(270°, f(270°))$ merupakan titik balik minimum.

Jadi:
Nilai maksimum dari fungsi $f(x) = \sin x$ adalah 1
Nilai minimum dari fungsi $f(x) = \sin x$ adalah -1
Koordinat stasioner $(90°,1)$ dan $(270°,-1)$
Jenis-jenis stasioner:
Titik balik maksimum $(90°,1)$
Titik balik minimum $(270°,-1)$

B. LATIHAN 4.2

1. Tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x)=\sin x+\cos x$ adalah....
2. Tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x)=\cos 2x$ adalah....
3. Tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$ adalah....
4. Tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x)=\sin 2x-1$ adalah....
5. Tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x)=2\sin x-1$ adalah....

C. TES FORMATIF PENGETAHUAN DAN KETERAMPILAN 4.2

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Salah satu nilai stasioner dari fungsi $f(x)=2\sin x, untuk\, 0\le x\le 2\pi$ adalah . . . .
   A. -3
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. 2

2. Nilai stasioner dari fungsi $f(x)=\cos x, untuk\, 0\le x\le \pi$ adalah . . . .
   A. -2 dan 2
   B. -1 dan 1
   C. -2 dan 1
   D. -1 dan 2
   E. 1 dan 2

3. Nilai stasioner dari fungsi $f(x)=\sin x+\cos x, untuk\, 0\le x\le \pi$ adalah $\sqrt{2}$ untuk x . . . .
   A. 15⁰
   B. 30⁰
   C. 45⁰
   D. 90⁰
   E. 135⁰

4. Koordinat titik stasioner dari $y=2\sin 2x+1, untuk\, 0<x<\pi$ adalah . . . .
   A. $\left(\frac{\pi}{4},-3\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4},-1\right)$
   B. $\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4},1\right)$
   C. $\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4},-3\right)$
   D. $\left(\frac{\pi}{4},3\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4},-1\right)$
   E. $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4},-3\right)$

5. Titik stasioner dari $f(x)=\sin x+\cos x$ untuk $0\le x\le 2\pi$ adalah . . . .
   A. $(45°,\sqrt{2})$
   B. $(45°,-\sqrt{2})$

C. $\left(135°, -\sqrt{2}\right)$

D. $\left(135°, \sqrt{2}\right)$

E. $\left(225°, \sqrt{2}\right)$

6. Salah satu koordinat titik stasioner dari $f(x) = 2 + \cos x$ untuk $0 \le x \le 2\pi$ adalah . . . .

A. $(\pi, -3)$

B. $(\pi, 3)$

C. $(\pi, -1)$

D. $(2\pi, 2)$

E. $(2\pi, 3)$

7. Diberikan kurva dengan persamaan $y = 4\cos x + \cos 2x$. untuk $0 \le x \le 2\pi$. Merupakan titik balik minimum adalah . . . .

A. $(0, -5)$

B. $(\pi, -5)$

C. $(0, 5)$

D. $(\pi, 5)$

E. $(2\pi, 5)$

8. Titik balik minimum fungsi $y = 2\,sinx + cos^2x$, adalah . . . .

A. $(0, -2)$

B. $(0, -1)$

C. $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$

D. $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$

E. $\left(\frac{3\pi}{2}, -2\right)$

9. Nilai stasioner dari kurva $f(x) = \sin x + \cos x$ untuk $0 \le x \le 2\pi$ sama dengan . . . .

A. 0 dan $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

B. 0 dan $\sqrt{2}$

C. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan 0

D. $-\sqrt{2}$ dan 0

E. -1 dan 0

10. Jenis stasioner dari fungsi $f(x) = 3\cos x$ adalah . . . .

A. Titik balik maksimum $(0, -3)$

B. Titik balik maksimum $(0, 3)$

C. Titik balik maksimum $(180°, 3)$

D. Titik balik minimum $(0, -3)$

E. Titik balik minimum $(360°, -3)$

KEGIATAN BELAJAR 4.3

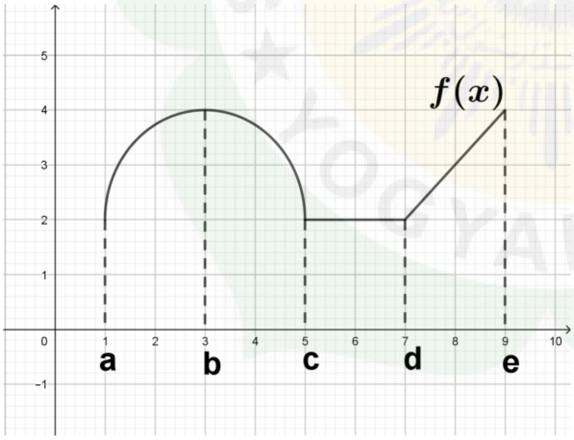
KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.4	Menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	3.4.3	Menetukan penyelesaian dari keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, kurva fungsi trigonometri.
4.4	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	4.4.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 12. KD dan IPK Fungsi Naik dan Fungsi Turun Pada Turunan Fungsi Trigonometri

A. FUNGSI NAIK DAN FUNGSI TURUN

Untuk memudahkan memahami fungsi naik dan fungsi turun pada suatu interval, perhatikan gambar dibawah.



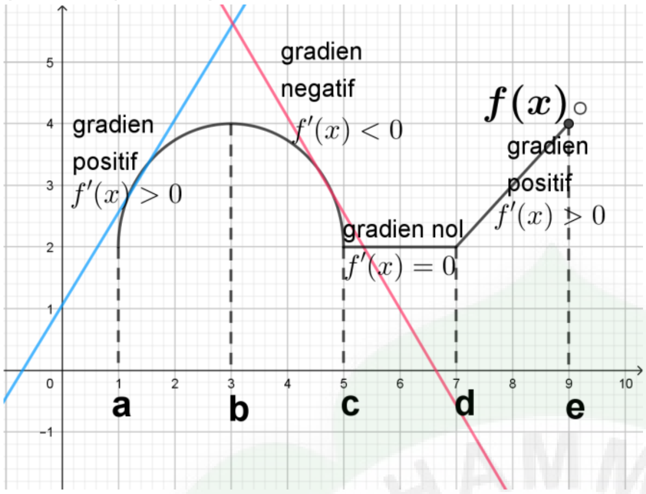
Gambar 8. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Pada gambar diatas, grafik fungsi naik pada interval $a < x < b$ dan interval $d < x < e$, sedangkan pada interval $b < x < c$ grafik fungsi tersebut turun, pada interval $c < x < d$ grafik $f(x)$ tidak naik dan tidak turun.

Sekarang, perhatikan cara menentukan interval suatu fungsi naik atau turun. Misalkan diberikan fungsi $y = f(x)$.

a. Jika untuk setiap x pada suatu interval $f'(x) > 0$ maka $f(x)$ fungsi yang naik pada interval tersebut. Hal ini dikarenakan gradien garis singgung pada titik-titik tersebut adalah positif (condong ke kanan).

b. Jika untuk setiap x pada suatu interval $f'(x) < 0$ maka $f(x)$ fungsi yang turun pada interval tersebut. Hal ini dikarenakan gradien garis singgung pada titik-titik tersebut adalah negatif (condong ke kiri).



Gambar 9. Interval Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Perhatikan kembali gambar 1 dan gambar 2. Pada interval $a < x < b$ grafik fungsi naik, sedangkan pada interval $b < x < c$ grafik fungsi turun. Perubahan arah grafik ini terjadi pada titik $x = b$.

Contoh Soal 4.3.1

Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun dari $f(x) = \sin x$.

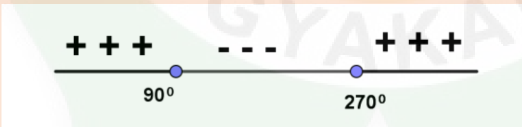
Penyelesaian

Interval fungsi naik $f'(x) > 0$

$\cos x > 0$

Untuk $\cos x = 0$

Maka $x = 90°$ dan $x = 270°$



Interval fungsi naik berada pada interval positif . Maka **interval fungsi naik** dari $f(x) = \sin x$ adalah $x < 90°$ atau $x > 270°$.

Interval fungsi turun berada pada interval negatif . Maka **interval fungsi turun** dari $f(x) = \sin x$ adalah $90° < x < 270°$.

B. LATIHAN 4.3

1. Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun dari $f(x)=\sin x+\cos x$, untuk interval $0° < x < 360°$ adalah....
2. Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun dari $f(x)=\cos 2x$, untuk interval $0° < x < 360°$ adalah....
3. Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun dari $f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$, untuk interval $0 < x < 2\pi$ adalah....
4. Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun dari $f(x)=\sin 2x-1$, untuk interval $0 < x < 2\pi$ adalah....
5. Tentukan interval fungsi naik dan interval fungsi turun dari $f(x)=\tan 2x$, untuk interval $0 < x < \pi$ adalah....

KEGIATAN BELAJAR 4.4

KD DAN IPK

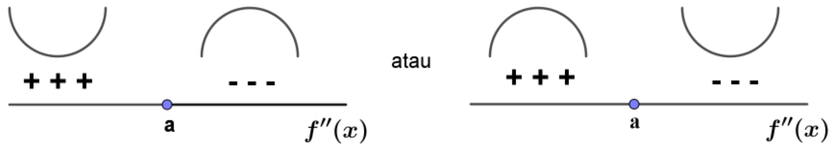
Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.4	Menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	3.4.4	Menetukan penyelesaian dari keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.
4.4	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	4.4.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 13. KD dan IPK Nilai Stasioner Dengan Turunan Kedua

A. MENENTUKAN JENIS-JENIS NILAI STASIONER MENGGUNAKAN TURUNAN KEDUA

Kalian telah memahami jenis-jenis nilai stasioner melalui turunan pertama. Kali ini kita akan mendeteksi nilai stasioner menggunakan turunan kedua dari fungsi tersebut. Konsep turunan kedua suatu fungsi sudah kamu pelajari di kelas XI. Misalkan terdapat suatu fungsi $f(x)$ yang kontinu dalam interval $b < x < c$ yang memuat $x = a$. Turunan pertama dan turunan kedua fungsi terdefinisi pada interval tersebut.

a. Jika $f'(a)=0$ dan $f''(a)>0$ maka $(a, f(a))$ adalah *titik balik minimum*.
b. Jika $f'(a)=0$ dan $f''(a)<0$ maka $(a, f(a))$ adalah *titik balik maksimum*.
c. Jika $f'(a)=0$ dan $f''(a)$ bergantian tanda ((+) ke (-) atau sebaliknya) maka $(a, f(a))$ adalah *titik belok horizontal*.



Gambar 10. Garis Bilangan

Dengan demikian, untuk mendapatkan titik belok horizontal, selain turunan kedua harus sama dengan nol, perlu diselidiki bahwa turunan kedua itu berubah tanda dari positif ke nol, kemudian ke negatif, atau sebaliknya.

Contoh Soal 4.4.1

Tentukan titik-titik stasioner fungsi $f(x)=\sin x$ dengan menggunakan turunan kedua.

Penyelesaian

Stasioner $\rightarrow f'(x)=0$

$\cos x = 0$

Maka $x=90^\circ$ dan $x=270^\circ$

Untuk $x=90^\circ$ maka $f(90^\circ)=\sin 90^\circ = 1$

Untuk $x=270^\circ$ maka $f(270^\circ)=\sin 270^\circ = -1$

$f''(x)=-\sin x$

Untuk $x=90^\circ$ maka $f''(90^\circ)=-\sin 90^\circ = -1$

Untuk $x=270^\circ$ maka $f''(270^\circ)=-\sin 270^\circ = -(-1)=1$

Nilai $f''(90^\circ)<0$, maka koordinat $(90^\circ, f(90^\circ))$ yaitu $(90^\circ,1)$ merupakan titik balik maksimum, nilai $f''(270^\circ)>0$ maka koordinat $(270^\circ, f(270^\circ))$ yaitu $(270^\circ,-1)$ merupakan titik balik minimum.

Jadi:
Nilai maksimum dari fungsi $f(x)=\sin x$ adalah 1
Nilai minimum dari fungsi $f(x)=\sin x$ adalah -1
Koordinat stasioner $(90^\circ,1)$ dan $(270^\circ,-1)$

Jenis-jenis stasioner:
Titik balik maksimum $(90^\circ,1)$
Titik balik minimum $(270^\circ,-1)$

B. LATIHAN 4.4

1. Dengan mengaplikasikan turunan kedua tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = \sin x + \cos x$ adalah....
2. Dengan mengaplikasikan turunan kedua tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = \cos 2x$ adalah....
3. Dengan mengaplikasikan turunan kedua tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$ adalah....
4. Dengan mengaplikasikan turunan kedua tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = \sin 2x - 1$ adalah....
5. Dengan mengaplikasikan turunan kedua tentukan titik stasioner dan jenis-jenisnya dari fungsi $f(x) = 2\sin x - 1$ adalah....

KEGIATAN BELAJAR 4.5

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.4	Menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	3.4.5	Menetukan penyelesaian dari keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum kurva fungsi trigonometri.
4.4	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	4.4.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 14. KD dan IPK Nilai Maksimum dan Minimum Pada Turunan Fungsi Trigonometri

A. NILAI MAKSIMUM DAN NILAI MINIMUM SUATU FUNGSI DALAM INTERVAL TERTUTUP

Nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $y = f(x)$ dalam interval tertutup $a \le x \le b$ ditentukan sebagai berikut.

a. Tentukan nilai stasioner (maksimum dan minimum) fungsi $f(x)$ dalam interval itu.

b. Tentukan nilai $f(a)$ dan $f(b)$.

c. Nilai terbesar dari nilai-nilai itu merupakan nilai maksimum, sedangkan nilai terkecil merupakan nilai minimum.

Contoh Soal 4.5.1

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x) = \sin x$ pada interval $0° < x < 360°$.

Penyelesaian

➢ Menentukan nilai stasioner (maksimum dan minimum) fungsi $f(x)$ dalam interval itu.

stasioner $\rightarrow f'(x) = 0$

$$\cos x = 0$$

Maka $x = 90°$ dan $x = 270°$

Untuk $x = 90°$ maka $f(90°) = \sin 90° = 1$

Untuk $x = 270°$ maka $f(270°) = \sin 270° = -1$

➢ Menentukan nilai $f(a)$ dan $f(b)$.

Untuk $a = 0°$ maka $f(0°) = \sin 0° = 0$

Untuk $a = 360°$ maka $f(360°) = \sin 360° = 0$

- Nilai terbesar dari nilai-nilai itu merupakan nilai maksimum, sedangkan nilai terkecil merupakan nilai minimum.

Dari 4 nilai yang kita peroleh maka:

nilai maksimumnya adalah 1

nilai minimumnya adalah -1

B. LATIHAN 4.5

1. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x) = \sin x$, pada interval $0 < x < 2\pi$.
2. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x) = \cos 2x$, pada interval $0 < x < 2\pi$.
3. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x) = \sin x - 1$, pada interval $0 < x < 360°$.
4. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x) = 2\sin x - 1$, pada interval $0 < x < 2\pi$.
5. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $f(x) = 2\sin x - \sqrt{3}$, pada interval $0 < x < 360°$.

C. TES FORMATIF PENGETAHUAN DAN KETERAMPILAN 4.5

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Diberikan kurva dengan persamaan $f(x) = 2\sin x + \cos x, untuk\, 0 \le x \le 2\pi$. Nilai minimum kurva tersebut adalah . . . .
   A. $-3\sqrt{5}$
   B. $-\sqrt{5}$
   C. 0
   D. $\sqrt{2}$
   E. 2 $\sqrt{2}$

2. Nilai maksimum kurva dengan persamaan $f(x) = 4\cos x + \cos 2x, untuk\, 0 \le x \le 2\pi$ adalah . . . .
   A. -5
   B. -2
   C. 0
   D. 1
   E. 5

3. Nilai maksimum dari kurva $y = 5\sin x + 8\cos x, untuk\, 0 \le x \le 2\pi$ sama dengan . . . .
   A. $\sqrt{89}$
   B. $2\sqrt{89}$
   C. $3\sqrt{89}$
   D. $4\sqrt{89}$
   E. $5\sqrt{89}$

4. Nilai minimum dari kurva $f(x) = x + 2\cos x, untuk\, 0 < x < 2\pi$ adalah . . . .
   A. $\pi + \sqrt{3}$
   B. $\frac{5}{6}\pi + \sqrt{3}$
   C. $\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}$
   D. $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$
   E. $\frac{1}{6}\pi - \sqrt{3}$

5. Hasil jumlah nilai maksimum dan minimum dari kurva $f(x) = 2x - \tan x, untuk\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$ sama dengan . . . .
   A. $-\pi - 2$
   B. $-\pi - 1$
   C. $-\pi$
   D. 0
   E. $\pi + 2$

6. Pembuat nilai minimum fungsi $y = 2\sin x + \cos^2 x, untuk\, 0 \le x \le 2\pi$ adalah . . . .
   A. 0
   B. $\frac{1}{4}\pi$
   C. $\frac{1}{2}\pi$
   D. π
   E. $\frac{3}{2}\pi$

7. Jumlah semua pembuat nilai maksimum dan nilai minimum dari kurva fungsi $y = 2\sin x + \sin 2x$ pada interval $0 \le x \le 2\pi$ adalah . . . .
   A. 2π
   B. $\frac{3}{2}\pi$
   C. $\frac{5}{4}\pi$
   D. π
   E. $\frac{1}{2}\pi$

8. Jika fungsi f ditentukan oleh: $f(x) = (\sqrt{x}\sin x + \cos x)(3\sqrt{3}\cos x - 3\sin x)$, maka nilai minimum dari fungsi f adalah....
   A. -6
   B. -3
   C. 0
   D. 3
   E. 6

9. Diketahui bahwa $\frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = 0$. Nilai minimum dari $\tan^2 x + \cot^2 x$ adalah ....
   A. -2
   B. -1
   C. 0
   D. 1
   E. 2

10. Diberikan kurva dengan persamaan $y = 4\cos x + \cos 2x$. untuk $0 \le x \le 2\pi$. Nilai minimum adalah . . . .
   A. -5
   B. -2
   C. 0
   D. 2
   E. 5

KEGIATAN BELAJAR 4.6

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.4	Menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	3.4.6	Menetukan penyelesaian dari keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.
4.4	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	4.4.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 15. KD dan IPK Aplikasi Turunan Fungsi Trigonometri Pada Garis Singgung Kurva

A. PERSAMAAN GARIS SINGGUNG KURVA

Persamaan garis singgung kurva : $\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$ dimana $m = f'(x)$

merupakan gradien pada garis singgung kurva dan (x_1, y_1) adalah titik yang singgung dilalui.

Contoh Soal 4.6.1

Tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = \sin 2x$ ditik berabsis 0.

Penyelesaian

Untuk absis 0→ $x_1 = 0$ didapat $y_1 = f(x) = \sin 2x$

$$y_1 = f(0) = \sin 2(0) = \sin 0 = 0$$

$$m = f'(x) = 2\cos 2x$$
$$m = f'(0) = 2\cos 2(0) = 2\cos 0 = 2(1) = 2$$

Maka *persamaan* garis singgung kurva yang terbentuk:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = 2(x - 0)$$
$$y = 2x$$

B. LATIHAN 4.6

1. Garis singgung kurva $f(x) = \cos(2x + 60^o)$ dititik $(0,\frac{1}{2})$ adalah...
2. Persamaan garis singgung pada kurva $y = \sin^2 x$ yang berabsis $\frac{\pi}{6}$ adalah....
3. Persamaan garis singgung pada kurva $y = 2\sin 2x$ yang berordinat 2 adalah....**(berordinat 2→$\boldsymbol{y_1 = 2}$)**
4. Diketahui $f(x) = \tan x$. Tentukan garis singgung f(x) jika sejajar garis $y - x + 2 = 0$
5. Diketahui $f(x) = \tan x$. Tentukan garis singgung f(x) jika tegak lurus garis $4y + x + 2 = 0$

C. TES FORMATIF PENGETAHUAN DAN KETERAMPILAN 4.6

Petunjuk: Pilihlah satu jawaban yang tepat.

1. Nilai kemiringan (gradien) garis singgung pada kurva $f(x) = \cos x$, diabsis $x = \frac{\pi}{6}$ adalah . . . .

   A. $-\frac{1}{6}$

   B. $-\frac{1}{4}$

   C. $-\frac{1}{2}$

   D. $\frac{1}{2}$

   E. 2

2. Nilai gradien dari $g(t) = t\sec t$ di titik (0,0) adalah . . . .

   A. -5

   B. -2

   C. 0

   D. 1

   E. 5

3. Gradien garis tangen pada kurva $f(x) = \frac{\cos x + 2}{\sin x}$ di titik yang berabsis $x = \frac{\pi}{2}$ adalah . . . .

   A. -2

   B. -1

   C. 0

   D. 1

   E. 2

4. Persamaan garis singgung kurva $y = 2\sin x - 1$ di titik yang berabsis $x = \frac{\pi}{6}$ adalah . . . .

   A. $y = x\sqrt{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

   B. $y = x\sqrt{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

   C. $y = x\sqrt{3} - \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$

   D. $y = x\sqrt{3} + \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$

   E. $y = x\sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$

5. Persamaan garis singgung kurva $y = \cot x - 2\csc x$ di titik yang berabsis $x = \frac{\pi}{3}$ adalah . . . .

A. $y - \sqrt{3} = 0$

B. $y + \sqrt{3} = 0$

C. $y + x - \sqrt{3} = 0$

D. $y - x + \sqrt{3} = 0$

E. $y + x - 2\sqrt{3} = 0$

6. Persamaan garis singgung kurva $y = \tan x$ di titik $(\frac{\pi}{4}, 1)$ adalah . . . .

A. $y = 2x + (1 + \frac{\pi}{2})$

B. $y = 2x + (\frac{\pi}{2} - 1)$

C. $y = 2x + (1 - \frac{\pi}{2})$

D. $y = 2x + (2 - \pi)$

E. $y = 2x + (2 + \pi)$

7. Persamaan garis singgung kurva $y = \sin x + 2$ di titik $(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{2})$ adalah . . . .

A. $6x\sqrt{3} - 12y + 30 - \pi\sqrt{3} = 0$

B. $6x\sqrt{3} - 12y - 30 + \pi\sqrt{3} = 0$

C. $3x\sqrt{3} - 4y + 30 - \pi\sqrt{3} = 0$

D. $x\sqrt{3} - 2y + 30 - \pi\sqrt{3} = 0$

E. $x\sqrt{3} + 2y - 30 + \pi\sqrt{3} = 0$

8. Persamaan garis singgung pada kurva $g(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ di titik yang berabsis $x = \frac{\pi}{3}$ adalah . . . .

A. $6x + 9y = 2\pi + 3\sqrt{3}$

B. $6x - 9y = 2\pi - 3\sqrt{3}$

C. $6x - 9y = -2\pi + 3\sqrt{3}$

D. $9x - 3y = -2\pi + 3\sqrt{3}$

E. $9x - 6y = 2\pi - 3\sqrt{3}$

9. Persamaan garis singgung pada kurva $y = \frac{\cos x + 2}{\sin x}$ di titik yang berabsis $x = \frac{\pi}{2}$ adalah . . . .

A. $x + y - (4 + \pi) = 0$

B. $2x + y - (4 + \pi) = 0$

C. $2x + 2y - (4 + \pi) = 0$

D. $2x + 2y + (4 + \pi) = 0$

E. $x + y + (4 + \pi) = 0$

10. Persamaan garis singgung kurva $y = x + \sin x$ di titik yang berabsis $x = \frac{\pi}{6}$ adalah . . . .

A. $6y + (\pi + 3) = (6 + 3\sqrt{3})(x - \frac{\pi}{6})$

B. $6y - (\pi + 3) = (6 + 3\sqrt{3})(x - \frac{\pi}{6})$

C. $6y + (\pi + 3) = (6 + 3\sqrt{3})(x - \frac{\pi}{6})$

D. $6y + (\pi + 3) = (6 + 3\sqrt{3})(x - \frac{\pi}{6})$

E. $6y - (\pi - 3) = (6 - 3\sqrt{3})(x - \frac{\pi}{6})$

KEGIATAN BELAJAR 4.7

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.4	Menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	3.4.7	Menetukan penyelesaian dari keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi fungsi trigonometri.
4.4	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	4.4.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 16. KD dan IPK Aplikasi Turunan dalam Perhitungan Percepatan dan Kecepatan

A. APLIKASI TURUNAN DALAM PERHITUNGAN KECEPATAN DAN PERCEPATAN

Seperti yang telah disinggung di depan bahwa turunan banyak digunakan dalam berbagai disiplin ilmu. Salah satu aplikasi turunan adalah untuk menyelesaikan kasus-kasus yang berhubungan dengan kecepatan (kelajuan) dan percepatan. Sebagai contoh dalam bidang fisika dibahas tentang suatu gerak lurus berubah beraturan, yang berarti bahwa kecepatan benda selama bergerak tidaklah tetap. Misalkan sebuah benda bergerak dari suatu tempat ke tempat yang lain menenmpuh jarak s dalam waktu t . Kecepatan rata-rata benda itu ditentukan dengan

$$\text{Kecepatan rata-rata} = \frac{perubahan \quad jarak}{perubahan \quad waktu} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Jika kecepatan saat t dinotasikan dengan $v(t)$ maka kecepatan dirumuskan dengan:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Dengan kata lain, kecepatan pada waktu t adalah turunan pertama pertama dari fungsi jaraknya. Jika fungsi kecepatan terhadap waktu $v(t)$ kita turunkan lagi, maka akan kita peroleh percepatan.

Misalnya, percepatan saat t dinotasikan dengan $a(t)$, percepatan dirumuskan dengan

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Dengan kata lain, percepatan pada waktu t adalah turunan pertama dari fungsi kecepatan. Percepatan juga diartikan sebagai turunan kedua dari fungsi jaraknya, yaitu

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Apabila suatu percepatan bernilai negatif, berarti benda berlawanan arah dengan arah sebelumnya. Dalam hal ini dikatakan bahwa benda mengalami perlambatan.

Contoh Soal 4.7.1

Suatu benda bergerak sepanjang garis lurus. Jarak yang ditempuh benda tersebut dalam waktu t detik adalah $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 10t$ meter.

Tentukan:

a. Kecepatan benda saat $t = 2$ detik;
b. Percepatan benda saat $t = 5$ detik;

Penyelesaian

a. Kecepatan benda pada waktu t adalah $v(t) = \frac{ds}{dt} = 2t^2 - 9t + 10$.
Dengan demikian, kecepatan saat $t = 2$ detik adalah $v(2) = 0$. Hal ini berarti pada saat $t = 2$, benda berhenti sesaat karena pada waktu itu kecepatannya 0.

b. Percepatan benda pada waktu t adalah $v(t) = \frac{dv}{dt} = 4t - 9$.
Jadi, percepatan saat $t = 5$ detik adalah $a(5) = 4(5) - 9 = 11 m/s^2$.

B. LATIHAN 4.7

1. Sebuah mobil bergerak menurut rumus $s(t) = t^2 + 5t$, hitunglah kecepatan mobil tersebut setelah 8 detik.
2. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus. Panjang lintasannya s meter pada waktu t detik ditentukan oleh rumus $s(t) = 5 - 6t + 2t^2$.
   a. Tentukan panjang lintasan setelah $t = 1$ dan $t = 3$.
   b. Tentukan kecepatan rata-rata untuk antara $t = 1$ dan $t = 3$.
   c. Tentukan t jika kecepatannya nol.
   d. Hitunglah kecepatannya jika percepatannya nol.
3. Rusuk sebuah kubus yang terbuat dari kawat mengalami paemuaian sehingga mengalami pertambahan panjang 7 mm/detik. Tentukan laju pertambahan volume pada saat setiap rusuknya memiliki panjang 15 cm.
4. Sebuah benda berbentuk bola karena mengalami pemuaian. Tentukan laju perubahan volume bola pada saat jari-jarinya 7 cm. (ingat : Volume bola berjai-jari r adalah $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).
5. Sebuah benda dilemparkan ke atas dari ketinggian 256 kaki. Ketinggian benda setelah t detik pelemparan diberikan oleh $s = -16t^2 + 48t + 256$ kaki.
   a. Berapa kecepatan awalnya?
   b. Kapan benda mencapai kecepatan maksimum?
   c. Berapa ketinggian maksimumnya?
   d. Kapan benda membentur tanah?
   e. Berapa kecepatan benda ketika membentur tanah?

KEGIATAN BELAJAR 4.8

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.4	Menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	3.4.8	Menetukan penyelesaian dari keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.
4.4	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	4.4.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 17. KD dan IPK Aplikasi Turunan dalam Uji Kecekungan

A. UJI TURUNAN KEDUA UNTUK KECEKUNGAN

Manfaat turunan kedua yang lain adalah untuk menentukan kecekungan kurva suatu fungsi. Dengan menggunakan turunan kedua (jika ada), kita dapat menentukan kecekungan kurva. Misal fungsi $f(x)$ terdeferensialkan dua kali (mempunyai turunan kedua) pada selang terbuka *I*.

a. Jika $f''(x) > 0$ maka fungsi f cekung ke atas pada *I*.

b. Jika $f''(x) < 0$ maka fungsi f cekung ke atas pada *I*.

Contoh Soal 4.8.1

Tentukan interval dimana fungsi $f(x)=\cos x$, untuk $0<x<2\pi$ cekung ke atas.

Penyelesaian

$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$

Fungsi $f(x)=\cos x$ cekung keatas apabila $f''(x)>0$ sehingga

$f''(x)>0$

$-\cos x>0$

$\cos x<0$

Kita cari pembuat nolnya,

$\cos x = 0$

$\cos x = \cos 90°$

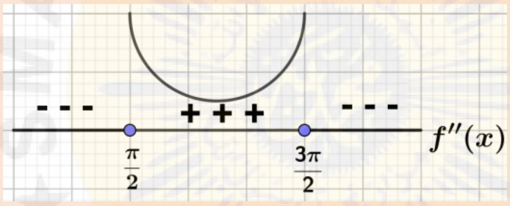
Maka $x = 90° + k \bullet 360°$

Untuk $k=0$, diperoleh $x = 90° = \dfrac{\pi}{2}$ (memenuhi pada interval)

atau $x = -90° + k \bullet 360°$

Untuk $k=0$, diperoleh $x = -90° = -\dfrac{\pi}{2}$ (tidak memenuhi pada interval)

Untuk $k=1$, diperoleh $x = 270° = \dfrac{3\pi}{2}$ (memenuhi pada interval)



Gambar 8. Garis Bilangan

Jadi fungsi $f(x)=\cos x$, untuk $0<x<2\pi$ cekung ke atas pada interval $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$.

B. LATIHAN 4.8

1. Tentukan interval dimana fungsi $f(x)=\sin x$, untuk $0<x<2\pi$ cekung ke atas.
2. Tentukan interval dimana fungsi $f(x)=\cos 2x$, untuk $0<x<2\pi$ cekung ke bawah.
3. Tentukan interval dimana fungsi $f(x)=\sin x-1$, untuk $0<x<360°$ cekung ke bawah.
4. Tentukan interval dimana fungsi $f(x)=2\sin x-1$, untuk $0<x<2\pi$ cekung ke atas.
5. Tentukan interval dimana fungsi $f(x)=2\sin x-\sqrt{3}$, untuk $0<x<360°$ cekung ke atas.

KEGIATAN BELAJAR 4.9

KD DAN IPK

Kompetensi Dasar (KD)		Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)	
3.4	Menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	3.4.9	Menetukan penyelesaian dari keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan pada menggambar kurva fungsi trigonometri.
4.4	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, dan kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.	4.4.1.	Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, selang kemonotonan fungsi, kemiringan garis singgung serta titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri sesuai dalam kehidupan sehari-hari.

Tabel 18. KD dan IPK Aplikasi Turunan Pada Menggambar Grafik Fungsi Trigonometri

A. MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI

Dalam menggambar grafik suatu fungsi $f(x)$, langkah-langkah yang kalian perhatikan adalah sebagai berikut.

1. Menentukan titik potong $f(x)$ dengan sumbu-sumbu koordinat (sumbu X dan sumbu Y).
2. Menentukan titik-titik stasioner atau titik ekstrem dan jenisnya.
3. Menentukan titik-titik bantu/ sembarang dalam fungsi untuk memperhalus grafik.

Contoh Soal 4.9.1

Tentukan grafik fungsi $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-1$, untuk $0<x<2\pi$.

Penyelesaian

Langkah 1 : Menentukan titik potong grafik terhadap sumbu koordinat.

Menentukan koordinat titik potong terhadap sumbu X maka $y=0$.

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-1=0$$

$$\frac{1}{2}\cos 2x-1=0$$

$$\frac{1}{2}\cos 2x=1$$

$$\cos 2x=2$$

Karena nilai kosinus tersebut maksimum 1 maka tidak ada nilai x yang memenuhi. Artinya, grafik tidak pernah memotong sumbu X.

Menentukan koordinat titik potong terhadap sumbu Y maka $x = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - 1$$

$$f(0) = \frac{1}{2}\cos 2(0) - 1 = \frac{1}{2}(1) - 1 = -\frac{1}{2}$$

Dengan demikian, titik potong grafik terhadap sumbu Y di titik $(0, -\frac{1}{2})$.

Langkah 2 : Menentukan titik-titik stasioner

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-\sin 2x) \times 2 - 0$$

$$f'(x) = -\sin 2x$$

Titik stasioner diperoleh saat $f'(x) = 0$, sehingga

$-\sin 2x = 0$

$\sin 2x = 0$

- $2x = 0 + k \bullet 2\pi$
  $x = 0 + k \bullet \pi$
  $x = 0$ (untuk $k = 0$)
  $x = \pi$ (untuk $k = 1$)
  $x = 2\pi$ (untuk $k = 2$)
- $2x = (\pi - 0) + k \bullet 2\pi$
  $x = \frac{\pi}{2} + k \bullet \pi$
  $x = \frac{\pi}{2}$ (untuk $k = 0$)
  $x = \frac{3\pi}{2}$ (untuk $k = 1$)

Sekarang kita cari titik-titik stasionernya.

Untuk $x = 0$ maka $f(0) = \frac{1}{2}\cos 2(0) - 1 = -\frac{1}{2}$, diperoleh titik stsioner $(0, -\frac{1}{2})$

Untuk $x = \frac{\pi}{2}$ maka $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\cos 2(\frac{\pi}{2}) - 1 = -\frac{3}{2}$, diperoleh titik stsioner $(\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2})$

Untuk $x = \pi$ maka $f(\pi) = \frac{1}{2}\cos 2(\pi) - 1 = -\frac{1}{2}$, diperoleh titik stsioner $(\pi, -\frac{1}{2})$

Untuk $x = \frac{3\pi}{2}$ maka $f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2}\cos 2(\frac{3\pi}{2}) - 1 = -\frac{3}{2}$, diperoleh titik stsioner $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3}{2})$

Untuk $x = 2\pi$ maka $f(2\pi) = \frac{1}{2}\cos 2(2\pi) - 1 = -\frac{1}{2}$, diperoleh titik stsioner $(2\pi, -\frac{1}{2})$

Selanjutnya kita tentukan jenis-jenis stasionernya.

Pada interval $0 < x < \frac{\pi}{2}$ fungsi turun karena $f'(x) < 0$.

Pada interval $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ fungsi turun karena $f'(x) > 0$.

Pada interval $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ fungsi turun karena $f'(x) < 0$.

Pada interval $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ fungsi turun karena $f'(x) > 0$.

Sekarang kita selidiki jenis stasionernya dengan menggunakan uji turunan kedua

$f'(x) = -\sin 2x$

$f''(x) = -2\cos 2x$

Untuk $x = 0$ maka $f''(0) = -2\cos 2(0) = -2 < 0$, sehingga titik $(0, -\frac{1}{2})$ merupakan titik balik maksimum.

Untuk $x = \frac{\pi}{2}$ maka $f''(\frac{\pi}{2}) = -2\cos 2(\frac{\pi}{2}) = 2 > 0$, sehingga titik $(\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2})$ merupakan titik balik minimum.

Untuk $x = \pi$ maka $f''(\pi) = -2\cos 2(\pi) = -2 < 0$, sehingga titik $(\pi, -\frac{1}{2})$ merupakan titik balik maksimum.

Untuk $x = \frac{3\pi}{2}$ maka $f''(\frac{3\pi}{2}) = -2\cos 2(\frac{3\pi}{2}) = 2 > 0$, sehingga titik $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3}{2})$ merupakan titik balik minimum.

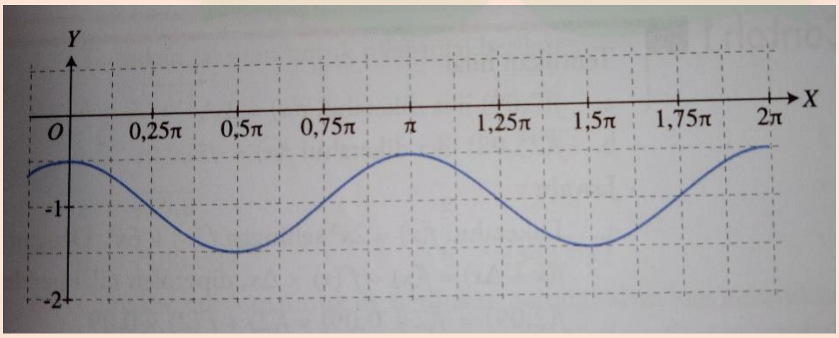
Untuk $x = 2\pi$ maka $f''(2\pi) = -2\cos 2(2\pi) = -2 < 0$, sehingga titik $(2\pi, -\frac{1}{2})$ merupakan titik balik maksimum.

Berikut ini adalah grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - 1,$ untuk $0 < x < 2\pi$

Langkah 3 : Menentukan titik-titik bantu

x	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0	210^0	240^0	270^0	300^0	330^0	360^0
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$

Langkah 4 : Menggambar Grafik



B. LATIHAN 4.9

1. Tentukan sketsa grafik fungsi $f(x) = \sin 2x,$ untuk $0 < x < 2\pi$.
2. Tentukan sketsa grafik fungsi $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3}),$ untuk $0 < x < 2\pi$.
3. Tentukan sketsa grafik fungsi $f(x) = \sin x - 1,$ untuk $0 < x < 360°$.
4. Tentukan sketsa grafik fungsi $f(x) = 2\cos(2x - 10°),$ untuk $0 < x < 360°$.
5. Tentukan sketsa grafik fungsi $f(x) = \tan 3x,$ untuk $0 < x < \pi$.

UJI KOMPETENSI BAB 4

A. Pilihlah satu jawaban yang benar

1. Koordinat titik stasioner dari

   $y = 2\sin 2x + 1, untuk\, 0 < x < \pi$

   adalah . . . .

   A. $\left(\frac{\pi}{4}, -3\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$

   B. $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$

   C. $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4}, -3\right)$

   D. $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$

   E. $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{4}, -3\right)$

2. Nilai minimum dari fungsi

   $f(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - 1, untuk\, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

   adalah . . . .

   A. 0

   B. $-\frac{1}{4}$

   C. $-\frac{1}{2}$

   D. $-\frac{3}{2}$

   E. -2

3. Nilai maksimum dari fungsi

   $12\sin x(1 - \sin x) + 3\sin^2 x$ adalah . . . .

   A. 8

   B. 6

   C. 5

   D. 4

   E. 3

4. Diketahui fungsi $f(x) = cmx + n\tan x.$

   Jika diketahui $f'(45°) = 3$ dan

   $f(60°) = 9$ maka nilai $m + n = ...$

   A. 0

   B. 1

   C. $\frac{\pi}{2}$

   D. 2

   E. π

5. Sebuah partikel bergerak menurut persamaan $y = 4\cos^3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, dengan $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Variabel y dalam satuan cm dan x dalam satuan radian. Jika x bertambah 0,6 radian per detik maka laju perubahan y terhadap waktu ketika $x = \frac{\pi}{3}$ adalah . . . .
   A. $-2{,}7 cm/s$
   B. $-1{,}8 cm/s$
   C. $-0{,}9 cm/s$
   D. $0{,}4 cm/s$
   E. $0{,}8 cm/s$

6. Titik stasioner dan jenisnya jika $f(x) = \sin x - \cos x$ untuk $0 \le x \le 2\pi$ adalah . . . .
   A. Titik balik maksimum $\left(\frac{3}{4}\pi, \sqrt{2}\right)$ dan titik balik minimum $\left(\frac{7}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$
   B. Titik balik maksimum $\left(\frac{1}{4}\pi, \sqrt{2}\right)$ dan titik balik minimum $\left(\frac{3}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$
   C. Titik balik maksimum $\left(\frac{1}{4}\pi, \sqrt{3}\right)$ dan titik balik minimum $\left(\frac{3}{4}\pi, -\sqrt{3}\right)$
   D. Titik balik maksimum $\left(\frac{3}{4}\pi, \sqrt{3}\right)$ dan titik balik minimum $\left(\frac{7}{4}\pi, -\sqrt{3}\right)$
   E. Titik balik maksimum $\left(\frac{3}{4}\pi, 1\right)$ dan titik balik minimum $\left(\frac{7}{4}\pi, -1\right)$

7. Pernyataan berikut yang benar tentang $y = 4\cos x + 3\sin x + 4$ adalah . . . .
   A. Nilai maksimumnya adalah 11
   B. Nilai maksimumnya adalah 9
   C. Nilai maksimumnya adalah 4
   D. Nilai maksimumnya adalah -3
   E. Nilai maksimumnya adalah 4

8. Persamaan garis singgung pada kurva $y = 2\sin 2x$ yang berordinat 2 adalah....
   A. $y = 2x - 1$
   B. $y = 2x + 2$
   C. $y = 2$
   D. $y + 2 = 0$
   E. $x = 2$

9. Koordinat titik balik minimum dari $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x - 1$ untuk $0 \le x \le 2\pi$ adalah . . . .
   A. $\left(\frac{4}{3}\pi, -1\right)$
   B. $\left(\frac{4}{3}\pi, -3\right)$
   C. $\left(\frac{1}{3}\pi, -1\right)$

D. $\left(\frac{1}{3}\pi, 1\right)$

E. $\left(\frac{1}{3}\pi, -3\right)$

10. Jika $f(x) = \sin 3x$, maka $f''(\frac{\pi}{4}) = ...$

A. $-\frac{27}{2}\sqrt{2}$

B. $-9\sqrt{2}$

C. $-\frac{9}{2}\sqrt{2}$

D. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

E. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

B. Kerkajakan soal-soal berikut dengan teliti!

1. Turunan kedua dari fungsi $f(x) = \cos(2x - 3)$ adalah....
2. Tentukan titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x) = \cos 2x - 2\sin x$.
3. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x - 1$, untuk $0 \le x \le 2\pi$.
4. Interval fungsi naik dan turun dari fungsi $f(x) = 2\cos 2x$ adalah....
5. Pada saat t detik, pusat sebuah pelampung gabus berada sejauh $3\sin 2t$ cm di atas atau dibawah paermukaan air. Berapa kecepatan pelampung pada saat $t = 0$, $t = \left(\frac{\pi}{2}\right)$, dan $t = \pi$.

PENUTUP

Modul sebagai bahan ajar pendamping buku, diharapkan akan membantu peserta didik belajar secara mandiri, mengukur kemampuan diri sendiri, dan menilai dirinya sendiri. Semoga modul ini dapat digunakan sebagai raferensi tambahan pada kegiatan pembelajaran. Semoga modul ini bermanfaat bagi peserta didik dan guru pengampu mata pelajaran matematika peminatan kelas XII. Penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun demi sempurnanya penyusunan modul berikutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Ari Yuana, Rosihan. 2018. Perspektif Matematika 3. Solo: Pt Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.